Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 251 – Dicembre 2019 – Anno Ventunesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM248 ha diffuso 3'303 copie e il 08/12/2019 per Google eravamo in 11'100 pagine.

La König ha una serie di "Mug", ovvero tazzone per la tradizionale piscina di caffè, (ma anche un buon tè, volendo), dedicate alle scienze. Ne abbiamo scelte alcune a caso, e sul loro sito potete senz'altro notare la mancanza di differenza tra scienze "minute" e non.

1. Maestro e discepoli

"È vero che il signor Fourier pensa che lo scopo principale della matematica sia la pubblica utilità e la spiegazione dei fenomeni naturali, ma da filosofo quale egli è dovrebbe aver capito che l'unico scopo della scienza è l'onore della mente umana."
(Lettera a Legendre, 2 luglio 1830)

L'Italia è piena zeppa di casate che rivendicano quarti di nobiltà: la cosa non può sorprendere, se si guarda indietro alla storia della penisola. Dall'estate del 476 d.C., anno in cui convenzionalmente si stabilisce la caduta dell'Impero Romano d'Occidente, fino al 17 marzo 1861, quando (altrettanto convenzionalmente[1], tutto sommato) si stabilisce l'unità nazionale nel parlamento di Palazzo Carignano a Torino, il territorio nazionale è stato sempre parcellizzato in una pletora di regni, principati, ducati, granducati, e ognuno di essi vanta quasi sempre più di una dinastia.

1 *Il Sacro Romano Impero nel 1789*[2]

Nonostante le quasi infinite gerarchie nobiliari di regni antichi e potenti quali la Francia, l'Inghilterra, la Spagna (et cetera), l'unica nazione che può seriamente competere con l'Italia in quanto a frammentazione territoriale e conseguente prolificazione di casate aristocratiche è la Germania. Le mappe del territorio tedesco (o meglio, del Sacro Romano Impero) dall'alto medioevo fino all'unificazione tedesca del 1870 sfidano qualsiasi tentativo di memorizzazione, anche per gli specialisti del settore. Certo, perfino in questa qui a fianco sono riconoscibili un buon numero di territori più o meno omogenei: quelli che poi si affrancheranno in nazioni indipendenti, come il Belgio e i Paesi Bassi; tutto il vasto territorio posizionato a sud-est, che non per niente vestirà la corona imperiale quasi ininterrottamente per secoli, fino a diventare un impero nell'impero, quello austriaco, che oltre all'attuale Austria[3] copriva la Boemia, la Moravia, buona parte del Nord-Italia e già sembrava predisporsi a unire la sua corona con quella del Regno d'Ungheria; e poi i grandi domini puramente tedeschi, quali il grande stato meridionale della Baviera e la potenza settentrionale che finirà rivelarsi come quella unificatrice, la terribile Prussia.

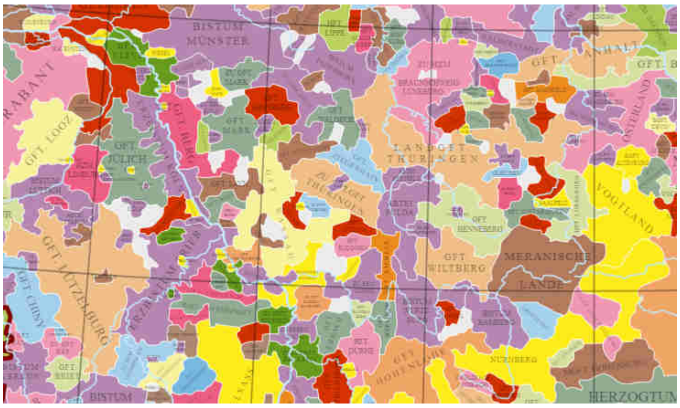
Ma che dire delle centinaia di piccoli stati che colorano tutto il resto? È quasi impossibile memorizzarne il numero, figurarsi le capitali e le città notevoli, i reciproci confini, le regole e le eccezioni. Ancora più improbabile è riuscire a tenere a mente tutti i nobili regnanti, per non parlare dei loro coniugi, figli, ascendenti e collaterali. Ciò non di meno, c'erano persone che per mestiere erano tenuti ad essere informati al meglio possibile delle

[1] Il valore simbolico e storico della data del 17 marzo 1861 resta indubbio, ovviamente: ma altrettanto indubbio è che in quel giorno la cartina del neonato Regno d'Italia difettava di una bella fetta di quel che oggi chiamiamo "Italia". Restavano territori "non italiani" circa quattro delle venti regioni attuali: Veneto, Friuli-Venezia Giulia, Trentino-Alto Adige e quasi tutto il Lazio, con l'eccezione di quella che oggi è la provincia di Rieti.

[2] Sì, lo sappiamo, è illeggibile: se proprio siete curiosi, da qui (tinyurl.com/y7pe7ejb) si dovrebbe poter scaricare l'immagine in alta definizione.

[3] Forse vale la pena ricordare che il nome originale tedesco dell'Austria è Österreich, che significa né più né meno che "impero dell'est".

situazioni politiche e dinastiche di ognuno di essi. Diplomatici, ciambellani, cortigiani, ministri di ogni ordine e grado dovevano sapersi muovere con buona abilità tra i meandri di un'aristocrazia così parcellizzata: se non altro, per capire se il tale stato si sarebbe potuto schierare come alleato o nemico in una guerricciola o, ancor più probabilmente, per organizzare degnamente un buon matrimonio.



2 *Particolare della mappa del S.R.I. nella zona centrale dell'attuale Germania, più o meno all'inizio del XIII secolo*[4].

Da che mondo è mondo – o meglio, da quando nelle società umane alcuni pochi potenti riuscirono a imporsi su un gran numero di altri esseri umani e ad autodesignarsi come appartenenti ad una classe superiore – i nobili preferiscono di gran lunga sposarsi con altri nobili stranieri piuttosto che con plebei connazionali. È anzi abbastanza curiosa la somiglianza procedurale con quanto avviene oggi con le relazioni che si sviluppano con i social network: se tutto fila liscio i promessi sposi finiranno poi con l'incontrarsi di persona, ma tutto è normalmente preceduto dall'invio di una promettente immagine. Niente di più facile ai tempi di Internet, ma qualcosa del genere avveniva anche in passato, almeno per i personaggi altolocati: un piccolo ritratto veniva reciprocamente inviato per via diplomatica, in modo che i futuri fidanzati potessero quanto meno farsi un'idea di massima dell'aspetto uno dell'altro. I piccoli stati tedeschi, forse proprio perché forti più di quarti di nobiltà che di eserciti e di finanze, trovavano nelle nozze mirate e ben calibrate la maniera migliore per mantenersi sulla cresta dell'onda (oltre che mantenersi *tout court*). La più celebre tra le imperatrici consorti d'Austria-Ungheria, la celeberrima Elisabetta detta Sissi, sposata con Francesco Giuseppe e protagonista – certo involontaria – di un gran numero di film di successo, era duchessa di Baviera. Caterina II di Russia, ultima e più grande di tutte le zarine autocrati, nasce come principessa prussiana di Anhalt-Zerbst. La regina Vittoria, origine di quasi tutta l'aristocrazia europea a lei successiva, appartiene alla casata di Hannover[5], che salì al trono d'Inghilterra nel 1714 con Giorgio I, e peraltro si sposò, quasi a ribadire l'origine germanica, con Alberto di Sassonia-Coburgo-Gotha e decretò che la nuova dinastia che tramite lei governava da Londra tre quarti di pianeta era quella del suo adorato coniuge. Dinastia che, peraltro, è quella che tuttora siede sul trono, anche se per ragioni di opportunità determinate dagli screzi diplomatici anglo-tedeschi di inizio Novecento e soprattutto dalla Prima Guerra Mondiale, ha cambiato il gotico nome in quello più anglofono di Windsor. Ora, se Elisabetta II d'Inghilterra volesse imitare la sua trisavola Vittoria lasciando che la dinastia regnante prendesse il nome dal casato del marito (cosa peraltro assai poco probabile) ai Windsor succederebbero i Mountbatten, che è il cognome del principe consorte Filippo d'Edimburgo. Questi, nipote del Re di Grecia Costantino I, nasce come "principe di Grecia e Danimarca", ma, tanto per cambiare, fa parte della casata Schleswig-Holstein-Sonderburg-Glücksburg, la cui origine geografica non è difficile da individuare. Persino il suo cognome inglese, Mountbatten, è in realtà la traduzione dal tedesco Battenberg, ramo altrettanto nobile della casata principale, che è legata alla regione dell'Assia-Darmstadt[6].

