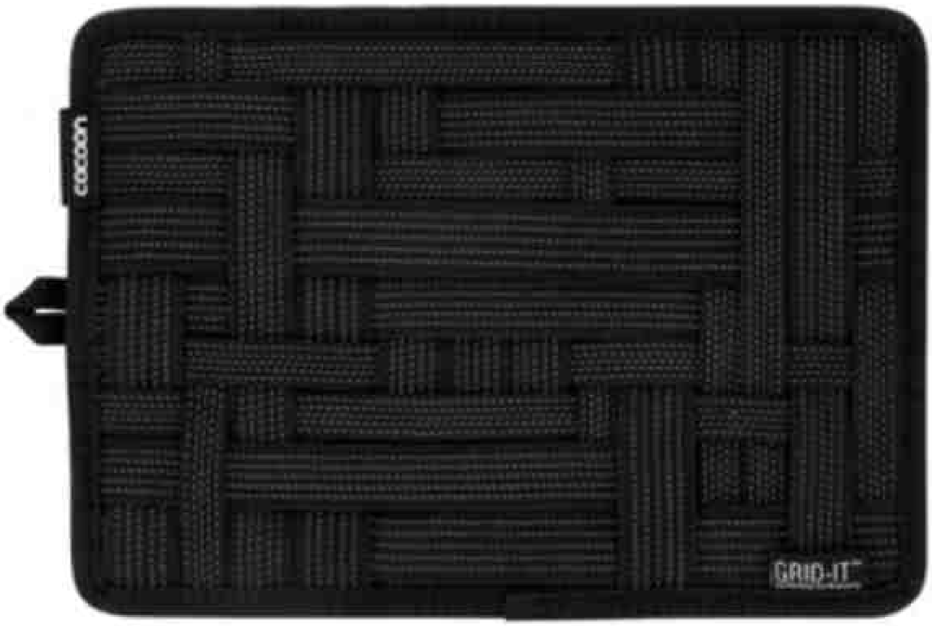
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 195 – Aprile 2015 – Anno Diciassettesimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM193 ha diffuso 3224 copie e il 13/04/2015 per Google eravamo in 10'900 pagine.

L'oggetto è noto come *Cocoon 19.1x1x26.7cm Grid It Organizer* ed è in vendita a 13.66 sterline (Free Delivery in UK) su Amazon. A prescindere dall'effettiva genialità dell'idea, che riconosciamo con un muto applauso, ci poniamo la domanda se gli incroci (prima foto) siano studiati o casuali e, nel primo caso, che regola seguano.

1. Il lato oscuro della matematica

"La matematica non sarà mai il mio mestiere"
(Antonello Venditti)

"I will survive"
(Gloria Gaynor)

La citazione d'apertura è tratta da un famoso successo di Antonello Venditti del 1984, "*Notte prima degli esami*": è una bella canzone, e vi si sono riconosciuti milioni di ragazzi, insonni e agitati dal coacervo di tensioni che inevitabilmente li agita in quel momento cruciale di passaggio che è l'esame di maturità. Vi ci si sono riconosciuti e probabilmente vi ci si riconoscono ancora, perché il pezzo è davvero famoso e, nonostante abbia superato i trent'anni di vita, è ancora facile sentirlo suonare dalle radio, specialmente tra la fine di giugno e l'inizio di luglio. Ha anche trasmesso il suo titolo – e in buona parte anche la trama – ad un film, anch'esso di grande successo[1]; insomma, ha tutte le carte in regola per potersi definire un "classico" della canzone italiana.

1 *Citazioni murali*

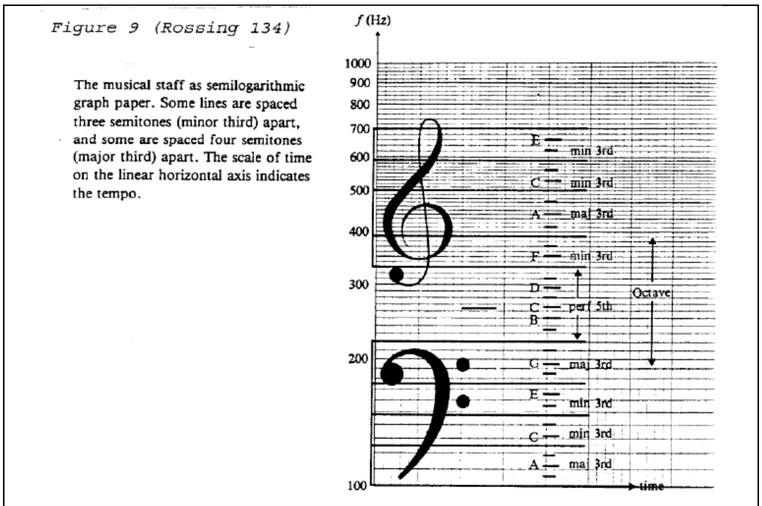
È abbastanza naturale che chi ama la matematica sia un po' infastidito dal verso che chiama in ballo la sua materia adorata: un fastidio dovuto probabilmente più al tono quasi rabbioso con cui viene cantata che al contenuto vero e proprio. In fondo, la matematica è un mestiere per una percentuale davvero infima della popolazione mondiale, e se fosse letta come una predizione, piuttosto che come una irritata dichiarazione programmatica, sarebbero molti gli amanti della matematica pronti a sottoscriverla, magari accompagnando la constatazione con un rassegnato sospiro di delusione.

Il contesto specifico, poi, è quello già descritto dal titolo, in cui diciannovenni travolti da emozioni sono costretti a un ripasso vertiginoso e asfissiante in un momento che è inevitabilmente al tempo stesso un inizio ed una fine; in un momento, insomma, in cui anche le tragedie greche e la storia contemporanea non se la passano benissimo, dal punto di vista del gradimento giovanile. Ma resta il fatto che non è immaginabile che Venditti abbia preso in considerazione anche solo per un istante l'alternativa "la filologia romanza non sarà mai il mio mestiere", e che il ringhio che accompagna il verso incriminato appare del tutto sincero, ed evocativo di un odio profondo e assoluto, a prescindere dal contesto particolarissimo.

In breve, la matematica è odiata da una buona parte della popolazione.

[1] "Notte prima degli esami", di Fausto Brizzi, 2006. Ha vinto un gran numero di premi cinematografici, generato un sequel ("Notte prima degli esami – Oggi", sempre di Brizzi, 2007), un remake francese ("Nos 18 ans" di F. Berthe) e una serie televisiva prodotta dalla Rai.

Chi non appartiene a quest'insieme di Odiatori si sente invece appartenere al ristretto insieme[2] degli Amanti della matematica, può reagire in molti modi diversi: il più sereno ci pare la constatazione che ognuno è liberissimo di pensarla come gli pare, in merito ai propri gusti e al proprio futuro mestiere, e che chi non condivide il giudizio potrà altrettanto liberamente godere della certezza che sopravvivrà indenne alla ferale notizia[3]. Un altro, più serio e costruttivo ma verosimilmente parimenti incapace di sortire alcun benefico effetto negli elementi dell'Insieme degli Odiatori, è quello di provare a far vedere quanto sia poco lungimirante un simile atteggiamento, specie da parte di un musicista.



2 *Libro di testo di musica. O no?*

Che matematica e musica siano strettamente imparentate è cosa stranota, almeno tra coloro che non sono colti da conati di vomito non appena vedono un'addizione; che i rapporti armonici siano soprattutto rapporti, prima ancora che armonici, è notizia che risale ai tempi di Pitagora, con tanto che Pitagora è figura probabilmente più mitica che reale, tanto è remoto nel tempo. E così, un cantautore che piazza con cura le due mani sulla tastiera di un pianoforte o articola le dita in maniera complessa per estrarre il giusto accordo dalla chitarra fa un ben preciso atto di matematica applicata, che lo voglia o meno. E come minimo si potrebbe far notare al Venditti che lui, che per lavoro articola vocalizzi intonati e scrive melodie, fa della matematica il suo mestiere molto di più, o perlomeno più direttamente, di quanto faccia un ingegnere che si informa sulle normative ministeriali sull'utilizzo del cemento armato.

E naturalmente si potrebbe proseguire, quasi all'infinito. Quanta matematica c'è, dentro il microfono che amplifica il suo grido di guerra contro la matematica stessa? Quante funzioni, trasformate di Fourier, equazioni di Maxwell sono chiamate al lavoro, perché le radio e i dischi possano impunemente dichiarare che la scienza dei numeri è una schifezza? Che cosa, se non la matematica, garantisce al cantautore denigrante che il palco dal quale riceve applausi estasiati non crolli sotto il suo peso e quello dei suoi strumenti? E così via cantando…

Ma è appurato, garantito, che anche mostrando che denigrare la matematica equivale (e non solo per i musicisti, ma praticamente per tutti) a sputare nel piatto in cui si mangia, non si fanno gran passi nell'aumentare la consapevolezza della matematica[4] in coloro che

[2] Siamo certi che i due insieme non siano complementari, che non coprano da soli, insomma, l'intero Universo del possibile. A dirla tutta, siamo convinti che l'insieme degli Indifferenti (complemento dell'unione dei due insiemi citati) sia di gran lunga il maggiormente popolato, e che, in ultima analisi, quasi tutti gli Odiatori siano convinti che la matematica sia la summa delle negazioni della fantasia, dei sentimenti, della libertà; si sbagliano in maniera clamorosa, ma per capirlo dovrebbero dedicare alla matematica almeno il tempo necessario a capire che dicono di odiare una cosa che è ben diversa da quella che credono. Per contro, se vale il principio che per potere odiare consapevolmente qualcosa occorre necessariamente conoscere l'oggetto del proprio odio, è facile concludere che i Veri Odiatori della Matematica devono per forza essere anche Veri Matematici: la conclusione non ci pare affatto assurda, e anzi ci consola, perché risulta allora evidente che l'insieme dei Veri Odiatori, in qualità di sottoinsieme dei Veri Matematici, debba essere necessariamente piccolo al limite dell'irrisorio.

[3] Di qui la contro-citazione, sempre d'ambientazione musicale, presa in prestito da Gloria Gaynor.

[4] A proposito, ve lo ricordate, vero, che Aprile è il mese della Consapevolezza Matematica, sì? "Mathematical Awareness Month", lo chiamano gli americani; qui in Italia, i portabandiera della consapevolezza tricolore sono da sempre i sagaci e funambolici amici di Maddmaths! (http://maddmaths.simai.eu/).

questa consapevolezza non vogliono avercela. E anche provando a tralasciare le applicazioni, anche tentando di mostrare le infinite meraviglie della costruzione puramente teorica che, partendo da una manciata di assunti, riesce a costruire edifici armonici ed elaborati che solo i più grandi dei poeti possono provare ad uguagliare, non si fa un passo.

È probabile che sia solo una questione d'immagine. La matematica è vista come esatta, rigorosa, impietosa, crudele nella sua rigidità, e quindi diventa il bersaglio perfetto di chi trova che la vita debba essere invece fatta di approssimazioni, di eccezioni, di sentimenti, pena la perdita di "umanità", quasi come se costruire la scienza fosse attività riservata ai marziani. Un po' come se studiare a fondo un aspetto, un qualunque aspetto, fosse di per sé sbagliato, comportasse una perdita di amore, di passione. Come se definire delle regole di linguaggio e di comunicazione, di ragionamento e di logica comune spogliasse di poesia una rivelazione: e sì che nessuno contesta ai poeti di seguire troppo pedestremente le regole della grammatica e della sintassi nella composizione dei loro testi, anzi.

3 *"La strada", di Federico Fellini (1954)*

Si rischia, come sempre, di finire a discutere delle "Due Culture", l'umanistica e la scientifica, come se fossero davvero due cose diverse e nemiche. È talmente poco sensato che possano esserci tali separazioni tra costruzioni mentali che sono entrambe umane, che forse la cosa più saggia è appellarsi a Terenzio, quando fa dire a Cremete "sono un essere umano, e non c'è nulla di umano che io ritenga diverso da me"[5]. In alternativa, forse, potrebbe tornare utile andare a spulciare arditi legami famigliari.

È difficile trovare, nella cinematografia italiana e mondiale, un regista più visionario, onirico, poetico di Federico Fellini. I suoi film sono uno strano mélange di ricordi e di immagini, in cui il sogno è sempre un po' più importante, più significativo e comunicativo della realtà. Come tutti i coltivatori di sogni, Fellini propone emozioni, apparentemente senza curarsi della ricettività dello spettatore, tenendo come guida costante solo la sua capacità di raccontare e affabulare. In questa ricerca continua di emozioni e di umanità, il regista è ben conscio che deve usare tutti gli strumenti a disposizione per creare l'atmosfera giusta, e oltre all'attenzione verso la narrazione, oltre alla cura precisa delle immagini e alla meticolosa selezione delle espressioni e dei colori, non trascura l'aspetto fondamentale di ogni narrazione onirica che si rispetti: il commento musicale.

Fellini delega questa parte essenziale delle sue opere ad un musicista che è perfettamente sintonizzato con i desideri del regista, e che riesce apparentemente senza fatica – ma presumibilmente con un grandioso e accuratissimo lavoro di composizione – e colorare di suoni le immaginazioni mute dei fotogrammi felliniani.

[5] "*Homo sum, humani nihil a me alienum puto*". Publio Terenzio Afro in *Heautontimorumenos*, "Il punitore di sé stesso".


4 *Nino Rota*

Il musicista è Nino Rota. Per quanto sia celebre la sua collaborazione con Federico Fellini, sarebbe davvero riduttivo costringerlo in una definizione così stretta. Anche perché Rota è un vero e proprio ragazzo prodigio: certo, parlando di musicisti che mostrano già in tenera età capacità eccezionali di composizione, viene inevitabilmente a galla il confronto con l'inarrivabile Mozart, e siamo certi che Nino sarebbe il primo a schermirsi di fronte ad un simile paragone; ma certo è che Nino Rota, nato nel 1911, scrive una musica già matura quando non ha ancora compiuto undici anni, e se la vede eseguire sia in patria sia all'estero[6]. A quindici compone un'opera che è già d'ampio respiro, sui tre quarti d'ora di durata, che ne ribadisce senza dubbio la maturità artistica. Non ha ancora vent'anni quando vola negli Stati Uniti, per perfezionarsi e vincere borse di studio a Philadelphia; due anni dopo torna in Italia perché, per quanto già diplomato in Composizione al Conservatorio di Milano, ritiene opportuno anche laurearsi in Lettere all'Università del capoluogo lombardo.

Ha appena ventidue anni quando incontra quello che sarà il suo amore principale, la musica da film. Durante tutta la sua vita continuerà a comporre musica sinfonica, lirica, da camera; è un musicista grande e completo: ma è nella musica incisa sulla colonna sonora che scorre vicino ai fotogrammi di celluloide che trova la sua realizzazione più grande. Scriverà più di centocinquanta colonne sonore, molte delle quali per autentici capolavori, altre che rimangono ancora nella storia e nella memoria più di quanto facciano i film che da esse sono commentati.

Si tratta con tutta evidenza di un grande artista; di un autentico genio nel suo campo. Ed è anche quanto di più "umanistico", creativo, fantasioso sia lecito immaginare, secondo i canoni normalmente usati per misurare queste indubbie doti. Il cinema è giustamente noto come "la fabbrica dei sogni", e alcuni registi sono più sognatori di altri. Questi registi chiamano Nino Rota per scrivere le musiche dei loro sogni di celluloide, e Rota è così bravo ed evocativo da aggiungere sogno al sogno: lo spettatore rimane certo incantato dal film, e porterà con sé il ricordo delle sue immagini per un bel po', ma è verosimile che la musica che circonda quelle immagini sarà ancora più persistente, e riuscirà ad accompagnare lo spettatore anche molto tempo dopo, fino a diventare, forse, anche la colonna sonora della sua vita reale.

Questo articolo è iniziato parlando di un suonatore di pianoforte che ha lasciato il segno anche per un verso che denigra la matematica. In qualità di amanti della matematica, avremmo gioco facile nel ribattergli la nostra qualora sapessimo con certezza che un musicista d'alto lignaggio come Nino Rota fosse invece un estimatore della nostra amata scienza: ma in verità, non sappiamo proprio se Rota avesse o meno un debole per la matematica. Possiamo solo ipotizzare: sappiamo bene che in certi casi la genetica conta fino ad un certo punto: un tiranno può facilmente generare un figlio rivoluzionario, una giovane pittrice può discendere senza alcun dubbio da una famiglia di contrammiragli, quindi non vale certo appellarsi a certe quisquilie. È assai più verosimile che ad

[6] L'opera in questione è "L'infanzia di san Giovanni Battista", ha avuto diverse esecuzioni, alcune delle quali dirette dallo stesso Rota dodicenne. Wikipedia (inglese) racconta dello scambio di battute che un critico belga, venuto ad ascoltare l'esecuzione, scambiò con il giovanissimo compositore. Critico: "Ti piace suonare?" – Rota: "Lo faccio ogni volta che posso ... è difficile scrivere per un giornale?" – Critico: "Beh, non è facile fare un buon articolo" – Rota: "Sei venuto da Bruxelles proprio per sentire la mia composizione?" – Critico: "Esattamente per questo, mio piccolo amico" – Rota: "Questo è davvero buffo, perché non sarò io a dirigere, stasera. Ieri il contrabbasso mi ha offeso."

influenzare le inclinazioni intellettuali di un ragazzo sia l'ambiente culturale in cui cresce, più che la danza dei cromosomi. Sia come sia, l'ambiente in cui cresce Nino Rota è davvero fertile per la cultura, quella cultura che non gradisce etichette o classificazioni aprioristiche.

Nino ha un fratello, Giovanni, e una sorella, Rosetta. Entrambi sono più orientati di lui verso le discipline scientifiche, visto che Giovanni è un ingegnere civile e Rosetta è laureata in matematica. Ma non si può certo pensare che una professione, con buona pace di tutti quelli che giudicano in base a facili etichette, definisca pienamente un essere umano: Giovanni è un ingegnere specializzato in strutture antisismiche, ma questo non gli impedisce certo di essere un intellettuale talmente impegnato politicamente da finire nelle liste di proscrizione di Mussolini. Rosetta è abbastanza brava in matematica da finire nel giro di Enrico Fermi, ma anche così tanto interessata agli altri aspetti della vita da innamorarsi di Ennio Flaiano, uno degli scrittori[7] più apprezzati del Novecento italiano, e autore di aforismi che sono tuttora, probabilmente, i più citati di un autore italiano. E Flaiano la ricambia, visto che si sposano. Con un fratello e una sorella così, è ben difficile immaginare che un compositore come Nino Rota non fosse quantomeno consapevole dell'importanza della matematica, sia per la costruzione della pila atomica, sia per armonizzare il suo pianoforte. E, se anche non fossero bastati fratello e sorella, siamo convinti che sarebbe stato sufficiente l'influsso del nipotino.