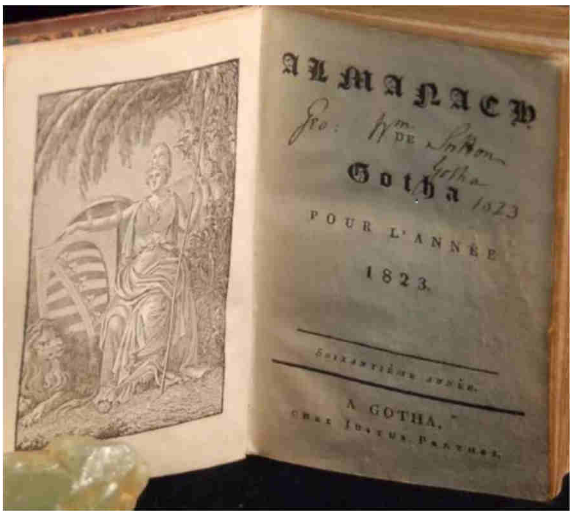
[4] Ancora più incomprensibile della prima mappa, lo sappiamo bene. Ma l'obiettivo è proprio quello di mostrare quanto sia difficile orientarsi in un simile patchwork.

[5] Hannover che è – inutile sottolinearlo – città tedeschissima, della Bassa Sassonia.

[6] Se vi sentite feriti nell'orgoglio nazionale dalla presenza di tante famiglie nobiliari tedesche e dalla contemporanea assenza di quelle italiane, nessuna paura: gli Hannover, da cui è cominciata questa lunghissima

La speranza di chi scrive è che chi legge si senta già abbastanza sperduto (e anche ragionevolmente annoiato) dalle poche righe precedenti: re, regine, principi duchi e duchesse che cambiano nazione, titolo nobiliare, cognome e dinastia alla stessa maniera in cui un appassionato di motori cambia automobile. C'è chi si appassiona molto nel seguire la capillare rete di incroci dinastici ma, forse per colpa di un atavico spirito repubblicano, chi scrive trova invero faticoso e poco entusiasmante seguire dappresso cotante evoluzioni. Peraltro, basta guardare le copertine delle riviste di gossip in edicola per notare come invece la vita di corte delle poche monarchie ancora superstiti sia in grado di accendere fior di interesse in molte persone, quindi è d'uopo mantenere per quanto possibile un giudizio equo e asettico.

Si può comunque tornare all'inizio della divagazione, ritenendo di aver dimostrato come un tempo fosse davvero indispensabile, almeno per i professionisti delle corti e delle diplomazie, avere una sorta di guida per far luce sulla miriade di famiglie degne di attenzione, nell'epoca d'oro dei piccoli domini del Sacro Romano Impero. Ed è infatti proprio nel bel mezzo di quella coloratissima carta geografica che si trova la città che si mise di buzzo buono per risolvere una volta per tutte il problema.



3 *L'Almanacco di Gotha*

Gotha è una città relativamente piccola che conta oggi circa 45'000 abitanti, nella Turingia. Il suo nome, come si è visto, brilla insieme alla non distante città di Coburgo nelle ascendenze della maggiore monarchia anglosassone, ma ciò nonostante è forse ancora più famosa per avere dato il proprio nome ad una parola relativamente nuova presente in moltissime lingue. I dizionari italiani alla voce "gotha" presentano la definizione "*L'insieme degli appartenenti all'aristocrazia o, per estensione, i più importanti esponenti di un determinato gruppo o ambiente.*"[7]. In altri termini, il "gotha" di qualsiasi disciplina è una sorta di nome collettivo per indicare le persone più importanti e influenti del gruppo di cui fanno parte. La parola nasce insomma, per ellissi, dal celeberrimo "*Almanacco di Gotha*", pubblicazione che nasce appunto nell'omonima città tedesca e che dal 1763 al 1944 ha diligentemente riepilogato i nomi degli appartenenti alle maggiori aristocrazie, ma indica ormai i più significativi rappresentanti di qualsivoglia insieme. I giornali parlano spesso del "gotha dell'alta finanza", del "gotha della moda", e non ci sarebbe nulla di male neppure a definire qualcuno come appartenente al gotha delle corse nei sacchi. È pertanto del tutto lecito parlare del "gotha della matematica", e non sarebbe neppure troppo difficile popolarlo con centinaia di nomi meritevoli: tra questi, dovrebbe figurare – certamente per merito – il nome di un grande personaggio che ha anche avuto a che fare con la città stessa di Gotha, se non altro perché ci ha vissuto per un certo periodo di tempo.

trafila, sono l'ultimo ramo del nobilissimo Casato dei Welf, il cui suono tedesco ricorda facilmente la parola italiana "guelfo", che infatti da quel cognome germanico prende forma, e i Welf, pur se tedeschi, sono un ramo del casato degli Este.

[7] Definizione presa dal Dizionario Garzanti online.

4 *Carl Gustav Jacobi*

Carl Gustav Jacobi nasce a Potsdam il 10 Dicembre 1804. Potsdam è città famosa, sede della grande reggia voluta da Federico II il Grande, ma quello in cui Jacobi vede la luce non è un periodo particolarmente florido per la Prussia. Giusto una settimana prima Napoleone si è autoincoronato Imperatore dei Francesi, ed esattamente[8] un anno dopo ribadirà la sua supremazia sul continente europeo con la sua vittoria più eclatante, quella di Austerlitz contro Austria e Russia. Gli imprudenti prussiani, nonostante la chiarissima dimostrazione di forza appena mostrata dalla Grande Armée guidata dal terribile corso, decidono di dichiarare guerra[9] alla Francia appena l'anno dopo, nel 1806, e subiscono una delle maggiori sconfitte della loro storia nella battaglia di Jena-Auerstadt[10].

Ma gli anni della primissima infanzia non sono quelli più significativi, nella vita degli uomini, e poi tutto sommato Jacobi può vantare una nascita abbastanza fortunata, per i suoi tempi e luoghi: il padre Simon è un banchiere, e non uno qualunque, visto che tra i suoi clienti aveva lo stesso re Federico Guglielmo; suo fratello Moritz diventerà un fisico di levatura, passato alla storia anche per aver inventato la galvanoplastica, e anche sua sorella Therese e il fratello minore Eduard avranno una vita agiata. La famiglia è di religione ebraica, e come accade spesso, nel XIX secolo, nelle famiglie d'alta borghesia, i primi studi Carl li affronta in casa, avendo come tutore uno zio materno. Zio che peraltro fa davvero un ottimo lavoro, visto che quando il dodicenne Jacobi entra finalmente al Ginnasio di Potsdam, la sua preparazione e cultura generale è ampiamente sopra lo standard dei suoi coetanei. I docenti del Ginnasio se ne rendono conto, e di conseguenza lo trasferiscono subito dalla classe riservata ai dodicenni a quella dell'ultimo anno di corso: Jacobi lo termina con merito, acquisendo così i titoli di merito per potere accedere all'Università di Berlino appena tredicenne. L'università di Berlino impone però un limite d'età – del resto comprensibile – per l'accesso ai suoi studenti: è per questa ragione che Jacobi dovrà attendere il compimento dei sedici anni per poter fregiarsi d'una matricola universitaria. Resta così nell'ultima classe del Ginnasio di Potsdam fino al raggiungimento dell'età minima, e finalmente entra nell'Università di Berlino nel 1821.

[8] Napoleone Bonaparte si incorona da solo, nella cattedrale di Notre-Dame e alla presenza del papa Pio VII, il 2 dicembre 1804. La battaglia di Austerlitz, nella quale il novello Imperatore sconfigge lo Zar Alessandro e l'imperatore Francesco II d'Asburgo, entrambi fisicamente presenti sul campo di battaglia, è del 2 dicembre 1805.

[9] Curiosamente, uno dei motivi che portarono la Prussia a mobilitarsi contro Napoleone ha qualche connessione con le ragioni dinastiche raccontate all'inizio. La ragione principale è che l'armata francese del maresciallo Bernadotte l'anno prima, in occasione della battaglia di Austerlitz, aveva attraversato senza autorizzazione il territorio prussiano per riunirsi alle forze francesi sul campo di battaglia del 1805; ma l'elemento scatenante è che il re prussiano Federico Guglielmo III si sentì fortemente offeso quando, qualche mese dopo, Bonaparte propose una sorta di pacificazione al re inglese Giorgio III offrendogli il trono dell'Hannover, sede originaria della sua dinastia anglo-tedesca. L'Hannover era però territorio assai ambito dal re prussiano, e Napoleone lo aveva in precedenza promesso a Berlino. Federico Guglielmo giudicò l'onta napoleonica intollerabile.

[10] Ancora più a margine: il definitivo consolidamento imperiale di Napoleone portò alla creazione di una nuovissima aristocrazia francese, con quasi tutti i suoi famosi "marescialli" elevati a nuovi titoli nobiliari, non solo conti, duchi e marchesi, ma anche veri e propri re, come quelli di Spagna, Olanda e Napoli. Si è trattato certo del periodo in cui l'Almanacco di Gotha ha subito la più grandiosa delle revisioni.

Gli anni passati al Ginnasio hanno ovviamente insegnato a Carl ad arrangiarsi da solo, e studia ben oltre i programmi della scuola[11], della quale peraltro aveva già ottenuto da tempo la licenza conclusiva. Si ritrova così con una preparazione straordinaria sia in matematica che nelle lingue classiche, e con il grande dubbio su quale carriera intraprendere. Alla fine decide di dedicarsi alla matematica, ma anche all'università ritrova le difficoltà del liceo: all'inizio del XIX secolo la matematica tedesca è ben lontana da quella che diventerà nel giro di qualche decennio, e Jacobi per fare progressi deve affrontare gli scritti di Lagrange praticamente da solo. In conclusione, dopo tre anni di università riesce a ottenere le licenze per poter insegnare matematica, latino e greco nelle scuole secondarie; il suo ostacolo principale per poter proseguire nella carriera accademica è a questo punto la sua religione. Jacobi riesce comunque ad ottenere la famosa *Habilitation* (la certificazione che le università tedesche rilasciano e richiedono a chi vuole diventare professore universitario a tutti gli effetti), e per risolvere le difficoltà connesse alla sua fede – dacché agli ebrei era fatto divieto di insegnare nelle università – si converte alla religione cristiana nel 1825.

5 *La Restaurazione antinapoleonica cancellò anche le leggi di emancipazione degli ebrei, e presto si verificarono in Germania pogrom antisemiti, come quello denominato "Hep-Hep" del 1819.*

Superato anche l'ultimo ostacolo, Jacobi può finalmente iniziare pienamente la sua carriera accademica, prima – e per breve tempo – a Berlino, poi a Königsberg. I suoi studi e le sue pubblicazioni lo rendono presto noto ai maggiori matematici del suo tempo; si fa notare da Gauss, collabora con Bessel, va in Francia a conoscere Poisson e Fourier, riconosce precocemente la brillantezza matematica di Kummer, apre la strada a nuove scoperte di Cauchy e Liouville, e diventa amico di Dirichlet.

È proprio Dirichlet a darsi da fare per aiutarlo quando si trova in difficoltà: verso il 1843 la salute di Jacobi mostra chiari segni di peggioramento, e in breve si appura che soffre di diabete. Il consiglio dei medici è quello di andare a trascorrere del tempo in Italia, per godere di un clima migliore, ma Carl non può permettersi la spesa: tutti i suoi averi, compresa la niente affatto trascurabile eredità del facoltoso padre, sono andati perduti nella vorace depressione economica che colpisce l'Europa, e manda in bancarotta la Prussia. Dirichlet scrive allora a Alexander von Humboldt, il grande naturalista ed esploratore che conosceva e ammirava Jacobi, per ottenere un aiuto economico a favore del comune amico, e riesce ad ottenerlo.

L'Italia offre a Jacobi un sollievo dai suoi malanni, e la possibilità di tenere incontri a conferenze a Lucca e a Roma, dove ottenne anche il permesso pontificio di esaminare antichi documenti per soddisfare i suoi interessi di storia della matematica. Quando finalmente torna a Berlino, nel giugno del 1844, la sua salute è migliorata; e pur rimanendo esonerato per ragioni di salute dall'insegnamento, Jacobi riesce a tenere delle lezioni di Meccanica Analitica in cui traspare il suo profondo interesse per la materia[12].

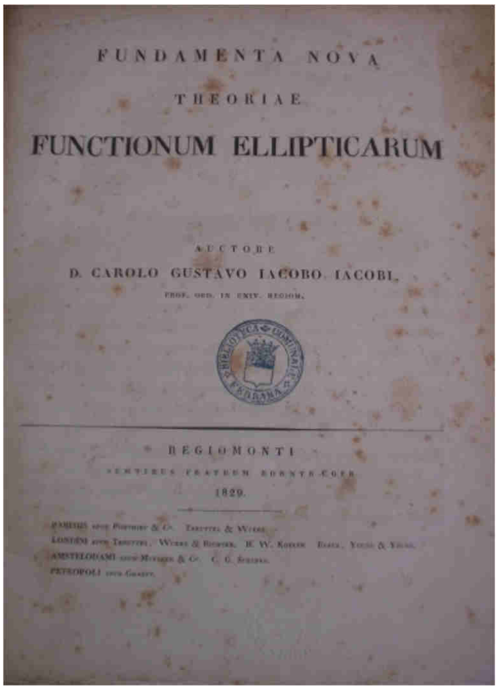
Poi arriva come sempre la Storia, a movimentare come fuscelli al vento le vite degli uomini. Arriva il 1848, sommovitore di popoli, e preceduto da tumulti e crisi economiche:

[11] Tanto per dare un'idea: durante il Ginnasio legge da solo le opere di Eulero e prova a trovare la risoluzione delle equazioni di quinto grado per radicali.

[12] Cosa che gli studenti delle facoltà scientifiche conoscono assai bene, da quando imparano ad usare – spesso a breve distanza l'uno dall'atro – i termini "lagrangiana" e "jacobiano".

l'Europa si infiamma quasi per intero, gli individui si schierano e dividono, repubblicani e monarchici si fronteggiano, i socialisti cominciano ad aggregarsi e ad auspicare rivoluzioni. Jacobi aveva certamente delle idee politiche ben precise nella sua mente, e chiaramente di tendenza liberale; ma probabilmente non era in grado di comunicarle nella maniera migliore. Fatto sta che durante un suo discorso politico tenuto al Club Costituzionalista di Berlino riesce nella non facile impresa di inimicarsi tutte le parti. L'anno seguente, quando tutti i moti rivoluzionari saranno sopiti o domati, a Jacobi rimane il marchio di nemico del governo, e le conseguenze si fanno presto sentire: il suo stipendio viene ridotto al punto che non può più permettersi di vivere a Berlino con la sua famiglia, ed è a questo punto che si trasferisce a Gotha, città assai meno costosa della capitale.

Jacobi è comunque uno dei più grandi matematici del suo tempo, e riceve allora l'offerta di una cattedra dall'Università di Vienna; sta per accettare l'offerta, quando il governo prussiano capisce che sarebbe disonorevole se uno studioso della sua levatura fosse costretto a lasciare la Prussia per ragioni economiche: gli offre allora quel tanto di stipendio in più che consentirà al matematico di mantenere sé stesso a Berlino e la famiglia a Gotha. Un'offerta non certo generosa, e il minimo che si può dire è che quando Jacobi accetta dimostra un grande amor di patria. Si tratta comunque di una decisione che non gli porterà fortuna: nel 1850 prende una brutta influenza, e prima ancora di guarire contrae anche il vaiolo; muore il 18 febbraio del 1851, a Berlino, lontano dalla famiglia.