5 *Gian-Carlo Rota*

Gian-Carlo Rota nasce il 27 Aprile 1932 a Vigevano, figlio di Giovanni e pertanto nipote consanguineo di Rosetta e Nino Rota, e nipote acquisito di Ennio Flaiano. Il piccolo Gian-Carlo cresce in una casa che trabocca cultura e soprattutto libri: la biblioteca di famiglia è veramente eccezionale, specie se si considera che a quei tempi non esistevano i tascabili. È letteralmente circondato dalla cultura, e forse anche un predestinato, visto che alle elementari si ritrova come compagno di banco Lucio Mastronardi, lo scrittore che diventerà famoso con il suo romanzo "*Il calzolaio di Vigevano*". Se l'ambiente culturale è davvero invidiabile, lo è un po' meno quello politico e geografico: Vigevano, bella cittadina della Lomellina e celebre per la sua sforzesca Piazza Ducale, è territorio della Repubblica Sociale fino al 1945, e questo non rende la vita facile alla famiglia di un antifascista ricercato dalle camicie nere. Per questa ragione il tredicenne Gian-Carlo scappa con la famiglia in Valsesia, dove resta per qualche tempo, poi varca la frontiera italo-svizzera e infine approda addirittura in Ecuador.

[7] Non solo scrittore e aforista, anche sceneggiatore e, come il cognato Nino, impegnato nel cinema felliniano: soggetto e sceneggiatura de "*La Dolce Vita*", del citato "*La strada*" e di "*Otto e mezzo*" sono – almeno in parte, vista la presenza di un regista come Fellini – suoi.

Il "liceo" di Gian-Carlo diventa così il "Colegio Americano di Quito", dove resta fino al 1950, quando si trasferisce negli Stati Uniti. È già chiaramente predisposto e determinato a fare della matematica il suo mestiere: ottiene il primo grado di laurea a Princeton, dove trova insegnanti del calibro di Alonzo Church. Prosegue poi gli studi a Yale, dove ottiene prima il Master e poi il Ph.D. con Schwartz[8] come relatore, e conosce Marvin Minsky. A dimostrazione del fatto che la matematica è il suo grande, ma non unico, amore, Rota per non annoiarsi studia anche filosofia, e si interessa molto a cosa abbiano da dire in proposito Husserl e Heidegger.

6 *Martin Heidegger*

Nel 1956, alla veneranda età di venticinque anni, Rota ha terminato gli studi e decide di sposarsi. Insegna per un paio d'anni ad Harvard, poi si muove verso il leggendario MIT, Massachusetts Institute of Technology, dove sostanzialmente lavorerà per tutta la vita, fatta salva l'eccezione di due anni trascorsi presso la Rockefeller University. Al MIT, il suo primo titolo accademico è quello di "Professore di Matematica Applicata", ma dopo qualche anno di onorata carriera, nel 1972, il suo titolo muta in "Professore di Matematica Applicata e Filosofia": nessun altro, nella storia del MIT, ha mai avuto un titolo del genere, che naturalmente implicava l'insegnamento in due cattedre, una di matematica e l'altra di filosofia.

Non sembra che possa rimanergli troppo tempo libero a disposizione: e forse è proprio così, a meno di non ridefinire in modo appropriato il concetto di "tempo libero": Gian-Carlo Rota trova infatti il tempo di collaborare con la celebre e un po' controversa RAND Corporation[9] e con il Brookhaven National Laboratory[10], e soprattutto con il Los Alamos Scientific Laboratory[11], dove conosce e diventa amico di Stanislaw Ulam.[12]

Rota aveva tempo e interessi: tempo per diventare uno dei maggiori matematici dei suoi tempi. Il suo primo interesse, rimarcato anche dalla tesi di dottorato, è l'analisi funzionale, ma ben presto di dedica al calcolo combinatorio: è qui, in questa disciplina che gli americani chiamano "combinatorics", che Rota raccoglie i suoi maggiori risultati, diventando probabilmente il più grande esperto del mondo. La sua memoria più famosa nel campo è del 1964, e si intitola "*On the Foundations of Combinatorial Theory*", e quando l'AMS (American Mathematical Society) gli conferirà nel 1988 lo Steel Prize, definirà quell'opera come "il solo documento responsabile di aver fatto confluire il calcolo combinatorio nel cuore della matematica moderna". Anche se Rota non disdegnerà mai di affrontare altri campi della matematica, come mostrano le su pubblicazioni sulla teoria degli operatori, sulla teoria ergodica, sul calcolo umbrale, sulla teoria delle superalgebre e su molto altro ancora, è proprio la combinatoria il terreno in cui sente confluire i suoi molteplici interessi. Probabilmente, vedeva nella complessità delle combinazioni il ponte tra la matematica e l'universo reale: la combinatoria, trattando molte variabili, poteva fornire strumenti alla biologia per lo studio delle grandi molecole; alla linguistica, alla fisica delle particelle.

---

[8] No, non si tratta dello Schwartz (Laurent) a cui abbiamo dedicato il "compleanno" del mese scorso ("*Rive Gauche*", RM194, Marzo 2015), ma di Jacob T. Schwartz, un altro tipetto che fa il mestiere del matematico e a tempo perso getta le fondamenta dell'informatica. Rota è stato il suo primo tesista.

[9] Think-tank statunitense, famosa anche per merito di Von Neumann.

[10] L'istituzione americana dedicata prevalentemente alla ricerca delle applicazioni pacifiche dell'energia nucleare.

[11] Adesso si chiama "Los Alamos National Laboratory", e si occupa, al pari di Brookhaven, di applicazioni dell'energia nucleare: solo che a Los Alamos non si disdegnano affatto anche le applicazioni militari, anzi…

[12] Figura geniale e controversa, come tentiamo di raccontare in "*Rien ne va plus*", compleanno a lui dedicato in RM171, Aprile 2013.

Certo è gli piaceva molto il principio della matematica tangibile, diretta; e siccome i conoscenti lo ricordano come un grande affabulatore, e narratore, è probabilmente davvero sincero l'interrogativo che si poneva spesso: "*Filosofi e psichiatri dovrebbero spiegare perché noi matematici abbiamo l'abitudine di cancellare metodicamente le nostre stesse tracce. Gli scienziati hanno sempre trovato bizzarro questo comportamento dei matematici, che è cambiato ben poco dai tempi di Pitagora ai giorni nostri.*" Non è una domanda oziosa: la matematica ha la sua didattica basata su dimostrazioni costruite apposta per l'insegnamento, canali predisposti che quasi mai ripercorrono il fluire storico di una scoperta. Chissà, forse potrebbe essere questa, una delle ragioni dello scarso appeal della matematica verso la maggior parte delle persone.

O forse è un problema più generale: Gian-Carlo Rota si interrogava spesso sulle possibili colpe del cattivo modo di insegnare matematica. Anche se non è certo ragionevole puntare il dito solo sulla classe insegnante, anche perché ci sono davvero molti professori che si impegnano oltremisura per trasmettere le proprie conoscenze nella migliore maniera possibile[13], è interessante vedere come l'esigenza di tirare a lucido l'immagine della matematica fosse assai ben sentita.

È rimasto celebre un discorso di Rota del 1997, appena un paio d'anni prima di morire, tenuto in occasione della consegna di un premio. Il discorso si intitola "Mathematical Snapshots", che si potrebbe tradurre come "Istantanee matematiche", e, a parte una breve introduzione, è diviso in tre capitoli coi seguenti titoli:

1. Il lato oscuro della matematica
2. Il lato nascosto della matematica
3. Il lato luminoso della matematica[14]

… e nel primo capitolo Rota non teme di mostrare i limiti dell'immagine della matematica, e non solo per problemi di insegnamento: il matematico di Vigevano si stupiva di quanta parte del primo Novecento fosse stato dedicato quasi esclusivamente alla critica dei fondamenti della disciplina, piuttosto che a sviluppare aspetti più fruttuosi della matematica. Gian-Carlo adorava la Matematica, e più ancora adorava applicarla.

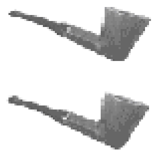
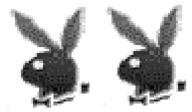
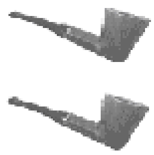
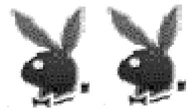
Non ce lo si attenderebbe, da un matematico filosofo: anzi, viene spontaneo pensare a un teorico per vocazione, se si pensa ad un cattedratico che insegna sia matematica sia filosofia. E si sbaglierebbe facilmente.

Il punto, forse lo abbiamo già detto, è che è davvero difficile "fare della matematica il proprio mestiere", per lo meno se per "matematica" si intende "ricerca matematica di alto livello". Ma quelli che ci riescono, di solito, sono davvero personaggi eccezionali.

[13] Se non ne siete convinti, guardate cosa combina questo prof: http://www.youtube.com/watch?v=P2SsIYEbCio

[14] Facilmente reperibile in rete, ad esempio: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Extras/rota.pdf

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
ALEE_OOh_ooh. ALEe_Oh_Oh			
Riapre "ZooM"!			

2.1 ALEE_OOh_ooh. ALEe_Oh_Oh

Come alcuni di voi sanno, Rudy è tiepidamente ma fortemente[15] tifoso di una ben precisa squadra di calcio: ha anche notato, però, che ogni volta che esplicita le proprie preferenze nel ramo la non-suddetta squadra va (ad essere ottimisti) potentemente nell'organico.

Quest'anno, la situazione *pare* ragionevole (nel senso che dovrebbe essere scongiurato lo scivolamento nella categoria inferiore, quasi), ma per scaramanzia continua a non nominare la squadra; in compenso, ha trovato un interessante problemino, in merito ai tornei di calcio.

Vi abbiamo già detto che non siamo dei grossi apprezzatori dei sistemi basati su partita-set-gioco-quant'altro, trattando dei tiri sul Campo dei Chinotti[16]. Secondo noi, nel calcio la cosa è particolarmente ingiusta (anche perché se si contassero le reti, la squadra di Rudy sarebbe *molto* più in alto...): per spingervi ad una approfondita e dettagliata indagine, vi proponiamo un problemino particolarmente complicato, con *suspence*[17].

Statuiamo il metodo di punteggio, che tanto lo conoscete tutti: se vinci tre punti, se pareggi un punto a testa, se perdi stai a secco. Non importa (ignoreremo la seconda istanza della "differenza reti", nella quale *importa*) il punteggio conseguito.

Consideriamo il *girone unico*, nel quale non esiste il "ritorno": abbiamo n squadre, che utilizzano il metodo di punteggio *sustatuito* (esiste, come parola? Bah, dettagli): alla fine del torneo, per una curiosa coincidenza del caso, i punteggi delle squadre sono una serie di interi (...e vorrei vedere...) consecutivi.

La domanda è: quanti punti ha fatto l'ultima in classifica?

Come sempre, ribadiamo che *abbiamo solo la soluzione del problema*, non delle espansioni: ma ci viene da chiedere quanto, un campionato del genere, abbia tenuto i diversi tifosi sull'orlo del cardiopalma... Potrebbe succedere? Esistono diversi "percorsi"

[15] Due avverbi nella stessa frase, se detta da Rudy, vanno festeggiati: per premio, ve la spieghiamo. Non pubblicizza, non segue le partite, non festeggia. Ma si incavola di brutto (senza mostrarlo) quando perde. E no, non ha la bandiera da mettere sul balcone.

[16] Se continua il bel tempo, dopo Pasqua si ricomincia! *Estote Parati*.

[17] Nel senso che doveva essere un campionato piuttosto incasinato, data la peculiare condizione della classifica finale.

che ci portano a questo risultato? Per la vincitrice, quale potrebbe essere stata la peggior posizione?

Insomma, come diceva Gardner, "vi abbiamo bendato, dato in mano la proboscide e la coda dell'elefante, e chiesto di indovinare cos c'è in mezzo". Lui parlava dei fattoriali *grossi*, ma provare ad inventarsi qualche partita potrebbe essere buona cosa (se qualcuno vuole scrivere un PM sulle *matrici di dominanza*, ho del materiale, poco, ma basta chiedere).

2.2 Riapre "ZooM"!

Che sarebbe una piscina con i pinguini e una passeggiata con il tigre.

Allora, con calma. Trattasi di una "piscina-zoo", nei dintorni di Torino: abnorme successo di critica e di pubblico, visto che lo zoo municipale (con più animali) l'ha chiuso anni fa un sindaco con il cervello di un celenterato (senza offesa per il celenterato); qualche anno fa, ha aperto 'sta roba dove puoi fare il bagno a un vetro di distanza da pinguini curiosi o andartene in giro in costume da bagno e litigare con emù, istrici e tigri (uno solo, maschio: ci pare si chiami Fred, ma non garantiamo).

Fred (il tigre), per un certo periodo, causa ristrutturazione della meravigliosa zona nella quale al momento si trastulla, è stato temporaneamente costretto in una gabbia circolare del raggio di 10 metri; un aspirante veterinario paziente e sfaccendato ha scoperto che ogni giorno Fred si sfangava per noia una poligonale (tutte linee rette, quindi) di 30 chilometri.

L'etologo che è in Alberto (certo, è lui che "aspira"!), ha scoperto che, prendendo tutti gli angoli come positivi (sia quelli dei giri a destra che quelli dei giri a sinistra), Fred non è mai sceso sotto le 2998 radianti di rotazione/giorno.

Ma secondo voi, è Fred che ha tutta la trigonometria in testa e l'ha fatto apposta, o c'è una qualche regola?

Tranquilli, adesso è tornato nella zona del "Tempio Indiano". Fa un figurone, viene voglia di saltare il vetro e andare a fargli due coccole. Ma il veterinario-assistente-etologo sconsiglia: potreste squilibrargli la dieta.

3. Oldies and Goldies

3.1 [RM171, Aprile 2013] – "Cappotto"!

Bene, visto che come l'avevamo formulato vi ha spaventato, lo riformuliamo senza fare troppi voli pindarici.

L'idea era di avere un rettangolo di altezza A caselle e base B (caselle), con l'altezza non maggiore della base; vi si chiedeva di annerire alcune caselle e quindi scrivere, in ogni casella, il numero delle caselle annerite con cui la casella data aveva un lato in contatto (se la casella era lei tessa annerita, andava contata); il vostro scopo, veniva ad essere quello di ottenere dei "rettangoli dispari", ossia di trovare un metodo costruttivo tale che portasse ad avere tutti numeri dispari, eventualmente ripetuti.

Aiutino? Aiutino. Il metodo costruttivo (molto carino, almeno secondo noi) che abbiamo non vi permette di determinare a priori uno dei due parametri: però, con un po' di testardaggine (meglio far fare a un calcolatore) e molto tempo da perdere, è possibile generarli tutti, e vedere se uno va bene.

4. Bungee Jumpers

Nella serie:

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \cdots + \frac{1}{10^n - 1}$$

qual è il valore della trentasettesima cifra di S dopo la virgola?

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Era Una Notte Buia e Tempestosa

È abbastanza curioso che due parole così simili come “aritmetica” e “aritmia” abbiano etimologie (e anche significati) così diverse. La dolce scienza dei numeri viene infatti, con logica coerente a sé stessa, da “arithmos” (ἀριθμός), che significa appunto “numero”; “aritmia”, pur essendo anch’essa di matrice greca, è generata dall’alfa privativo che nega il “ritmo” seguente, cioè l’ordine temporale. E siccome il susseguirsi metodico dei numeri naturali una certa idea di ordine e di ritmo la dà istintivamente, il contrasto semantico è perfino più divertente.
Del resto, guardate dove siamo: dentro una rivista di (giocosa) matematica – e quindi anche di (giocosa) aritmetica – e nel bel mezzo della rubrica che più aritmica non si può, visto che non si sa mai se e quando comparirà nelle pagine di RM. Quindi è evidente che aritmetica e aritmia possono convivere serenamente.
Oltre ad essere aritmica, questa è anche una rubrica indebitata fino al collo: nata istituzionalmente per celebrare i libri (aut similia) che vengono alla luce con almeno un piccolo contributo dei lettori di RM, si ritrova indietro di molte recensioni. Basterebbe ricordare i libri di PuntoMauPunto (ma lì è un po’ anche il Codogno che se la cerca: pubblica un libro ogni cinque minuti…) o i gloriosi e-libriccini di AltraMatematica di 40K per i quali, pur prevedendo di recensirli a tre a tre, siamo riusciti a perdere il tempo giusto e ci ritroviamo indietro di circa due recensioni (ergo 2x3=6 librini).
Stavolta proviamo ad uscire in tempo, per svariate ragioni. Una, assai poco nobile ma che ha certo il suo peso, è che il “piccolo contributo” (davvero minimo minimo, ad essere onesti) di un RMer al libro recensito è proprio di uno dei tre loschi figuri che compongono la Redazione di RM. Un altro è che si tratta di un libro nobile (perdindirindina, prefazione di Umberto Eco); un altro ancora è che l’autore è un tipo simpatico. E poi anche perché l’argomento è un argomento che ci è caro quasi quanto la matematica.
Soprattutto, però, conta il fatto che è un libro che celebra un compleanno: e gli auguri di buon compleanno, si sa, vanno fatti al momento giusto.

5.1 Linus – Storia di una rivoluzione nata per gioco

«È il primo aprile 1965, e la scelta della data sembra tutto meno che casuale: fa pensare alle prese in giro, alle beffe, a una risata fatta alle spalle di chi si prende troppo sul serio. Nelle edicole italiane, tra il muro grigio dei quotidiani e la parete variopinta dei rotocalchi, spunta la copertina di “Linus”. Lo scherzo è iniziato»

Mezzo secolo è una gran bella quantità di tempo. Una quantità che pochi esseri umani riescono a contare con numeri plurali, un tempo che riempie quasi per intero una vita, e che segna forse anche una sorta di confine della memoria umana: un vecchio che racconta cose che gli sono accadute cinquant’anni prima è ancora interessante e credibile, ma se la cesura temporale cresce ancora l’ascoltatore incomincia dentro di sé a nutrire dubbi sulla consistenza dei ricordi che si sente narrare.
Ebbene, giusto cinquanta anni fa nasceva la rivista italiana con il nome da bambino. Astutamente, il bambino in questione era un bambino dei fumetti, quindi poteva permettersi il lusso di restare tale senza badare troppo al tempo che passava. Ed è grazie a questa consolidata magia (che vale certo anche per i protagonisti della letteratura, del cinema e delle arti, ma che per i fumetti vale in maniera ancora più esplicita e definitiva), che lo stesso ragazzino può campeggiare immutato sulla copertina del libro celebrativo che Paolo Interdonato ha dato alle stampe per festeggiare il genetliaco di “Linus”, la pietra miliare di tutte le riviste di fumetti italiane.

Non parleremo di Linus (rivista) né di Linus (personaggio), perché non è umanamente possibile farlo in maniera accettabile in una recensione di poche righe. E in fondo, ci salva il fatto che questa è una recensione del libro di Paolo Interdonato, non dei Peanuts di Schulz o della rivista che ha appena festeggiato il suo secondo giubileo, e la differenza è importante, perché anche se non sapremmo definire con precisione né i Peanuts né Linus, sappiamo definire con certezza cosa sia il libro di Paolo: è un libro d'amore.

Certo, occorre forse precisare che per "libro d'amore" non intendiamo un romanzo rosa come quelli che scrivevano Liala e Rosamunde Pilcher, e neppure una saga appassionata alla Twilight o maialeggiante come Cinquanta Sfumature di Grigio: per "libro d'amore" intendiamo un'opera che è stata scritta essenzialmente per dare forma e rendere tangibile l'amore che un soggetto (l'autore) ha verso un oggetto (l'argomento del libro).