6 *"Teoria delle Funzioni Ellittiche"*

Anche se Jacobi ha operato su una grande quantità di argomenti matematici, producendo lavori di rilievo su molti aspetti della materia, la sua fama è probabilmente dovuta soprattutto allo studio delle funzioni ellittiche. Questo è dovuto non solo all'indubbio grande interesse e valore dell'argomento, ma anche alla curiosa interazione che si venne a creare tra i tre maggiori studiosi dell'argomento.

Per molto tempo, il massimo – e unico – studioso delle funzioni ellittiche è stato Adrien-Marie Legendre[13] che, nato nel 1753, è di un buon mezzo secolo più anziano di Jacobi. Legendre si sente forse già vecchio e professionalmente dimenticato quando, ormai settantacinquenne, riceve le prime lettere di due giovani matematici che non solo si mostrano interessati al suo campo di studi, ma dimostrano di essere già oltre i suoi risultati. I due giovanotti non si conoscono, vivono distanti l'uno dall'altro, in paesi diversi, e diversi anche dalla Francia di Legendre. Hanno differenze profonde anche nello stile di vita, nelle disponibilità economiche e nelle tradizioni culturali. Niels Abel[14] è norvegese e poverissimo; Carl Jacobi, come si è visto, viene da famiglia assai benestante e conoscerà le difficoltà finanziarie solo al termine della sua vita. E se non si può certo dire che Jacobi abbia avuto vita lunga, con i suoi appena 46 anni passati sul pianeta, ha vissuto comunque quasi il doppio di Abel, morto prima di compiere ventisette anni, e praticamente morto d'inedia.

[13] Ne parliamo in "Le opere e le facce", RM140, Settembre 2010.

[14] Ne parliamo in uno dei compleanni più vecchi: "*Rue S.te Marguerite n° 41*", RM055, Agosto 2003.

7 *LAJ – Legendre, Abel, Jacobi*

Eppure, nonostante le differenze tra il vecchio francese e i due giovani e quasi coetanei colleghi; nonostante le differenti estrazioni e culture, nonostante gli stati e le lingue così diverse, sembra crearsi una sorta di reciproca stima e subitanea alleanza. Legendre che, anziché mostrarsi geloso di vedersi superato da due semisconosciuti giovani colleghi, scrive entusiasta ai colleghi francesi dei progressi registrati nel suo amato studio delle funzioni ellittiche, e si mette a disposizione per intrattenere corrispondenze nonostante l'età avanzata; Jacobi che, una volta venuto a conoscenza degli studi di Abel, non esita a mostrarne ammirazione e stima, senza minimamente preoccuparsi di priorità.

Tutti e tre sono astri di prima grandezza nel firmamento della matematica per merito delle loro scoperte; probabilmente, meriterebbero di restarci anche solo per la loro onestà intellettuale, e per il profondo amore verso la conoscenza.

2. Problemi

2.1 Due cose belle dell'inverno

Tanto per cominciare, che non c'è da lavorare in giardino. Anche il più estremista dei giardinieri si rende conto che probabilmente non è il caso di andare a zappare una cosa che aggiunge nuovi e insospettati livelli alla scala di Mohs: molto meglio guardare pensosi dalla finestra, con una tazza di *vin brulé* a farsi gli affari degli altri.

Infatti l'altra cosa bella è che è molto più facile farsi gli affari degli altri; la caduta delle foglie degli alberi permette di esaminare le curiose abitudini dei coraggiosi volatili che hanno optato per la stanzialità rispetto alla migrazione (facilitati in questo dalla piccionaia[15] che teniamo a loro disposizione, ben fornita di interessanti granaglie), in particolare quando, al timido apparire del sole, optano per andare a farsi un giretto tra gli alberi.

Ficcanasando peggio che dei vicini pettegoli, ci siamo accorti di uno strano fenomeno: usciti dalla piccionaia, i volatili si recavano ciascuno al proprio albero preferito, e su ogni albero si trovava un unico passero; non solo, ma tutti gli alberi erano occupati: a quanto pare, previo accordo, uscivano esattamente n passeri, per n pari al numero degli alberi.

Quello che ci stupisce è che nessuno di loro sembra interessato ad una politica di espansione del proprio territorio: e dire che sarebbe giustificata, visto che non esistono coppie di alberi che si trovino alla stessa distanza tra loro: alcuni quindi sarebbero giustificati a protestare per la scarsità del territorio, ma non lo fanno. Preclaro esempio di convivenza pacifica, almeno sin quando non arriva il trattore fracassone del vicino, che spaventa i passeri i quali, impauriti, si alzano in volo e si spostano dal proprio albero a quello a loro più vicino.

Come dicevamo, siamo *pensosi*, e questo fenomeno ci ha fatto pensare. E ci siamo posti tre domande.

Ma per quali valori di n è *possibile* che dopo il fracasso ci siano due passeri sullo stesso albero?

E per quali valori di n è *sicuro* che ci saranno due passeri sullo stesso albero?

Volendo evitare di trasformare un singolo albero in un condominio sovraffollato, esiste un numero *massimo* di passeri che si possano trovare sullo stesso albero?

A forza di pensare, si è raffreddato il vin brulé...

2.2 Tutti in carrozza (finalmente)!

Per usare un termine coniato da un blogger che seguiamo con interesse (anche se non parla molto di matematica), i miei (Rudy speaking) due *vicini di cella del braccio M*[16] vi hanno narrato, con l'abituale understatement (in pratica, accennandolo semplicemente) che anche quest'anno siamo riusciti a ritrovarci in quel di Zurigo. Quello che non vi hanno narrato sono le vicissitudini del viaggio, anche perché quest'anno Doc ha accondisceso a non prendere la macchina[17].

Il viaggio prevedeva, come d'uso, il cambio a Milano e come d'uso, grazie alla sua isteria da anticipo, Rudy si è ritrovato in Stazione Centrale ad un'ora tale che, con una corsetta neanche tanto veloce, sarebbe riuscito a prendere il Milano-Zurigo precedente: tranquillizzato dal fatto di avere copia del biglietto, ha atteso con calma (collaborando

[15] In realtà della combriccola non fa parte nessun piccione, ma "passerottaia" è una schifezza.

[16] La "M" ce la inventiamo noi: l'originale è "C", che supponiamo stia per "creatività".

[17] Nota per gli storici (aka "pettegoli"): Geo, la macchina di Rudy, dopo dodici anni di valente ed eroico servizio è andata in pensione, entusiasticamente ed ecologicamente (è una ibrida) sostituita da una giovane orientale che risponde al nome di "Quaspa" (non fate domande: l'ha trovato Doc). Essendo Rudy disabituato a elettronicherie e cambi automatici, nessuno dei due si è fidato ad affrontare un viaggio del genere con la macchina nuova.

attivamente all'operazione con i macchinisti) che fosse costituito il mezzo sul quale erano prenotati i posti, ed è stato quindi il primo a salire nella carrozza vittima delle due prenotazioni.

Ora, voi sapete che Rudy è uno spirito libero, per il quale le convenzioni sono solo fastidiosi lacciuoli: di fronte ai cento posti tutti vuoti, senza neanche consultare il proprio biglietto[18], sceglie il suo preferito e si accomoda.

Col tempo, sono arrivati anche gli altri passeggeri (tranne Doc che era, come d'uso, in ritardo); essendo svizzeri, quindi formalmente corretti ma, nel contempo, accesi sostenitori della libertà individuale, si comportano tutti in modo estremamente tollerante:

- Se il loro posto prenotato è vuoto, ci si accomodano.
- Se il loro posto prenotato è occupato, senza dire una parola scelgono tra i posti liberi il loro posto preferito e ci si accomodano.

Questa scena si ripete per novantotto volte (Rudy era già lì, indovinate chi mancava) e, da bravo ultimo, ansimante e implorando pietà verso un impaziente macchinista, arriva Doc, il quale si siede nell'ultimo posto rimasto libero.

Secondo voi, dove si è seduto Doc? O meglio, quali sono le probabilità che Doc sia seduto al suo posto prenotato? E quali quelle che sia seduto al posto di Rudy?

E non ci hanno neanche cacciato come "persone non gradite"...

3. Bungee Jumpers

Un *poligono semplice* è un poligono il cui perimetro non interseca sé stesso. Ciò nonostante, un poligono semplice non necessariamente è convesso, e può avere svariate diagonali che giacciono all'esterno del poligono. Dimostrate che, se n è il numero dei lati del poligono, almeno $n - 3$ diagonali giacciono completamente al suo interno.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Winter Contest

Quasi... In realtà non abbiamo la più pallida idea di dove possa portare.

In tutti questi anni, soprattutto nei Paraphernalia, vi abbiamo abituati ad accettare affermazioni matematiche senza dimostrazioni fornendo, se proprio insistevate, gli opportuni riferimenti. Ma quando è troppo, è troppo, anche per Rudy.

Infatti il Nostro di recente si è trovato davanti un teorema piuttosto sorprendente accompagnato dalla sola nota che "la dimostrazione è piuttosto complessa" (e, logicamente, non veniva posto alcun riferimento a dove trovarla); siccome la cosa lo incuriosisce, ve la giriamo: riuscite a dimostrarla (o a fornire un controesempio: va bene lo stesso)?

Eccola: *In ogni figura convessa piana, esistono quattro punti sul perimetro che sono i vertici di un quadrato.*

Oh, con calma, eh. Che sin quando non la trova sta bravo...

5. Soluzioni e Note

Dicembre!

E anche quest'anno volge alla fine, incredibile ma vero continuiamo ad andare avanti, anche se a strappi e con i soliti ritardi. Il calendario sta anche arrivando e colgo

[18] Anche perché le Ferrovie Svizzere hanno il pessimo gusto di scriverci sopra "Anziano". E la cosa è seccante.

l'occasione per ringraziare tutti quelli che mandano commenti e correzioni rendendo ogni anno il risultato migliore – e non proprio per merito nostro, che siamo dei pasticcioni.

Partiamo con le soluzioni, che siamo già in ritardo.

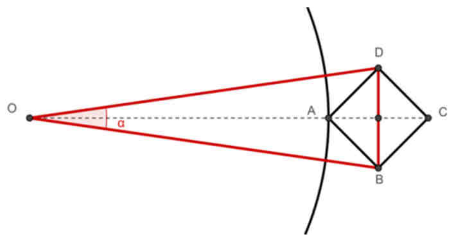
5.1 [250]

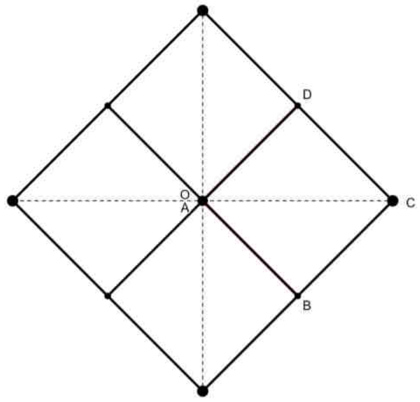
5.1.1 Novembre, finalmente!

Problema geometrico, e torna il giardino del Capo, malgrado avvolto dalle nebbie:

> *Il giardino va organizzato attorno ad un'aiuola perfettamente circolare, circondata da una corona di quadrati uguali tra loro con un vertice sulla circonferenza e i due vertici contigui a questo in comune (uno ciascuno) con i due quadrati nelle stesse condizioni adiacenti lungo la corona. Viene richiesto anche che:*
>
> *1. Ci sia un tulipano al centro dell'aiuola circolare.*
>
> *2. Ci sia un tulipano sul vertice del quadrato sulla circonferenza*
>
> *3. Ci sia un tulipano sul vertice del quadrato opposto a quello del punto (2)*
>
> *4. Sulla retta individuata dai tre tulipani vanno piantati altri tulipani tutti a distanza uguale l'uno dal successivo, e nel conto vanno inclusi anche i tre che avete piantato al giro precedente. Quanti quadrati dovrò tracciare, come minimo?*
>
> *Oltre a quello trovato qui sopra, esistono altri valori soddisfacenti le quattro condizioni poste?*

Bene, ci sembra abbastanza arzigogolato, ma le risposte sono arrivate, e cominciamo subito con il proporvi quella del ***Panurgo***:

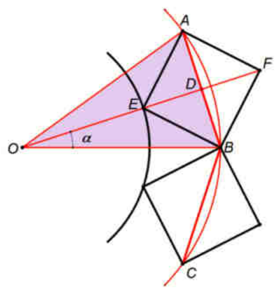
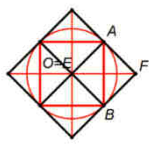
> Per rispettare la condizione 4) il raggio del cerchio deve essere un multiplo intero della diagonale del quadrato
>
> 
>
>
> presa tale diagonale come unità di misura deve essere
>
> $$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2r+1} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} \in \mathbb{Q}$$
>
> con $\alpha = 2\pi/n$.
>
> Come è noto (Teorema di Niven) esistono solo tre valori razionali della tangente di angoli che siano sottomultipli di 2π: -1, 0 e 1. E solo uno di essi è positivo, ragion per cui deve essere $(2r+1)^{-1} = 1$ ovvero $r = 0$.
>
> L'aiuola risulta veramente carina con i suoi cinque tulipani…



Come potete immaginare arriva adesso la soluzione di ***Valter***, che comincia come al solito sospettando di non averla trovata:

> Sbaglio di sicuro perché sono arrivato a una conclusione che contraddice quanto chiede il problema. Metto giù le "pensate" per ordinarmele: scrivendo capita di accorgermi di errori nel ragionamento.
>
> Assumo, senza perdere generalità, che il raggio dell'aiuola sia un intero, diciamo p.e. unitario. La quarta condizione mi pare richieda quindi che la distanza fra i tulipani sia un numero razionale. Razionale è di conseguenza la distanza fra il centro dell'aiuola e il vertice opposto del quadrato.
>
> Indico con θ l'angolo di due raggi dell'aiuola che vanno ai vertici in comune di un dei quadrati. Espresso in gradi tale angolo deve essere razionale: moltiplicato per i quadrati, deve dare 360°.
>
> Considero ora il cerchio che circoscrive un quadrato; il suo raggio, per quanto detto, è razionale.
>
> Sfruttando i raggi dei cerchi "aiuola" e "quadrato" si riesce a costruire un triangolo rettangolo. Un cateto è la somma dei due raggi e l'altro di quello del solo cerchio che circoscrive il quadrato. Il rapporto fra la misura dei cateti, essendo essi due numeri razionali, lo deve essere anch'esso.
>
> Tale rapporto è la tangente di ½ θ essendo i cateti in relazione con il seno e coseno dell'angolo.
>
> A questo punto entra in gioco il teorema di Niven (vedi Wikipedia): da quel che leggo, se ci capisco qualcosa, l'unico valore razionale ammesso per la tangente è uno. Da ciò θ dovrebbe valere unicamente 90°; cosa impossibile a meno che l'aiuola si riduca ad un punto.

Un'aiuola a forma di punto senza dimensioni credo sia il sogno di ogni piantatore di tulipani poco motivato, quindi risultato ottimo secondo i criteri pensati… ma vediamo che cosa ci ha scritto ***trentatre***:

> Gli angoli sono in radianti e **Q** è l' insieme dei numeri razionali. In figura
>
> 
>
>
> 
>
>
> - cerchio per E : aiuola
> - cerchio per i vertici A,B,C che si assume di raggio $OB = 1$
> - AB : lato del poligono per A,B,C con n lati e angolo $\alpha = \pi / n$

- semilato poligono $BD = \sin\alpha$
- apotema (raggio del cerchio inscritto) del poligono $OD = \cos\alpha$
- lato dei quadrati $EB = \sqrt{2} \cdot BD = \sqrt{2} \cdot \sin\alpha$
- raggio aiuola $OE = OD - BD = \cos\alpha - \sin\alpha$.