Quando si è colti dalla passione verso qualcosa, si è affamati di conoscenza: si vuol sapere tutto, non esiste nulla che non sia interessante, se riguarda l'oggetto amato; al pari di ogni ispettore della Omicidi che si rispetti ("*Ci racconti tutto, signora… anche il dettaglio più trascurabile può essere importante…*"), Paolo coltiva il suo amore per le storie disegnate in maniera compulsiva, totalizzante, esuberante. Il suo amore è grande sia come estensione sia come intensità: come estensione perché è assetato di storie disegnate, di tutte le storie disegnate, basta incontrarlo per sbaglio su qualsiasi social network, e ce se ne accorge subito. A sfogliare il suo blog, poi, si capisce ancor meglio, anzi pure prima, visto che si chiama *sparidinchiostro.com* non certo per caso. Come intensità perché quando si appassiona veramente Paolo si mette a caccia di notizie, informazioni, dettagli, pettegolezzi, voci d'enciclopedia, e ne tira fuori un libro. Paolo adora le riviste di fumetti, e ha sublimato la sua passione verso la prima e maggiore rivista italiana: Linus, appunto.

Quella che ha scritto è quindi la storia completa della rivista nata tra le mura della Milano Libri, che per il solito scherzo stupido del destino ha chiuso definitivamente i battenti pochissimi giorni prima dell'uscita del libro che celebrava il suo merito maggiore. Ma è una storia scritta seriamente, perché quella di Linus è una storia seria. Lo sottolinea anche Umberto Eco, nella sua breve introduzione, palesando la sua sorpresa. "Credevamo di stare solo divertendoci", racconta l'Umberto, "e invece…" Invece si faceva storia. Storia d'arte minore, d'accordo: ma storia. E a ben vedere ci sarebbe da ridire anche sul concetto di "arte minore", visto come si sono rincorsi i cinquant'anni seguenti, e la velocità luminale con cui cambiano supporti e concetti delle arti.

Ma non è questo il punto: il punto è che nel libro non si trovano strisce e fumetti, ma si trova tutto quanto è necessario per capire come nascevano, crescevano e diventavano grandi quelle strisce e quei fumetti. Lì si raccontano le strisce nei tempi in cui sono nate, e siccome i tempi sono importanti, c'è tutto un affresco, un paesaggio raccontato da parole e da dati per capire com'era Milano, gli intellettuali, l'Italia e il mondo intero, in quegli anni.

E tutto per raccontare la Storia attraverso una storia. Con parole e disegni, tenendosi stretti ad una coperta rassicurante mentre si sbirciano le tavole in bianco e nero dove campeggia nuda la Valentina di Crepax.

Resta da spiegare quale sia la parentela che corre tra "*Linus – Storia di una Rivoluzione nata per gioco*" e Rudi Mathematici, che poi è la scusa che ci permette di parlare del libro in questa rubrica.

Nel raccontare vita e miracoli della rivista, Paolo Interdonato ha dovuto affrontare anche un oggetto abbastanza insolito, per un esperto di fumetti: la "Pagina di Wutki". Si tratta di una rubrica in cui un misterioso autore, celato appunto sotto l'allonimo di Wutki, si librava liberamente a parlare di giochi: giochi di natura varia, enigmi allo stato brado, non solo logici e matematici, ma anche logici e matematici. Paolo Interdonato è segugio esperto, ed è riuscito a trovare notizie sufficienti per descrivere con dovizia di particolari sia chi si celasse dietro il misterioso nome di Wutki, sia tutte le altre notizie sulla rubrica. Restava però con una questione irrisolta, ovvero quale potesse essere la ragione, il link – tanto per usare una parola che ai tempi di Wutki non era certo di moda – tra una rivista dedicata ai fumetti e i giochi che questa ospitava in una rubrica fissa. Per cercare di risolvere il quesito, Paolo ha intervistato i massimi esperti italiani di giochi ed enigmistica, come Ennio Peres e Alessandro Bartezzaghi; ma proprio come l'ispettore della Omicidi già citato, non si è accontentato del massimo, e ha continuato a chiedere anche ad altri, ed giunto perfino a chiedere la nostra opinione.

La questione irrisolta, naturalmente, è rimasta tale, e non poteva essere altrimenti: Linus era rivista rivoluzionaria e di libertà, e non aveva certo bisogno di giustificare alcunché al suo popolo di lettori. Ciò non di meno, noi abbiamo abbozzato via mail la nostra opinione a Paolo, e a Paolo la nostra lettura è piaciuta, al punto che ci cita nei suoi "Appunti" finali, e addirittura ha pubblicato per intero la nostra mail, che riempie tronfia d'orgoglio tutta la terzultima pagina del libro.

Paolo Interdonato ha detto che come minimo ci deve una birra[18]: noi, per contro, siamo abbastanza certi di essere noi in debito con lui. Ma non glielo faremo certo sapere.

[18] A proposito di birra: la maniera migliore di avere una copia del libro è, come sempre, andare ad una delle presentazioni che fa l'autore stesso. Paolo sta in giro a promuovere il libro, e sul suo blog o sulla sua pagina facebook non sarà difficile scoprire quale sia il luogo e il momento migliore. Ciò detto, qualora chi legge fosse di Torino, e qualora questo numero di RM uscisse in tempo (cosa che è tutt'altro che certa), sappiate che una presentazione torinese avverrà il 21 Aprile presso la caffetteria Blah Blah di via Po 21, in un orario che è vagamente descrivibile solo come 20:00±0:30. È probabile che sarà quello il luogo in cui Paolo salderà il conto della birra, e quindi è verosimile che ci sia anche (almeno) un redattore di RM, nelle vesti di creditore.

Titolo	Linus
Sottotitolo	Storia di una rivoluzione nata per gioco
Autore	Paolo Interdonato
Editore	Rizzoli Lizard
microconslulenza	Piotr R. Silverbrahms
Data Pubblicazione	Aprile 2015
Prezzo	20 Euro
ISBN	9788817080408
Pagine	384

6. Soluzioni e Note

Aprile!

Siamo – purtroppo – in ritardo sufficiente da poterci risparmiare auguri di buona Pasqua, ma – per fortuna – anche per potervi ringraziare dei numerosi auguri che abbiamo ricevuto per la Pasqua e per il genetliaco della nostra ormai antica e stanca Alice. Grazie a tutti.

Non ci perdiamo in ciance e andiamo diretti alle soluzioni che abbiamo ricevuto.

6.1 [195]

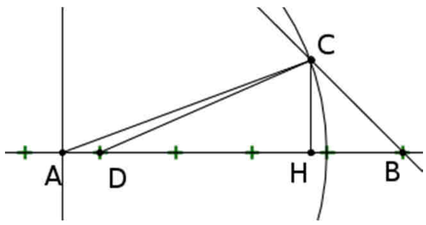
6.1.1 Solito tre per due

Anche questo mese la rubrica degli "Oldies and Goldies" ha colpito.

Vediamo di cosa si trattava:

> *Nel* PM *di* RM195 *si discettava delle costruzioni approssimate degli n-agoni regolari, con due metodi: il Rinaldini e il Bardin; con questo ultimo metodo, se n è il numero di lati del poligono da tracciare, l'errore è:*
>
> $$l=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-8n+48-(n-6)\sqrt{n^2-4n-4}}$$
>
> *E questa è giustappunto la formula che vi chiediamo di dimostrare.*

Più per fare un regalo alla sottoscritta che altro, ***Gnugnu*** si è premurato di risolvere questo problema anche se secondo lui "*la costruzione è semplice ed efficace, ma i passaggi per ricavare l'espressione algebrica sono nulla più di un noioso esercizio scolastico*". Ecco, senza porre ulteriore tempo in mezzo, la soluzione di ***Gnugnu***:

> Con riferimento alla figura basta applicare il teorema di Pitagora ai triangoli AHC e DHC dove H è la proiezione di C sulla retta AB.
>
> 
>
>
> Per semplificare i calcoli utilizziamo l'unità di misura tale che il raggio della circonferenza misuri n, ciascuna delle n suddivisioni del diametro avrà lunghezza 2, la distanza AB misurerà n+2 e DB=8.
>
> Essendo la retta CB inclinata di 45° rispetto ad AB, è, a condizione che sia n>4, altrimenti la retta non interseca la circonferenza, CH=HB=x,.
>
> Deve quindi essere:

dal triangolo AHC, $n^2=(n+2-x)^2+x^2$ e

dal triangolo DHC, $l^2=(8-x)^2+x^2=2(x-4)^2+32$.

Dalla prima si ottiene:

$$0=2x^2-2(n+2)x+4n+4 \;\rightarrow\; x=\frac{n+2\pm\sqrt{n^2-4n-4}}{2} \;\rightarrow\; x-4=\frac{n-6-\sqrt{n^2-4n-4}}{2},$$

dove la soluzione col segno '+' non è stata considerata, perché corrisponde all'intersezione retta-circonferenza più lontana da B.

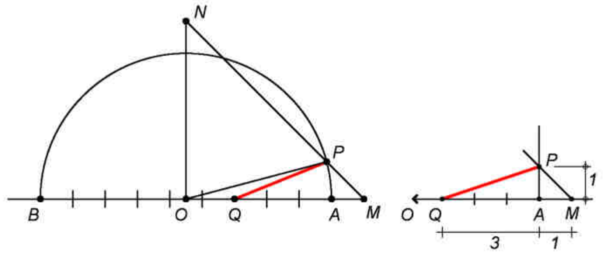
Sostituendo $x-4$ la seconda eguaglianza diventa:

$$l^2=2\frac{n^2-12n+36+n^2-4n-4-2(n-6)\sqrt{n^2-4n-4}}{4}+32=n^2-8n+48-(n-6)\sqrt{n^2-4n-4}.$$

Da cui il rapporto (approssimato) fra il lato dell'n-agono ed il raggio della circonferenza circoscritta, ricordando che r misura n:

$$\frac{l}{r}=\frac{\sqrt{n^2-8n+48-(n-6)\sqrt{n^2-4n-4}}}{n}.$$

Ma non finisce qui: ci ha scritto anche ***trentatre***, per dire la sua:



La dimostrazione della formula, che fornisce non <u>l'errore</u> ma <u>il lato</u> del poligono, è un semplice problema di geometria analitica. In figura tutti i punti sono noti salvo P, intersezione di una retta con un cerchio. In formule, con poligono di n lati, cerchio di raggio unitario, coordinate Oxy

coord. punti : $x_M = y_N = (n+2)/n,\ x_Q = (n-6)/n,\ y_M = x_N = y_Q = 0$

cerchio : $x^2 + y^2 = 1$

retta MN : $x + y = (n+2)/n$

intersezione P : $x_P = (n+2+s)/2n,\ y_P = (n+2-s)/2n$ con $s=\sqrt{n^2-4n-4}$

lato : $l_n{}^2 = QP^2 = (x_P - x_Q)^2 + y_P{}^2 = (n^2-8n+48-(n-6)\,s)/n^2$ da cui

[1] $l_n = (1/n)\sqrt{n^2-8n+48-(n-6)\sqrt{n^2-4n-4}}$.

Il valore <u>esatto</u> del lato dell' n-agono è

[2] $l_n{}^* = 2\sin(\pi/n)$.

Più interessante della formula è capire come funziona la costruzione, esatta per i valori

a) $n=6$: il raggio è diviso in 3 parti, Q ed O coincidono, e qualsiasi P sul cerchio dà la soluzione corretta

$l_6 = l_6{}^* = 6/n = 1$

b) $n\rightarrow\infty$ (figura a destra) : le parti valgono $2/n$, rispetto a queste il cerchio tende alla retta AP e

$l_n \to (2/n)\sqrt{3^2+1^2} = 2\sqrt{10}/n$, mentre $l_n^* \to 2\pi/n$ con un errore

$\varepsilon_n = l_n - l_n^* \to 2(\sqrt{10}-\pi)/n = 0{,}04137/n \to 0$.

Le tre parti in *QA* forniscono dunque da un lato il risultato esatto per $n=6$ e dall'altro una buona approssimazione di π, migliorata dal fattore 1/*n*.

Risulta quindi naturale applicare la costruzione ai valori intermedi.

Nell'intervallo $n = 6 \ldots \infty$ la funzione $n \cdot l_n^* = 2n\sin(\pi/n)$ è monotona crescente fra i valori, molto prossimi, 6 e 2π; il metodo sostituisce questa funzione con il radicale della [1], che non è monotono, ma presenta per l'errore i massimi $\varepsilon_{10} = -0.00105$, $\varepsilon_{49} = 0.000387$; l'errore assoluto massimo è quindi dell'ordine di 1/1000 (come riportato in tabella da Ghersi).

Resta una curiosità: Bardin, chi era costui? Era *monsieur Libre-Irmond Bardin* – detto *Bardin de la Moselle* (1794-1867), militare, topografo, insegnante post-rivoluzionario (basta il nome) e autore di trattati di geometria descrittiva. Lo imparo da *Gallica*, il sito internet della BnF (*Bibliothèque nationale de France*) che presenta in forma digitale (*pardon*: *numèrique*) tutto lo scibile umano, e oltre.

E questo è quanto. Complimenti a ***Gnugnu*** e ***trentatre***, che hanno mandato il Capo in brodino di giuggiole.

6.2 [193]

Il mese scorso mi lamentavo che le soluzioni scarseggiavano, e tra marzo e … metà aprile (!) si è parlato solo di bottiglie.

6.2.1 Ancora bottiglie!

Ecco un problema ispirato da quello del mese precedente con bottiglie inscatolate. Questa volta le bottiglie si trovano su un piano:

> *Le bottiglie sono tutte diverse: per semplicità, assumeremo i loro raggi (di base, approssimandole a cilindri) siano pari a* 1, 2, 3, ..., *n: man mano che vengono consumate, sono posate sul balcone in modo tale da poggiare tutte sul pavimento piegate su un fianco. Questa struttura occupa un certo spazio che vorremmo minimizzare. Come risolvere il problema per n pari a* 20*?* 50*?*

Il mese scorso pubblicavamo la prima soluzione di ***Sawdust***, nel frattempo ne sono arrivate molte altre, tutte complesse e divertenti. Cosa facciamo? Pubblichiamo tutto, no? Anzi, non proprio: un lettore – ***Paolo*** – si diletta di programmazione in excel, e ci ha inviato un bel programma di simulazione. Ci abbiamo un po' giocato, ma non sapendo come pubblicarlo in rivista abbiamo deciso di tenerlo tutto per noi. ***Paolo*** sta creando anche un sito, che al momento è in fase di ristrutturazione, e non appena sarà pronto, vi daremo i riferimenti.

Chi ha passato praticamente un mese a rotolare bottiglie è ***BR1***, che conosciamo bene per le sue estensive analisi dei nostri problemi più difficili. Prima di vedere la sua soluzione, però, vorremmo dare la parola ad un altro grande esperto di questa sezione: ***trentatre***.

> Riprendo il problema (difficile, non 2 pipe ma 3,4,5 ...); omaggi a ***Sawdust*** che ne ha tentato una soluzione. Ho provato a condire la sua empirica minestra con un pizzico di algebra.
>
> Le "bottiglie" sono cerchi di raggio $(1,2,3,\ldots N)$ accostati; la distanza orizzontale di una coppia contigua di cerchi di raggio *a*, *b* è data da $\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2} = 2\sqrt{ab}$.
>
> Conoscendo la soluzione, cioè la sequenza $P_N = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ dei cerchi, la distanza è data da

[1] $L_N = p_1 + p_N + 2\sum_{n=1}^{N-1}\sqrt{p_n p_{n+1}}$.

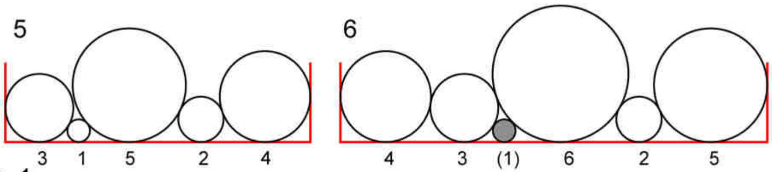


fig. 1

In fig. 1 le soluzioni $P_5 = (3,1,5,2,4)$ e $P_6 = (4,3,6,2,5)$ con $L_5 = 26.918$, $L_6 = 37.666$. In $N = 6$ lo "spazio" fra (3) e (6) è abbastanza grande da "nascondere" il cerchio (1) che pertanto non compare nella sequenza e non contribuisce alla [1] - che va applicata alle coppie di cerchi tangenti.

Se, dato N, i cerchi nascosti finali (cioè gli spazi che li ospitano) sono $(1,2,\ldots s)$, i cerchi da ordinare sono i restanti $(s+1, s+2 \ldots N)$. Il processo comporta a) il calcolo di P_N ordinando $(s+1, s+2 \ldots N)$ - che dipende da s, e b) il calcolo di s - che dipende da P_N. E' quindi un complicato processo ricorsivo.

Semplifico (non troppo) la questione trattando non <u>i cerchi</u>, ma <u>le permutazioni</u> (saltando dalla geometria ma cadendo nell'aritmetica).

Se $A_N = (1,2,3\ldots N)$ è la permutazione base di N interi, e $B_N = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ la permutazione di A_N che rende minima la [1], i primi valori sono

[2]

B_3	2	1	3					
B_4	2	4	1	3				
B_5	3	2	5	1	4			
B_6	3	5	1	6	2	4		
B_7	4	3	6	1	7	2	5	
B_8	4	6	2	8	1	7	3	5

.

$A_N \to B_N$ si ottiene per scambi fra termini adiacenti (a,b) con la funzione $\sqrt{ab}$ crescente in a e b. Quindi contano i valori <u>relativi</u> e non i valori <u>assoluti</u> . Ne seguono alcune proprietà delle B_N (v. note alla fine) fra cui

• fra 4 termini (a,b,c,d) consecutivi (in senso ciclico) vale la

[3] se $a > d$ allora $b < c$ e viceversa

- questo determina completamente le B_N (a meno di rotazioni e riflessioni)

• indicando con

$B_N = A_N *$: il processo $A_N \to B_N$

$A_N + m$: la aggiunta dell'intero m a tutti i termini di A_N vale

[4] $(A_N + m)* = A_N * + m = B_N + m$

- cioè gli operatori * e $+m$ sono commutabili

p.es. $(4,5,6,7) = A_4 + 3$ si ordina in $B_4 + 3 = (5,7,4,6)$.

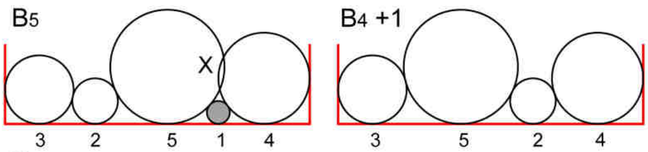


fig. 2

Le B_N non sono le soluzioni, come si vede già da
$B_5 = (3,2,5,1,4)$. In fig. 2, i cerchi (5) e (4) sono in "conflitto" in X a causa di (1); questo non è ammesso e lo spazio (5,4) va' allargato nascondendo (1); i cerchi residui $(2,3,4,5) = A_4 + 1$, per avere L minimo, vanno riordinati in $B_4 + 1 = (3,5,2,4)$; ma qui (1) non può essere nascosto, e va inserito con il minimo aumento di L, fra (3) e (5); si arriva così alla soluzione corretta di fig. 1.
Nel caso B_6 si ha un conflitto in $(5,1,6)$; rimuovendo (1) e riordinando si ha $B_5 + 1 = (4,3,6,2,5)$ che è la soluzione poiché (1) si può nascondere in (3,6).