I segmenti *OE* ed *EF* sono divisibili in parti di uguale lunghezza solo se il rapporto è un numero razionale

[1] $\dfrac{OE}{EF} = \dfrac{OE}{2BD} = \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha} = \dfrac{1/\tan\alpha - 1}{2} \in \mathbf{Q} \to \tan\alpha \in \mathbf{Q}$.

Per $n = 4 \to \tan(\pi/4) = 1 \to OE = 0$ e si ha la "soluzione" a destra in figura, accettabile dal matematico ma non dal giardiniere (l'aiuola si riduce a un punto e nel segmento *EF* vanno inseriti infiniti garofani). Quindi deve essere

$OE > 0 \to \tan(\pi/n) < 1 \to n > 4$.

Il problema non ha soluzione per $n > 4$ se $\tan(\pi/n)$ è irrazionale, cioè

[2] $\tan(\pi/n) \notin \mathbf{Q}$

Questo vale per i cosiddetti *angoli notevoli* con $\tan(\pi/n)$ calcolabile con radicali, che sono i casi in cui l' n-agono regolare si può costruire con riga e compasso

[3] $n = 3,5,6,8,10,12,15,16,17,18,24,\ldots$

p.es. $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, $\tan(\pi/5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, ecc.

- ho inserito il 17 perché Gauss ha dimostrato che il 17-agono è costruibile.

<u>Il problema non ha soluzione</u> se la [2] vale per ogni $n > 4$.

Ho trovato una dimostrazione che questo è vero; forse ne esiste una più semplice, ma la riporto lo stesso.

Sia **E** : insieme degli interi n per cui $\tan(\pi/n) \notin \mathbf{Q}$ (include la lista [3]).

Da $\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1 - \tan\alpha\tan\beta)$ con $x = \tan\alpha$ si ricava

$$\tan(2\alpha) = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{P_3}{Q_3} = \frac{x + \tan(2\alpha)}{1 - x\tan(2\alpha)} = \frac{x + P_2/Q_2}{1 - xP_2/Q_2} = \frac{xQ_2 + P_2}{Q_2 - xP_2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$, ecc. da cui

[4] $\tan(k\alpha) = P_k / Q_k$ con la ricorrenza

[5] $P_1 = x$, $Q_1 = 1$, $P_{k+1} = xQ_k + P_k$, $Q_{k+1} = Q_k - xP_k$

- eliminando Q_k fra le due equazioni si ricava la ricorrenza fra i soli P_k

[6] $P_1 = x$, $P_2 = 2x$, $P_{k+2} = 2P_{k+1} - (1+x^2)P_k$

- se $\alpha = \pi/n$ cioè $x = \tan(\pi/n)$ si ha $\tan(k\pi/n) = P_k / Q_k$ da cui

[7] $P_n / Q_n = \tan\pi = 0$

- per $n > 4$, $x = \tan(\pi/n) > 0$ e poiché i P sono dispari in x deve essere $P_n / x = 0$

- ponendo $x^2 = y$ si hanno i polinomi $R_n(y) = P_n(x)/x = 0$, soggetti alla ricorrenza che si ottiene da [6]

[8] $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_{k+2} = 2R_{k+1} - (1+y)R_k$

p.es.

$R_3 = 3 - y$, $R_4 = 4 - 4y$, $R_5 = 5 - 10y + y^2$

$R_6 = 6 - 20y + 6y^2$, $R_7 = 7 - 35y + 21y^2 - y^3$, ecc.

Da [8] si può dimostrare che in R_n con n dispari

[9] il primo coefficiente è n, l'ultimo è ±1.

L'argomento dei polinomi R_n è $y = x^2 = \tan^2(\pi / n)$ - fra le n radici di $R_n(y) = 0$ ne esiste una, diciamo y_0, per cui $\sqrt{y_0} = \tan(\pi / n)$ - quindi y_0 deve essere reale e positiva; se è irrazionale lo è anche $\tan(\pi / n)$ e $n \in \mathbf{E}$, se è razionale vale il seguente teorema : nel polinomio a coefficienti interi $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + ... + a_0 = 0$ le uniche radici razionali sono della forma a / b con a: divisore di a_0 e b: divisore di a_n.

Quindi per [9] se n è un primo dispari p (senza divisori interi) l'unica soluzione è $y_0 = p$ da cui

$\tan(\pi / n) = \sqrt{p} \notin \mathbf{Q}$ (p non è un quadrato) - ne segue

[10] per ogni primo dispari vale $p \in \mathbf{E}$.

Da [4] si vede, con $x = \tan\alpha$, che $\tan\alpha \in \mathbf{Q} \to \tan(k\alpha) \in \mathbf{Q}$

- invertendo la implicazione, con $\alpha = \pi / (nk)$, si ha $\tan(\pi / n) \notin \mathbf{Q} \to \tan(\pi / (nk)) \notin \mathbf{Q}$ cioè

[11] $n \in \mathbf{E} \to nk \in \mathbf{E}$ per ogni intero k

p.es. $5 \in \mathbf{E} \to 5, 10, 15, 20, 25 ... \in \mathbf{E}$.

Per ogni numero $n > 4$ si hanno due casi

1) n contiene un primo dispari p, cioè $n = m \cdot p$ con m intero

- da [10] e [11] si ha $p \in \mathbf{E} \Rightarrow n = m \cdot p \in \mathbf{E}$

2) $n = 2^k, k \geq 3$

- da [11] poiché $\tan(\pi / 8) = \sqrt{2} - 1 \notin \mathbf{Q} \to 2^k \in \mathbf{E}$, $k \geq 3$.

Quindi $\tan(\pi / n) \notin \mathbf{Q}$ per ogni $n > 4$, e questo è il risultato cercato.

Finisce bene, considerando che ci aveva scritto "Allego una soluzione. Comprende una dimostrazione un po' complicata, che non sapevo se includere, oppure scrivere che il margine... alla fine, pensando che il margine su internet è abbastanza ampio, l'ho inserita". No, non siamo per niente preoccupati. Il nostro margine è grande quanto decidiamo noi.

5.1.2 Un albero cresce a Brooklin

Attenzione, il Capo ce l'ha fatta, a descrivere il problema senza fare una figura, peccato che non abbiamo grosse prove, che la maggioranza l'abbia capito. Vediamo di riportarlo tagliando poco:

> *Abbiamo un appezzamento rettangolare ABCD a Brooklyn: noi gli passiamo davanti tutte le mattine lungo il lato AD (che dà sulla strada ed è libero da costruzioni). I lati AB, BC e CD sono (a raso del prato, quindi senza vicoletti o sentierini: è un "prato cieco") grattacieli molto alti.*

Dallo spigolo in B, un faro illumina il prato da piuttosto in basso (ma non rasoterra); procedendo da BC verso AD, si incontrano nell'ordine:

- *Una staccionata che impedisce l'accesso alla parte del prato dove si trova la lampada, pur non impedendo di guardare oltre ma impedendo qualsiasi misurazione della seconda parte.*
- *Poi (sempre andando verso la strada), incontriamo un muro uscente da AB e ad esso perpendicolare della larghezza di 4 metri, distante dalla strada 16 metri.*
- *Avanti ancora e troviamo un secondo muro che esce da CD (perpendicolare) largo due metri e distante 12 metri dalla strada.*
- *Infine, trovate la strada che percorrete tutte le sere, lo spazio AD è ampio 10 metri*

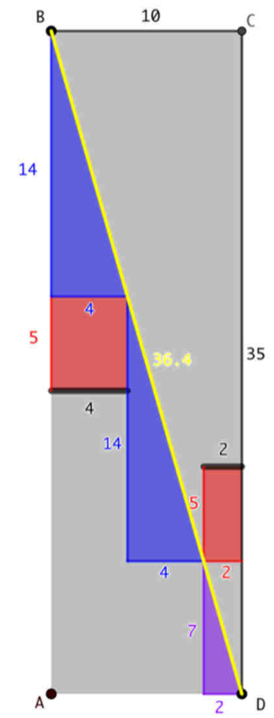
I muri sono più alti di quanto sia alta la lampadina nello spigolo, quindi fanno un po' di ombra.