In generale il processo è
- A_N va divisa in due parti $A_M = (1,2,\dots M)$, $C = (M+1, M+2, \dots N) = A_{N-M} + M$ tali che $C^* = B_{N-M} + M$ non abbia conflitti
- sia ora $(1,2,\dots m)$ l'insieme dei termini che si possono nascondere in C^*
- se $m = M$, C^* è la soluzione
- se $m < M$ i termini restanti $(m+1, m+2, \dots M)$ vanno inseriti in C^* con il minimo aumento di L
- M e m dipendono solo da N e si possono calcolare (v. formule alla fine) con $M = \lfloor (N-1)/4 \rfloor$, $m = \lfloor (5N+3)/32 \rfloor$.

Il processo può essere gestito, con un programma, anche per N grandi.

Per $N = 20$
- $M = 4$, $m = 3$
- in $C_{16}^* = B_{20-4} + 4$ va inserito (4) e si ha la soluzione
- in dettaglio

$C_{16}^* = B_{20-4} + 4 = (12,14,10,16,8,18,6,20,5,19,7,17,9,15,11,13)$

$C_{17}^* = (12,\boldsymbol{4},14,10,16,8,18,6,20,5,19,7,17,9,15,11,13)$ con $L_{20} = 374.066$

(nb. nella sua soluzione ***Sawdust*** dà $L_{20} = 376.286$ da correggere in 382.138).

Per $N = 50$
- $M = 12, m = 7$
- in $C_{38}^* = B_{50-12} + 12$ vanno inseriti $(8,9,10,11,12)$ e si ha

$$C_{43}^* = (31,\boldsymbol{12},33,29,\boldsymbol{10},35,27,\boldsymbol{8},37,25,39,23,41,21,43,19,45,17,47,15,49,\\ 13,50,14,48,16,46,18,44,20,42,22,40,24,38,26,36,\boldsymbol{9},28,34,\boldsymbol{11},30,32)$$

con $L_{20} = 2278.231$.

Per altri N le lunghezze L_N sono

10	98.486	60	3267.318 .
20	374.066	70	4441.147
30	830.964	80	5787.394
40	1463.223	90	7319.250
50	2278.231	100	9021.940

Il rapporto fra L_N e la somma dei diametri $N(N+1)$ è quasi costante (fra $89.06 \dots 89.90\,\%$).

Se dovete riporre 100 bottiglie di diametro fra 1 cm (si chiamano fiale) e 100 cm (si chiamano botti) sappiate che il balcone deve essere lungo almeno 45 metri.

dimostrazioni

• ordiniamo $A_N{*} = B_N = (p_1, p_2, ..., p_N)$ rendendo minima la somma ciclica (inclusi gli estremi)

$L = \sum_{cicl} \alpha(p_n, p_{n+1})$ dove $\alpha(a,b) = \beta(a) \cdot \beta(b)$ con $\beta(x)$ crescente con x

- in ogni gruppo di 4 elementi (a,b,c,d) scelto in B_N , L non deve aumentare con lo scambio $b \leftrightarrow c$, cioè

$\alpha(a,b) + \alpha(b,c) + \alpha(c,d) < \alpha(a,c) + \alpha(c,b) + \alpha(b,d)$ da cui

$(\beta(a) - \beta(d)) \cdot (\beta(b) - \beta(c)) < 0$ e quindi per $\beta(x)$ crescente

[5] $a > d \Leftrightarrow b < c$ e viceversa (cioè la [3])

I primi B_N (invarianti per inversioni e rotazioni) si possono scrivere

[6] B_3 1 2 3
B_4 1 3 2 4
B_5 1 4 3 2 5
B_6 1 5 3 4 2 6
B_7 1 6 3 4 5 2 7
B_8 1 7 3 5 4 6 2 8

e sono di fatto gli stessi di [2].

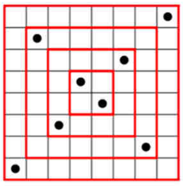


fig. 3

• in fig. 3, per $B_8 = (p_1, p_2, ... p_8)$ disegniamo le coppie (n, p_n) in ascissa e ordinata; in ogni cornice quadrata ci sono due punti in posizione diagonale alternata. Ogni quadrato contiene uno e un solo punto per ogni riga e colonna (negli scacchi sono otto torri che non si attaccano fra di loro); aggiungendo una cornice vanno aggiunti due punti che possono stare solo nei vertici, ma per rispettare [5] lo schema deve proseguire a diagonali alternate; quindi

- i B_N sono determinati completamente dalla [5]

- B_N si ottiene da B_{N-2} aumentando di 1 tutti i termini, aggiungendo N e 1 all'inizio e alla fine e invertendo, cioè in formula $B_N = (N, B_{N-2} + 1, 1)^{inv}$

- B_N si ottiene da $(1,2,3,... N)$ scambiando i termini di posto pari con i simmetrici (nel caso $8 : 2 \leftrightarrow 7, 4 \leftrightarrow 5$)

- la forma [2] si ha dalla [6] ordinata con primo e ultimo termine $q = \lfloor (N+1)/2 \rfloor, q+1$

• la [5] vale per ogni sequenza $S = (s_1, s_2, ... s_N)$ a termini crescenti (anche non interi e non positivi); quindi

- $S{*}$ è dato da $A_N{*} = B_N$ con le sostituzioni $1 \to s_1, 2 \to s_2, 3 \to s_3$ ...

- la proprietà [4] è un caso particolare della precedente.

formule

Una permutazione *P*, vista come sequenza di cerchi, presenta "spazi" fra le coppie (*a*,*c*) che possono nascondere un cerchio di raggio (*b*) intero, e "conflitti" nelle terne (*a*,*b*,*c*) in cui (*a*) e (*c*) si intersecano.

- (*b*) è uno spazio in (a,c) e genera un conflitto in (a,b,c) se $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}<\sqrt{ac}$ cioè

[8] $b < f(a,c)$ con la funzione

[9] $f(x,y)=xy/(x+y+2\sqrt{xy})=(x^{-1/2}+y^{-1/2})^{-2}$

valgono per la parte intera le identità

[10] $\lfloor f(x,x)\rfloor=\lfloor f(x,x+1)\rfloor=\lfloor f(x,x+2)\rfloor=\lfloor x/4\rfloor$

- siano, per ogni *P*, *M* il max spazio e *K* il max conflitto; si ha

i. A_N : $\boxed{M=\lfloor (N-1)/4\rfloor}$, $K=0$

ii. B_N : $M=\lfloor (N+1)/8\rfloor$, $K=\lfloor N/5\rfloor$

iii. $B_{N-a}+a$: $M=\lfloor (N+a+1)/8\rfloor$, $K=\lfloor (N+a)/5\rfloor$

iv. $B_{N-a}+a$ è <u>priva di conflitti</u> se $a\ge\lfloor (N-1)/4\rfloor$

Per $C^*=B_{N-M}+M$ senza conflitti occorre togliere $(1,2,\ldots M)$, con $M=\lfloor (N-1)/4\rfloor$, cioè <u>tutti gli spazi</u> di A_N

- lo spazio max in *C** è quindi $m=\lfloor (N+M+1)/8\rfloor$ con $M=\lfloor (N-1)/4\rfloor$ da cui $\boxed{m=\lfloor (5N+3)/32\rfloor}$

- tutti i termini $(1,2,\ldots M)$ tolti si possono nascondere nelle $(N-M)$ coppie di C^* .

Le formule si ricavano dalle proprietà delle coppie e delle terne consecutive in *P*; riporto qualche esempio.
M si ha fra la coppia (*u*,*v*) con il max prodotto uv

A_N : $(u,v)=(N-1,N)$, da[8] e [10] $M=\lfloor f(u,v)\rfloor=\lfloor (N-1)/4\rfloor$

B_N : $(u,v)=(q,q+1)$ con $q=\lfloor (N+1)/2\rfloor$ da cui $M=\lfloor q/4\rfloor\to M=\lfloor (N+1)/8\rfloor$.

In B_N le terne (*a*,*b*,*c*) con $b < a,c$ sono del tipo $(N-b,b,N-b+2)$; da [10] si ha un conflitto se

$b\le\lfloor f(N-b,N-b+2\rfloor=\lfloor (N-b)/4\rfloor$ che si risolve in $b\le\lfloor N/5\rfloor$ da cui il valore max $K=\lfloor N/5\rfloor$.

- se *b* è inserito a forza fra (a,c) la variazione di lunghezza ΔL vale

$\Delta L=\sqrt{ac}\cdot(\sqrt{b/f(a,c)}-1)$

- la distanza [1] si può ottenere dalla forma [6] con

[7] $L_N=2L_N{}^\circ+h(N)$ dove

$L_N{}^\circ=\sum_{cicl}\sqrt{p_n\cdot p_{n+1}}$, $h(N)=(2q+1)-2\sqrt{q(q+1)}$ con $q=\lfloor (N+1)/2\rfloor$

($q,q+1$ sono il primo e ultimo termine in [2]).

- $h(N)$ non contribuisce all'ordinamento, e può essere aggiunto a parte.

Ecco. Vi sembra di aver capito tutto? Adesso la parola a ***Br1***, che si è dato molto da fare.

Allora, vediamo un po': ho faticato non poco prima di capire come ridurre il ***Problema della Bottiglie*** da ***Problema a Tempo Esponenziale*** (o, *peggio*, a

Tempo Fattoriale) ad un ***Problema a Tempo Polinomiale***, quindi trattabile in modo accettabile con un qualche algoritmo computazionale che non esplodesse dopo una piccola crescita del numero di bottiglie… Qui di seguito la storia della mia travagliata ricerca.

Cominciamo con alcuni *fondamenti* di ***Bottigliologia sul Balcone dei Rudi***; non dimostro per esteso le varie formulette che seguono, le quali derivano da semplici considerazioni geometriche ampiamente alla portata degli eventuali sporadici lettori.

Date due bottiglie ***adiacenti*** (cioè tangenti fra loro come la **A** e la **B** della ***Figura 1*** qui sotto), la distanza fra i punti di tangenza delle bottiglie col piano del balcone (distanza orizzontale fra i centri delle bottiglie) è data da:

$$1) D_{AB} = 2\sqrt{R_A R_B}$$

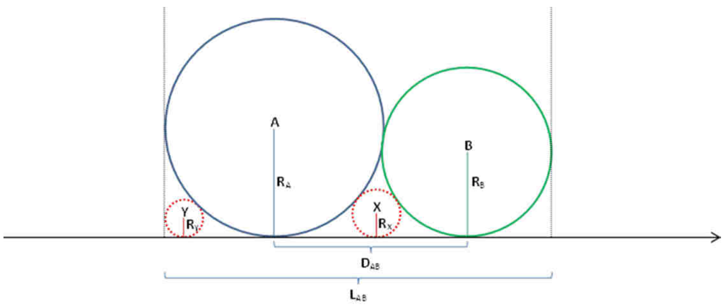


Figura 1

Lo spazio complessivo, chiamiamolo ***estensione***, occupato sul balcone dalle sole bottiglie **A** e **B** di ***Figura 1*** è dato da:

$$2) L_{AB} = R_A + 2\sqrt{R_A R_B} + R_B$$

Fra due bottiglie ***adiacenti*** è sempre presente una *nicchia*, uno *spazio*, con estremi a forma di *cuspide* (un ***buco***), nel quale è potenzialmente possibile inserire un'eventuale ulteriore bottiglia. Il raggio massimo possibile per quest'ultima, denominata **X** nella ***Figura 1***, è dato da:

$$3) R_X = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{R_A}} + \frac{1}{\sqrt{R_B}}\right)^2}$$

Poiché $\mathbf{R_X}$ è quasi[19] sempre un numero irrazionale, per restare nei termini del problema interesserà la parte intera di $\mathbf{R_X}$.

Se pensassimo di incastonare nel ***buco*** formato dalle bottiglie **A** e **B** una *ulteriore bottiglia* di raggio *inferiore* ad $\mathbf{R_X}$, quest'ultima non influirebbe sulla ***estensione*** complessiva $\mathbf{L_{AB}}$ (poiché nel buco ci *starebbe comoda*; nel senso che non *costringerebbe* le bottiglie **A** e **B** a distanziarsi fra loro per ospitarla). Questa ulteriore bottiglia sarebbe quindi ***escludibile*** dai calcoli della ***estensione*** complessiva di tutte le bottiglie che staremmo esaminando.

Se invece pensassimo di interporre fra le bottiglie **A** e **B** una *ulteriore bottiglia* di raggio *superiore* ad $\mathbf{R_X}$ (chiamiamola **Z**), questa *si dovrebbe fare largo* spingendo un po' più a sinistra ed a destra rispettivamente **A** e **B**, come da ***Figura 2*** che segue:

[19] *Quasi*, non *sempre*… Ad esempio, con $\mathbf{R_A=36}$ ed $\mathbf{R_B=9}$ si ha $\mathbf{R_X=4}$.

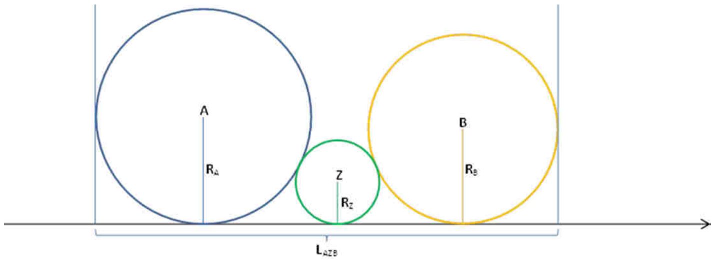


Figura 2

Per questo terzetto di bottiglie, l'estensione complessiva sarebbe data da:

$$4) L_{AZB} = R_A + 2\sqrt{R_A R_Z} + 2\sqrt{R_Z R_B} + R_B$$

Le dimensioni di un ***buco*** crescono al crescere di una o entrambe le bottiglie ***adiacenti*** che lo formano; dato quindi un insieme di **N** bottiglie, il massimo ***buco*** possibile è quello che si ottiene rendendo ***adiacenti*** le due bottiglie più grandi, cioè:

$$5) R_{X_{Max}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N-1}}\right)^2} < \frac{N}{4}$$

La 5) fornisce implicitamente, dato **N**, il massimo numero teoricamente possibile di bottiglie ***escludibili***, quelle cioè che sarebbe possibile infilare nei ***buchi*** formati da un sottoinsieme di bottiglie di maggior raggio, senza far incrementare l'***estensione*** complessiva

Se si cerca di utilizzare la 4) interponendo fra le bottiglie **A** e **B** una bottiglia **Z** *troppo piccola* (cioè una bottiglia ***escludibile***), si rischia di prendere grosse cantonate: la 4) fornisce infatti l'***estensione*** *impropria* di una sequenza di bottiglie in cui due di esse si compenetrano, come in ***Figura 3*** qui sotto. L'espressione giusta da utilizzare è in questi casi invece la 2), che esclude appunto la bottiglia **Z** e fornisce un valore numerico maggiore di quello dato dalla 4)

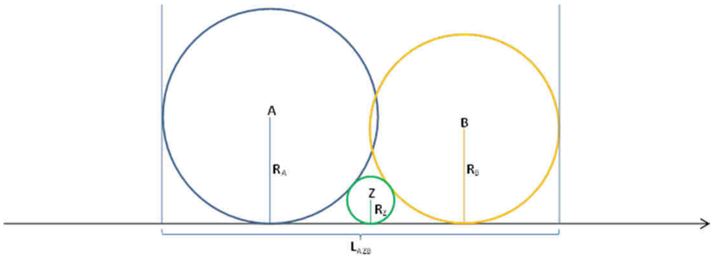


Figura 3

Oltre ai ***buchi*** presenti fra ciascuna coppia di bottiglie ***adiacenti***, esistono altre due potenziali posizioni per bottiglie ***escludibili***, agli estremi sinistro e destro del balcone. La ***Figura 1*** mostra la prima di esse, denominata **Y**, il cui raggio massimo è dato da:

$$6) R_Y = R_A\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

Nella pratica, questi ulteriori ***buchi*** non sono mai necessari per il piazzamento delle bottiglie ***escludibili***, per cui saranno ignorati

Si prendano adesso tre qualsiasi bottiglie ***adiacenti*** **A**, **B** e **C**, rispettivamente di raggio $\mathbf{R_A}$, $\mathbf{R_B}$ ed $\mathbf{R_C}$, e sia ad esempio $\mathbf{R_A<R_B<R_C}$. Queste bottiglie possono essere disposte in sequenza in tre soli modi significativamente[20] diversi fra loro: **ABC**, **ACB**, **BAC**; poniamo inoltre che in nessuno dei tre casi la bottiglia centrale sia ***escludibile***.

[20] Le altre tre sequenze speculari (**CBA**, **BCA** e **CAB**) non interessano, poiché producono gli stessi risultati delle prime tre, semplicemente procedendo da destra verso sinistra anziché il contrario.

Adesso, se si valutano le ***estensioni*** delle tre sequenze **ABC**, **ACB** e **BAC** si può dimostrare che:

$$7)\begin{cases} L_{ABC} > L_{ACB} \\ L_{ABC} > L_{BAC} \end{cases}$$

Le 7) sono essenziali, per il problema delle bottiglie; mostrano infatti che una sequenza *ordinata* crescente (o decrescente) di 3 bottiglie è ***il peggio che si possa fare*** se lo scopo è il ridurre al minimo l'***estensione*** complessiva. Si può dire che convenga *sempre* interporre una bottiglia maggiore fra due minori, oppure una minore fra due maggiori, in modo *alterno*

Se l'obiettivo del problema fosse invece il ***massimizzare*** l'***estensione*** complessiva di un insieme di **N** bottiglie, sarebbe quindi facile; basterebbe disporle tutte in ordine progressivo, da **1** ad **N**; ogni terzetto di bottiglie ***adiacenti***, comunque scelto, potrebbe infatti essere *compresso* scambiando di posto una coppia.

Si definisce allora la quantità $\mathbf{L_0}$, intesa come massima ***estensione*** possibile per un insieme di **N** bottiglie. Si ha che:

$$8) L_0 = 1 + \sum_{K=1}^{N-1} 2\sqrt{K(K+1)} + N$$

Qualsiasi altra combinazione delle **N** bottiglie avrà estensione $\mathbf{L_N}$ inferiore ad $\mathbf{L_0}$, per cui:

$$9) r_N = \frac{L_N}{L_0} \leq 1$$

L'introduzione del rapporto $\mathbf{r_N}$ dato dalla 9) risulta utile se si vogliono confrontare fra loro soluzioni relative a valori diversi di **N**

Tornando alle 7), se si cerca di estendere il concetto a più di 3 bottiglie le cose si complicano. Le 7) affermano che, date tre bottiglie ***adiacenti***, conviene *non* piazzarle in successione crescente o decrescente per minimizzarne l'***estensione***, bensì *alternate*. Ma non precisano se al centro della sequenza convenga porre la bottiglia maggiore oppure quella minore in raggio.