Verranno costruiti due capanni attaccati ai muri, usando i muri medesimi come muri di fondo: uno verrà costruito "Dietro il muro di AB", l'altro "davanti al muro di CD". E le costruzioni saranno larghe quanto i muri. Inoltre, la staccionata verrà spostata a filo della strada, impedendo accesso e misurazioni sull'intera area.

Passando la sera sulla strada, vi accorgete che tra l'angolo più lontano (da voi) del capanno del muro su AB e l'angolo più vicino del capanno del muro CD riesce a passare, per un brevissimo attimo, un raggio di luce del lampione sul fondo. Quanto è profondo l'appezzamento? O quanto è distante il lampione dalla strada? O anche, quanto è lungo AB?

L'unico che ci ha scritto con una soluzione è ***Valter***, a cui passiamo direttamente la parola:

Inizio con un disegno:



Da "*… riesce a passare, per un brevissimo attimo, un raggio di luce del lampione sul fondo …*" deduco che la distanza fra i due muri è di 4 metri: ampiezza dello spazio AD meno loro larghezza.

I due triangoli in blu sono quindi omologhi e quello viola simile con lati la metà degli altri due.

Dal testo mi pare si possa assumere che la profondità dei capanni sia identica: la indico con "***x***".

Ho quindi: (4 [distanza muri] + $2x$) [cateno triangolo blu] = ($12 - x$)[cateto di quello viola] * 2.

Da cui: x=5; conoscendo larghezza e distanza dei muri "il resto vien da sé": profondità = 35 metri.

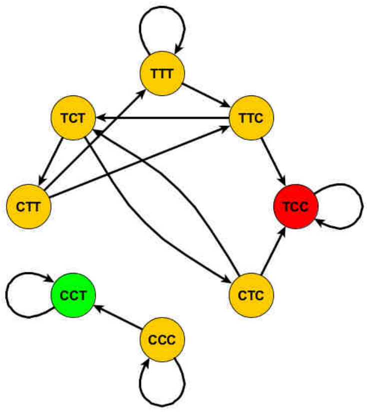
5.1.3 Quick&Dirty

Prima di lasciarvi, vi passiamo straordinariamente una soluzione proposta dal ***Panurgo*** dello scorso Quick&Dirty:

Vi propongo un gioco: lanciamo una moneta (onesta) più volte: se compare per prima la sequenza Croce-Croce-Testa vincete 16 euro, se compare prima la sequenza Testa-Croce-Croce perdete 8 euro. Accettate?

Bene, la risposta del ***Panurgo*** è più *quick* della nostra:

Ecco un grafo del processo proposto che mostra in modo evidente che le sequenze di lanci che terminano su TCC sono il triplo di quelle che terminano su CCT



E con questo è tutto, buone feste e al prossimo anno!

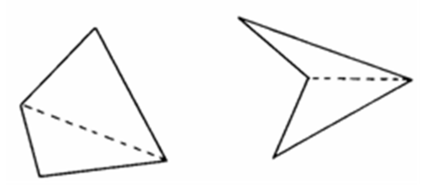
6. Quick & Dirty

In un lago ci sono 4998 pesci maculati. Su ciascun pesce maschio ci sono 111 macchie, su ciascun pesce femmina ce ne sono 37.

Se tolgo i due terzi dei pesci maschi dal lago quante macchie restano?

7. Pagina 46

Come si vede in figura, l'affermazione è valida per i quadrilateri.



8 *Il caso n=4.*

Supponiamo l'affermazione valida per tutti i k-agoni semplici con k = 4, 5, ..., n e consideriamo l'(n+1)-agono P. Essendo impossibile[19] che un poligono non abbia *nessuna* diagonale completamente al suo interno, ne esisterà almeno una, e sia essa d. Supponiamo d divida P in un r_1-agono e in un r_2-agono: per l'ipotesi induttiva, in questi due subpoligoni avremo rispettivamente almeno $r_1 - 3$ e

[19] Diamo questa affermazione come intuitiva, ma può essere dimostrata rigorosamente basandosi sul fatto che ogni poligono semplice può essere decomposto in triangoli per mezzo di diagonali non intersecantesi giacenti all'interno del poligono.

$r_2 - 3$ diagonali giacenti completamente all'interno dei due poligoni e, contando anche d, devono quindi aversi almeno $r_1 + r_2 - 5$ diagonali di P completamente in P.

Il numero totale dei lati dei due subpoligoni è pari a $r_1 + r_2$: questo valore considera tutti i lati di P ma conta due volte la diagonale d e quindi si ha che $r_1 + r_2 = n + 3$. Quindi P ha almeno

$$r_1 + r_2 - 5 = n + 3 - 5 = n - 2 = (n + 1) - 3$$

diagonali al proprio interno, che è la nostra tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

Se vi interessano i numeri uno e due di questa roba, dovreste riuscire a trovarli nei numeri 049 e 050 di una (all'epoca) speranzosa rivista di matematica ricreativa.

8.1 La Foresta di Stern-Brocot [3] – I Denti dell'Albero del Tempo

No, il titolo non piace neanche a noi, ma una traduzione sensata mantenendo l'allitterazione di "Trees, Teeth & Time" ci pare impossibile.

Cominciamo con un veloce riassunto della parte che ci interessa.

Si parte da due frazioni che rappresentano gli estremi del nostro intervallo e se ne calcola il *mediante,* abitualmente indicato dal segno "⊕ : per motivi grafici, lo indichiamo con un segno "+" tra parentesi quadre:

$$\frac{0}{1}[+]\frac{1}{0}=\frac{0+1}{1+0}=\frac{1}{1}$$

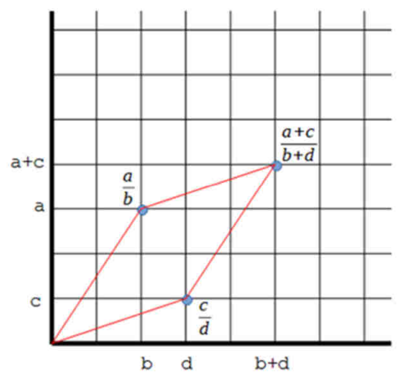
Il mediante divide il nostro intervallo precedente in due intervalli, di ciascuno dei quali possiamo calcolare il mediante:

$$\frac{0}{1}[+]\frac{1}{1}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{1}[+]\frac{1}{0}=\frac{1+1}{1+0}=\frac{2}{1}$$

Se vogliamo essere precisi e formali, dobbiamo notare che a rigore il mediante *non dipende dai numeri*, ma piuttosto dalle loro *rappresentazioni*: infatti, anche se 2/3=4/6,

$$\frac{2}{3}[+]\frac{5}{7}=\frac{2+5}{3+7}=\frac{7}{10};\ \frac{4}{6}[+]\frac{5}{7}=\frac{4+5}{6+7}=\frac{9}{12}.$$

Il calcolo del mediante di due numeri razionali corrisponde alla somma vettoriale dei due numeri, come si vede nella figura qui di fianco: vicino ai punti (b, a) e (d, c) abbiamo indicato il *coefficiente angolare* della retta passante per il punto e l'origine: si vede che la retta passante per il mediante è tra le rette dei razionali di partenza, e quindi il mediante è sempre all'interno dell'intervallo definito dai due numeri.



9 *Il mediante come somma vettoriale.*

Costruendo per tutti gli intervalli ottenuti tutti i medianti e procedendo in questo modo sui nuovi intervalli, si ottiene l'***Albero di Stern-Brocot***, che presenta due interessanti caratteristiche: tanto per cominciare, ogni razionale che appare *lo fa una ed una sola volta*; non solo, ma ogni razionale *appare sempre nella sua forma più semplice*[20].