Si può vedere che un riposizionamento *locale*, realizzato invertendo di posto una coppia di bottiglie ***adiacenti***, talvolta si riflette *globalmente* o comunque ampiamente sull'intera sequenza.

Per chiarire questo aspetto, consideriamo ancora le tre bottiglie **A**, **B** e **C** di cui sopra in sequenza crescente (sempre ipotizzando che sia $\mathbf{R_A<R_B<R_C}$), ma adesso immaginiamole affiancate a sinistra ed a destra da due ulteriori bottiglie, di raggio arbitrario $\mathbf{R_S}$ ed $\mathbf{R_D}$, come mostrato qui sotto in ***Figura 4***:

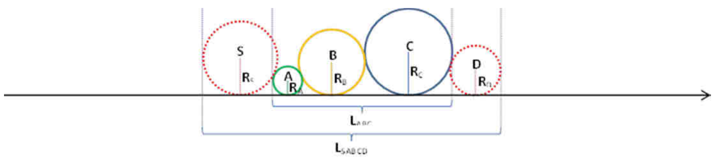


Figura 4

Se consideriamo *fisse* come posizione le bottiglie **S** e **D**, cerchiamo il *miglior* posizionamento di **A**, **B** e **C** in modo da *non peggiorare* l'***estensione*** ***complessiva*** $\mathbf{L_{S...D}}$; si può dimostrare che:

$$10)\begin{cases} L_{SABCD} > L_{SACBD} \ \textit{solo se } R_D > R_A \\ L_{SABCD} > L_{SBACD} \ \textit{solo se } R_C > R_S \end{cases}$$

Vediamo cosa significhi la prima delle 10); se invertiamo fra loro le bottiglie **B** e **C** partendo dalla situazione di ***Figura 4***, miglioriamo sì *localmente* la sequenza **ABC**, ma rischiamo di compromettere un insieme più esteso di bottiglie, semmai capitasse che $\mathbf{R_D<R_A}$ (e *può* succedere; $\mathbf{R_S}$ ed $\mathbf{R_D}$ sono infatti *arbitrari…*). La situazione dopo lo scambio fra le bottiglie **B** e **C** è mostrata nella seguente ***Figura 5***, con a sinistra ed a destra rispettivamente i due casi $\mathbf{R_D>R_A}$ e $\mathbf{R_D<R_A}$:

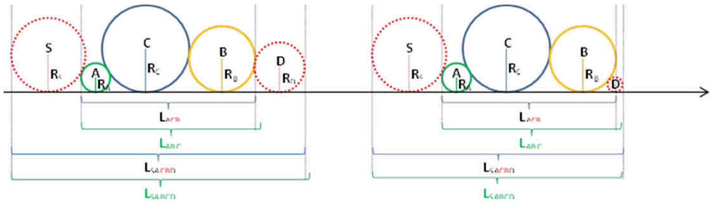


Figura 5

In verde sono mostrate le estensioni delle sequenze di **3** e **5** bottiglie preesistenti allo scambio **B-C**; in entrambe i casi (ovviamente, grazie alla prima delle 7) la sequenza **ACB** ha ***estensione*** inferiore della originaria **ABC**. Ma mentre nel primo caso l'***estensione*** della sequenza complessiva si riduce, nel secondo invece si accresce!

Ciò capita perché in entrambe i casi, con lo smantellare la sequenza crescente **ABC**, se ne è creata un'altra decrescente **CBD**, *localmente* peggiore della preesistente **BCD**, che era invece *alternante*. Mentre nel primo caso il vantaggio acquisito nel passare da **ABC** ad **ACB** è superiore alla perdita dovuta al passaggio **BCD → CBD**, nel secondo caso avviene il contrario… Non è quindi sempre vero che un azione *locale* vantaggiosa si rifletta in un accorciamento dell'***estensione*** complessiva.

Considerazioni analoghe possono essere fatte per la seconda delle 10). Restando a quanto si vede dalla ***Figura 5***, la mossa successiva sarebbe in entrambe i casi quella di scambiare le bottiglie **B** e **D**, per trasformare la sequenza *locale* decrescente **CBD** in quella *alternante* **CDB**. Ma anche qui occorre attenzione: lo scambio **B-D** può avere conseguenze negative sulle bottiglie che eventualmente seguono **D** sulla destra, e richiedere ulteriori riaggiustamenti per mantenere alternante la sequenza complessiva.

Tutto ciò mostra che un qualsiasi piccolo ritocco *locale* alla sequenza complessiva può avere ripercussioni che si propagano fino agli estremi della sequenza; non è quindi possibile, operando con valori elevati di **N**, risolvere il problema spezzando la sequenza complessiva in tronconi più piccoli su cui agire più agevolmente: l'insieme delle **N** bottiglie va considerato comunque *in toto*.

Morale di tutta la discussione di cui sopra è che sembra complesso individuare uno o più criteri che permettano di trovare le soluzioni migliori in modo strettamente analitico… L'alternativa inizialmente rimasta è stata la *forza bruta*: cioè la stesura di una serie di programmini capaci di analizzare, per ogni **N**, sterminati elenchi di combinazioni di bottiglie, in cerca di quelle con ***estensione*** minima.

Ho proceduto per *assunzioni progressive*, al crescere di **N**, cercando via via di far tesoro delle soluzioni di ordine inferiore per ridurre il numero delle combinazioni da esaminare, in modo che il tempo di elaborazione fosse ragionevole (massimo qualche ora, per ciascun valore di **N**). Nel seguito, una sintesi dei passi seguiti ed i relativi risultati, fino alla (presunta) soluzione ***a Tempo Polinomiale***…

<u>Passo_0</u>

Il programmino ***Passo_0*** esamina ***tutte*** le **N!/2**[21] combinazioni possibili di **N** bottiglie e, badando bene a non far intrecciare bottiglie in sequenze *compenetrantesi*, cerca la soluzione di minore ***estensione***. Per un dato **N**, ***Passo_0*** oltre a cercare la soluzione di ordine **N** fa anche un'altra cosa: genera, salvandole in un secondo file, tutte le combinazioni relative all'ordine **N+1**, da esaminare successivamente. Fare questo è relativamente semplice: consideriamo ad esempio le **3** combinazioni non speculari relative al caso **N=3**, e cioè **1-2-3**, **1-3-2** e **3-1-2**. Per ciascuna di esse, inseriamo un **4** in tutte le posizioni possibili, ed il gioco è fatto:

[21] **N!/2** e non **N!**, per escludere le riflessioni di sequenze, che portano agli stessi risultati.

1-2-3 → 4-1-2-3, 1-4-2-3, 1-2-4-3, 1-2-3-4

1-3-2 → 4-1-3-2, 1-4-3-2, 1-3-4-2, 1-3-2-4

3-1-2 → 4-3-1-2, 3-4-1-2, 3-1-4-2, 3-1-2-4

Il *piccolo* problema di quest'approccio è che i files contenenti gli elenchi di combinazioni da esaminare crescono rapidamente di dimensione; per **N=12** siamo già a **3 GB**, ed il successivo sarebbe ingestibile. Comunque, con qualche trucchetto supplementare ***Passo_0*** è stato in grado di funzionare fino ad **N=14**, e i risultati sono i seguenti:

N	Miglior Sequenza	Estensione	Estensione Relativa
1	01	2,000000	1,000000
2	02-01	5,828427	1,000000
3	02-01-03	11,292529	0,962918
4	02-04-01-03	18,120956	0,921923
5	03-01-05-02-04	26,917647	0,909384
6	04-03-01-06-02-05	37,666243	0,906434
7	04-01-06-02-07-03-05	50,120595	0,902817
8	05-04-01-07-02-08-03-06	64,293832	0,899435
9	05-01-07-02-09-03-08-04-06	80,102687	0,895472
10	06-05-01-08-04-10-03-09-02-07	97,881733	0,894496
11	06-01-08-05-10-03-11-04-09-02-07	117,326324	0,892875
12	07-02-10-04-12-03-11-05-09-01-06-08	138,529993	0,891550
13	08-07-02-10-05-12-04-13-03-11-01-06-09	161,536647	0,890691
14	08-02-10-06-12-05-14-04-13-03-11-01-07-09	186,368566	0,890256

Per ***estensione relativa*** si intende la quantità descritta nella 9). Per ragionare sui risultati, conviene adottare una esposizione grafica; ho preferito delle rappresentazioni *colonnari* delle soluzioni, anziché *circolari*, poiché mi sembrano di più facile interpretazione. Per ogni **N**, ciascuna colonnina della ***Figura 6*** qui sotto rappresenta una bottiglia, e la sua altezza è pari al raggio della bottiglia stessa:

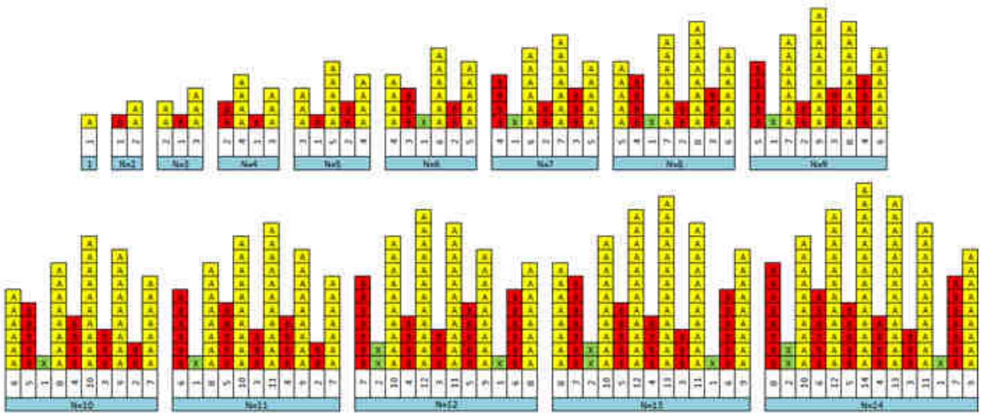


Figura 6

Passo_0 non fa alcuna distinzione fra le bottiglie, si limita come detto ad esaminare *tutte* le **N!/2** combinazioni in cerca della migliore per cui (salvo clamorosi errori di programmazione), quelle mostrate rappresentano *sicuramente* le soluzioni ottimali fino ad **N=14**, senza che sia stata fatta nessuna *assunzione semplificativa*. La colorazione delle varie colonnine è stata in questi **14** casi eseguita *a posteriori*, in base all'esame delle soluzioni stesse; i colori hanno il seguente significato:

le bottiglie ***verdi***[22] sono quelle ***escludibili***, e che cioè trovano posto in ***buchi*** di dimensioni maggiori delle bottiglie stesse. ***Passo_0*** le considera ancora tutte nei

[22] Si sarebbe dovuto scrivere: "*le colonnine verdi rappresentano bottiglie che…*". Per semplicità espositiva, da qui in avanti si identificano le bottiglie con le colonnine che le rappresentano.

calcoli (cosa che non faranno i programmini a partire da ***Passo_1***), e le piazza a casaccio in alcuni dei ***buchi*** in grado di ospitarle senza influire sull'***estensione*** complessiva

detto **E** il numero di bottiglie ***verdi***, le rimanenti ***valide*** per i calcoli **V=N-E** possono essere in numero pari o dispari:

se **V** è pari:

le **V/2** bottiglie di raggio maggiore sono dette bottiglie ***alte*** (o ***gialle***)

le rimanenti **V/2** bottiglie sono dette bottiglie ***basse*** (o ***rosse***)

se **V** è dispari:

le **int[V/2] + 1** bottiglie di raggio maggiore sono ancora dette bottiglie ***alte*** (o ***gialle***)

le rimanenti **int[V/2]** bottiglie sono ancora dette bottiglie ***basse*** (o ***rosse***)

Dalla ***Figura 6*** si può osservare che, tralasciando le bottiglie ***verdi***, le rimanenti ***alte*** e ***basse*** formano *sempre* una sequenza *alternante*. Questo è in linea con quanto visto in precedenza: le bottiglie più piccole tendono ad *infilarsi* fra quelle ***alte***, che a coppie disgiunte formano fra di esse i ***buchi*** nei quali le ***basse*** si incastrano.

Nel seguito, per *metà* delle bottiglie si intenderà il numero generico di bottiglie ***alte*** o ***basse***, quindi approssimato di un'unità per le ***alte*** quando **V** è dispari.

<u>Passo_1</u>

Il successivo programmino ***Passo_1*** fa tesoro di quanto visto sopra, e ricerca soluzioni per **N>14** in base alle due seguenti *assunzioni semplificative*:

Assunzione_1: è possibile escludere dai calcoli alcune delle bottiglie di raggio inferiore, da **1** ad **E**

Assunzione_2: le bottiglie ***alte*** e ***basse*** sono sempre disposte in modo *alternante*

Per ciascuno dei due gruppi di bottiglie ***alte*** e ***basse***, ***Passo_1*** esamina tutte le **(V/2)!** combinazioni, analizzando l'estensione di ciascuna possibile sequenza *alternante*. Il numero totale di sequenze considerate è dell'ordine di **[(V/2)!]²**, il che comporta ancora una crescita fattoriale del tempo di elaborazione al crescere di **N**, però su valori inferiori rispetto a ***Passo_0***. Ciò permette di compiere *appena* 3 passi avanti, e di arrivare come segue ad **N=17**:

N	Miglior Sequenza	Estensione	Estensione Relativa
15	09-08-02-11-03-13-05-15-04-14-06-12-01-07-10	212,9793	0,889915
16	09-02-11-03-13-06-15-04-16-05-14-07-12-01-08-10	241,2435	0,889183
17	10-03-15-04-17-05-16-06-14-07-13-01-08-12-02-09-11	271,2872	0,888610

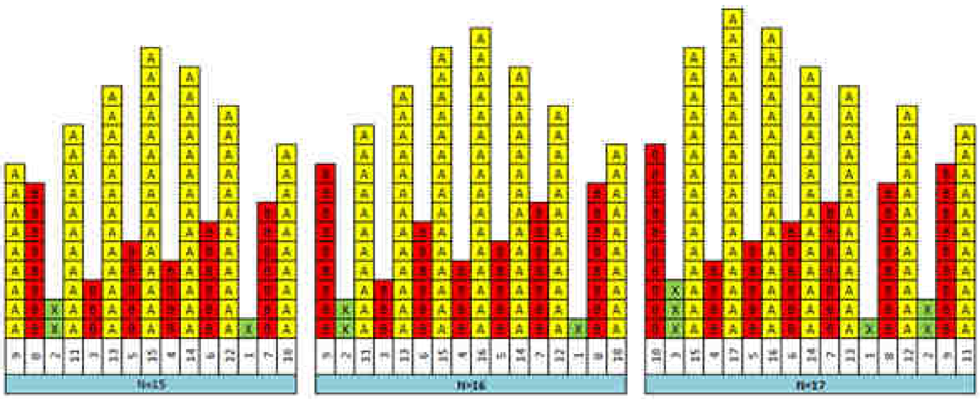


Figura 7

Nonostante lo scarso progresso, osservando la disposizione delle bottiglie ***alte*** (assieme a quelle per i valori di **N** precedenti) si nota che quella di raggio maggiore si trova *sempre* in una qualche posizione intermedia, mentre le altre degradano senza mai risalire verso destra e verso sinistra. Ciò si spiega perché questa disposizione rende i ***buchi*** formati dalle bottiglie ***alte*** i più grandi possibile, per poi consentire alle bottiglie ***basse*** di inserirsi al meglio fra le ***alte***.

Passo_2, Passo_3, Passo_4

I programmini successivi si basano progressivamente sulle seguenti *assunzioni*:

Assunzione_3: ***Passo_2*** dispone le bottiglie ***alte*** in base alla precedente osservazione che la maggiore è in posizione intermedia e le altre degradano ai lati, in tutti i possibili modi. Per le ***alte***, il numero di combinazioni da esaminare si riduce da **(V/2)!** a $2^{V/2-1}$, mentre le combinazioni delle ***basse*** restano **(V/2)!**. Il tempo di elaborazione cresce quindi come $2^{V/2-1}(V/2)!$

Assunzione_4: ***Passo_3*** migliora leggermente le prestazioni di ***Passo_2***, in base alle osservazioni che la maggiore delle ***basse*** si trova *sempre* all'estrema sinistra, e la minore delle ***alte*** *sempre* all'estrema destra[23]. Il tempo di elaborazione cresce adesso come $2^{(V-1)/2-1}[(V-1)/2]!$

Assunzione_5: *Passo_4* si basa sul notare che (dalle soluzioni fino ad **N=28**) le bottiglie ***alte*** si dispongono *sempre* secondo una configurazione a *Duomo di Milano* ***(DdM)***, con due consecutive di esse che non distano mai in raggio più di **2** unità:

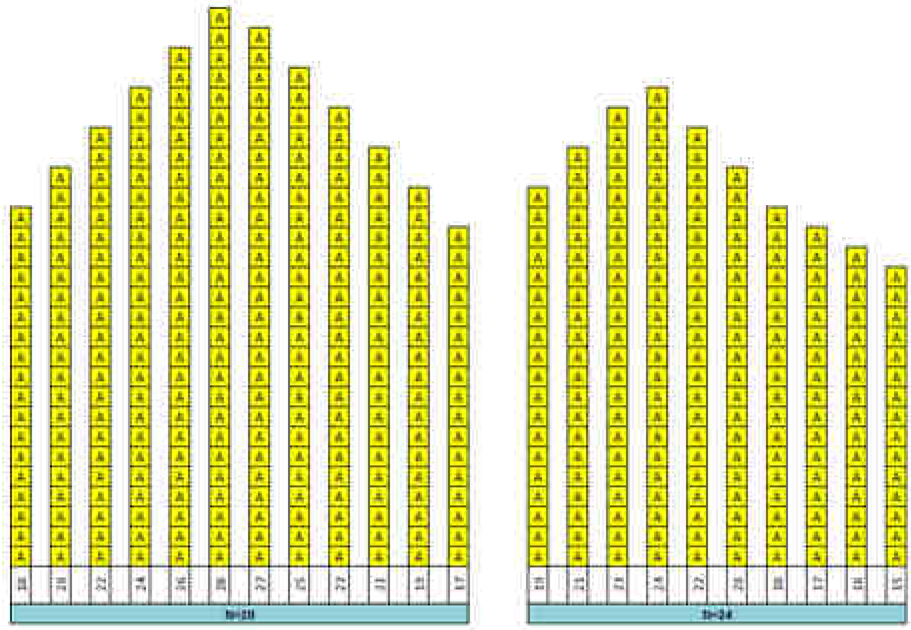


Figura 8

La maggioranza dei **DdM** sono *quasi* perfettamente regolari (come quello a sinistra in ***Figura 8***); ogni tanto però ne spunta fuori uno *sbilenco*, come quello di destra, valido per **N=24**.