Possiamo calcolare l'area del parallelogramma a bordi rossi come:

$$A\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)=da-bc$$

Questa funzione, dal punto di vista dei valori coinvolti, soddisfa alcune interessanti proprietà:

- Se $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, allora $A(r_1, r_2) \in \mathbb{N}$.
- $A(r, r) = 0$.
- $A(r_1\ [+]\ r_2, r_3) = A(r_1, r_3) + A(r_2, r_3)$.

Inoltre, se r_1, r_2 sono due razionali consecutivi incontrati durante la costruzione dell'Albero di Stern-Brocot, si ha sempre che $A(r_1, r_2)=1$: la cosa si dimostra per induzione, considerando che è sicuramente vera per il primo passo e che, se supponiamo $A(r_1, r_2)=1$, al passo successivo avremo:

[20] Può sorgere il dubbio, visto l'esempio poco sopra coinvolgente 4/6, che questo non sia vero: facciamo notare che nell'esempio siamo *già partiti* da una rappresentazione non ridotta ai minimi termini, mentre nella costruzione dell'Albero di Stern-Brocot partiamo da frazioni già ridotte alla forma più semplice.

$$A(r_1, r_1 [+] r_2) = A(r_1, r_1) + A(r_1, r_2) = A(r_1, r_2) = 1.$$

Si abbia un generico numero razionale positivo r: alla prima divisione del segmento, r si troverà (in funzione del fatto che sia maggiore o minore di 1) in uno dei due intervalli: procedendo alla divisione di quell'intervallo, r si troverà in uno dei due intervalli (o sarà il mediante appena trovato, il che concluderebbe la nostra ricerca); procedendo in questo modo, prima o poi otterremo il razionale di partenza.

Indicando in ognuna delle due divisioni con D l'intervallo di destra e con S l'intervallo di sinistra, possiamo identificare il numero come la sequenza delle scelte: ad esempio,

$$\frac{4}{7} = SDSS$$

Il che, permette di approssimare (di solito con formule esteticamente valide) con la precisione voluta i numeri irrazionali:

$$\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = DSDSDSDSD \dots;$$
$$e = DS^0DSD^2SDS^4DSD^6SDS^8 \dots.$$

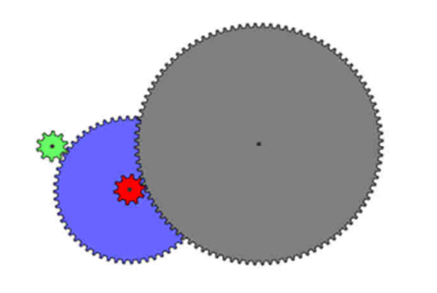
E questo è il punto che ci interessa: messo più formalmente, se r è un numero razionale che non compare nella sequenza di Stern-Brocot che converge al reale x, allora esiste un termine nella sequenza con sia il numeratore che il denominatore non maggiori di r che giace nell'intervallo tra r e x.

Quando Stern e Brocot hanno costruito questo esteticamente valido sistema, erano mossi comunque da un fine eminentemente pratico: infatti, Brocot era un orologiaio.

Se avete due ingranaggi ad esempio di 10 e 60 denti, un giro completo del primo corrisponderà ad un sesto di giro del secondo; supponendo di avere il primo ingranaggio collegato alla lancetta dei secondi (che compia quindi un giro al minuto primo), per avere la lancetta dei primi vi serve una ruota da 600 denti, decisamente complessa da costruire e da far ingranare[21].

Esiste però un'altra soluzione, basata su più ingranaggi: se, con riferimento alla figura, la ruota verde ha dieci denti e la ruota blu sessanta, potremo inserire un ulteriore sistema in cui la ruota rossa, solidale con la ruota blu, ha anch'essa dieci denti, mentre la ruota grigia ne ha cento; a questo punto, il rapporto tra le rotazioni della ruota sarà:

$$\frac{10}{60} \cdot \frac{10}{100} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$$


10 *I secondi e i primi.*

Che è il rapporto che ci interessava, ottenuto in modo molto più compatto ed affidabile rispetto ad un ingranaggio 10:600. Da cui, se volete ottenere un movimento sulle dodici ore, partendo dalla rotazione a un primo, visto che in un giorno ci sono 720 minuti, vi basta ricordare che:

$$\frac{1}{720} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}$$

Ma ***Camus***, nel XVIII secolo, pone il seguente problema: supponiamo di avere un ingranaggio che ruota una volta ogni ora, e di voler ottenere un movimento in grado di ruotare una volta ogni anno (tropico), ossia ogni 365 giorni, 5 ore e 49 primi; qui, se convertite tutto in primi, ottenete 720/525949.

Piccolo problema: 525949 è *primo*, e non potete fattorizzarlo come avete fatto con 720 nel caso precedente.

[21] Ma, almeno dal punto di vista teorico, non impossibile: secondo alcune teorie, l'Odometro di Vitruvio richiedeva di ingranare con un rapporto 1/400; la cosa diventava possibile ponendo i due ingranaggi (uno con un solo dente) a 90° l'uno con l'altro. Questa soluzione, purtroppo, non è applicabile negli orologi da polso...

E qui, finalmente, Brocot si dà da fare. Seguiamo i passi, inserendo nelle prime due colonne numeratore (p) e denominatore (q) della frazione, e nell'ultima il valore di $A\left(\frac{p}{q}, \frac{720}{563949}\right)$, che è una buona misura dell'errore che stiamo commettendo[22].

I primi numeri non sono particolarmente incoraggianti, come si vede dalla tabella:

#	D	p	q	A
1		0	1	720
2		1	0	-525,949
3		1	1	-525,229
4	S	1	2	-524,509
	S	...	...	...
729	S	1	730	-349
730	S	1	731	371
731	D	2	1461	22
732	D	3	2191	-327
733	S	5	3652	-305
734	S	7	5113	-283
	S	...	...	...

#	D	p	q	A
747	S	29	21184	-41
748	S	31	22645	-19
749	S	33	24106	3
750	D	64	46751	-16
751	S	97	70857	-13
752	S	130	94963	-10
753	S	163	119069	-7
754	S	196	143175	-4
755	S	229	167281	-1
756	S	262	191387	2
757	D	491	358668	1
758	D	720	525949	0

Sorvolando sui primi tre termini, ogni volta che A risulta negativo prendiamo l'intervallo a sinistra, quando positivo a destra. Dobbiamo prendere a sinistra *settecentotrenta* volte, prima di dover prendere a destra, ma la nostra pazienza (o la nostra abilità con un foglio di calcolo: è difficile, ma non impossibile) viene compensata dallo scoprire che:

$$\frac{720}{525949} = S^{730}D^2S^{15}DS^6D^2$$

visto che l'ultima riga ha errore pari a zero. Essendo orologiaio, evidentemente Brocot di pazienza ne aveva da vendere.

E, a questo punto, avete un'espressione completamente inutile, visto che vi fornisce il valore *esatto*.

Quello che non vi avevamo detto è che Brocot aveva anche preparato una tabella della scomposizione "in piccoli fattori di tutti i numeri utili" (quali fossero i "numeri utili", lo aveva deciso lui, evidentemente) e, grazie a questa, ci si può accorgere che grazie alla riga 754 possiamo approssimare la nostra frazionaccia con la frazione più trattabile:

$$\frac{720}{525949} \approx \frac{196}{143175} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{7}{23} \cdot \frac{7}{83}.$$

E questo, ci porta ad un errore di:

$$\frac{A}{p} = -\frac{4}{196}$$

minuti, dove il segno negativo indica che il nostro orologio va avanti (di meno di due secondi all'anno).

Pensare che tutte queste cose sono perse come lacrime nella pioggia e oggi per sapere che ore sono basta lumare il furbofono, mette una certa tristezza...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[22] Se A rappresenta l'area del parallelogramma tra i due "punti" che ha come argomento, un'area zero significa che abbiamo un valore esatto.