Tralasciando per il momento i **DdM** *sbilenchi*, il fatto che le bottiglie ***alte*** distino in raggio **1** o **2** si *potrebbe* spiegare come segue:

supponiamo di piazzare inizialmente tutte le bottiglie ***alte***, partendo dalla più grande (e riservandoci le ***basse*** per una fase successiva), con lo scopo di creare ***buchi*** delle maggiori dimensioni possibili

posizioniamo quella di raggio **N** al centro del balcone; la successiva, di raggio **N-1**, può essere indifferentemente sistemata a destra o a sinistra della prima, in quanto il ***buco*** da esse creato sarà identico. Diciamo che la piazziamo a destra, come la bottiglia di raggio **27** nell'esempio di sinistra di ***Figura 8***

[23] Ciò capita per come le bottiglie vengono ordinate nel selezionare le varie combinazioni, escludendo quelle speculari.

la terza, di raggio **N-2**, se affiancata alla prima genera un ***buco*** di raggio *lievemente superiore* a quello che viene fuori affiancandola alla seconda; quindi sembrerebbe conveniente porla a sinistra della prima, come per la bottiglia di raggio **26** dell'esempio

procedendo con quelle di raggio via via inferiore, sempre in base all'idea che *convenga* generare buchi il più possibile grandi, le bottiglie successive andrebbero piazzate alternativamente a destra e sinistra, generando configurazioni **DdM** regolari. La differenza in raggio sarebbe quindi **1** fra la prima e la seconda piazzate, poi sempre **2** fino al termine del procedimento

In realtà, questo ragionamento che *renderebbe* conto della struttura dei **DdM** regolari si scontra con un'altra considerazione: supponiamo di aver già collocato in qualche modo tutte le bottiglie ***alte***, e di dover adesso procedere con le ***basse***. Assumiamo poi che, per una qualsiasi di quest'ultime di raggio $\mathbf{R_X}$, vi sia la possibilità di scegliere fra il ***buco*** formato dalle ***alte*** di raggio **K** e **K-1**, e quello formato da quelle di raggio **K** e **K-2**; si dimostra facilmente che è *sempre* vero che:

$$11) L_{R_K R_X R_{K-1}} < L_{R_K R_X R_{K-2}}$$

Ciò vuol dire che, se le bottiglie ***basse*** *potessero scegliere*, *preferirebbe*ro avere a disposizione bottiglie ***alte*** tutte distanti un'unità in raggio fra esse. Ciò è in completa contraddizione con quanto sopra precedentemente esposto per la struttura dei **DdM** regolari, ma è in accordo con quanto si osserva per la coda dei **DdM** *sbilenchi*. Ad esempio, il **DdM** *sbilenco* di ***Figura 8***, dal momento in cui inizia ad essere tale (cioè a partire dall'inserimento della bottiglia ***alta*** di raggio **17**), rispetta la regola implicita nella 11), e lo stesso capita per tutti i **DdM** *sbilenchi* che si hanno fino ad **N=28**.

Sembrerebbe quindi che l'anomalia sia costituita dai **DdM** regolari, e dalla parte regolare dei **DdM** *sbilenchi*; in attesa di dipanare l'arcano, ***Passo_4*** considera *tutti* i **DdM** , regolari e no, col solo vincolo aggiuntivo rispetto ***Passo_3*** che la distanza fra i raggi delle bottiglie ***alte*** sia *sempre* pari ad **1** o a **2**. Ciò riduce il numero di combinazioni di bottiglie ***alte*** da esaminare da $\mathbf{2^{(V-1)/2-1}}$ a **V/2-1**, per cui il tempo di elaborazione di ***Passo_4*** cresce, al crescere del numero **N** delle bottiglie, come **(V/2-1)[(V-1)/2]!**.

Passo_2, ***Passo_3*** e ***Passo_4*** soffrono ancora del fatto di operare a ***Tempo Fattoriale***, ma comunque consentono nel complesso di raggiungere in tempi ragionevoli il valore **N=38**, con i risultati che seguono:

N	Miglior Sequenza	Estensione	Estensione Relativa
18	10-01-12-09-02-14-07-16-06-18-05-17-04-15-08-13-03-11	303,1702	0,888333
19	11-03-14-08-16-07-18-05-19-06-17-04-15-02-09-13-01-10-12	336,8171	0,888076
20	12-11-03-14-09-01-16-08-18-06-20-05-19-07-17-04-15-02-10-13	372,2274	0,887834
21	12-03-14-10-01-16-09-18-07-20-06-21-05-19-08-17-04-15-02-11-13	409,3748	0,887550
22	13-12-03-15-04-17-09-19-05-21-06-22-07-20-08-18-01-10-16-02-11-14	448,3701	0,887458
23	13-03-15-04-17-10-19-05-21-07-23-06-22-08-20-09-18-02-11-16-01-12-14	489,0752	0,887262
24	14-04-19-05-21-08-23-06-24-07-22-09-20-10-18-11-17-02-12-16-03-13-01-15	531,5317	0,887057
25	14-02-16-13-03-18-11-20-10-22-08-24-07-25-06-23-09-21-05-19-01-12-17-04-15	575,7513	0,886866
26	15-04-18-12-01-20-11-22-09-24-08-26-07-25-06-23-10-21-05-19-03-13-17-02-14-16	621,7949	0,886774
27	16-15-04-18-13-02-20-12-01-22-10-24-09-26-07-27-08-25-06-23-11-21-05-19-03-14-17	669,6220	0,886707
28	16-04-18-14-01-20-13-02-22-11-24-10-26-08-28-07-27-09-25-06-23-12-21-05-19-03-15-17	719,1743	0,886590
29	17-05-24-11-26-09-28-08-29-07-27-10-25-06-23-12-22-13-21-02-14-20-03-15-19-04-16-01-18	770,4911	0,886477
30	17-03-19-05-21-14-01-23-06-25-11-27-07-29-08-30-09-28-10-26-12-24-13-22-04-15-20-02-16-18	823,6118	0,886412
31	18-05-23-06-25-12-27-07-29-09-31-08-30-10-28-11-26-13-24-02-14-22-01-15-21-03-16-20-04-17-19	878,4891	0,886339
32	18-02-20-17-04-22-15-01-24-14-26-12-28-11-30-09-32-08-31-10-29-07-27-13-25-06-23-03-16-21-05-19	935,1141	0,886250
33	19-05-22-16-02-24-15-01-26-13-28-12-30-10-32-09-33-08-31-11-29-07-27-14-25-06-23-04-17-21-03-18-20	993,5066	0,886167
34	20-19-05-22-17-02-24-16-03-26-14-28-13-30-11-32-10-34-09-33-08-31-12-29-07-27-01-15-25-06-23-04-18-21	1053,7253	0,886138
35	20-05-22-18-02-24-17-03-26-15-28-14-30-12-32-11-34-09-35-10-33-08-31-13-29-07-27-01-16-25-06-23-04-19-21	1115,6921	0,886093
36	21-06-28-15-30-13-32-12-34-10-36-09-35-11-33-08-31-14-29-07-27-16-26-17-25-03-18-24-04-19-01-23-05-20-02-22	1179,4085	0,886036
37	21-04-23-06-25-18-02-27-07-29-15-31-08-33-12-35-09-37-10-36-11-34-13-32-14-30-16-28-01-17-26-04-19-24-03-20-22	1244,8842	0,885976
38	22-06-27-07-29-16-31-08-33-13-35-09-37-10-38-11-36-12-34-14-32-15-30-02-17-28-03-18-26-01-19-25-04-20-24-05-21-23	1312,1584	0,885939

Nella tabella (per evitar di riportare la rappresentazione colonnare di tutte le sequenze) si sono colorati i numeri rappresentativi dei raggi delle bottiglie con le stesse convenzioni utilizzate nelle ***Figure 6*** e ***7*** e, per ogni riga, il valore **N** è riportato con carattere di corpo maggiore. Se la rappresentazione colonnare forma un **DdM** *sbilenco*, il valore **N** è anche in ***grassetto sottolineato***, ed è tipicamente decentrato.

Finora, si è operato per ***Passi*** successivi agendo sostanzialmente sempre con riduzioni del numero di combinazioni di bottiglie ***alte***, fino ad avere per esse una crescita lineare (cioè proporzionale a **V/2-1**) al crescere di **N**. Per le ***basse***, poco o nulla si è riusciti a fare, soprattutto perché queste non presentavano quasi mai configurazioni sufficientemente regolari, tali cioè da evidenziare una tendenza chiara. Se si osservano le ***Figure 6*** e ***7*** più sopra, si vede che le altezze delle colonnine ***rosse*** vanno su e giù quasi a casaccio, con rari casi in cui mostrano una tendenza di costante crescita o decrescita (ad esempio, per **N=17** e **N=14**, rispettivamente). Gli stessi fenomeni di irregolarità continuano a verificarsi anche per gli altri valori di **N** fino a **38**, ma stavolta la tabella qui sopra riportata contiene le informazioni che servono per il successivo ***Passo Finale***.

Passo_5

Nell'affrontare la disposizione delle bottiglie ***basse***, cominciamo col prendere come riferimento un **DdM** a casaccio (regolare o *sbilenco* che sia), precedentemente costruito in base alle considerazioni fatte sopra; ad esempio quello valido per **N=28**, ripreso dalla ***Figura 8*** e riprodotto tre volte qui sotto nella ***Figura 9***:

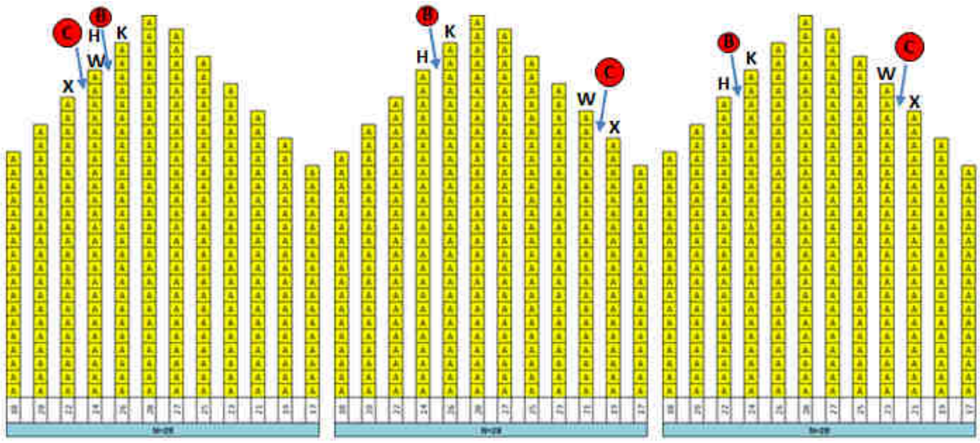


Figura 9

Vogliamo inserire le due bottiglie ***basse*** di raggio $\mathbf{R_B}$ ed $\mathbf{R_C}$ (con $\mathbf{R_B<R_C}$) nei due ***buchi*** formati rispettivamente dalle bottiglie ***alte*** di raggio $\mathbf{R_K}$ ed $\mathbf{R_H}$ il primo, $\mathbf{R_W}$ ed $\mathbf{R_X}$ il secondo.

Nella scelta delle bottiglie ***alte***, si possono verificare i seguenti casi e sotto-casi:

- $\mathbf{R_K>R_H=R_W>R_X}$ con $\mathbf{R_K-R_H=1}$ o $\mathbf{R_K-R_H=2}$, ed $\mathbf{R_W-R_X=1}$ o $\mathbf{R_W-R_X=2}$ (a sinistra in ***Figura 9***)
- $\mathbf{R_K>R_H>R_W>R_X}$ con $\mathbf{R_K-R_H=1}$ o $\mathbf{R_K-R_H=2}$, $\mathbf{R_H-R_W>0}$ ed $\mathbf{R_W-R_X=1}$ o $\mathbf{R_W-R_X=2}$ (al centro in ***Figura 9***; in questo caso i due ***buchi*** possono trovarsi *indifferentemente* sullo stesso *versante* del **DdM** oppure su versanti *opposti*)
- $\mathbf{R_K=R_W+1=R_H+1=R_X+1}$ (a destra in ***Figura 9***; in questo caso i due ***buchi*** devono trovarsi *necessariamente* su *versanti* opposti del **DdM**)

Per come sono definiti i raggi delle bottiglie ***alte***, si verifica facilmente che il ***buco*** formato da quelle di raggi $\mathbf{R_K}$ ed $\mathbf{R_H}$ è sempre maggiore di quello formato da quelle di raggi $\mathbf{R_W}$ ed $\mathbf{R_X}$.

Ebbene, con l'ipotesi aggiuntiva che in nessun inserimento le bottiglie ***basse*** diventino ***escludibili***, si può dimostrare che in *tutti* i casi e sotto-casi possibili risulta *sempre*:

$$12) L_{R_K R_B R_H} + L_{R_W R_C R_X} < L_{R_K R_C R_H} + L_{R_W R_B R_X}$$

In parole povere, la 12) significa che, dati due ***buchi*** e due bottiglie ***basse***, è *sempre* meglio piazzare la più piccola delle ***basse*** nel ***buco*** più grande.

E qui, il problema sarebbe (*quasi*) chiuso, ma con due aspetti ancora da approfondire, entrambe correlati alle fastidiosissime bottiglie ***escludibili…*** Il primo di questi due aspetti è il seguente: fissato un valore di **N**, non è possibile (almeno per me) stabilire *a priori* quante (**E**) siano precisamente in numero le bottiglie ***escludibili***. Sappiamo, dalla 5), che sono al più **N/4-1**, ma il numero esatto che determina la configurazione di *minima* ***estensione*** sembra insondabile…

Per i primi **38** valori di **N** finora esaminati, **E** *ottimo* è empiricamente risultato pari a:

0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 5, 4, 5, 4, 5, 5, 5, 6, 5, 6

Vediamo che, al crescere di **N**, il valore di **E** *ottimo* si incrementa *in media* di un'unità ogni *circa* **6** incrementi di **N**; ma nel passaggio da un valore di **E** al successivo questo può oscillare su e giù più volte…

Se **E** non è noto *a priori* prima di decidere quante e quali siano le **V=N-E** bottiglie ***valide*** per generare le **V/2-1** bottiglie ***alte*** e ***basse***, non è possibile elencare le sequenze da esaminare…

Passo_5, allora, adotta un approccio pragmatico, e lavora come segue:

- per ciascun valore di **N**, definisce un intervallo di **5** potenziali valori per **E**, centrato intorno al valore di **E** risultato ottimo per **N-1**. Ad esempio, per **N=31**, *ricorda* che per **N=30** il valore di **E** ottimo era stato **4** (quello sottolineato nella sequenza qui sopra riportata), e quindi presuppone che il nuovo valore ottimo possa essere **2**, **3**, **4**, **5** o **6**
- per ciascuno dei **5** valori *di tentativo* di **E**, ***Passo_5*** genera poi le **V/2-1** sequenze di bottiglie ***alte***, conformate a **DdM** regolare o *sbilenco*
- per ciascun **E** *di tentativo*, e per ciascuna delle **V/2-1** sequenze di bottiglie ***alte***, vi è *una sola possibile sequenza di bottiglie* ***basse***: quella che, in base alla 12), assegna alla più piccola delle bottiglie ***basse*** il ***buco*** maggiore, e poi in sequenza il maggior ***buco*** rimasto libero alla più piccola delle rimanenti bottiglie ***basse***, per tutte quest'ultime
- ma, attenzione! Se la più piccola delle bottiglie ***basse*** risulta inferiore in raggio al ***buco*** maggiore (per quel particolare **E** *di tentativo*, e per quella particolare sequenza di bottiglie ***alte***), allora vuol dire che la bottiglia ***bassa*** in questione diventa ***escludibile***, ed il complesso "**E** *di tentativo*-sequenza specifica di bottiglie ***alte*** -bottiglia ***bassa***" è privo di significato, e va scartato. Allora teniamo da parte per il momento la bottiglia più ***bassa***, e tentiamo con quella immediatamente superiore. La più piccola delle bottiglie ***basse*** sarà collocata poi nel più grande dei ***buchi*** residui che non la rende ***escludibile***

Con quest'approccio, ***Passo_5*** lavora con tempo di esecuzione che cresce grosso modo come **N²**, quindi (*finalmente!*) ***a Tempo Polinomiale***. ***Passo_5*** ritrova fedelmente tutti i risultati ottenuti dai precedenti programmini (a conferma della validità dell'algoritmo), e può spingersi facilmente oltre in poco tempo. In particolare, ritrova la soluzione per **N=20** (richiesta dal testo del Problema e già elencata nella terza riga della tabella precedente):

12-11-03-14-09-01-16-08-18-06-20-05-19-07-17-04-15-02-10-13

come pure trova quella per **N=50**:

29-08-36-23-04-38-21-40-20-42-18-44-17-46-15-48-14-50-13-49-12-47-16-45-11-43-19-41-10-39-22-37-09-35-24-34-03-25-33-05-26-32-06-27-01-31-07-28-02-30

In pochi minuti, si ottengono tutti i risultati fino ad **N=254**[24]; è interessante l'evoluzione dell'***estensione relativa*** delle sequenze ottime (quella espressa dalla 9), mostrata nella ***Figura 10*** che segue, assieme ai valori ottimi di **E**:

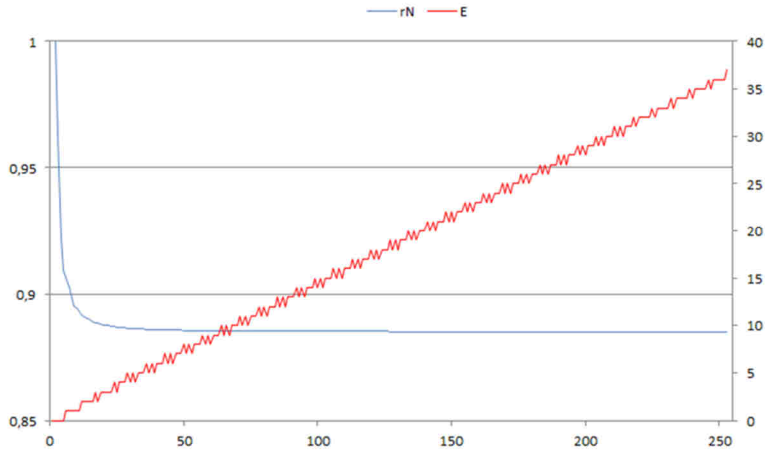


Figura 10

Sembrerebbe che $\mathbf{r}^{\mathbf{N}}$ tenda ad un limite definito al crescere di **N** (gli ultimi due valori differiscono meno di **2** parti su **10** milioni), ma la curva non approssima soddisfacentemente né un esponenziale, né una potenza.

Per quel che riguarda **E**, si vede che l'oscillare su e giù prima di render definitivo un incremento è un fenomeno costante (che però pare attenuarsi al di sopra di **N=215**). Ancora su **E**, per ciascun **N** ***Passo_5*** genera soluzioni per al più **3** valori di tentativo, per cui l'intervallo di **5** scelto per l'esecuzione del programmino appare più che adeguato.

Ed è tutto (appendice a parte…)

Appendice? Ma ancora? Ebbene sì, non vorrete mica perdervi l'appendice di ***Br1***. Noi ve la riportiamo, naturalmente.

Appendice: DdM regolari e sbilenchi

Restano aperte un paio di questioni:

- perché alcuni **DdM** sono regolari ed altri *sbilenchi*?
- perché **E** aumenta con **N** in modo travagliato?

Cominciamo dal primo quesito: nell'ultima tabella riportata, si nota che esistono numerosi ***terzetti*** di bottiglie che si ripetono per più valori di **N**; sono rappresentati a fondo scuro nella tabella. Ad esempio, la sequenza **19-05-21** la troviamo (così ordinata oppure invertita) per tutti i valori da **N=21** ad **N=28**, poi scompare per **N=29**, riappare per **N=30**, manca nuovamente per **N=31**, e quindi riappare un'ultima volta per **N=32**, per scomparire definitivamente da **N=33** in poi.

Cerchiamo di spiegare perché ciò avvenga, e come sia in relazione con i **DdM** regolari e *sbilenchi*:

- quando si passa ad un nuovo valore di **N**, la prima bottiglia ***alta*** collocata (appunto quella di raggio **N**) viene poi sempre affiancata dalle due successive bottiglie ***alte*** di raggio **N-1** ed **N-2**. Si vengono quindi a creare due nuovi ***buchi*** che per valori inferiori di **N** non potevano esistere, e il cui raggio, ricordando la 3), è dato da:

[24] Non mi sono spinto oltre non per questioni di tempo di elaborazione, bensì per non dover ridefinire come ***integer*** tutte le variabili ***byte***, eccetera…

$$13)\begin{cases} R_{B1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}} + \dfrac{1}{\sqrt{N-1}}\right)^2} \\ R_{B2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}} + \dfrac{1}{\sqrt{N-2}}\right)^2} \end{cases}$$

Se si studiano analiticamente le due funzioni espresse dalle 13), si vede che entrambe presentano un asintoto obliquo per **N** crescente; si ha cioè che:

$$14)\begin{cases} \lim_{N\to\infty} R_{B1} = \lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}} + \dfrac{1}{\sqrt{N-1}}\right)^2} \approx \dfrac{N}{4} - \dfrac{1}{8} \\ \lim_{N\to\infty} R_{B2} = \lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{N}} + \dfrac{1}{\sqrt{N-2}}\right)^2} \approx \dfrac{N}{4} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Si vede, dalla seconda delle 14), che ogni **4** incrementi di **N** il valore del ***buco*** formato dalle bottiglie di raggio **N** ed **N-2** si avvicina sempre più ad un *valore intero*, restandone sempre *un pelino* al di sotto. Già con i primi valori significativi di **N** si ottengono valori interessanti:

$$14)\begin{cases} N = 5 \to R_{B2} \approx 0{,}95 \\ N = 9 \to R_{B2} \approx 1{,}97 \\ N = 13 \to R_{B2} \approx 2{,}98 \\ N = 17 \to R_{B2} \approx 3{,}99 \end{cases}$$

Gli altri **3** valori di $\mathbf{B_2}$ che spuntano fuori ogni **4** incrementi di **N**, così come tutti i **4** valori generati dalla prima delle 14) per $\mathbf{B_1}$, tendono invece a mantenersi ben distanziati da numeri interi, con differenze che al crescere di **N** convergono rapidamente a **0,25** o **0,50** per $\mathbf{B_2}$, e **0,125** o **0,375** per $\mathbf{B_1}$.

Quindi: ogni **4** incrementi di **N** *nascono* **8** nuovi ***buchi***; uno di quelli generati da coppie **N & (N-2)** assume valore *quasi* intero. Chiameremo i buchi dotati di questa caratteristica ***buchi quasi perfetti***.

- Vediamo adesso cosa accade quando *nasce* un ***buco quasi perfetto***; per esempio quando si arriva ad **N=21**, con la creazione del ***buco*** di raggio **4,99** formato dalle bottiglie di raggio **21** e **19**. Supponiamo di arrivare al completamento della disposizione delle bottiglie ***alte***, per passare al collocamento delle ***basse*** nei ***buchi*** appena realizzati, e di star esaminando il valore *di tentativo* **E=3**. Come visto sopra, la prima bottiglia ***bassa*** da sistemare è la più piccola, che deve occupare il ***buco*** più grosso a disposizione, ed ha raggio **E+1=4** nell'esempio in esame.

  I due nuovi buchi generati dall'apparizione della bottiglia **N=21** son quelli formati dalle coppie **N & (N-1)** e **N & (N-2)**; il primo ha raggio **5,12**, il secondo, come visto, **4,99**. Ma allora in nessuno di essi possiamo piazzare la bottiglia di raggio **4**, che altrimenti diventerebbe escludibile invalidando la sequenza! Né possiamo piazzare la successiva bottiglia di raggio **5** nel buco **N & (N-1)**, per la stessa ragione. Quella di raggio **5** calza invece quasi a pennello nel ***buco quasi perfetto***

- si è quindi creato il ***terzetto*** **21-05-19**, che ottimizza l'utilizzo del ***buco*** formato dalle bottiglie di raggio **21** e **19**. Continuando con la stessa sequenza, ci si accorge che anche la bottiglia di raggio **4** è incastonata in un ***buco quasi perfetto***, a formare il ***terzetto*** **17-04-15**, apparso in precedenza per la prima volta con **N=17**, ed è ora spostato lateralmente rispetto al primo. Si vede dalla tabella che i **terzetti** appaiono per la prima volta (ovviamente) in corrispondenza della vetta del **DdM** (la *Madunina*…), per poi migrare sempre più lateralmente, ora a destra, ora a sinistra della massima bottiglia presente nel **DdM**

- i ***terzetti*** presentano sempre differenza di raggio **2** fra le bottiglie ***alte*** che li formano; secondo la 11), i ***terzetti*** non dovrebbero esistere: ma la loro estrema efficienza in termini di ***estensione*** (e soprattutto il fatto che lo spostare la bottiglia ***bassa*** in un qualsiasi ***buco*** maggiore la renderebbe ***escludibile*** invalidando la sequenza) li rendono *robustissimi*. Perciò, una volta creati, tendono a sopravvivere a lungo per valori via via superiori di **N**, scivolando via via verso il basso lungo uno i versanti dei **DdM**
- cosa essenziale, la presenza di un ***terzetto*** su un *versante* del **DdM** *obbliga* le bottiglie ***alte*** che si trovano sull'altro *versante* (più o meno alla stessa altezza) ad essere anch'esse distanziate di **2** unità in termini di raggio. Vediamo meglio ciò dal solito esempio per **N=28** (ed **E=4**), stavolta rappresentato con anche le bottiglie ***basse*** (ma *non* le escluse, che creano confusione…):

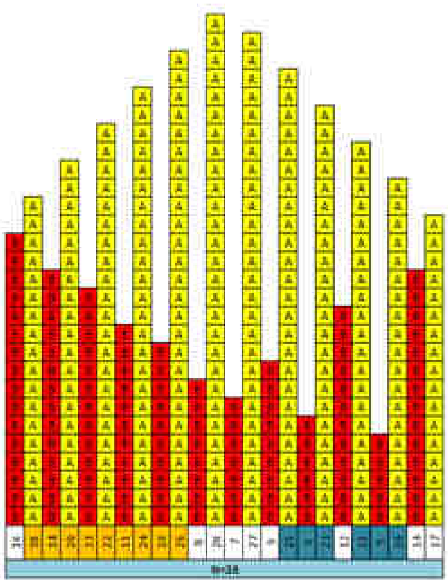


Figura 11

- Quando si vanno a piazzare bottiglie ***basse*** fra le ***alte***, le prime due di esse (la **5** e la **6**) formano i due ***terzetti*** **25-06-23** e **21-05-19**, *monopolizzando* le bottiglie ***alte*** **19**, **21**, **23** e **25** (tutte dispari in raggio) e sistemandosi sul *versante* destro del **DdM**. Per costruire il *versante* sinistro, restano disponibili solo bottiglie ***alte*** di raggio pari, per cui necessariamente anche da quel lato la distanza fra ***alte*** consecutive sarà **2**, e il **DdM** sarà nel complesso regolare

Quindi, è la presenza dei ***buchi quasi perfetti*** che porta all'esistenza dei **DdM** regolari, e della parte centrale regolare dei **DdM** *sbilenchi*. Questi ultimi sono caratterizzati dal fatto di avere pochi ***buchi quasi perfetti***, concentrati attorno al vertice del **DdM**; quando ne cessa l'effetto allontanandosi dal vertice, le rimanenti bottiglie ***alte*** assumono distanza **1** l'una dall'altra, e sono tutte disposte sullo stesso *versante* sino al termine della sequenza, rispettando la 11).

Come visto, i ***buchi quasi perfetti*** migrano man mano verso l'esterno dei DdM al crescere di **N**, fin quando non scompaiono. Perché spariscono? Per capirlo, seguiamo ancora il nostro ***terzetto*** campione **19-05-21**, che resiste senza interruzioni da **N=21** ad **N=28**; per **N=29**, esso sparisce perché la miglior sequenza possibile (quella di ***estensione*** minima) si ha in corrispondenza di **E=5**, il che ne rende impossibile l'esistenza. Poi, il ***terzetto*** riappare per **N=30**, quando torna ad essere **E=4**, scompare e ricompare ancora un paio di volte. Questo oscillare è dovuto al fatto che siamo nella *fase di transizione* del valore ottimo di **E** fra **4** e **5**; corrispondentemente, la bottiglia di raggio **5** diventa alternativamente ***bassa*** o

escludibile, provocando le successive scomparse e riapparizioni del ***terzetto***. L'ultima presenza si ha per **N=32**, dove esso è confinato all'estremo limite del **DdM**. Da **N=33** in poi, ormai la bottiglia di raggio **19** è diventata ***bassa***, e non potrà più formare il suo ***buco quasi perfetto*** con la **31**.

Come spunto di mezzanotte (anzi, del primo aprile…), sarebbe interessante vedere che forma abbiano le distribuzioni *ottime* di bottiglie escludendo quelle di raggio **5**, **9**, **13**, **17**…

That's all…

Per quanto ci riguarda il discorso non è chiuso per niente. Ma lo chiudiamo qui, e passiamo ai problemi di marzo.

6.3 [194]

6.3.1 I Chinotti trepidano...

Si sente, che il Capo non ce la fa più ad aspettare di riaprire il campo di tiro? Ormai sono mesi che non parla d'altro. Io, personalmente, non vedo l'ora che il campo riapra, anche se non sono parte del gioco…

Vediamo il primo problema di marzo:

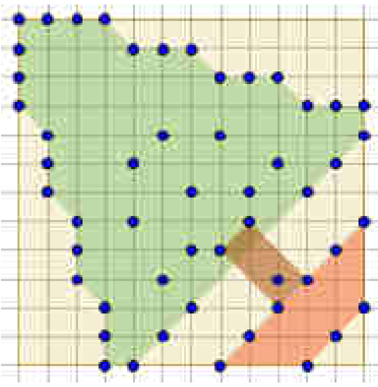
> *Abbiamo un prato quadrato sul quale Doc intende piantare in modo regolare* 169 *alberi, in modo da ottenere un reticolo* 13x13*; per vivacizzare la cosa decide di mettere* 53 *alberi diversi dagli altri, sempre sui punti del reticolo ma piazzati in un modo casuale "ma-non-troppo". Il Nostro richiede che non ci siano quattro alberi del gruppo di* 53 *che siano ai vertici di un rettangolo con lati paralleli ai lati dell'appezzamento.*
>
> *Come deve fare? E in un quadrato di lato n, quanti punti potete scegliere al massimo in modo tale che nessuno gruppo di quattro sia sui vertici di un rettangolo di lati paralleli al quadrato originale?*

Siamo già molto in ritardo, cerchiamo di non chiacchierare troppo e vi passiamo subito la soluzione di ***Camillo***, che suggerisce anche che cosa piantare:

> Buongiorno rudi, a proposito dei chinotti li sconsiglierei a Doc visto che di alto fusto non sono, piuttosto dei pioppi. E poi al di fuori della Liguria non so se crescerebbero rigogliosi.
>
> Per quanto riguarda la generalizzazione del problema ne ho trovata una, spero che lo soddisfi perché produce 52 alberi e non 53 come ipotizzato e che ritengo impossibile senza violare la condizione dei 4 ai vertici del rettangolo.
>
> Considerando questa condizione la minor interferenza dei chinotti sul quarto vertice si ha piantandoli in diagonale, utilizzando quella maggiore disponibile di volta in volta, per cui si inizia con una di quelle da 13 per poi proseguire sempre in parallelo a questa.
>
> La prossima diagonale da utilizzare è quella con più posizioni quindi una delle 2 da 12.
>
> Va da se che vi sono degli incroci del reticolo non utilizzabili e che sono, anche loro, sempre delle diagonali parallele a quelle precedenti, precisamente una per lato alle 2 piantumazioni già fatte.
>
> La prossima diagonale da utilizzare è quella da 11, questo produce la non utilizzabilità di altre 7 diagonali: 2 da una parte e ben 5 dall'altra.
>
> In questa maniera sono disponibili le diagonali da 8 e da 5 posti.
>
> Proseguendo con lo stesso algoritmo si va a terminare con la piantumazione di quelle da 2 e da 1 per un totale di 52 posizioni.
>
> Questa disposizione a filari diagonali è piuttosto regolare, non soddisferà Doc, anche se è comoda per raccogliere i chinotti senza saltellare da una parte all'altra del frutteto e poi candirli.

> Per rompere questa disposizione c'è un metodo facile come mescolare un mazzo di carte ed è quello di mescolare le righe e le colonne del bosco in questione

Bene, direi che ***Gnugnu*** è d'accordo sull'impossibilità del compito:

> Come al solito il CG assegna a Doc compiti impossibili. Per dimostrarlo basta il principio dei cassetti. Distribuendo uniformemente i 53 alberi fra le 13 righe si ottengono 12 righe con 4 alberi ed una con 5. Ogni riga con 4 alberi individua 6 coppie di colonne diverse, quella da 5 ne segna 10, per un totale di 82 coppie di colonne. Le colonne sono 13 in tutto e, pertanto ci sono solo 78 coppie diverse possibili. Almeno 4 di queste compariranno in due righe diverse formando rettangoli proibiti. Distribuzioni meno omogenee non farebbero che peggiorare la situazione: eliminando un albero da una riga che ne contiene 4 si risparmiano 3 coppie, ma il medesimo albero, piantato su una riga dove ne compaiono già 4, produce 4 nuove coppie; addirittura 5 se tentiamo di sistemarlo su una riga più popolata.
>
> La disposizione è invece possibile se mettiamo, per ora, da parte una piantina: in figura, dove i 52 punti blu rappresentano un albero, è riportata una delle possibili soluzioni. Sfruttando la possibilità di spostare a piacere righe e colonne, e contando sulla benevolenza riservata a vecchietti e bimbi, ho usato i pastelli per far comparire anche l'albero mancante.
>
> 
>
> Questo problema è strettamente collegato a "Un gioco che non mi piace" [RM 187, Agosto 2014], in cui carte, riportanti ognuna 8 simboli diversi, dovevano essere stampate in modo da garantire che qualsiasi coppia di carte avesse esattamente un simbolo in comune. Nel numero 189 della rivista compariva una soluzione dove venivano elencate tutte le 57 carte costruibili, rispettando la condizione, con 57 simboli complessivi. Si dimostra agevolmente che questo è il massimo possibile, ricavabile dalla relazione $m = s = n^2 - n + 1$, dove n, m ed s sono rispettivamente: il numero di simboli su ogni carta, il numero di carte e di simboli diversi.
>
> Interpretando le colonne del nostro quadrato come carte e le righe come simboli (o viceversa), ogni soluzione di quel problema fornisce la soluzione di questo. Con n=2 avremo un quadrato di lato 3 con 6 alberi non vertici di un rettangolo, con n=3 il numero di linee sale a 7 con 21 alberi, per n=4 il caso esaminato.... con n=8 avremo 57 linee con 456 alberi speciali.
>
> Continuo a non capire come il GC, legato affettivamente al numero 57, abbia potuto intitolare in modo tanto negativo il problema.

E la risposta a questa domanda non la sapremo mai, forse perché il Capo ha scoperto solo dopo che la soluzione fosse 57, e non lo ammetterebbe mai...

6.3.2 Questi sono cugini di Benford

Presto, che è tardi, vediamo il testo del secondo problema:

> *Prendiamo un numero a caso, e calcoliamone tutte le partizioni. Di fianco, scriviamo il numero delle parti distinte (le ripetizioni non contano) di ciascuna delle partizioni, e quindi sommiamo tutti questi valori. Tutte le parti distinte sono lo stesso numero degli "uno" nelle partizioni. Riuscite a dimostrarlo?*
>
> *Sembra strano, ma anche qui esiste una generalizzazione: Il numero totale delle occorrenze di un intero k tra tutte le partizioni di n è pari al numero di ricorrenze in cui una parte compare k o più volte in una partizione.*

Qui i giochi si fanno duri e… certo, ecco che arriva ***Franco57***, il magnifico:

Ecco una soluzione che Erdős avrebbe detto essere nel *Libro*, anche se immagino si occupasse di problemi un tantinello più difficili.

Chiamo gruppo omogeneo di una partizione (nel senso del testo del quesito) tutti gli addendi che hanno lo stesso valore, quindi ad esempio "4 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1" (partizione di 13) ha tre gruppi omogenei: "4" di cardinalità 1, "3 + 3" di cardinalità 2 e "1 + 1 + 1" di cardinalità 3.

Per dimostrare la proprietà creo una corrispondenza biunivoca tra gli "1" e i gruppi omogenei presenti nelle varie partizioni di n.

Scelto dunque un "1" da una qualsiasi partizione che ne abbia, sostituisco tutto il gruppo di "1" fino ad esso compreso con la loro somma s e costruisco in tal modo una nuova partizione di n (in realtà se scelgo il primo "1" la nuova partizione sarà identica a quella di partenza).

Semplicemente definisco la corrispondenza come la associazione dello "1" scelto al gruppo omogeneo con gli addendi di valore s nella nuova partizione.

Quindi ad esempio alla partizione "4 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1" di 13 a seconda della scelta dello "1" associo i gruppi omogenei evidenziati:

- il primo "1" al gruppo "1 + 1 + 1" in "4 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1";
- il secondo "1" al gruppo omogeneo "2" in "4 + 3 + 3 + 2 + 1";
- il terzo "1" al gruppo omogeneo "3 + 3 + 3" in "4 + 3 + 3 + 3".

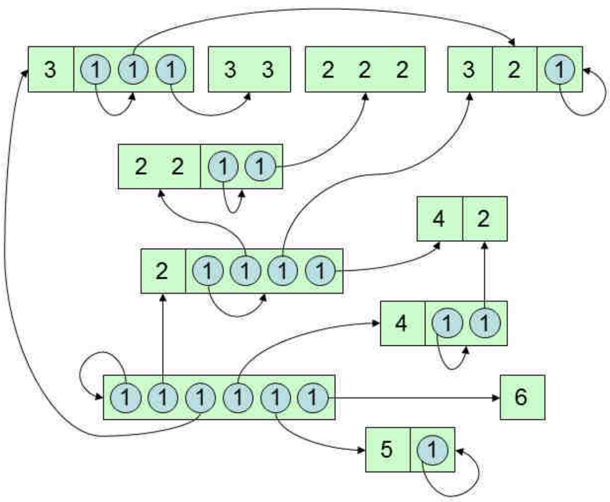
Naturalmente il primo "1" di una partizione è sempre associato al gruppo omogeneo di "1" della partizione stessa.

Viceversa, un qualsiasi gruppo omogeneo di una partizione di n è sempre associato ad un "1" di un'altra partizione di n (o della stessa) e in modo univoco, infatti per ottenerlo necessariamente dobbiamo trasformare uno dei suoi addendi di valore s in altrettanti "1" e scegliere lo "1" in posizione s (che quindi esiste sempre).

Ad esempio "3 + 3" in "4 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1" è associato al terzo "1" in "4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1".

È semplice in maniera sconcertante, ma l'associazione creata, essendo ben definita e invertibile sul codominio, è effettivamente biunivoca come richiesto.

Ecco qui uno schema che rappresenta la corrispondenza definita per n = 6:



La generalizzazione afferma che nelle varie partizioni di n il numero degli addendi di valore k è pari al numero dei gruppi omogenei di cardinalità maggiore o uguale a k.

Si può dimostrare affinando la stessa tecnica, cioè creando una corrispondenza biunivoca tra gli addendi di valore k nelle varie partizioni e i gruppi omogenei con almeno k elementi.

Preso dunque un addendo di valore k da una partizione, che nella forma canonica (addendi in ordine decrescente) avrà una certa posizione s, lo sostituisco insieme agli eventuali altri addendi di valore k che lo precedono con k addendi di valore s (cioè $k + k + \ldots + k$ (s volte) $\rightarrow s + s + \ldots + s$ (k volte)) ottenendo un gruppo omogeneo di almeno k elementi su una qualche altra partizione di n (la nuova è sempre una partizione di n perché ho sostituisco una somma che vale ks con una che ne vale altrettanto).

Viceversa preso un qualsiasi gruppo omogeneo di almeno k elementi formato da addendi di valore s, con la sostituzione inversa ($s + s + \ldots + s$ (k volte) $\rightarrow k + k + \ldots + k$ (s volte)) si ottiene un addendo di valore k al posto numero s in qualche altra partizione.

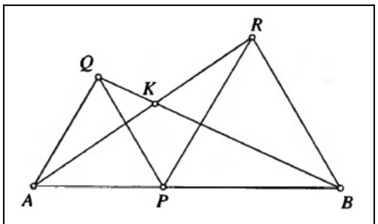
La funzione definita tra gli addenti di valore k e i gruppi omogenei con almeno k elementi è dunque ben definita e invertibile sul codominio, quindi stabilisce la corrispondenza biunivoca che si voleva.

Abbiamo anche ricevuto una mail di ***Jacopo***, che sta lavorando al problema, e speriamo che ci mandi comunque la sua soluzione. Noi però ci fermiamo qua, anche perché dobbiamo prendere fiato, stiamo invecchiando. Alla prossima!

7. Quick & Dirty

L'autore della presente (Rudy) ci tiene a sottolineare che sono solo due le tipologie di problemi che lo hanno sempre appassionato sin dai tempi del liceo (gli altri, sono arrivati dopo): uno è lo studio di funzioni, l'altro è qualsiasi problema che cominci con le parole "...Trovare il luogo dei punti che...". In questi ultimi, purtroppo, si è sempre considerato un discreto incapace. Quindi, adesso tocca a voi.

Trovare il luogo dei punti K, intersezione dei segmenti QB e RA, noto che P varia sul segmento AB e che i triangoli QAP e RPB sono equilateri.



1 *Giusto per chiarire la cosa...*

8. Pagina 46

Se incolonniamo tutti i termini della serie:

```
0.11111111...
0.01010101...
0.00100100...
0.00010001...
```

notiamo che il contributo alla k-esima posizione decimale consiste unicamente di 0 e 1, e che avremo un 1 nella k-esima colonna della r-esima riga se e solo se r è un *divisore* di k.

Essendo 37 un numero primo, la cifra 1 comparirà solo nelle righe 1 e 37.

Va però presa in considerazione la possibilità che ci sia un riporto dalla trentottesima colonna.

Per la medesima ragione appena vista, i contributi alla trentottesima cifra arrivano dalle righe 1, 2, 19 e 38: per generare un riporto sulla trentasettesima, quindi, dovremmo avere un riporto dalla trentanovesima sulla tentottesima pari almeno a 6.

Per valutare questo riporto, supponiamo la peggiore situazione possibile, ossia che nella k-esima riga, a partire dalla k-esima posizione, siano tutti 1, ossia:

```
0.11111111...
0.01111111...
0.00111111...
0.00011111...
```

Notando che il valore 1 nella k-esima posizione è pari a $1/10^k$, il valore di tutte le colonne oltre la trentottesima è dato dalla serie infinita:

$$T = \frac{39}{10^{39}} + \frac{40}{10^{40}} + \dots$$

Noto che, per qualsiasi valore $k > 1$ si ha $k+1 < 2k$, si ha:

$$\frac{k+1}{10^{k+1}} < \frac{2k}{10^{k+1}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{k}{10^k}$$

Quindi, ogni termine in T è meno di un quinto rispetto al termine precedente, da cui:

$$T < \frac{39}{10^{39}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{39}{10^{39}} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{39}{10^{39}} \dots = \frac{\frac{39}{10^{39}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{39}{10^{39}} < \frac{5}{4} \cdot \frac{40}{10^{39}} = \frac{5}{10^{38}}.$$

Quindi il riporto massimo di T nella trentottesima posizione sarà minore di 5, il che completa la nostra dimostrazione, e la trentasettesima cifra dopo la virgola sarà 2.

9. Paraphernalia Mathematica

9.1 Marcia Nuziale

Questa volta cominciamo in un modo riprovevole, ossia ridendo delle disgrazie altrui[25]: sono alcune settimane che, sull'allegato domenicale di annunci di un giornale, compare il seguente annuncio:

> 42enne piacente, solare, nubile, incontrerebbe uomo max 55enne *preferibilmente colto* per possibile futuro insieme.

Brava ragazza. Questo si chiama avere dei punti fermi.

Da un punto di vita strettamente matematico, il problema che intendiamo affrontare qui è oggi principalmente utilizzato in tutti altri ambiti e, nel nostro piccolo, anche noi abbiamo dovuto affrontarne una versione: il VadLdRM meno anziano, anni fa (...orpo, come passa il tempo... sono già cinque!), si è ritrovato a dover scegliere la scuola superiore. Pur avendo ben chiaro l'indirizzo, il dubbio era tra una scuola a meno di un chilometro da casa o quella frequentata dalla Signora d'Alembert quando non era ancora nota con questo allonimo[26]; in famiglia l'opzione era palesemente per la seconda ipotesi, e si era terrorizzati dall'idea che non fosse accettato per saturazione delle classi o quant'altro: in questo caso, si sarebbe dovuto optare per una seconda scelta (in ritardo, evidentemente), con la possibilità che fosse rifiutato anche qui... e avanti di questo passo.

Siamo partiti da un esempio semplice ma, se volete qualche dato, sappiate che a New York ogni anno circa 75000 giovini virgulti cercano di entrare in meno di 450 istituti, attraverso il metodo delle preferenze: va detto che, da quelle parti, la cosa è lasciata meno all'iniziativa individuale.

Infatti, quello che si richiede all'aspirante è di fornire un elenco di cinque scuole, in ordine di preferenza; a valle, le scuole esaminano queste richieste, e decidono se accettare uno studente, metterlo in lista d'attesa o rifiutarlo, e ad ogni studente a questo punto viene comunicata la sua posizione; successivamente, lo studente può accettare solo un'offerta e una posizione in una lista d'attesa[27].

Il metodo, a detta di tutti (scuole incluse) fa abbastanza schifo:

1. Alla fine del terzo giro, circa la metà degli studenti (di solito quelli con i voti più bassi e provenienti da famiglie a basso reddito) resta da allocare: la maggior parte di questi studenti attende tutta l'estate per poi scoprire di essere stati accettati in una scuola che non compariva neppure nei loro elenchi.
2. Inoltre, si rischia una "discesa infinita" di strategie paranoiche: uno studente che sia stato rifiutato dalla prima scuola della sua lista potrebbe scoprire, al secondo giro, che la sua seconda opzione ha finito i posti. Questo rende rischioso dichiarare apertamente le proprie preferenze all'inizio: questa strada perversa è anche incoraggiata dalle istituzioni, che insistono nel consigliare agli aspiranti di "vedere chi sono i loro *competitor*", prima di cominciare a stilare la lista delle preferenze.
3. Ci si mettono anche le scuole, sottovalutando la propria disponibilità, in modo da raccogliere (in funzione degli astrusi ragionamenti del punto qui sopra) più persone possibili al secondo giro.

In pratica, tutti tendono a dare un'immagine falsa di sé stessi, in modo da massimizzare il profitto.

---

[25] Se non volete dare l'aria di comportarvi da buzzurri maleducati e crudeli, chiedete a Treccia: si chiama *Schadenfreunde*. Vuol dire esattamente la stessa cosa, ma messo in tedesco sembra meno grave.

[26] Per i Torinocentrici: Cavour o d'Azeglio?

[27] Le scuole che a questo punto si ritrovano ancora dei posti liberi fanno un altro "giro". Si può arrivare sino al terzo round, poi basta.

Nel 2004, però, ***Abulkadiroglu***, ***Pathak*** e ***Roth*** hanno deciso che doveva finire la pacchia[28]. Da bravi economisti, hanno definito un algoritmo (che è l'oggetto del seguito) in grado di "lasciare fuori" solo tremila studenti[29] e garantendo a molte più persone l'offerta della loro scuola preferita: non solo, ma questo ha anche spinto le scuole a smettere di sottovalutare la loro capienza, e le istituzioni sono in grado di decidere molto più facilmente quali scuole vadano sostenute o chiuse (siamo negli USA: se non funzioni, chiudi).

La base dell'algoritmo APR (siamo solo noi a chiamarlo così: tranquilli, dopo cambia nome) è il concetto di ***stabilità***, introdotta per la prima volta da ***Gale*** e ***Shapley*** nel 1962: un'associazione di studenti e scuole è *stabile* se né uno studente né una scuola preferirebbero essere associati con altri diversi dalle proprie attuali associazioni[30]: i nostri due eroi hanno costruito un algoritmo, detto di *accettazione differita*, in grado di generare degli accoppiamenti stabili.

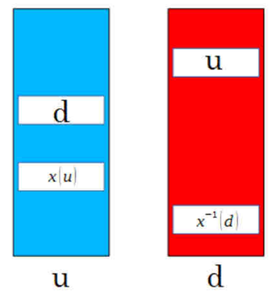
"...e hanno aspettato il 2004, per applicarlo?" Sempre più veloci del comitato del Nobel, che ha aspettato il 2012 per dare a Gale e Shapley il Nobel per l'economia. Comunque, questo sistema era applicato anche prima, e qui entra in scena la nostra ~~zitella~~ signorina.

Supponiamo di avere un egual numero di uomini $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e di donne $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$: ogni uomo elenca tutte le donne in ordine di preferenza, e ogni donna elenca nello stesso modo tutti gli uomini. Quello che ci chiedono è di riuscire a generare le coppie in modo tale che ognuno sia massimamente soddisfatto[31].

Come al solito, partiamo dalle cose che *non* funzionano:

> Definiamo un legame *instabile* se esistono un uomo u e una donna d tali che u preferisce d a $x(u)$ e d preferisce u a $x^{-1}(d)$.

Complicato? Forse, se diamo un'occhiata ai loro *carnet de bal*, la cosa risulta più chiara. La trovate qui a fianco, dove abbiamo utilizzato la funzione inversa di scelta (niente battute sul fatto che l'uomo è cacciatore, please: a noi serve che una parte – lo studente, se preferite – esprima le proprie preferenze e l'altra parte – l'istituto scolastico – scelga, se non vi piace, scambiate le lettere).



2 *Marca male...*

Nel loro articolo, Gale e Shapley hanno dimostrato che se si segue una semplice procedura (che, sia detto per inciso, è agli antipodi del romanticismo) e si hanno a disposizione le scelte di ogni partecipante, esiste sempre un abbinamento stabile; e sin qui, potreste anche crederci, procedere per tentativi e chiedervi se basta così poco per prendere un Nobel (va bene, in Economia... ma vi ricordiamo che è l'unico che danno ai matematici); il bello è che i nostri due hanno anche spiegato il *modo* per trovare questo abbinamento stabile! Di seguito, il *Manuale del Perfetto Paraninfo*:

1. Ogni uomo si dichiara *(...ogni studente "porge rispettosa domanda"...)* alla donna in testa alla sua lista di preferenze; ogni donna *accetta condizionatamente* la proposta dall'uomo che preferisce tra quelli che le si sono proposti e rifiuta gli altri.
2. Ogni uomo che non è stato accettato condizionatamente si propone alla donna che preferisce tra quelle che non lo hanno rifiutato. Ogni donna alla quale viene fatta una proposta considera l'offerta e accetta la proposta di quello che preferisce, anche se significa rifiutare quello che aveva accettato al giro precedente.

---

[28] Non sappiamo dove siano stati iscritti i loro figli, ma sapendo che uno di loro (il primo) risponde al nome di *Atila*, tenderemmo a dargli ragione ancora prima che apra bocca. O che sollevi la *labrys*.

[29] ...e se cominciate a preoccuparvi della loro sorte, considerate che rappresentano si e no il 4% del totale: non abbiamo i dati della soddisfazione precedente, ma siamo di sicuro in ottime posizioni.

[30] ...qualcuno là in fondo ha detto "Pareto"? Il signore vince una bambolina!

[31] Nel caso vi poniate il problema, esistono delle estensioni anche per i casi di poligamia e/o poliandria. Ma sono più complicati, e ve li studiate da soli.

3. Si cicla il processo sin quando ogni donna ha ricevuto almeno una proposta, momento nel quale le accettazioni diventano definitive e, se d ha accettato u, con la notazione di cui sopra abbiamo che $d = x(u)$.

Facciamo un esempietto? Volentieri, anche perché abbiamo sottomano quello originale di Gale e Shapley: $n = 4$, quindi il Gran Ballo delle Debuttanti si può svolgere tranquillamente in tinello. Per prima cosa, generiamo le liste di preferenza: azzurre quelle dei maschietti e rosa quelle delle femminucce.

u1	u2	u3	u4
d1	d1	d2	d4
d2	d4	d1	d2
d3	d3	d3	d3
d4	d2	d4	d1

d1	d2	d3	d4
u4	u2	u4	u3
u3	u4	u1	u2
u1	u1	u2	u1
u2	u3	u3	u4

A questo punto, $u1$ si propone a $d1$, $u2$ a $d1$, $u3$ a $d2$ e $u4$ a $d4$: siccome $d1$ ha due pretendenti, accetta provvisoriamente quello più in alto nella sua lista: di seguito, la situazione prima e dopo la scelta (siamo quindi alla fine del primo giro).

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

Siccome a $d1$ ha "dato il blu" (come si dice a Torino) a $u2$, quest'ultimo si propone a $d4$: questa ha ora le proposte di $u2$ e di $u4$ e, controllando il suo carnet, sceglie $u2$: le due opzioni nelle due tabelle qui sotto.

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

Adesso $u4$, che è "a piedi", si propone a $d2$, che lo accetta e scarica $u3$:

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

Testé scaricato, $u3$ si propone a $d1$, alla quale pare un buon partito:

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

Altra danza:

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

Ahiahiahi... Stessa situazione di prima. Ma non disperiamo: altro giro, altra corsa, sempre si vince!

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

	d1	d2	d3	d4
u1				
u2				
u3				
u4				

...adesso dovreste aver capito perché i sensali di matrimoni non ingrassavano. Ma si preparino i fiori d'arancio, anche Genoveffa LaCozza e Viligelmo DeScrofolis hanno trovato l'anima gemella! In termini meno poetici ma più precisi abbiamo che:

$$x(u_1) = d_3,\ x(u_2) = d_4,\ x(u_3) = d_1,\ x(u_4) = d_2.$$

Notiamo un paio di cose: tanto per cominciare, se u si propone a d ad un certo giro e a d' al giro dopo, significa che u preferisce d a d': in altre parole, un uomo non può proporsi alla stessa donna due volte, e quindi l'algoritmo prima o poi si ferma. Inoltre, vediamo che u, prima di proporsi alla sua scelta finale $x(u)$, ci ha provato con tutte quelle che preferisce a $x(u)$: quindi, se u preferisce d a $x(u)$, vuol dire che d lo ha mandato a stendere qualche giro prima e, di converso, se d accetta u ad un qualche passo e u' in un passo successivo, allora d preferisce u' a u: questo implica che ogni uomo che si propone a d e viene rifiutato, nella scala di d deve trovarsi al di sotto di $x^{-1}(d)$.

Non ve lo dimostriamo (la cosa è tanto semplice quanto noiosa, come amiamo dire), ma questo oggetto non solo è maschilista nell'approccio (abbiamo presupposto che solo gli uomini possano proporsi), ma anche nei risultati: infatti, il risultato è la miglior situazione per gli uomini, ma non necessariamente la migliore per le donne, il che non è bello: per dirla in modo più matematico, attraverso l'algoritmo di Gale e Shapley è sempre possibile creare degli accoppiamenti *stabili e ottimali per uno dei due insiemi di partecipanti*[32].

Un altro presupposto che abbiamo fatto scivolare sotto silenzio è che gli uomini siano stati onesti nelle loro dichiarazioni: ma nulla impedisce a uno dei partecipanti di pensare che, falsificando le proprie vere preferenze, lui arrivi ad un'unione migliore: qui la dimostrazione (come buona parte delle dimostrazioni in Teoria dei Giochi) si fa lunga e complessa, ma l'incredibile risultato finale è che chi falsifica le proprie preferenze non solo non migliora la propria posizione, ma addirittura *migliora quella degli altri*[33]!

Quindi, se si applica questo metodo, anche il "dir di preferire una scuola per andare in un'altra" diventa un metodo che non paga.

Tra una cosa e l'altra, a scrivere questo pezzo ci abbiamo messo due week-end, e quindi possiamo darvi la ghiotta notizia: *l'annuncio è scomparso!* E siccome (quasi) tutte le

[32] Da appassionati cultori della fantascienza *vintage*, il nostro pensiero corre a "*Neanche gli dei*" di Isaac Asimov: come si applica l'algoritmo nel caso il numero dei generi coinvolti sia maggiore di due?

[33] Dal punto di vista del senso comune (e quindi non matematico) la cosa pare in contraddizione con il noto aneddoto riguardante il padre della teoria dei giochi, John Nash: leggenda vuole che avesse consigliato ad uno dei suoi studenti che stava andando ad una festa di non corteggiare la ragazza più bella, ma *la seconda*: questa infatti stava facendo tappezzeria, mentre tutti i ragazzi erano impegnati con la prima.

favole finiscono bene, siamo *sicuri* che vivranno tanti e tanti anni felici e contenti nell'infinita biblioteca portata in dote da lui.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms