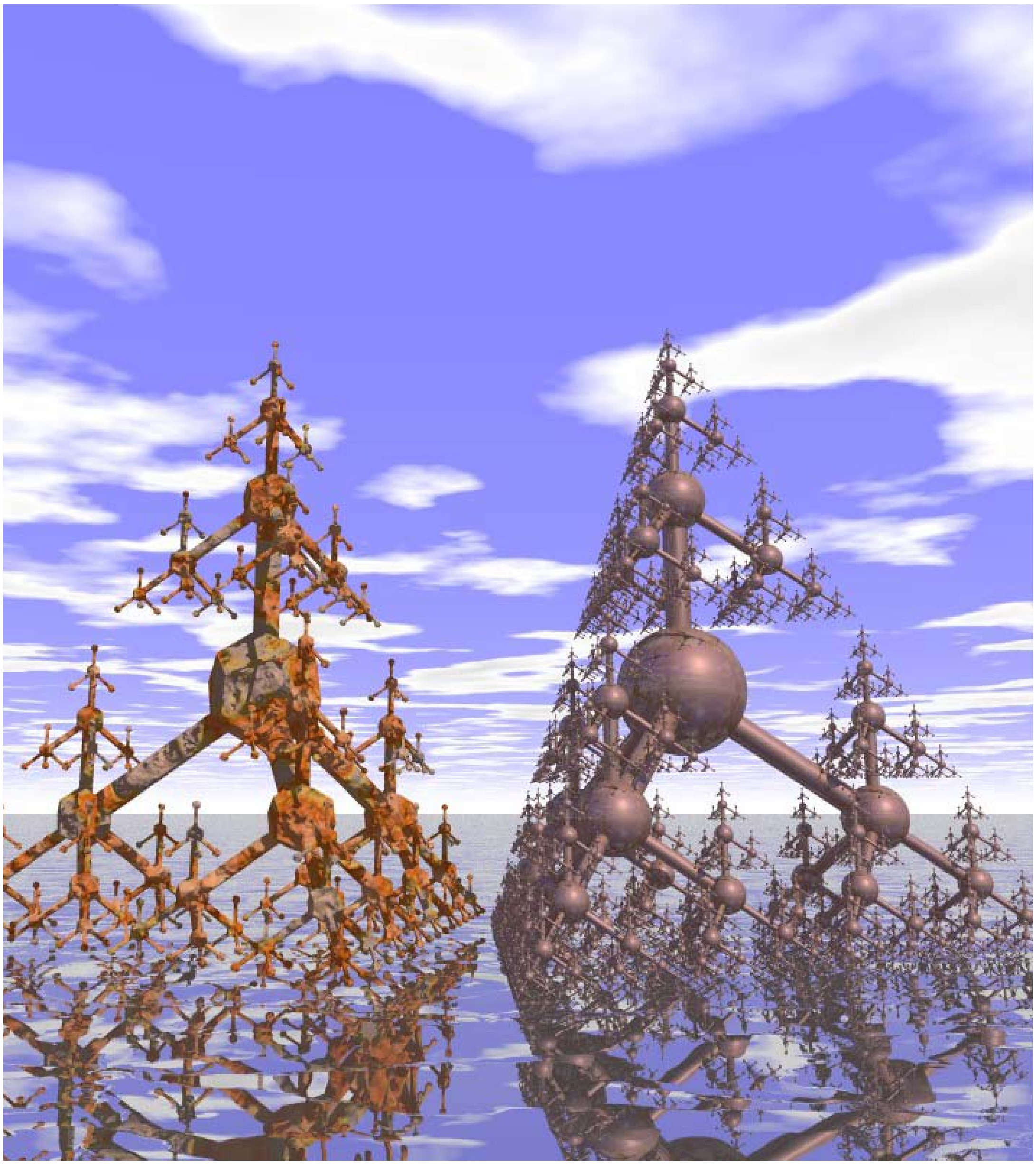
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 085 - Febbraio 2006 - Anno Ottavo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 084 ha diffuso ***891*** copie e il **30/01/2006** alle **13:40** per Google eravamo in **9470** pagine.

In copertina: ***The Old Fractal***, di ***Georg Mogk***. Ovvero, cosa succede se mettete FractInt e POV-Ray nello stesso bicchiere.

1. Rigoroso Esame

"E parendo a noi che tu non avessi detto intieramente la verità circa la tua intentione, giudicassimo esser necessario venir contro di te al rigoroso esame; nel quale, senza però pregiuditio alcuno delle cose da te confessate e contro di te dedotte come di sopra circa la detta tua intentione, rispondesti catolicamente"

Era notte senz'altro buia, e indubbiamente tempestosa.

Ma il buio veniva rotto dal lampeggiare delle torce e dei roghi che laceravano le tenebre usuali della valle alpina e orizzontale. E l'urgenza tempestosa non era data dai cumuli scuri che pure rimanevano indecisi sulle creste dei monti, pronti a vomitare pioggia e vento, ma dalle burrasche che agitavano gli uomini che in quella valle urlavano, inseguivano, scappavano, per salvare una vita o per reciderla. Non era notte silenziosa, quella.

> *Ogni cosa è un gridare, un fuggire, un dar di piglio all'armi, chi per difesa, chi per offesa, e piombare sovra i nemici, e difendentisi invano, gridanti a Dio mercé della vita e dell'anima, tra le braccia delle care donne che ponevano i bambini a pié dei sicarj per ammansarli, e tra i singulti degli innocenti figliuoli, nelle case, per le strade, sui tetti, trucidarli. […] Ben sessanta vennero in diversa foggia scannati, fra cui tre donne, e le altre ed i fanciulli perdonati se abbracciassero la cattolica fede. Il Robustelli […] schioppettò un trenta persone, poi mise fuoco al paese. Falò, diceva egli, per la ricuperata libertà di religione. Che premeva a costoro? Che difendevano essi? La religione di Cristo? No, se ne falsavano il primo precetto, il supremo distintivo, amare. Era abitudine di antichi riti, era quel furore che accompagna le fazioni, era zelo iniquamente incitato da fanatici capi, che predicavano questi orrori nel nome del Dio della pace, a sostegno di una religione, che deve essere propagata con armi incolpate, colla santità degli esempj, coll'efficacia della parola e della grazia. Guai se la plebe comincia a gustare il sangue! È un ubbriaco, che più beve, più desidera il vino.*[1]

Come riescono gli storici a darsi ragione del pensiero e del carattere d'un uomo? È già difficile farlo coi propri contemporanei, pure in questi tempi nostri in cui è conoscibile quasi ogni respiro dei personaggi pubblici. Ciò non di meno se, come è normale che sia, il personaggio è personaggio di parte, allora inevitabilmente anche oggi si avranno descrizioni sommamente diverse a seconda della parte dello scrivente. Il giudizio univoco non può allora non sfuggire, e forse questo non fa altro che rendere giustizia alla memoria, perché è davvero difficile che un uomo riesca ad essere contenuto in una sola etichetta. Angelo o demonio, santo o assassino, genio o idiota. La verità non è quasi mai d'un solo colore; ad esempio, è davvero difficile catalogare Nicolò Rusca.

Arciprete di Sondrio quando la cattolica Valtellina era sotto il controllo politico dei protestanti Grigioni, Nicolò Rusca venne arrestato nel 1618 e incarcerato a Thusis, dove finivano regolarmente tutti i cattolici accusati di qualche reato politico. Il processo comprendeva, a quei tempi, anche una ragguardevole dose di torture, e Rusca ne subì tante da non sopravvivere al trattamento. Di lui si rammenta una celebre frase: "Odiate l'errore, non l'errante"[2] e il soprannome con il quale adesso è ricordato "pastor bonus",

[1] Cfr. nota 6

[2] Secondo altre fonti, la frase suona ancora più esplicita: "Odiate l'errore, amate gli erranti".

cioè il "buon pastore" che morì per la salvezza del proprio gregge. Essendo morto sotto le torture del boia quando nella sua terra la religione cattolica era minoritaria, è naturale che venga ora considerato degno di beatificazione: ed infatti la prima proposta in tal senso data addirittura 8 Novembre 1927. Il percorso canonico ha subito però lunghe soste, per poi riprendere con più vigore nel 1996, quando in Sondrio si è concluso un nuovo processo diocesano in proposito.

Quando Nicolò Rusca era in vita, la regione politica nella quale viveva era la Rezia: un bel nome latino, che si rammenta insieme ad altri toponimi dell'Impero Romano e, soprattutto, che si ritrova nella dizione "Alpi Retiche"[3]: e infatti la Rezia è tutt'ora riconoscibile nella fusione della svizzera Engadina e dell'italiana Valtellina, due valli alpine insolitamente orientate da est a ovest, "orizzontali", in una orografia che è invece abituata a vedere le valli correre in direzione nord-sud[4]. Le unisce la stretta Val Poschiavo e il passo del Muretto; all'inizio del Seicento erano quasi un laboratorio politico, poiché rappresentavano una sola unità politica abitata da due diverse confessioni: maggioranza evangelica in Engadina e maggioranza cattolica nella Valtellina. Maggioranze, però: non totalità; in entrambe le valli v'erano minoranze della confessione non predominante, e l'Europa tutta – allora assai sensibile al terremoto geopolitico della Riforma - osservava con curiosità quella convivenza di fedi diverse.

La già citata morte per torture dell'arciprete di Sondrio preannuncia che tale convivenza non fu certo serena e tranquilla. Anzi, a voler dare ascolto a tutte le parti, si scopre che ancora oggi Nicolò Rusca, quasi santo per i fedeli cattolici, è visto sotto una luce ben diversa dagli occhi protestanti:

> *Ma con l'avanzare della Controriforma, l'odio dei cattolici valtellinesi verso la minoranza protestante, fomentata dai predicatori francescani e domenicani, inviati dall'arcivescovo di Milano cardinale San Carlo Borromeo (1538-1584), arrivò a livelli di elevata intolleranza, nonostante i richiami alla pacifica convivenza lanciati dai pastori Ulisse Martinengo e Scipione Calandrini (e proprio per questo motivo i cattolici, sobillati dall'arciprete di Sondrio Nicolò Rusca, per ben due volte, cercarono di uccidere quest'ultimo).[…] Ma questo fu niente in confronto alla rivolta dei cattolici contro i protestanti della Valtellina del 1620, che sfociò in uno spaventoso pogrom […] Il fomentatore principale fu il fanatico arciprete di Sondrio Nicolò Rusca, vero agitatore delle folle cattoliche e sprezzante delle leggi che cercavano di mantenere un pur delicato equilibrio tra le due comunità. Egli venne arrestato e processato a Thusis nel 1618 per il tentato omicidio, sopraccitato, di Scipione Calandrini, ma morì durante le torture dell'interrogatorio*[5].

La morte per tortura nel carcere di Thusis sembra essere l'unico punto sul quale concordano sia la versione cattolica che quella protestante. Tolto questo, i ritratti che abbiamo di Nicolò Rusca non potrebbero essere più diversi: santo e martire per una parte, fanatico fomentatore di omicidi per l'altra. Purtroppo però ci sono altri punti nei quali le cronache coincidono, ed è nel raccontare cosa accadde nei mesi successivi alla morte del Rusca. Nel processo di Thusis per il tentato omicidio di pastori protestanti vennero condannati, oltre a Rusca, anche i fratelli Planta e Giacomo Robustelli. Quest'ultimo riuscì, due anni più tardi, a ritornare in Valtellina e ad organizzare quello che, con termini crudeli ma assai appropriati, Cesare Cantù chiamò poi il "Sacro Macello della Valtellina".

---

[3] Ogni momento è buono per un ripasso delle sacre regole mnemoniche delle scuole elementari: "MA COn GRAn PENa LE RECA GIU', ergo MArittime, COzie, GRAie, PENnine, LEpontine, REtiche, CArniche, GIUlie. Ecco, le Retiche sono quelle tra le Lepontine e le Carniche…

[4] Ma le eccezioni sono tantissime (a cominciare dalla Val d'Aosta): e, a dirla tutta, l'Engadina è abbastanza obliqua, a dire il vero…

[5] Da www.eresie.it, di Douglas Swannie.

Il Sacro Macello

All'avviso, i Besta corrono coi manigoldi addosso alla chiesa degli Evangelici e prima li prendono a tiri di scaglia dalle finestre, poi, atterrate le porte, a coltella li sgozzano. Diciannove rifuggirono nel campanile, e gli insorgenti, messovi fuoco, li soffocarono. D'ogni sesso, d'ogni età, fin settanta ne uccisero, fin un cattolico, Bonomo de Bonomi, perché non prendeva parte all'esecrando atto. Fin te, povera Margherita di quattordici anni, che, colla viva eloquenza d'una giovinezza innocente, opponevi il capo alle ferite dirette al sessagenario tuo padre Gaudenzio Guicciardi. […] Si figuri a cui regge l'animo l'orrore di quel giorno, quando ben cenquaranta furono trucidati, ed un Agostino Tassella, coll'insensata gioja del delitto, come di bellissima prodezza andava trionfante d'averne egli solo mandati diciotto a casa del diavolo; e un tal Cagnone si vantava pronto a trafiggere anche Cristo; e la ciurmaglia, stanca ma non satolla, facendo insane gavazze in Campello, gridava: ecco la vendetta del santo arciprete. […]Andrea Paravicini da Caspano, preso dopo molti giorni, fu messo fra due cataste di legna e minacciato del fuoco se non abjurasse: durando costante, fu arso vivo. E si videro spiriti celesti aleggiargli intorno a raccoglierne lo spirito. Né fu questo il solo prodigio, onde le due parti pretesero che il Cielo ad evidenti segni mostrasse a ciascuna il suo favore. Ignobili affetti presero il velo della religione, e coll'eterna iracondia del povero contro il ricco, contadini e servi piombarono sui loro padroni, i debitori su cui dovevano, i drudi sui cauti mariti. Molte donne, ancora e nella florida e nella cadente età andarono a fil di spada. […] Che più? Fanatici frati, sacerdoti del Dio che perdona, aizzavano la moltitudine, quasi non credessero poter essere zelanti senz'essere feroci. Battista Novaglia a Villa tre di sua mano ne scannò; frate Ignazio da Gandino venne a posta da Edolo; l'arciprete Paravicini inanimava i suoi Sondriesi a tuffarsi nella strage dei fratelli; il Piatti, curato di Teglio, attaccò il dottor Federici di Valcamonica, e fatto il segno della croce quale portava nella mano sinistra e una spada nella destra, ammazzò detto dottor Calvino con altri seguaci; il domenicano Alberto Pandolfi da Soncino, parroco delle Fusine, con uno spadone a due mani guidava il suo gregge a trucidare i fratelli di quel Cristo, che aveva detto: Non ucciderai. Il Sacro Macello e allora e poi fu lodato come santo e generoso da storici, da principi e da papi. Ma al secolo mio, al secolo che pure macchiò le mani di sangue e di che sangue, e di quanto, io non ardirò domandare se possa lodarsi quella impresa: domanderò solo se possa scusarsi.[6]

[6] Cesare Cantù, "Il Sacro Macello di Valtellina – episodio della riforma religiosa in Italia" – 1832. Dalla stessa fonte è tratto anche il brano riferito in nota 1. Il testo è facilmente reperibile integralmente in rete (sia su Liber Liber che sul Progetto Gutenberg, ad esempio). Uno splendido romanzo ambientato nel periodo e nell'ambiente delle minoranze religiose del Seicento (anche se la Valtellina non ci sembra sia citata) è invece "Q" di Luther Blissett, Einaudi. Ora disponibile anche in rete grazie ai buoni uffici del Rhymers' Club (www.rhymersclub.it)

Il Sacro Macello insanguinò tutta la Valtellina nella notte tra il 18 e il 19 Luglio 1620. I fanatici cattolici cominciarono la strage a Tirano, dove andarono a prelevare i protestanti evangelici nelle loro case, e poi proseguì a Teglio, dove venne incendiata la chiesa protestante piena di fedeli. Si concluse infine a Sondrio, dove circa settanta persone riuscirono a fuggire verso l'Engadina, ma tutti gli altri caddero sterminati. Il bilancio di questa "notte di san Bartolomeo" valtellinese non è ovviamente sicuro, ma si ritiene che caddero "macellati" circa settecento protestanti.

La finestra della (seconda) "Defenestrazione di Praga"

L'episodio viene talvolta annoverato come una delle cause scatenanti la terribilissima Guerra dei Trent'Anni, anche se non è certo famoso quanto la celeberrima "defenestrazione di Praga", che immancabilmente viene citata come episodio critico per lo scatenarsi della guerra. La cosa è in fondo comprensibile: per quanto non sia certo confrontabile sul piano umano la strage di settecento persone rispetto ad un inoffensivo volo di pochi metri da un davanzale boemo da parte di pochi emissari cattolici[7], è indubbio che sul piano politico la defenestrazione dei diplomatici ebbe una maggiore risonanza. La guerra che ne seguì fu forse la più devastante guerra della storia d'Europa, con la sola possibile eccezione delle due guerre del Novecento, secolo sanguinario per eccellenza. Dal 1618 al 1648 quasi tutta l'Europa fu ridotta a mero campo di battaglia: a differenza di quel che succedeva nei secoli precedenti – e anche a differenza di quel che accadrà nei secoli immediatamente successivi – la guerra sarà soprattutto guerra che massacrerà la popolazione civile, più ancora che gli eserciti. Oltre alle armi, la fame, le carestie e la peste tormenteranno il continente, soprattutto l'Europa centrale al punto che le conseguenze sulla demografia delle nazioni colpite saranno evidentissime, e il grande incremento demografico del Cinquecento sarà rapidamente restituito alle casse della storia. Gli storici sono soliti suddividere in quattro fasi la Guerra dei Trent'Anni: Boemo-Palatino, Danese, Svedese e Francese, che quantomeno evidenziano il gran numero di paesi impegnati: fu talmente profonda la cicatrice lasciata dalla guerra sulle nazioni coinvolte che la conclusiva Pace di Westfalia servì soprattutto a sancire l'esaurimento delle forze coinvolte. Guerra crudele e vinta con clamorosa evidenza solo dalle nazioni che riuscirono a rimanerne fuori: il dominio mercantile dei Paesi Bassi e quello politico dell'Inghilterra prendono il via dalle fumanti rovine della più sanguinaria guerra del Seicento, alla quale si guardarono bene di partecipare.

Non erano certo solo cause di libertà di confessione religiosa, in gioco, anzi: ma non di meno era quello periodo storico in cui era facilissimo morire per una parola sacra detta o non detta. I roghi bruciavano eretici da una parte e dall'altra, e non è possibile contare – neanche in maniera approssimata – quante donne e quanti uomini siano morti perché credevano in una fede diversa da quella dei loro carnefici.

[7] Il 23 Maggio 1618, nel castello di Hradcany in Praga, alcuni aristocratici boemi sollevarono di peso due rappresentanti imperiali e uno scrivano e li gettarono dalla finestra. I nobili boemi erano molto arrabbiati perché, da protestanti, poco gradivano l'elezione al trono del Sacro Romano Impero del cattolicissimo Ferdinando II di Stiria. I tre malcapitati non si fecero troppo male (salvati da un poco elegante ma assai provvidenziale mucchio di letame), ma il significato politico del gesto fu tale da mettere a ferro e fuoco il continente. Incidentalmente, il salto dei davanzali sembra essere uno sport nazionale nella dolce capitale ceca: oltre a questa, certo la più famosa e "seconda" in ordine cronologico, di "defenestrazioni di Praga" se ne contano altre due: una nel 1419 (e qui i morti ci scapparono) che dette inizio alla Guerra Ussita, e un'altra nel 1948, quando il Ministro degli Esteri Jan Masaryk venne trovato cadavere sotto la finestra del suo Ministero.

Il millennio medievale viene spesso descritto dagli storici come il periodo della storia occidentale in cui l'idea di Dio permea e governa ogni aspetto della vita umana. La maniera di porsi nei confronti della natura, della vita, dell'universo, della morte, della conoscenza era sempre regolamentata dall'ideale e costante presenza immanente del Creatore. L'uscita da questo periodo (comunque così lungo e vasto che è sempre ardita semplificazione il trattarlo come un tutto unico) è caratterizzata da sconvolgimenti e rivoluzioni: culturali ed economiche, come la scoperta di nuovi mondi; intellettuali e artistiche, come i motivi del Rinascimento; ma anche etiche e religiose, come la messa in discussione della sovranità della Chiesa di Roma da parte dei riformatori religiosi. Tra la morte di Lutero e la fine della Guerra dei Trent'anni corre un secolo quasi esatto[8], e sono cento anni di costante tensione storica; così forte da avere, più ancora di altri periodi, un costante impatto anche sulle vite degli individui.

Galileo in un ritratto di Ottavio Leoni

La più grande gloria scientifica italiana conduce la sua vita interamente in questo sconvolgente arco di tempo. Galileo Galilei, figlio di Vincenzo e di Giulia, vede la luce a Pisa il 15 Febbraio 1564. Vivrà 78 anni intensissimi, prima di spegnersi ad Arcetri, e sarà l'artefice principale di una delle rivoluzioni sopra citate, quella che forse più ha contribuito a traghettare il mondo verso i tempi moderni. Galilei chiede al suo mondo di provare, toccare, sperimentare, anziché credere all'autorità costituita. Per quanto assediato ai tempi nostri da innumerevoli falsi profeti, il metodo scientifico è in realtà talmente assorbito dal mondo accademico moderno che non è neanche immaginabile poterne fare a meno. Un'ipotesi deve essere passata al vaglio dell'esperimento, o non diventerà mai scienza. È estremamente semplice, in fondo, ma non era affatto così ai tempi di Galileo, quando le Autorità, di qualsiasi tipo esse fossero, non avevano intenzione alcuna di sottoporsi a verifiche di nessun tipo, anzi.

È assolutamente fuori discussione l'idea di ripercorrere in queste pagine la densa vita dello scienziato pisano; è però curioso rivisitare alcune delle attività che un uomo come Galileo doveva intraprendere ai suoi tempi. Ad esempio, una volta deciso di dedicarsi alla matematica e alla filosofia naturale (contravvenendo ai desideri del padre che lo avrebbe voluto medico), uno come Galileo doveva spiegare che tipo di evento fosse l'apparizione nel cielo di una nova. Però il punto fondamentale non era certo la "spiegazione", così come la intenderemmo oggi, del fenomeno in sé, quanto la sua localizzazione: e questo non per ragioni analitiche, ma meramente filosofiche. Una nova esplose davvero nel cielo dell'Ottobre 1604, e la diatriba che subito si accese mirava solo a capire se quella nuova stella mettesse o no in discussione la cosmologia aristotelica. Nessuna variazione era possibile, secondo Aristotele, oltre il cielo della Luna, e pertanto la nova doveva essere più vicina alla Terra di quanto lo fosse il suo bianco satellite, altrimenti l'immutabilità delle sfere celesti sarebbe stata messa in discussione. Galilei non prova a contrapporre a questa opinione autorevolissima la sua retorica, ma passa semplicemente a tentare di triangolare la stella. Se questa fosse stata davvero così vicina, sospesa nel cielo in un punto non troppo distante dalle nostre teste, allora la sua parallasse avrebbe dovuto

[8] Centodue anni. Martin Lutero muore nel 1546, la guerra dei Trent'anni termina nel 1648.

diventare facilmente evidente. Non è tanto il coraggio di opporsi all'idea consolidata aristotelica che stupisce, in un episodio come questo, quanto il coraggio – puramente intellettuale – che lo conduce a pensare che siano in qualche modo "sperimentabili" anche oggetti intangibili come quelli che popolano il cielo. È davvero rivoluzionario, come approccio, e bastano pochi esempi a dimostrarlo: quando insegna all'Università di Padova, troverà tra gli studenti proprio i medici, coloro dei quali aveva rifiutato la carriera. Ma se oggi è considerato del tutto naturale che i medici affrontino almeno un esame di fisica nel loro cursus studiorum, allora le cose erano ben diverse, se non altro perché la fisica così come la intendiamo oggi doveva ancora essere inventata proprio da Galileo. Cosa ci facevano allora i medici secenteschi a lezione da Galileo? Imparavano l'astronomia: era ritenuto doverosoper gli esperti di medicina saper redigere un oroscopo dei pazienti che avevano in cura.

È in questo Seicento contraddittorio che le misurazioni di Galileo devono lentamente trasformarsi in una "nuova scienza", ma le difficoltà sono sempre maggiori di quanto sia possibile renderle in un veloce racconto. Difficoltà meramente scientifiche, ad esempio: un lettore contemporaneo potrebbe meravigliarsi del fatto che fosse ancora sub iudice la teoria eliocentrica copernicana anche dopo che Galileo, puntando il suo "perspicillum[9]" su Venere, aveva notato che il pianeta mostrava fasi al pari della Luna[10]. Non era più sostenibile il sistema geocentrico tolemaico, se al centro dell'obiettivo un pianeta campeggia mostrando "un quarto di Venere", e di conseguenza il sistema copernicano avrebbe dovuto imporsi automaticamente. Ma non fu così, perché il sistema ticonico[11] reggeva comunque alla prova delle fasi di Venere, ed era tale sistema il principale campione del geocentrismo nelle accademie d'Europa. Ciò non di meno, le difficoltà principali cui dovette far fronte Galileo furono quasi sempre difficoltà di ordine diverso da quello scientifico. Quando il pisano oppose all'opinione comune che voleva la supernova del 1604 essere evento "terrestre" e non "celeste" perché la nova non aveva parallasse sensibilmente diversa dalle altre stelle fisse, subì gli attacchi dei filosofi, specialmente quelli dell'ateneo padovano che lo ospitava. L'obiezione principale era, come al solito, obiezione di ruolo e privilegio, non certo obiezione nei fatti: solo ai filosofi spettava indagare e parlare della struttura del mondo, e gli astronomi devono limitarsi ai meri calcoli. Quando questo atteggiamento dovesse infastidire Galileo lo si può immaginare rileggendo cosa fa dire in merito a Simplicio, il personaggio che nei suoi dialoghi ricopre il ruolo del difensore dell'aristotelismo e del sistema tolemaico:

> *"I filosofi si occupano sopra gli universali principalmente; trovare le definizioni ed i più comuni sintomi, lasciando poi certe sottigliezze e certi tritumi, che son poi più tosto curiosità, a i matematici[12]."*

---

9 Nome con il quale il pisano chiamava il cannocchiale. Strumento che non fu lui ad inventare, ma che fu lui a migliorare di molto e, soprattutto, a trasformare in strumento "scientifico".

10 "*Cynthiae figuras aemulatur mater amorum*". Ovvero, "la Madre degli amori (Venere) imita le forme di Cinzia (la Luna)" di questa e di altri celebri affermazioni (anagrammate) di Galileo parlammo nel compleanno di Leibnitz: "L'acusmatico", RM054, Luglio 2003.

11 Quello di Tycho Brahe, sommo astronomo danese. Il suo sistema prevedeva la Terra immobile e situata al centro dell'Universo, con il Sole e la Luna che le giravano attorno. Il Sole, nella sua orbita geocentrica, trascinava con sé tutti i pianeti, che invece orbitavano attorno ad esso. Non era facile scardinare questo sistema di "compromesso" tra l'eliocentrismo e il geocentrismo perché gran parte degli argomenti a favore della teoria copernicana finivano dentro il sistema ticonico parzialmente eliocentrico, che in più aveva il vantaggio di mantenere "immobile" la Terra, dando soddisfazione a coloro che sostenevano che se la Terra fosse davvero in moto attorno a qualche cosa, dovremmo sentire un gran vento sulla faccia quando guardiamo nelle direzione del moto. Del resto, l'inerzia e il principio di relatività del moto doveva scoprirli sempre il solito Galileo, quindi non erano argomenti che il nostro potesse usare "d'autorità".

12 Con buona pace del maggior filosofo italiano del Novecento, è sconvolgente notare la somiglianza tra questa frase di Simplicio e quanto detto da Benedetto Croce in merito alle "menti minute" dei matematici, di cui abbiamo parlato nel compleanno del numero scorso di RM ("Mente Minuta", su Federigo Enriques, RM84)

In questa ricerca di universali, era davvero importante che la Terra rimanesse fissa e immobile e, soprattutto, centrale. I maggiori professori al Collegio Romano non erano poi legati ad Aristotele quanto si tende a credere: erano ben disposti a lasciar cadere il sistema di Tolomeo, se quello di Tycho meglio rispondeva alle esigenze; ma la centralità della Terra non poteva essere messa in discussione. La Terra era la metafora della Chiesa stessa: le tempeste che arrivavano dai protestanti del Nord toglievano autorità al centro di potere ecclesiastico, e rivendicavano per la "periferia" liturgica gli stessi diritti e lo stesso potere della Chiesa di Roma. È difficile resistere alla tentazione di leggere nella rabbia della Chiesa contro il sistema copernicano una forma di reazione del centro dell'universo cattolico contro la periferia ribelle. Può certo essere solo una coincidenza storica, ma il primo serio confronto che Galileo ebbe con la Chiesa che gli veniva a chiedere conto del suo copernicanesimo è datato 1616. Prima dello scoppio della Guerra dei Trent'anni, prima del Sacro Macello in Valtellina, il Sant'Uffizio ammonisce Galileo Galilei, gli ricorda che la dottrina copernicana è contro le Sacre Scritture, ma il monito scritto dal cardinale Bellarmino ben precisa che lo scienziato non ha compiuto alcun atto di abiura in proposito. Ma l'abiura arriverà, diciassette anni più tardi.

Quando gli studenti di liceo incontrano per la prima volta la figura di Galileo, restano di solito affascinati dalle scoperte e dalla forza innovativa del suo pensiero. Si divertono all'idea dello scienziato che sale sulla Torre di Pisa per lasciar cadere dei pesi diversi, poco fidandosi di quanto scritto in merito duemila anni prima da un filosofo greco; lo seguono nell'osservazione del pendolo, nella descrizione del moto osservato dalla stiva d'una nave, si entusiasmano nel vedere rivoluzionare l'astronomia tramite pochi mesi d'osservazione dentro un cannocchiale. E si sentono orgogliosi e fieri nel vedere il nome di Galileo innalzato tra i grandissimi della scienza, con pochissimi altri nomi degni di essergli posti al fianco. Però, rimane sempre quella piccola delusione finale: l'abiura. "Ah, Galileo, perfetto prototipo di genio e d'eroe, non potevi proprio evitare d'abiurare? Non potevi alzare il fiero mento, evitare di pronunciare quelle rie parole, e affrontare a testa alta, da vero eroe dei film di Hollywood, le inevitabili conseguenze?". L'affetto degli studenti verso il padre della fisica perde un po' di vigore, a questo punto, quasi l'aver abiurato togliesse un po' di verità scientifica anche alle sue idee.

Però gli studenti, e tutti noi con loro, dovrebbero sempre ricordare che cosa fosse la disobbedienza alla Chiesa nel 1633. Con l'Europa insanguinata da guerre di religione, con principi e papi disposti santificare o maledire la medesima crudeltà verso il prossimo, se questa veniva a favore o contro i propri immediati interessi. Nel 1616, sotto il regno di Paolo V, il copernicanesimo viene marchiato come infame; nel 1633, sotto il regno di Urbano VIII che, con il nome secolare di Maffeo Barberini, si era mostrato ammiratore e quasi amico di Galileo, le cose dovrebbero andar meglio per il fisico pisano, e invece vanno assai peggio; e questa cosa, da sola, mostra che i tempi sono cambiati. Le modalità, gli intrighi, le false accuse e le false prove che portarono al processo contro Galileo sono troppo complesse per essere riportate qui con un minimo di efficacia narrativa. Riportiamo questa brevissima sintesi rubata ad una storia dei papi:

> *"…come pure la recente riabilitazione di Galilei voluta da Giovanni Paolo II non annulla l'infamia del processo che il famoso scienziato subì sotto Urbano VIII nel 1633; dopo il "rigoroso esame", cioè dopo la tortura, egli fui costretto ad abiurare un'opera uscita con l'Imprimatur, che secondo l'accusa egli aveva estorto in modo fraudolento[13]."*

E forse ciò che maggiormente stupisce sono proprio quelle due parole, "rigoroso esame" che oggi, se lette fuori da qualsiasi contesto, quasi inevitabilmente fanno pensare ad una qualche indagine profonda con carattere scientifico, e pertanto di natura, in senso lato ed ampio, galileiana. E invece erano parole che nascondevano e al tempo stesso palesavano l'avvenuta tortura dell'imputato; violenza metodica e premeditata, per ottenere la

[13] Claudio Rendina: "*I papi, storia e segreti*", Newton 1999.

"conoscenza" meno scientifica possibile, ovvero una confessione estorta. Era un vecchio di settanta anni, quello che fronteggiò il Tribunale dell'Inquisizione nel Giugno del 1633: un vecchio scienziato che si vedeva costretto a rinnegare e a perdere tutto il lavoro della sua vita.

L'abiura di Galileo

Un vecchio di settanta anni, torturato e avvilito, che aveva fatto della ricerca della conoscenza la ragione della sua vita, fu costretto a leggere il testo con cui rinnegava le idee che popolavano il suo libro più bello e famoso. Il maggiore intellettuale italiano dell'epoca fu costretto a dichiarare di essere in errore, di sbagliare, di aver condotto per tutta la vita idee e azioni da persona stupida e non intelligente. Sapendo certo che tutto quanto avrebbe dichiarato durante l'abiura lo avrebbe successivamente costretto all'isolamento assoluto, agli arresti domiciliari in Arcetri, alla totale scomparsa dalla scena scientifica e accademica d'Europa. Certo sapendo che il testo integrale dell'abiura sarebbe stato accuratamente letto e diffuso in tutte le piazze importanti del continente[14], al fine di svergognarne totalmente ogni merito intellettuale.

Forse, il vecchio pisano, avesse avuto la forza di resistere alle torture fisiche e psichiche, avrebbe davvero potuto risparmiarsi il dolore di pronunciare queste parole:

> *Io Galileo, figlio di Vincenzo Galileo di Fiorenza, dell'età mia d'anni 70, constituto personalmente in giudizio, e inginocchiato avanti di voi Eminentissimi e Reverendissimi Cardinali, in tutta la Republica Cristiana contro l'eretica pravità generali Inquisitori; avendo davanti gl'occhi miei li sacrosanti Vangeli, quali tocco con le proprie mani, giuro che sempre ho creduto, credo adesso, e con l'aiuto di Dio crederò per l'avvenire, tutto quello che tiene, predica e insegna la Santa Cattolica e Apostolica Chiesa. Ma perché da questo Sant'Offizio, per aver io, dopo d'essermi stato con precetto dall'istesso giuridicamente intimato che omninamente dovessi lasciar la falsa opinione che il Sole sia centro del mondo e che non si muova e che la Terra non sia centro del mondo e che si muova, e che non potessi tenere, difendere né insegnare in qualsivoglia modo, né in voce né in scritto, la detta falsa dottrina, e dopo d'essermi notificato che detta dottrina è contraria alla Sacra Scrittura, scritto e dato alle stampe un libro nel quale tratto l'istessa dottrina già dannata e apporto ragioni con molta efficacia a favor di essa, senza apportar alcuna soluzione, sono stato giudicato vehementemente sospetto d'heresia, cioè d'aver tenuto e creduto che il Sole sia centro del mondo e imobile e che la terra non sia centro e che si muova. Pertanto volendo io levar dalla mente delle Eminenze Vostre e d'ogni fedel Cristiano questa vehemente sospizione, giustamente di me conceputa, con*

[14] Per la precisione, l'atto di abiura verrà letto per ordine del Sant'Uffizio a Firenze, Siena, Padova, Bologna, Napoli, Vicenza, Venezia, Conegliano, Brescia, Ferrara, Vienna, Udine, Perugina, Como, Pavia, Faenza, Milano, Crema, Cremona, Reggio Emilia, Bruxelles, Mantova, Gubbio, Pisa, Liegi, Colonia, Casale, Wilna, Novara, Piacenza. L'efficacia dell'istituto dell'abiura contro gli intellettuali ritenuti pericolosi era naturalmente commisurata solo alla grande diffusione che l'abiura stessa doveva avere al cospetto di tutti gli altri intellettuali del continente.

> *cuor sincero e fede non finta abiuro, maledico e detesto li sudetti errori et heresie, e generalmente ogni e qualunque altro errore, heresia e setta contraria alla Santa Chiesa; e giuro che per l'avvenire non dirò mai più ne asserirò, in voce o in scritto, cose tali per le quali si possa aver di me simil sospizione; ma se conoscerò alcun heretico o che sia sospetto d'heresia lo denonziarò a questo Sant'Offizio, o vero all'Inquisitore o Ordinario del luogo, dove mi trovarò. Giuro anco e prometto d'adempire e osservare intieramente tutte le penitenze che mi sono state o mi saranno da questo Sant'Offizio imposte; e contravenendo ad alcuna delle dette mie promesse e giuramenti, il che Dio non voglia, mi sottometto a tutte le pene e castighi che sono da' sacri canoni e altre constituzioni generali e particolari contro simili delinquenti imposte e promulgate. Così Dio m'aiuti e questi suoi santi Vangeli, che tocco con le proprie mani. Io Galileo Galilei sodetto ho abiurato, giurato, promesso e mi sono obligato come sopra; e in fede del vero, di mia propria mano ho sottoscritta la presente cedola di mia abiurazione e recitatala di parola in parola, in Roma, nel convento della Minerva, questo 22 giugno 1633.*
>
> *Io, Galileo Galilei ho abiurato come di sopra, mano propria.*

E se avesse avuto la forza di farlo, avrebbe forse davvero guadagnato anche il totale rispetto dei ragazzi che inseguono gli eroi che non cedono di fronte a nessuna ingiustizia, che non arretrano di fronte a nessuna minaccia.

Ma a noi, forse perché non siamo più ragazzi, non dispiace che il grande vecchio abbia accontentato il Santo Uffizio, leggendo e pronunciando quelle frasi e abiurando le sue stesse idee. E non abbiamo bisogno neanche della bella leggenda che lo racconta colpire col piede la Terra, ancora nell'aula dell'Inquisizione, mormorando a sé stesso "*E pur si muove!*". Ci basta l'idea che con l'abiura si sia guadagnato almeno altri otto anni di vita nella sua Arcetri, accudito dalla figlia. Ci auguriamo che, da uomo, sia riuscito a cogliere da quegli anni la serenità sufficiente a farlo sentire in pace con il mondo. Le sue idee sono rimaste accese e luminose molto più a lungo delle idee di coloro che lo hanno costretto al carcere, alla tortura e all'infamia: ci piacerebbe molto se, in un momento di lungimiranza nei suoi ultimi anni d'Arcetri, si fosse reso conto che questo sarebbe inevitabilmente dovuto succedere.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
La strada per il Luogo da Cui			
Non sono sicuro			

2.1 La strada per il Luogo da Cui

Che, dovreste ricordarvelo, trattasi della casa in cui Rudy si ritira a "pensare" (dice lui: sua mamma verifica un preoccupante calo nelle scorte di birra), e dove vivono i suoi genitori; essendo la casa in aperta campagna, il posto piace poco a sua moglie Paola, che preferisce il Luogo del Divano Quantistico (circondato dalla frenesia di una pulsante metropoli di settecento abitanti) e, per garantire a ciascuno il ritorno a Torino all'ora preferita, usano solitamente due auto.

Chiunque sia stato in auto con Rudy sa che a lui piace partire e arrivare senza soste intermedie, possibilmente a bassa velocità; e chiunque lo sia stato con Paola sa che la sua guida è decisamente più sportiva (Rudy la definisce "tentata strage", ma non staremo a sottilizzare) e sa anche che lei considera un *sine qua non* il fermarsi a comprare qualcosa per strada; nel caso specifico, sul percorso esiste una pasticceria che, tra l'Epifania e Carnevale, fa delle stupende focacce dolci; siccome siete gli unici a non conoscerla c'è sempre una coda notevole, e Paola ci passa sempre mezz'ora.

"E le Pesti?" Beh, loro, come al solito, creano dei problemi; il loro comportamento è dettato da scelte dell'ultimo momento.

Alcune volte vanno con Paola, sciroppandosi la mezz'ora di tentazioni represse ("Niente paste, che poi a pranzo lasciate tutto lì!").

Quando Rudy parte contemporaneamente a Paola (dalla casa di Torino), di solito le Pesti vanno con Rudy; data la sua guida, Paola arriva alla pasticceria quando Rudy ha fatto solo 24 chilometri e giungendo infine al Luogo da Cui quando Rudy è ancora a 6 chilometri dall'arrivo; per minimizzare il tempo senza fare niente davanti ai dolci le Pesti arrivano con Rudy fino alla pasticceria e lì fanno appena in tempo a saltare sulla macchina di Paola che sta partendo armata di focaccia.

Va detto che ogni tanto Rudy decide di partire prima; una volta, ad esempio, Paola (che aveva a bordo le Pesti) lo ha raggiunto davanti alla pasticceria; veloce cambio d'auto e Rudy e le Pesti (che hanno proseguito subito) sono arrivati al Luogo da Cui 15 minuti prima di Paola (reduce dalla solita sosta in pasticceria).

...Ma secondo voi, quanto dista il Luogo da Cui da Torino?

> *Piccola nota: le distanze (sia del Luogo da Cui che della pasticceria, realmente esistente) sono quelle vere. Se decidete di venirmi a trovare telefonate prima, e portate la focaccia. Spaghettata garantita, se indovinate il posto.*

2.2 Non sono sicuro

Prima di tutto una nota: di questo problema abbiamo la risposta nel "caso semplice", anche se è piuttosto insoddisfacente; per quanto riguarda le generalizzazioni abbiamo solo alcune ipotesi e, dal numero che compare in una di queste, potete dedurre da quanti anni Rudy ha in sospeso la cosa.

Ve lo ricordate il problema di Josephus Flavius? Quello con "N" persone in cerchio, si parte da una, si saltano un certo numero di persone e si elimina la successiva, poi si saltano lo stesso numero di persone eccetera, sino a restare con "k" persone che rappresentano quelle che devono salvarsi e si chiede la posizione di queste persone nel cerchio originale; lo avevamo proposto nel numero 74 e lo avete risolto brillantemente, quindi potreste provare con questo

Cominciamo con il caso semplice, giusto per scaldarsi un attimo. Attenzione che le regole qui sono diverse e, se volete la mia opinione, *sembrano* più semplici.

Abbiamo 6 persone, alle quali vengono distribuiti i numeri da 1 a 6; il tizio che decide tutto fa questa dichiarazione:

"Partiamo dal numero 2, che mi sta simpatico, e lo liberiamo; però resta nel cerchio. Siccome lui ha il numero 2, contiamo due persone in senso orario e liberiamo la persona sulla quale arriviamo lasciandola però nel cerchio; questa persona ha un numero, quindi contiamo per il suo numero (sempre in senso orario) e avanti così. *Attenzione*, però: se, contando, ci fermiamo su una persona già liberata, fermiamo il gioco e tutti i non liberati se ne tornano in cella".

A seguito delle vostre capacità matematiche, alla fine del gioco tutti e sei ve ne andate liberi. Come vi siete organizzati?

E fin qui, il problema originale; come vi dicevo, dalla variazione si capisce da quanto sto lavorando su alcune espansioni... I numeri distribuiti questa volta sono 1998, e si chiede di ottenere lo stesso risultato, sempre partendo dal 2. Data la dimensione del numero, probabilmente è più semplice trovare un caso generale, ma qui comincio a remare di brutto; al momento (e in otto anni francamente non mi pare una gran cosa) sono riuscito ad appurare i seguenti punti.

1. Esistono dei valori di N per cui il problema è impossibile; quali?
2. Partendo dal 2 (quello simpatico nel caso originale) non sono riuscito a trovare una struttura che permetta in modo generalizzato un "liberi tutti!", ma partendo da alcuni altri valori la cosa risulta piuttosto semplice.

Bene, qualcuno ci vuole provare? Se poi riuscite ad andare avanti nei casi in cui non sono riuscito a fare niente, prometto che appena mi tolgono il gesso comincio a fare i salti di gioia.

3. Bungee Jumpers

Prima Parte

Siano α e β radici dell'equazione:

$$x^2 + px + q = 0$$

e γ e δ radici dell'equazione

$$x^2 + Px + Q = 0 .$$

Esprimere, in termini dei coefficienti delle due equazioni, il prodotto

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$$

Seconda Parte

Date le due equazioni

$$x^2 + ax + 1 = 0\,,$$

$$x^2 + x + a = 0\,,$$

determinare tutti i valori di $\boldsymbol{a}$ per cui le due equazioni hanno almeno una radice comune.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

E così arriviamo a questo numero di Febbraio, che ci vede compiere effettivamente sette anni e teoricamente entrare nel classico "anno delle separazioni". Per il momento possiamo sicuramente affermare di essere proprio fortunati, perché malgrado tutti i casini degli ultimi mesi siamo ancora insieme, e se leggete queste righe siamo anche arrivati con successo alle vostre mailbox. Ora se ci seguite da un po' sapete (e se no ve lo dico io) che noi di RM siamo contro tutte le superstizioni, e non crediamo che niente possa portarci sfortuna, ma Alice (che scrive queste righe) è purtroppo un'inguaribile romantica, di quelle che sanno interpretare le linee sul palmo della mano, e adora leggere gli oroscopi e guardare le stelle, per poi dire che non crede a nessuna di queste baggianate.

Così potete facilmente immaginare che il tanto agognato CdR di Natale, dopo la cancellazione del classico CdR estivo, la tentata e non riuscita improvvisazione del CdR autunnale e tanti altri imprevisti che non vi raccontiamo, non poteva che essere previsto per un vanerdì 13... e non poteva che essere un successone.

Non aspettatevi ora che vi si racconti di cosa si è discusso e quanto si è bevuto, questi sono dati al solito poco misurabili a causa del tasso alcolico e dopotutto i CdR avvengono principalmente per ricordare ai vostri Redattori di essere degli esseri umani e non dei bit sugli schermi elettronici. Rimane il fatto che, per quanto noi si voglia sfidare la sfortuna, la suddetta tenda a colpirci nei nostri punti più deboli: supporti informatici, reti di telecomunicazione, e ossa (precisamente radio) del braccio sinistro e mancino del nostro Grande Capo, del quale alleghiamo una foto di repertorio durante l'evento del mese.

Il GC è stato quindi parecchio pigro durante il mese di gennaio, e bisognoso di coccole, per cui non sono accettate lamentele di nessun tipo sui contenuti dei suoi pezzi di questo mese, considerato anche che li ha scritti con il braccio sbagliato[15], nè sugli altri pezzi, ché qualcuno le coccole le doveva fornire.

Venendo ora al sodo, e cioè a quello che ci avete scritto voi questo mese, c'è ovviamente ancora molto da dire. I primi giorni di gennaio sono stati caratterizzati da una fitta corrispondenza a causa del virus per il quale abbiamo già fatto pubblica ammenda il mese passato. Ringraziamo tutti quelli che ci hanno inviato consigli vari, tutti ottimi (tra i migliori, quello di mandare al diavolo Bill Gates). ***Lux***, in particolare, dice:

> Dite a Piotr che potrebbe mandare tranquillamente auguri da una macchina Mac OS X, Darwin, Linux, FreeBsd, OpenBsd, AmigaOs e varie altre usando un sistema

[15] *E se vi ricordate che il Capo, mancino, è un pessimo disegnatore e scrive con una grafia comprensibile quasi solo a lui, non potete nemmeno sognarvi i grafici e gli scarabocchi prodotti con la mano destra da Rudy... [AR]*

operativo all'avanguardia e senza problemi di virus. Chissà perché si ostinano tutti con Windows, saranno carciofi...:)

Alkampfer, invece, si arrabbia proprio:

> Il problema ha radici più profonde, la nostra comunità digitale è impreparata. Tenere il proprio computer senza antivirus causa danni anche agli altri
>
> 1) Permette una maggior diffusione dei virus
>
> 2) Molti virus prelevano i nomi dalla rubrica e li utilizzano come mittente, risultato è che persone mi chiamano dicendo che io sono infetto quando non è vero.
>
> È come se il vicino che ha il balcone vicino al nostro tenesse sempre l'appartamento aperto ed i ladri poi passano dal suo al nostro balcone. Il reato è ancora più grave perché esistono antivirus gratuiti come www.grisoft.com (avg) che funzionano benissimo e firewall gratuiti (Sygate) che sono eccezionali, putroppo le persone non li sanno usare.
>
> Risultato? Se si prende un log di un firewall possiamo notare che all'atto della connessione +/- un 10 tentativi all'ora di intrusione li ricevo... ecco perché mi connetto tramite router+firewall+firewall direttamente sulla macchina e purtroppo sono costretto ad alzare protezioni assurde perché le sottoreti di tin, alice sono piene di computer infetti che fanno da testa d'ariete... sarà proprio giusto che sia possibile utilizzare un computer senza alcuna preparazione? D'altronde per guidare una macchina serve una patente, per la propria ed altrui sicurezza, spero che un giorno questo sia vero anche per la rete.

Dal nostro ***Lord Alkampfer*** ci permettiamo di copiare anche parte della *signature*, che si adatta ai nostri giorni qui in Redazione:

Un timoniere di valore continua a navigare
anche con la vela ridotta a brandelli.
(Seneca)

Ancora sulle nostre lamentele informatiche del mese scorso, ci è stato suggerito da molti di regalare account G-mail a chiunque ne avesse bisogno, e noi siamo in realtà in grado di farlo: chiedete e vi sarà dato.

Manco a dirlo, nessuno di è accorto di un errore nell'impaginazione dei BJ di dicembre (una parentesi graffa persa), a parte ***Michele***; il Capo si è brevemente consolato dell'errore di Alice solo grazie al fatto che almeno uno se ne fosse accorto...

Sempre per la serie errori ed omissioni, per quanto riguarda gli eventi del mese, in dicembre ce ne è sfuggito uno abbastanza importante, come ci ricorda ***Lux***:

> (...) segnalo il fatto che la verifica del XLIII numero primo di Mersenne, scoperto il giorno del mio compleanno, è terminata - se non ho letto male - e ha validato il numero esattamente il 25 dicembre. È la testimonianza del fatto che Dio non gioca a dadi, ma con Mathematica, e che effettivamente è l'unico a potersi trastullare con numeri da nove milioni di cifre _e_ intanto incartare i regali.
>
> A http://mathworld.wolfram.com/news/2005-12-25/mersenne-43/ si trova, per l'eventuale voglia di divertimento dei lettori matematicamente svantaggiati di RM come me, un notebook di Mathematica che contiene un po' di informazioni carine su M(43), tra le quali la distribuzione delle singole cifre da 0 a 9 eccetera. Mathematica è scaricabile in prova gratuita per quindici giorni.

Prima di chiudere questi nostri pettegolezzi, che questo mese più che altro potrebbero essere intitolati "scuse varie e non richieste", facciamo i nostri complimenti a tutti i nostri lettori che hanno fondato o contribuiscono ad una rivista elettronica e no, non possiamo citarli tutti, ma troveremo prima o poi un modo di farvi pubblicità sul nostro sito.

Ed ora passiamo alle soluzioni dei problemi proposti.

Non finiremo mai di ringraziare chiunque tenti la lettura di numeri di RM antichissimi e la soluzione dei problemi storici. Questo mese il ***Panurgo*** ha risfoderato la divisione del segmento e ci ha mandato molti interessanti disegni, e continuiamo a ricevere entusiasmanti sfide per la soluzione del messaggio agli alieni (per quelli che hanno poca pazienza, la soluzione è sul sito, nel Bookshelf).

Citiamo solo qui le mail di correzione di ***Michele***, che sottolineano quanto ***Celeste*** avesse ragione sul problema "Finché Alice è via", e di ***Celeste*** stesso sulla soluzione di Pietro. Purtroppo Alice è tornata e non vuole più saperne del suddetto problema, ma ringraziamo lo stesso per i contributi molto precisi ed interessanti. *[Molto spesso non ci schieriamo sulla correttezza di una soluzione perché ci piace scatenare la rissa (ovvero stimolare il vostro spirito critico), ma in questo caso era proprio Alice che aveva compilato malamente le soluzioni e, non avendo voluto capire il problema, non ha dato ragione a nessuno. Perdonatela, ancora non abbiamo trovato nessun altro che ci impagini la rivista (PRS&RdA)].*

Cid, infine, ci ha scritto anche per lamentarsi del Calendario, che non gli è piaciuto per niente, e per inviarci alcune soluzioni allo stesso. Non pubblicheremo neppure queste per non rovinare la sorpresa a chiunque altro volesse provarci, se ne ricevessimo un numero sufficiente potremmo preparare uno speciale entro dicembre.

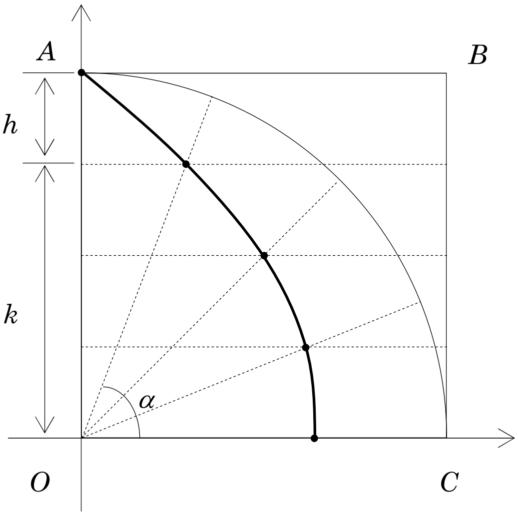
4.1 [082]

4.1.1 Il sentiero da Cui

Proprio poche ore prima di abbandonare il duemilaecinque, proprio alla fine di dicembre, ***Alberto*** ci ha inviato un contributo su questo problema che è in realtà un'estensione. Diamogli subito la parola:

> (...) recentemente ho avuto il tempo di dedicarmi al problema 2.2 di RM082 (Il Sentiero da Cui...). Purtroppo, avendo mal interpretato il testo, ho affrontato una "extended version" che mi ha portato molto, molto lontano dal vero problema. Tuttavia, ritenendola interessante, ho pensato di inviarla ugualmente, assieme ad alcune osservazioni sul problema originale. Magari non farete in tempo a pubblicarla per il numero di gennaio ma non importa... Ah, dimenticavo, nel calcolo di integrali e altre somme infinite confesso l'uso di Excel e Derive. (...)
>
> Vorrei ora dire due parole circa i disegni. Anche secondo me, come già voi avete fatto notare, disegnare su Word è un'impresa "epica". È per questo che io uso Publisher, il quale manifesta diversi vantaggi: uno per tutti, il ridimensionamento o la rotazione, più che millimetrici, di linee o forme qualsiasi attraverso i tasti CTRL e SHIFT. (...)
>
> ***Alcune osservazioni sui nomi delle curve.***
>
> La *trisettrice di Ippia* e la *quadratrice di Dinostrato* sono sostanzialmente la stessa curva. La prima fu scoperta da Ippia di Elide (V sec. a.C.) in seguito al problema sulla trisezione dell'angolo e, stando a ciò che riferisce nel III sec. d.C. Pappo di Alessandria, sembra che solo più tardi Dinostrato (IV sec. a.C.), discepolo di Platone, se ne servisse per la quadratura del cerchio. Alcuni, quindi, non credono che Ippia conoscesse la proprietà quadratrice della curva che porta il suo nome. Altri, più "salomonicamente", parlano della *quadratrice di Ippia-Dinostrato*.
>
> Il sentiero che il problema 2.2 chiede di pavimentare, come vedremo nel seguito, è fatto di punti appartenenti ad un tratto di *cocleoide*.
>
> ***Altre osservazioni.***

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali siano dati i punti di coordinate O(0,0), A(0, *r*), B(*r*, *r*) e C(*r*, 0). Consideriamo il quadrato di lato r e il quadrante di centro O e raggio r in esso contenuto.



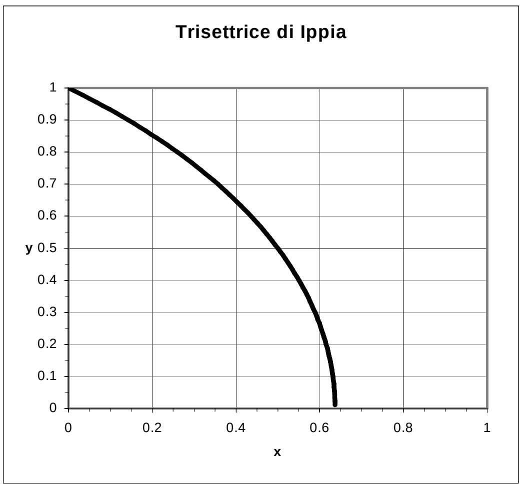
Con movimento uniforme portiamo il raggio OA del quadrante a coincidere con il raggio OC e nello stesso tempo, parallelamente alle ascisse, il lato AB a coincidere con il lato OC. Istante per istante, l'intersezione delle due rette mobili descrive una curva nota col nome di *trisettrice di Ippia*. Ricaviamone ora l'equazione.

Sia $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = r^2$ il quarto di cerchio t.c. (x_0, y_0) appartenga al I quadrante.

L'angolo formato da un raggio qualsiasi è tale che: $\tan\alpha = y_0/x_0$. La retta passante per l'origine e per (x_0, y_0) è: $y = x \cdot \tan\alpha$. Dalla proporzione $\alpha : (\pi/2 - \alpha) = k : h$ si ricava $k = 2\alpha r/\pi$. Dal sistema tra le rette $y = x \cdot \tan\alpha$ ed $y = k$ si arriva alle coordinate cartesiane $\begin{cases} x = \dfrac{2r}{\pi} \cdot \dfrac{\alpha}{\tan\alpha} \\ y = \dfrac{2r}{\pi} \cdot \alpha \end{cases}$

In coordinate polari, invece, si ottiene:

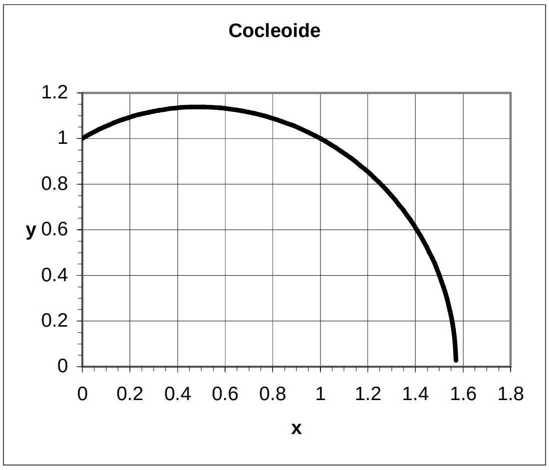
$$\rho(\alpha) = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\sin\alpha} \; (\forall\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}). \qquad \textbf{[4.1]}$$



La trisettrice interseca l'asse x nel punto di ascissa $2r/\pi$, l'asse y nel punto (0, 1) e passa inoltre per il punto di coordinate ($r/2$, $r/2$).

Nel caso del problema 2.2 la curva passante per i "punti-cubetti" non può essere la trisettrice di Ippia. Per dimostrarlo basta osservare che, se al contrario lo fosse, allora risulterebbe: $\rho(0) = \pi/2$ e $\rho(\pi/4) = \sqrt{2}$. Ma questo, per la relazione **[4.1]**, implicherebbe $r = \pi^2/4$ ed $r = 2$ allo stesso tempo, cosa ovviamente impossibile. Se ne deduce che l'equazione del cammino da pavimentare non è quella della trisettrice di Ippia.

La *cocleoide* è una curva di equazione polare $\rho'(\alpha) = c \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, essendo c una costante. Se ora assumiamo $c = \pi/2r$ è immediato verificare che $\rho \cdot \rho' = 1$. Detto questo le coordinate cartesiane dei "punti-cubetto" saranno:



$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2r} \cdot \dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\alpha} \\ y = \dfrac{\pi}{2r} \cdot \dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha} \end{cases}$$

e si osservi che la cocleoide interseca gli assi nei punti ($\pi/2r$, 0) e (0, $1/r$) che, nel caso in cui $r = 1$, sono proprio i punti ($\pi/2$, 0) e (0, 1). L'unica cosa in comune con la trisettrice è il punto (0, 1), come si vede immediatamente imponendo $\rho = \rho'$.

Per calcolare la lunghezza del cammino da selciare procediamo come segue.

Consideriamo due punti P e Q della cocleoide infinitamente vicini, tali che $\overline{PQ} = dL$. Ad essi corrisponderanno i raggi-vettori di lunghezza ρ e $\rho + d\rho$, e fra di essi vi sarà l'angolo $d\alpha$. Detta L la lunghezza del tratto di cocleoide di nostro interesse avremo:

$$L = \int dl = \int \rho \; d\alpha = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\cdot(2\nu+1)!} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2\nu+1} = 1{,}192196...$$

Se invece si intende selciare il sentiero coprendo i cateti minori della successione dei triangoli rettangoli allora occorrerà procedere come segue.

La successione $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ degli angoli al centro è tale che $\alpha_n = \pi/2^{n+2}$ ($\alpha_0 = \pi/4$).

La successione $\rho_0, \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ dei cateti maggiori è tale che $\rho_n = \rho_{n-1}/\cos\alpha_{n-1}$ ($\rho_0 = 1$).

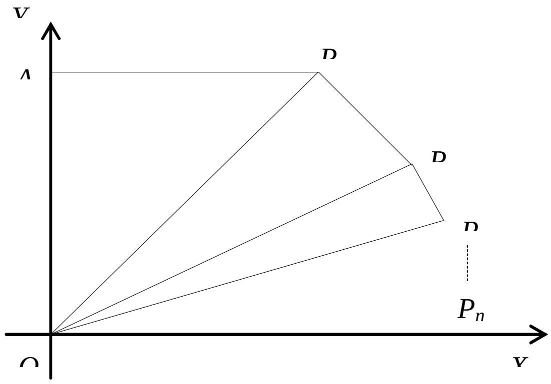
La successione $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ dei cateti minori è tale che $c_n = \rho_n \cdot \tan\alpha_n$ ($c_0 = 1$).

Segue: $c_n = \rho_n \cdot \tan\alpha_n = \dfrac{\rho_0}{\prod_1^{n-1}\cos\alpha_i} \cdot \dfrac{\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n} \rightarrow c_n = \dfrac{\sin\alpha_n}{\prod_1^{n}\cos\alpha_i}$. A questo punto

la lunghezza da determinare sarà data da: $L' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin\alpha_k}{\prod_{i=1}^{k}\cos\alpha_i} = 1{,}198127...$.

Ma perché la lunghezza L' del percorso inscritto nella cicloide risulta maggiore della lunghezza L del tratto di cicloide? Non è più forse vero che la corda è minore dell'arco? Mistero...

Problema 2.2 (extended version)



Inizialmente pensavo che la successione dei cateti minori andasse dimezzandosi, anziché quella degli angoli al centro. E siccome avevo già fatto tutti i conti prima di accorgermene, ve li propongo lo stesso come curiosa estensione del problema.

Indichiamo rispettivamente con C, c, i, α (seguiti da opportuni pedici) il cateto maggiore, minore, l'ipotenusa e l'angolo minore di ogni triangolo della successione. In generale, essendo n il triangolo n-mo ($\forall\ n \geq 1$), avremo:

$$\begin{cases} C_n = i_{n-1} \\ c_n = \dfrac{c_{n-1}}{2} \\ i_n^{\ 2} = C_n^{\ 2} + c_n^{\ 2} \\ \tan\alpha_n = \dfrac{c_n}{C_n} \end{cases} \quad \text{e in figura:} \quad \begin{cases} OP_n = i_n \\ P_nP_{n-1} = c_n \\ P_n\hat{O}P_{n-1} = \alpha_n \\ O\hat{P}_{n-1}P_n = \pi/2 \end{cases}$$

Posto che: $l = \lim\limits_{n\to\infty} i_n$, un noto teorema ci assicura che $l^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} i_n\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} i_n^{\ 2}$. Se ora esprimiamo i_n successivamente in funzione di $i_{n-1}, i_{n-2}, i_{n-3}, \ldots$ e $c_{n-1}, c_{n-2}, c_{n-3}, \ldots$ dopo alcuni passaggi otteniamo:

$$i_n^{\ 2} = i_{n-1}^{\ 2} + \frac{c_{n-1}^{\ 2}}{4} = i_{n-2}^{\ 2} + \frac{c_{n-2}^{\ 2}}{4} + \frac{c_{n-2}^{\ 2}}{16} = i_{n-3}^{\ 2} + \frac{c_{n-3}^{\ 2}}{4} + \frac{c_{n-3}^{\ 2}}{16} + \frac{c_{n-3}^{\ 2}}{64} = \ldots =$$

$$= i_{n-k}^{\ 2} + c_{n-k}^{\ 2} \cdot \left(\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^k}\right)$$

Essendo $0 \leq k \leq n-1$ ed $n \to \infty$ avremo:

$$l^2 = \lim_{n\to\infty} i_n^{\ 2} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to n}} \left(i_{n-k}^{\ 2} + c_{n-k}^{\ 2} \cdot \sum_1^k \frac{1}{4^j} \right) = i_1^{\ 2} + c_1^{\ 2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

e quindi $l = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$, ovvero $l \cong 1{,}52752523\ldots$, che è l'ascissa dell'ultimo cubetto rosso.

Sin qui la variante del problema originale dovuta alla mia erronea interpretazione. Resterebbe ora da calcolare l'equazione della curva passante per tali cubetti. E questo è un po' più complesso...

Cominciamo con lo studiare le successioni C_n, c_n, α_n dei cateti maggiori, dei cateti minori e degli angoli minori dei triangoli rettangoli. Cercheremo di determinare delle "formule chiuse" per ottenerne i valori al variare di n intero non negativo.

La successione più semplice è quella dei cateti minori. Le altre si possono invece ricavare osservando la seguente tabella, in cui le lettere *N* e *D* indicano, nella frazione, rispettivamente il radicando del numeratore e il denominatore:

n	c_n	$C_n = \frac{\sqrt{N_n}}{D_n}$	N_n	D_n	$\tan\alpha_n = \frac{c_n}{C_n}$
0	1	1	1/4	1/2	1
1	1/2	$\sqrt{37}/4$	2	1	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
2	1/4	3/2	9	2	$\frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$
3	1/8	$\sqrt{37}/4$	37	4	$\frac{1}{2\sqrt{37}}$
4	1/16	$\sqrt{149}/8$	149	8	$\frac{1}{2\sqrt{149}}$
5	1/32	$\sqrt{597}/16$	597	16	$\frac{1}{2\sqrt{597}}$
6	1/64	$\sqrt{2389}/32$	2389	32	$\frac{1}{2\sqrt{2389}}$
…	…	…	…	…	…
n	$1/2^n$	$\sqrt{\frac{7}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-2}}}$	$\frac{7 \cdot 2^{2n-2} - 1}{3}$	2^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{N_n}}$

Per giustificare i risultati di N_n e C_n, ottenuti in generale, ricorriamo ad un esempio. Dalla tabella si prenda $n = 6$. Dovrà risultare $N_6 = 2389$. Ora si osservi quanto segue:

$$\begin{cases} S_P = \sum_0^{n-1} 2^{2i} = \sum_0^{5} 2^{2i} = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} = 1365 \\ S_D = \sum_0^{n-1} 2^{2i+1} = \sum_0^{5} 2^{2i+1} = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 + 2^{11} = 2730 \\ 2 \cdot S_P = S_D \;\rightarrow\; 3 \cdot S_P = S_D + S_P = \sum_0^{2n-1} 2^i = 2^{2n} - 1 \;\rightarrow\; S_P = \frac{2^{2n} - 1}{3} \\ 2^{2n-2} = 2^{10} = 1024 \end{cases}$$

ove con S_P ed S_D si sono indicate le somme di potenze pari e dispari rispettivamente. Quindi:

$$N_n = 2^{2n-2} + S_P = 2^{2n-2} + \frac{2^{2n}-1}{3} = 2^{2n-2} + \frac{4\cdot 2^{2n-2}-1}{3} = \frac{3\cdot 2^{2n-2}+4\cdot 2^{2n-2}-1}{3} = \frac{7\cdot 2^{2n-2}-1}{3}$$

che è il risultato generale (nell'esempio considerato si ha: $N_6 = \frac{7\cdot 2^{10}-1}{3} = 2389$). In aggiunta si osservi anche che: $N_{n+1} = 4N_n + 1$.

L'espressione generale del cateto maggiore diviene invece:

$$C_n = \frac{\sqrt{N_n}}{D_n} = \frac{\sqrt{\frac{7\cdot 2^{2n-2}-1}{3}}}{2^{n-1}} = \sqrt{\frac{7\cdot 2^{2n-2}-1}{3\cdot 2^{2n-2}}} = \sqrt{\frac{7}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^{2n-2}}};$$

si osservi che: $\lim_{n\to\infty} C_n = l = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

E quella per la tangente dell'angolo minore sarà:

$$\tan\alpha_n = \frac{c_n}{C_n} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{\sqrt{N_n}}{D_n}} = \frac{D_n}{2^n\cdot\sqrt{N_n}} = \frac{2^{n-1}}{2^n\cdot\sqrt{N_n}} = \frac{1}{2\sqrt{N_n}}.$$

E infine si osservi che: $\lim_{n\to\infty} N_n = +\infty$, perciò: $\lim_{n\to\infty}(\tan\alpha_n) = 0$, e quindi: $\alpha_n \to 0$. (C.D.D.).

Con riferimento alla figura iniziale poniamo $P_n\hat{O}X = \theta_n$ e notiamo che $A\hat{O}P_0 = \frac{\pi}{4}$. È ovvio allora osservare che: $\theta_n = A\hat{O}P_0 - \sum_1^n \alpha_i = \frac{\pi}{4} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, e le coordinate di un "punto-cubetto" saranno: $x_n = i_n \cos\theta_n$ ed $y_n = i_n \sin\theta_n$ (essendo $i_n = \sqrt{C_n^{\ 2} + c_n^{\ 2}}$).

Per semplicità operiamo la sostituzione $\varphi_n = \sum_1^n \alpha_i$ ed avremo:

$$\begin{cases}
\cos\theta_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_n\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi_n + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\varphi_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi_n + \sin\varphi_n) \\
\sin\theta_n = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_n\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi_n - \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\varphi_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi_n - \sin\varphi_n) \\
\tan\theta_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_n\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\varphi_n}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\varphi_n} = \frac{1-\tan\varphi_n}{1+\tan\varphi_n}.
\end{cases}$$

Ed esprimendo seno e coseno in funzione della tangente avrò:

$$\begin{cases} \cos\varphi_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi_n}} \\ \sin\varphi_n = \dfrac{\tan\varphi_n}{\sqrt{1+\tan^2\varphi_n}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\theta_n = \dfrac{1+\tan\varphi_n}{\sqrt{2+2\tan^2\varphi_n}} \\ \sin\theta_n = \dfrac{1-\tan\varphi_n}{\sqrt{2+2\tan^2\varphi_n}} \end{cases} \qquad \textbf{[4.2]}$$

Ora applicheremo ricorsivamente la formula per la tangente della somma di due angoli, cioè la ben nota formula: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$, allo scopo di calcolare $\tan\varphi_n=\tan(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$.

Avverto solo che, nel seguito, le lettere *P* e *Q* indicano rispettivamente numeratore e denominatore delle frazioni che man mano si ottengono al penultimo membro, e proseguo senza commentare:

$$\tan\varphi_0=\tan\alpha_0=\frac{0}{1}=\frac{P_0}{Q_0}$$

$$\tan\varphi_1=\tan\alpha_1=\frac{\tan\alpha_1}{1}=\frac{P_1}{Q_1}$$

$$\tan\varphi_2=\tan(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{\tan\alpha_1+\tan\alpha_2}{1-\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}=\frac{P_1+Q_1\tan\alpha_3}{Q_1-P_1\tan\alpha_3}=\frac{P_2}{Q_2}$$

$$\tan\varphi_3=\tan[(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3]=\frac{\tan(\alpha_1+\alpha_2)+\tan\alpha_3}{1-\tan(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\tan\alpha_3}=\frac{P_2+Q_2\tan\alpha_3}{Q_2-P_2\tan\alpha_3}=\frac{P_3}{Q_3}$$

$$\tan\varphi_4=\tan[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_4]=\frac{\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\tan\alpha_4}{1-\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\cdot\tan\alpha_4}=\frac{P_3+Q_3\tan\alpha_4}{Q_3-P_3\tan\alpha_4}=\frac{P_4}{Q_4}$$

...

$$\tan\varphi_n=\tan[(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})+\alpha_n]=\frac{\tan(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})+\tan\alpha_n}{1-\tan(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})\cdot\tan\alpha_n}=\frac{P_{n-1}+Q_{n-1}\tan\alpha_n}{Q_{n-1}-P_{n-1}\tan\alpha_n}=\frac{P_n}{Q_n}$$

Come abbiamo mostrato nella tabella precedente, siamo in grado di calcolare i termini della successione $\tan\alpha_1,\tan\alpha_2,\tan\alpha_3,\ldots$ (che indicheremo per semplicità con $t_1,t_2,t_3,\ldots$). Ne derivano le seguenti formule ricorsive:

$$\begin{array}{lcl} P_0=0 & & Q_0=1 \\ P_1=P_0+Q_0t_1 & & Q_1=Q_0-P_0t_1 \\ P_2=P_1+Q_1t_2 & & Q_2=Q_1-P_1t_2 \\ P_3=P_2+Q_2t_3 & \text{e} & Q_3=Q_2-P_2t_3 \\ P_4=P_3+Q_3t_4 & & Q_4=Q_3-P_3t_4 \\ \ldots & & \ldots \\ P_n=P_{n-1}+Q_{n-1}t_n & & Q_n=Q_{n-1}-P_{n-1}t_n \end{array} \qquad \textbf{[4.3]}$$

mentre, con le notazioni specificate, riassumiamo le formule e tutti i dati sin qui ottenuti nella tabella di MS-Excel del *file* allegato (*RM082.xls*). *[No, i numeri non li riportiamo. Il grafico è un po' più giù (AR)]*

n	indice progressivo	0, 1, 2, 3, ...
c_n	cateto minore	$c_n = 1/2^n$
C_n	cateto maggiore	$C_n = \dfrac{\sqrt{N_n}}{D_n}$
i_n	ipotenusa	$i_n = \sqrt{c_n^{\ 2} + C_n^{\ 2}}$
N_n	radicando del numeratore	$N_n = \dfrac{7 \cdot 2^{2n-2} - 1}{3}$
D_n	denominatore	$D_n = 2^{n-1}$
$\tan \alpha_n$	(angolo minore)	$t_n = \dfrac{c_n}{C_n} = \dfrac{1}{2\sqrt{N_n}}$
P_n	numeratore	$P_n = P_{n-1} + Q_{n-1} \cdot t_n$
Q_n	denominatore	$Q_n = Q_{n-1} - P_{n-1} \cdot t_n$
φ_n	somma degli angoli minori	$\varphi_n = \sum_1^n \alpha_i$
θ_n	angolo formato con le ascisse	$\theta_n = \dfrac{\pi}{4} - \varphi_n$
x_n	ascissa del punto	$x_n = i_n \cdot \cos \theta_n$
y_n	ordinata del punto	$y_n = i_n \cdot \sin \theta_n$

Dalle equazioni **[4.2]** si ricava:

$$\begin{cases} \tan \varphi_n = \dfrac{P_n}{Q_n} \\ \sin \varphi_n = \dfrac{P_n}{\sqrt{P_n^{\ 2} + Q_n^{\ 2}}} \\ \cos \varphi_n = \dfrac{Q_n}{\sqrt{P_n^{\ 2} + Q_n^{\ 2}}} \end{cases}$$

Sommando membro a membro le equazioni **[4.3]** otteniamo (omettendo i passaggi):

$$P_n = \sum_0^n P_i - \sum_0^{n-1} P_i = \sum_0^{n-1} Q_i t_{i+1}$$

$$1 - Q_n = \sum_0^{n-1} Q_i - \sum_0^n Q_i = \sum_0^{n-1} P_i t_{i+1}$$

e da queste:

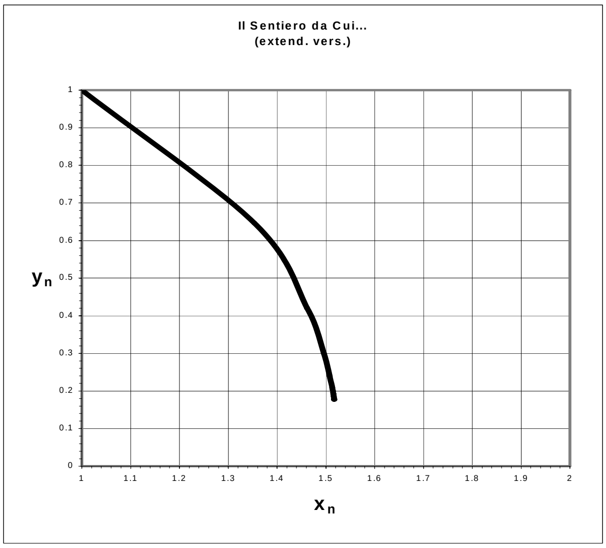
$$\begin{cases} \sin\theta_n = \dfrac{1-(P_0+Q_0)\cdot t_1-(P_1+Q_1)\cdot t_2-\ldots-(P_{n-1}+Q_{n-1})\cdot t_n}{\sqrt{2}\cdot\left(1+t_1^{\,2}\right)\cdot\left(1+t_2^{\,2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+t_n^{\,2}\right)} \\ \cos\theta_n = \dfrac{1+(Q_0-P_0)\cdot t_1-(Q_1-P_1)\cdot t_2-\ldots-(Q_{n-1}-P_{n-1})\cdot t_n}{\sqrt{2}\cdot\left(1+t_1^{\,2}\right)\cdot\left(1+t_2^{\,2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+t_n^{\,2}\right)} \\ \tan\theta_n = \dfrac{1-(P_0+Q_0)\cdot t_1-(P_1+Q_1)\cdot t_2-\ldots-(P_{n-1}+Q_{n-1})\cdot t_n}{1+(Q_0-P_0)\cdot t_1-(Q_1-P_1)\cdot t_2-\ldots-(Q_{n-1}-P_{n-1})\cdot t_n} \end{cases}$$

L'equazione della curva passante per i "punti-cubetti", in coordinate polari, sarà finalmente data dalle espressioni seguenti, in cui ρ è il vettore ed ω la fase:

$$\begin{cases} \rho_n = i_n = \sqrt{x_n^{\,2}+y_n^{\,2}} = \sqrt{\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{3\cdot 2^{2n}}} \\ \tan\omega_n = \dfrac{y_n}{x_n} = \tan\theta_n \quad \text{(v. sopra)} \end{cases}$$

Per pavimentare il sentiero usando i cateti minori si necessita di una lunghezza pari a:

$$L=\sum_1^\infty \frac{1}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2\,.$$



Alice non ha capito niente, ma la figura è finita qui sotto a destra, e speriamo che riusciate a vederla malgrado il ridimensionamento.

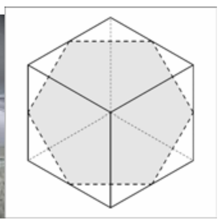
4.2 [084]

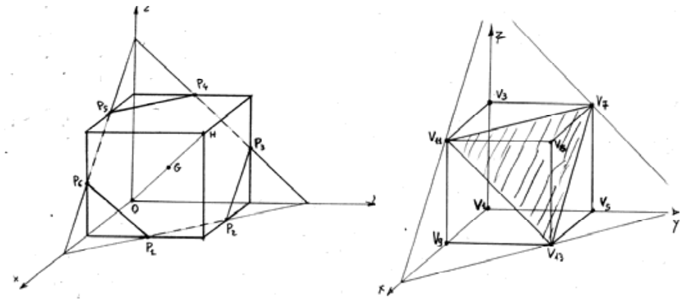
4.2.1 Iper-KIAI

Soluzioni a iosa per questo problema, che è piaciuto moltissimo, ne sono arrivate tantissime, anche se non tutte estremamente... ortodosse, spesso molto divertenti e sempre decisamente colorate.

Mentre cerchiamo di spiegarci meglio, vi diciamo almeno tutti gli allonimi di tutti quelli che hanno scritto in proposito, nell'ordine in cui ci hanno scritto (pressapoco, alcuni hanno scritto più volte...): ***RM²***, ***Gabriel***, ***Sam***, il ***Panurgo***, ***Zar***, ***Celeste***, ***Allanon***, ***Cid***, ***Gavrilo***, ***Petrus***, ***Damir Wilras***, ***Torkitorio***.

Ovviamente, per la versione tridimensionale, molti hanno scelto la via sperimentale, e speriamo di poter pubblicare il maggior numero di disegni in questa parte, alla conclusione alla quale sono arrivati (quasi) tutti.

	***RM²*** ha regalato "ai figli" un paio di scatole di Supermag, e eseguito parecchi esperimenti di statica: *"Purtroppo manca la foto del semicubo sospeso per un vertice, in quanto la statica si è rivelata un ramo della fisica molto aleatorio, e quando ho cercato di sollevare la struttura magneticamente per un vertice applicando ad esso una fila di barrette magnetiche, questa restava appesa a mezz'aria fino ad un microsecondo prima del click (praticamente con la sinistra reggevo il tutto e con la destra cercavo di fare la foto).* *A quel punto subentrava qualcosa di non meglio identificato che in violazione di tutte le leggi di Newton e di Coulomb, rompeva il legame magnetico tra la barretta e il vertice del cubo: la prima mi restava tra le dita e il secondo si schiantava sulla scrivania, deformandosi irrimediabilmente."*
 	Il ***Panurgo*** ci fornisce anche l'arma per il taglio.

	***Celeste*** ha fatto meravigliosi disegni a mano.
	***Gabriel*** ha cercato nei ricordi universitari ed è poi passato ad un esperimento con la vernice...

Una soluzione che è più che altro un trattato storico ce la invia ***Gavrilo***, e ve la riportiamo:

Introduzione

Queste katane e iperkatane mi hanno veramente divertito per almeno tre motivi diversi.

Il primo motivo di divertimento è dovuto alle 3D. Dato che non mi ricordavo quasi niente di Geometria Analitica dello spazio, ho cominciato a giocherellare con l' Algebra Geometrica di Hestenes, della quale mi sono innamorato da qualche anno, pur non avendone imparata molta. Non so bene se a causa della mia ignoranza o dello strumento inadatto non sono andato molto avanti. Poi sono arrivati l'Epifania e i tre Re Magi: Melchiorre, Baldassarre e Gaspare.[16] E, grazie a quest'ultimo ho avuto un'illuminazione: Gaspard Monge (1746-1818) e la sua Geometria Descrittiva (1795), che non toccavo da circa cinquant'anni.

Dopo avere sfogliato e riletto un po' di pagine di vecchi libri, ho preso carta e matita, oltre a righello, squadra e compasso e, in un tempo limitato, ho costruito la mia brava intersezione della 2-katana con il cubo in proiezioni ortogonali, poi ho ribaltato il piano che contiene l'esagono in modo da vederlo sul piano del mio disegno.

Com'è noto, l'appetito vien mangiando e allora mi sono chiesto se c'era un modo per affrontare il problema in 4D. Poiché sul Web oggi c'è quasi tutto, ho incominciato a cercare ed ho scoperto (grazie al titolo di una articolo di Paolo Freguglia ad una conferenza del 1997, pubblicato nel 2000) che esiste almeno una pubblicazione sull'argomento: G. Veronese, "*Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni*", *Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere e Arti, (5) VIII, 981-1025,* (1882). Una nuova ricerca sul Web mi ha permesso di ordinare copia dell'articolo per € 8,10 e di riceverlo per e-mail in 72 ore. L'articolo di Veronese è bellissimo, poiché costruisce tutte le operazioni di proiezione e sezione con cui rappresentare, nello spazio a tre dimensioni,

[16] Esiste pure una tradizione iperapocrifa sul quarto Re Mago, *Pif*: sarà per un'altra volta.

oggetti dello spazio a quattro dimensioni, principalmente con il metodo della proiezione centrale, ma che poi specializza anche per la proiezione ortogonale, portando il punto di proiezione all'infinito. Tutto ciò è bello ed interessante, ma bisognerebbe avere un foglio di carta in 3D su cui rappresentare lo spazio a quattro dimensioni, poi sarebbe facile riportare questa proiezione su di in foglio 2D con il buon vecchio Monge. Scherzi a parte, so benissimo che oggi queste cose si fanno con i CAD, che si devono considerare un monumento *aere perennius* a Monge ed ai suoi epigoni, ma poiché volevo lavorare con carta e matita (e nell'uso dei CAD sono una bestia) ho dovuto mollare l'osso.

Però nel frattempo ho imparato un po' di cose su Giuseppe Veronese (1854-1917), che tra l'altro ha inventato la geometria non-archimedea ed a causa della medesima si prese i rimbrotti di Peano, che, per una volta aveva torto, tanto che poi la geometria non-archimedea fu canonizzata da Hilbert ed il primato di Veronese fu ufficialmente riconosciuto nel 1908.

A questo punto era chiaro che la mia soluzione *à la Monge* era bloccata al 3D, e quindi per il 4D è incominciato il secondo giro di divertimento: ho riaperto la Geometria Analitica dello spazio, ho affilato la mia iperkatana e KIAI! con quattro colpi Iaido ho tagliato in 1, 2, 3 e 4 D, *à la Lagrange* (1736-1818). ('*On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage.'* Prefazione alla *Mécanique Analytique*, 1788).

Infine veniamo al terzo divertimento, che è legato al nome dell'ipercubo 4D. Io mi ricordavo *tessaratto*: ricordo dovuto alla lettura (55 anni fa durante un'estate in un château della Savoia) de '*La quatrième dimension'* da "*La vie de l'éspace*", (1928), di Maurice Maeterlinck (1862- 1949), Nobel Letteratura 1911. Maeterlinck cita il termine "*tessaract"*(le virgolette sono sue), attribuendolo a Howard Hinton, (inoltre nella sua bibliografia cita anche scritti di G. Veronese).

Le mie ricerche sul Web hanno invece confermato che il termine di gran lunga più comune in inglese è *tesseract*, anche se esistono alcuni casi di *tassaract*. Addirittura la Wikipedia dà soltanto *tesseract*, citando come probabile inventore Charles Howard Hinton. Il *Longman Dictionary of the English Usage*, 1984, dà soltanto *tesseract*, citando come etimologia il Greco *tessares* four + *aktis* ray.

A questo punto mi è venuto il dubbio se in italiano si deva dire *tessaratto* oppure *tesseratto*: il Web cita entrambi con una prevalenza di *tesseratto* (l'impero colpisce ancora). I dizionari italiani che ho sottomano: Devoto-Oli, *Il dizionario della lingua italiana*, 1990, il *Vocabolario della lingua italiana*, (5 voll.), Treccani, 1994, e Cortellazzo-Zolli, *Dizionario etimologico della lingua italiana,* Zanichelli, (5 voll.), 1988 non hanno né *tessaratto* né *tesseratto* (Croce colpisce ancora).

Sebbene da alcune parti si ipotizzi che *tesseract* sia stato derivato con etimologia ibrida (tipo *televisione*) da un latino *tessera*, che può significare anche 'dado' (derivato a sua volta dal greco), e altri citino un *tesseres* per quattro del dialetto jonico, non mi sono convinto ed ho tenuto per il vecchio *tessares*, che ho imparato al liceo, ed ho deciso di usare *tessaratto*.

Ma questa barbosa diatriba etimologica non è il divertimento che mi ha dato il tessaratto. Il divertimento vero me lo ha dato Charles Howard Hinton (1853-1907) inventore del termine e le ramificazioni delle sue relazioni avanti e indietro nella storia. Citerò dapprima i vertici principali di queste ramificazioni, che si estendono su due secoli:

Samuel Hahnemann	(1755-1843)
George Everest	(1790-1866)
Thomas Everest	(1801-1855)
George Boole	(1815-1864)
James Hinton	(1822-1875)
Mary Everest Boole	(1832-1916)
Charles Howard Hinton	(1853-1907)
Mary Ellen Boole Hinton	(1856- ?)
Alicia Boole Stott	(1860-1940)
Ethel Lillian (Boole) Voynich	(1864-1960)
Wilfrid M. Voynich	(1865-1930)
Richard Backminster Fuller	(1895-1983)
M.C. Escher	(1898-1972)
Enrico Fermi	(1901-1954)
Harold Scott MacDonald Coxeter	(1907-2003)
Joan Hinton	(1922-)
Fullerene	(1985)

Incominciamo con il nostro eroe del tessaratto: Charles Howard Hinton, matematico inglese, che sposò Mary Ellen Boole, la prima figlia di George Boole (proprio lui, l'autore di *An Investigation into the Laws of Thought, etc.* e dell'Algebra Booleana). Senonchè il nostro Hinton, nel frattempo, sposò anche una certa Maud Wheldon, fu condannato per bigamia e, dopo un giorno di prigione, nel 1886 fuggì in Giappone con la moglie Mary Ellen ed i figli, per poi andare negli Stati Uniti (1893) alla Princeton University. Hinton si interessò della geometria 4D e dei metodi per visualizzarla. Nel 1880 per primo propose il tempo come quarta dimensione. Fu anche scrittore di fantascienza con dei *Scientific Romances*, tra cui *An Episode on Flatland*, che si rifà al noto romanzo di Abbott.[17]

Per parte sua George Boole aveva sposato nel 1855 Mary Everest, il cui padre, il Dr. Thomas Everest, medico, era fratello di Sir George Everest (1790-1866), il topografo e geodeta che diresse la grande operazione della misura dell'arco di meridiano dal sud dell'India fino al Nepal dal 1830 al 1843, ed in cui onore fu nominato il Monte Everest nel 1865.

[17] Oggi abbiamo anche *Flatterland* di Ian Stewart.

Thomas Everest fu discepolo ed amico di Samuel Hahnemann, il fondatore dell'omeopatia. Nel 1837 (quando Mary aveva 5 anni) emigrò con la famiglia in Francia per farsi curare da Hanemann di un'asma, tornando in Inghilterra quando Mary aveva 11 anni. Da allora Mary lasciò la scuola, per assistere il padre nella sua professione, pur continuando a studiare matematica da sola, principalmente il calcolo. Thomas Everest fu il principale diffusore delle teorie omeopatiche nel Regno Unito: un suo discepolo fu James Hinton (padre di Charles Howard Hinton).

I Boole vissero felicemente per nove anni, Mary collaborava con il marito negli studi, ed ebbero cinque figlie. Ma George nel 1864 andò a piedi da casa al Queen's College di Cork (Irlanda), camminando per due miglia sotto una pioggia battente e tenne lezione con gli abiti fradici. Tornato a casa si ammalò probabilmente di polmonite con una febbre fortissima. Mary, ardente omeopata, lo curò con secchi di acqua gelata sulle lenzuola: il risultato fu inevitabile ed il povero George non sopravvisse.

Mary Everest Boole si trasferì in Inghilterra dove fece la bibliotecaria all'università, ma nel 1873 perse il posto a causa di un libro sulla psicologia che suscitò scandalo per la sua non-convenzionalità. Allora incominciò a lavorare come segretaria di James Hinton, che, oltre ad essere medico, era interessato alla psicologia, e collaborò con lui fino alla sua morte nel 1875. Dopo di che Mary fu attiva in psicologia, matematica applicata e pedagogia della matematica fino alla morte nel 1916. Ad onore di Mary bisogna dire che, in uno scritto del 1903, riferì che James Hinton scoprì che l'omeopatia funzionava anche se, invece dei medicinali suggeriti da Hahnemann, si usavano compresse di semplice lattosio, se somminstrate al paziente dal medico. James Hinton pervenne alla conclusione che i risultati erano dovuti all'immaginazione del paziente, sollecitata dal suggerimento silenzioso del medico. Era la scoperta dell'effetto placebo!

Delle cinque figlie dei Boole almeno altre due hanno parte nella nostra saga. Alicia Boole, pur non avendo avuto alcuna istruzione formale, quando il cognato Carles Howard Hinton le regalò dei cubi di legno, sperimentando con essi sviluppò una incredibile sensibilità per la quarta dimensione e introdusse il termine *polytope* (*politopo*)[18] per indicare un poliedro convesso a 4D. Secondo un biografo di Boole "*ella scoprì che, in quattro dimensioni,esistono esattamente sei politopi regolari e che essi sono limitati da 5, 16 oppure 600 tetraedri, da 8 cubi, 24 ottaedri oppure 120 dodecaedri. Ella poi costruì delle sezioni centrali tridimensionali di tutti e sei i politopi regolari, usando costruzioni puramente euclidee e metodi sintetici, per il semplice motivo che non aveva mai studiato la geometria analitica. Infine costruì bellissimi modelli di cartone di tutte queste sezioni …* " (qui veramente mi viene da piangere pensando ai miei sforzi con le iperkatane). Dopo essersi sposata con Walter Stott, nel 1895 mandò fotografie dei suoi modelli in cartone al matematico olandese P.H. Schoute, del quale aveva saputo che lavorava su problemi simili, e con lui pubblicò due articoli: l'Università di Groningen le conferì un dottorato onorario nel 1914. Nel

[18] Il termine *politopo* è presente sia nel Devoto-Oli che nel vocabolario Treccani (forse hanno colpito Gentile ed Enriques).

1930 Alicia fu presentata a Harold Scott MacDonald Coxeter e lavorò con lui a varî problemi sui politopi.

Coxeter, educato a Cambridge, ricercatore a Princeton e infine professore a Toronto, diede contributi fondamentali alla teoria dei politopi, alla geometria non euclidea, alla teoria dei gruppi ed alla matematica combinatoria. Nel 1954 Coxeter incontrò M.C. Escher e ne nacque un'amicizia che durò tutta la vita. Egli diede lo spunto ad alcune opere di Escher, particolarmente cerchi di geometria non euclidea e piani tessellati[19].

Un altro amico di Coxeter fu R. Backminster Fuller, che usò sue idee in architettura, per le cupole geodetiche. Dalle cupole di Backminster Fuller prese nome la molecola di C_{60} detta *fullerene* (scoperta nel 1985 da R.F. Curl, H.W. Kroto e R.E. Smalley, premiati con il Nobel per la chimica nel 1996).

Torniamo alle figlie di Boole: a Ethel Lillian (che visse 96 anni), poi nota come Ethel Voynich. Ethel ebbe una vita lunga, avventurosa e piena di attività creative. Suo padre George morì sei mesi dopo la sua nascita e fu affidata ad uno zio che la maltrattò pesantemente, cosa che suscitò in lei una grande forza e coraggio contro ogni avversità e contro ogni ingiustizia. A 15 anni lesse di Giuseppe Mazzini, come politico e rivoluzionario, che diventò il suo eroe ideologico. A 18 anni andò a studiare musica a Berlino, dove fu attratta dai rivoluzionari russi. In Russia nel 1890 conobbe Wilfred M. Voynich, rivoluzionario in Russia e Siberia, con cui dapprima convisse adottandone il cognome, e poi sposò nel 1902. Ethel scrisse parecchie novelle e romanzi di cui il più importante fu "*TheGadfly*" ('Il tafano'), 1897, che fu poi un grandissimo successo nell'Unione Sovietica. *The Gadfly* si svolge nell'Italia restaurata postnapoleonica ed è una storia avventurosa ed affascinante di rivoluzionari per l'indipendenza italiana, con il protagonista figlio di un prete, poi cardinale, che viene giustiziato. Il romanzo non è stato mai tradotto in italiano (è facile immaginare i motivi), sebbene abbia avuto successo sia nei paesi di lingua inglese, sia in Germania, che nei paesi di influenza sovietica, persino in Mongolia. Ebbe anche negli anni '50 due versioni cinematografiche di cui una con musiche di Šostakovič.

Ethel si trasferì a New York con il marito nel 1920. Qui compose cantate, oratori e lavori per orchestra. Compose anche musiche sacre per la Scuola Pio X di Musica Liturgica di Manhattan. Negli anni '50 cercò di contribuire al miglioramento dei rapporti America Russia, con scarsi risultati. Morì nel 1960.

Veniamo ora al marito di Ethel, Wilfred M. Voynich, che morì nel 1930. Voynich acquistò nel 1912 dal collegio dei gesuiti di Villa Mondragone, a Frascati, un manoscritto medievale di 235 pagine, scritto in un alfabeto sconosciuto ed in quella che parrebbe essere una lingua sconosciuta. Nonostante tutti gli sforzi il libro non è stato a tutt'oggi decifrato. Venne venduto nel 1961 ad un antiquario newyorkese per 24.500 dollari. Questi valutò il volume a 160.000 dollari, ma non riuscì a trovare un compratore, tanto che alla fine lo donò All'Università di Yale, dove si trova tuttora. Sono

[19] Questa volta l'etimologia è proprio dal latino *tessera*.

stati compiuti studi approfonditi dai crittologi di tutto il mondo, i più abili decifratori militari hanno sfidato il manoscritto, ma nessuno ebbe successo. I migliori computer sono stati beffati dal *Codice Voynich*, che rimane ancora oggi un mistero.

Ma la nostra saga non è ancora finita. Torniamo a Charles Howard Hinton e Mary Ellen Boole. Uno dei loro figli fu Sebastian Hinton che si sposò con Carmelita Chase (amica del Presidente Mao e fondatrice della Putney School, nel Vermont, la prima scuola coeducazionale e democratica nel New England, con una forte accento sulle arti e sull'etica del lavoro). Una loro figlia è Joan Hinton, che, laureatasi in fisica alla Cornell University e poi nel Wisconsin, lavorò a stretto contatto con Enrico Fermi a Los Alamos, occupandosi di un reattore ad acqua bollente. Fu presente al Trinity test della prima bomba atomica il 16 luglio 1945 ad Alamagordo e ne scrisse.

Dopo la guerra Joan iniziò un Ph.D. in fisica quantistica alla Chicago University, ma, a un anno dal dottorato, nel 1948 (in disaccordo con la politica militare/nucleare americana) si trasferì in Cina e fu presente alla liberazione di Pechino nel 1949. Lavorò per un lungo periodo con il marito in comuni agricole. In piena rivoluzione culturale riuscì a convincere Mao che gli stranieri potevano lavorare in Cina alla pari con i cinesi. È divenuta un'esperta mondiale nell'allevamento e selezione di bovini da latte ed è a stento tollerata dal governo attuale. Infatti nel 1996 ha dichiarato alla CNN che il "sogno socialista sta cadendo a pezzi" e nel 2004 in un'intervista ha detto che il cambiamento economico è "un tradimento della causa socialista". Oggi è ancora attiva nella piccola comunità di stranieri che vivono a Pechino, protestando contro la guerra in Iraq.

Questi sono i principali personaggi che mi si sono rivelati collegati mentre cercavo di fare la storia del tessaratto. Ce ne sarebbero ancora degli altri minori, che potrebbero persino toccare Jack lo Squartatore (1888), ma, ringraziando i Re Magi e Maurice Maeterlinck, per ora ci siamo divertiti abbastanza.

à la Lagrange

Se in uno spazio euclideo a n dimensioni si vuole tagliare a metà un n-cubo unitario, "appeso" per un vertice, con una $(n$-$1)$-katana, è utile avere l' n-cubo centrato su di un sistema di assi ortogonali $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ paralleli agli spigoli del cubo steso, dotati di versori $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Chiameremo il centro del cubo (origine degli assi) Ω.

I $2n$ $(n$-$1)$-spazî contenenti le $(n - 1)$-"facce" dell' n-cubo hanno le $2n$ equazioni del tipo

$$x_i = \pm½ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ed i vertici hanno le 2^n combinazioni di coordinate

$$(x_1 = \pm½, x_2 = \pm½, \ldots, x_n = \pm½).$$

"Appendendo" l' n-cubo per lo spigolo $x_i = -½$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, e, supponendo che la "n-gravitazione" sia orientata verso lo spigolo $x_i = ½$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ne segue che il vettore del campo "n-gravitazionale" è orientato come

$$u = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

che, per n-Pitagora, ha modulo

$$|u| = \sqrt{n}.$$

Quindi la (n-1)-katana è l' (n-1)-spazio, ortogonale ad u e passante per Ω, che ha equazione

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0.$$

<u>1D</u>

L' 1-cubo è un *segmento* di vertici $P_0(-\frac{1}{2})$, $P_1(\frac{1}{2})$ sull'asse x_1, e_1. La 0-katana è il punto

$$x_1 = 0, \qquad \textbf{[4.1]}$$

cioè Ω. La *sezione* generata della 0-katana è il *punto* Ω stesso.

<u>2D</u>

Il 2-cubo è un *quadrato* di vertici

$P_0(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La 1-katana ha equazione

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad \textbf{[4.2]}$$

e si vede che i 2 vertici

$P_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

soddisfanno la **[4.2]**. La *sezione* generata dalla 1-katana è il *segmento* diagonale P_1P_3 di lunghezza $\sqrt{2}$.

<u>3D</u>

Il 3-cubo è un *cubo* di vertici

$P_0(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$,

$P_4(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_5(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_6(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_7(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La 2-katana ha equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad \textbf{[4.3]}$$

Nessun vertice soddisfà la (3), perciò la 2-katana non passa per nessun vertice, ma si vede che può passare per alcuni punti di alcuni spigoli, che abbiano la somma delle coordinate nulla, soddisfacendo la (3). Devono essere dei punti che abbiano una coordinata uguale ad ½, un'altra uguale a - ½, e la terza uguale a zero. Con queste condizioni si trovano soltanto i seguenti 6 punti:

$Q_1(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Q_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $Q_3(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$,

$Q_4(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $Q_5(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $Q_6(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Si vede che le distanze tra questi punti sono

$Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5Q_6 = Q_6Q_7 = \sqrt{(|\frac{1}{2}|^2 + |\frac{1}{2}|^2)} = 1/\sqrt{2}$

tutte uguali tra loro, e sono anche uguali alle distanze di ognuno dei Q_i da Ω:

$$Q_i\Omega = \sqrt{(|\tfrac{1}{2}|^2 + |\tfrac{1}{2}|^2)} = 1/\sqrt{2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Quindi i Q_i sono i vertici di un *esagono regolare*, di lato $1/\sqrt{2}$, che è la *sezione* generata dalla 2-katana **[4.3]**. I 6 vertici dell'esagono giacciono su 6 dei 12 spigoli del cubo ed i suoi 6 lati giacciono ognuno su una delle 6 facce del cubo.

<u>*4D*</u>

Il 4-cubo è un *tessaratto* di vertici

$P_0(-½, -½, -½, -½)$, $P_1(½, -½, -½, -½)$, $P_2(½, ½, -½, -½)$, $P_3(-½, ½, -½, -½)$,

$P_4(-½, -½, ½, -½)$, $P_5(½, -½, ½, -½)$, $P_6(½, ½, ½, -½)$, $P_7(-½, ½, ½, -½)$,

$P_8(-½, -½, -½, ½)$, $P_9(½, -½, -½, ½)$, $P_{10}(½, ½, -½, ½)$, $P_{11}(-½, ½, -½, ½)$,

$P_{12}(-½, -½, ½, ½)$, $P_{13}(½, -½, ½, ½)$, $P_{14}(½, ½, ½, ½)$, $P_{15}(-½, ½, ½, ½)$.

La 3-katana ha equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad \textbf{[4.4]}$$

Qui siamo di nuovo in una situazione simile a quella del 2D: i vertici hanno 4 coordinate di ugual valore assoluto e quelli che hanno due coordinate positive e due negative soddisfanno la **[4.4]**. Essi sono i seguenti 6 punti:

$P_2(½, ½, -½, -½)$, $P_5(½, -½, ½, -½)$, $P_7(-½, ½, ½, -½)$,

$P_9(½, -½, -½, ½)$, $P_{11}(-½, ½, -½, ½)$, $P_{12}(-½, -½, ½, ½)$.

Si vede che questi 6 punti sono a due a due specularmente simmetrici rispetto ad Ω: si tratta

delle coppie

(P_2, P_{12}), (P_5, P_{11}), (P_7, P_9).

Se consideriamo un punto per coppia, p.es. P_2, P_5 e P_7, e formiamo i vettori

$P_2 - \Omega = ½e_1 + ½e_2 - ½e_3 - ½e_4$

$P_5 - \Omega = ½e_1 - ½e_2 + ½e_3 - ½e_4$

$P_7 - \Omega = -½e_1 + ½e_2 + ½e_3 - ½e_4.$

Possiamo verificare che i prodotti scalari di questi vettori sono nulli:

$(P_2 - \Omega) \cdot (P_5 - \Omega) = ¼(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) \cdot (e_1 - e_2 + e_3 - e_4) = ¼(1 - 1 - 1 + 1) = 0$

$(P_2 - \Omega) \cdot (P_7 - \Omega) = ¼(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) \cdot (- e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = ¼(- 1 + 1 - 1 + 1) = 0$

$(P_5 - \Omega) \cdot (P_7 - \Omega) = ¼(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \cdot (- e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = ¼(- 1 - 1 + 1 + 1) = 0$

Quindi P_2, P_5 e P_7 sono i vertici di una terna ortogonale con centro in Ω nello spazio della 3-katana.

Si ha che

$P_j\Omega = \sqrt{(|½|^2 + |½|^2 + |½|^2 + |½|^2)} = 1$, $(j = 2, 5, 7, 9, 11, 12)$.

Quindi la *sezione* generata dalla 3-katana è un *ottaedro regolare* di spigolo $\sqrt{2}$. I 6 vertici dell'ottaedro sono 6 dei 16 vertici del tessaratto e le sue 8 facce giacciono ognuna su uno degli 8 cubi del tessaratto.

à la Monge

<u>*3D*</u>

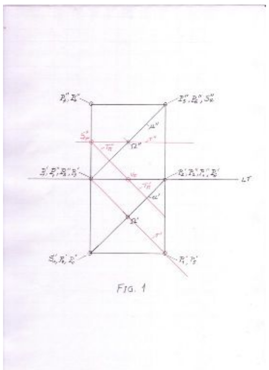


Figura 1. *(in nero)* Posizioniamo il cubo sul piano di proiezione orizzontale, appoggiato al piano di proiezione verticale, con lo spigolo P_2P_3 appoggiato sulla linea di terra LT. È facile individuare le proiezioni P_i', P_i'' dei P_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), così come è facile individuare le proiezioni Ω', Ω'' di Ω.

Poi tracciamo le proiezioni u', u'' del vettore $u = P_6 - P_0$, ed individuiamone le tracce S_u', S_u''.

(in rosso) Ora dobbiamo individuare il piano della 2-katana, che chiameremo π: le sue tracce T_π', T_π'' devono essere parallele alle proiezioni di u. Per individuarle:

1) Tracciamo una retta r orizzontale che appartenga a π e passi per Ω. Essa deve avere la prima proiezione r' che sia parallela a T_π' (e quindi ortogonale ad u) e che passi per Ω', mentre la seconda proiezione r'' deve essere orizzontale e passare per Ω''.

2) Costruiamo S_r'', la seconda traccia di r.

3) T_Π'' deve passare per S_r'' ed essere ortogonale a u''.

4) L'intersezione di T_π'' con LT dà il vertice V_π comune alla intersezioni di π con i due piani di proiezione.

5) T_π' è ortogonale ad u' e passante per V_π (cioè coincide con T_π).

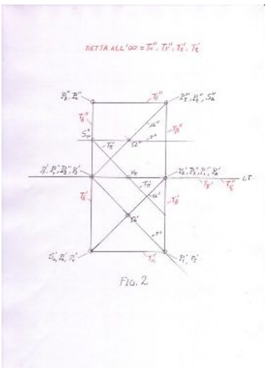


Figura 2. *(in rosso)* Chiamiamo i piani contenenti le 6 facce del cubo

α il piano della faccia $P_0P_1P_4P_5$

β il piano della faccia $P_1P_2P_5P_6$

γ il piano della faccia $P_2P_3P_6P_7$

δ il piano della faccia P3P0P7P4

ε il piano della faccia $P_4P_5P_6P_7$

ζ il piano della faccia $P_0P_1P_2P_3$

e individuiamo le loro tracce T_κ', T_κ'' ($\kappa = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$).

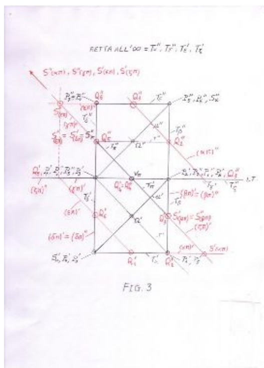


Figura 3. *(in rosso)* Le intersezioni tra i piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ ed il piano π sono le rette cui appartengono i lati della sezione cercata. Chiamiamo queste rette $(\alpha\pi)$, $(\beta\pi)$, $(\gamma\pi)$, $(\delta\pi)$, $(\varepsilon\pi)$, $(\zeta\pi)$.

Le tracce $S_{(\kappa\Pi)}'$, $S_{(\kappa\Pi)}''$ ($\kappa = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$) di queste rette sono le intersezioni delle tracce di π con le tracce rispettivamente di $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$. Dalle intersezioni delle rette si costruiscono le loro proiezioni $(\kappa\pi)'$, $(\kappa\pi)''$ ($\kappa = \alpha, \dots, \zeta$). Gli incroci tra queste proiezioni danno le proiezioni dei punti Q_i ($i = 1 \div 6$), che sono i vertici della sezione esagonale.

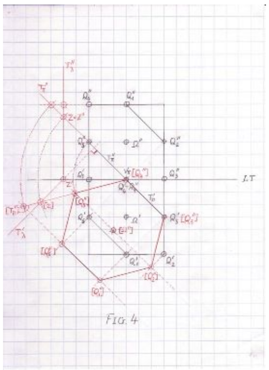


Figura 4. *(in rosso)* Infine ribaltiamo il piano π (della 2-katana) sul piano di proiezione orizzontale per vedere in forma reale la sezione del cubo.

Ricordiamo la tecnica di ribaltamento. Per ribaltare π partiamo dalla considerazione che T_π” è una retta che appartiene a π ed al piano di proiezione verticale. Costruiamo un piano verticale λ perpendicolare a π: esso avrà la T_λ’ ortogonale a T_π’, mentre T_λ” sarà verticale. Il punto Z (= Z”) di intersezione tra T_λ” e T_π” appartiene sia a λ che a π. Il segmento $V_\pi Z$ è una grandezza vera ed è il raggio della circonferenza che traccerà Z ribaltandosi con il piano π.

$V_\pi Z$ rimane costante a ribaltamento avvenuto, cioè quando tutto il piano π coinciderà con il piano di proiezione orizzontale e Z andrà in [Z] [20] sulla T_λ’, e si avrà quindi $V_\pi Z = V_\pi[Z]$.

[T_π”] si ottiene congiungendo V_π con [Z].

Il ribaltamento dei vertici dell’esagono giacenti su π è ovvio.

E non c’è più spazio per la soluzione di ***Sam***, che ormai sta scrivendo la tesi e usa termini oscuramente accademici... ma vi assicuriamo che era complicata. Vi lasciamo solo le sue domande finali:

(...) Rimangono dunque le seguenti questioni:

1. Che volume viene nel caso generale n pari ?
2. Si può sempre scegliere, come si è potuto fare nel caso n=4, una base ortogonale per il piano **H**, fatta di vettori che individuano vertici di **T**?
3. Si può generalizzare la scomposizione in piramidi che contribuisce al calcolo del volume dell’ottaedro in dimensioni superiori?
4. Sarà sano aver tirato quasi le due di notte (e quindi speso quasi due ore) per scrivere questa roba?

La risposta, soprattutto all’ultima domanda, ci sembra chiara.

4.2.2 Un poker non d’azzardo

Non vi è piaciuto il problema? Ma come è possibile? Solo Cid e Torkitorio si sono cimentati, e siccome ci siamo dilungati nelle soluzioni al precedente problema, passeremo la parola a Torkitorio:

Stabiliamo da subito che nonostante usiamo tutte e 52 le carte quelle valide per il gioco sono solo quelle dal 6 all’A compresi (6,7,8,9,10,J,Q,K,A)

Una soluzione per vincere sempre è quella di portar via tutti i 10 alla prima mano, in modo di impedire all’avversario la possibilità di prendere 5 carte consecutive e quindi di fare una qualunque scala, tenendo invece per se la stessa possibilità. In questo caso le mosse vincenti sono 48, ovvero i quattro 10 e una qualsiasi delle restanti 48 carte.

Altra mossa vincente si ha prendendo solamente tre 10 e scegliendo le restanti 2 carte in modo da impedire la scala anche nel seme rimasto “scoperto”.

[20] Indichiamo tra parentesi quadre [ ] gli elementi ribaltati.

Facendo un esempio, se prendo i dieci di quadri, fiori e picche dovrò prendere le altre due carte tra i cuori evitando di lasciarne 5 consecutive, impedendo quindi all'avversario di fare scala.

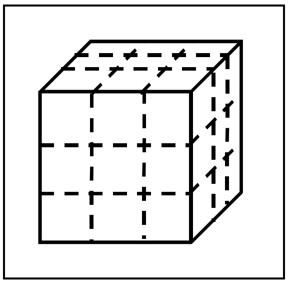
Le coppie di carte di cuori sono 6-J, 7-J, 7-Q, 8-J, 8-Q, 8-K, 9-J, 9-Q, 9-K, 9-A, cioè in totale 10 mosse, che vanno moltiplicate per ognuno dei semi (infatti potrei decidere di prendere i 10 di fiori, picche, cuori e destreggiarmi con i quadri) per un totale di altre 40 mosse.

Nelle coppie possibili ho naturalmente escluso quelle che contengono il 10 perché si tornerebbe al caso dei quattro 10 già conteggiato.

In totale le mani vincenti sono perciò 88.

5. Quick & Dirty

Questo è uno di quei casi in cui non mi piace il problema ma mi piace la soluzione...



Avete un cubo di lato ***3***; vostro scopo è ottenere una serie di cubi di lato ***1***. La cosa si può fare agilmente con i ***6*** tagli in figura.

Ricombinando eventualmente i pezzi dopo ogni taglio, è possibile impiegare meno tagli?.

6. Pagine 46

Prima Parte

Dalla prima condizione, si ha:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+px+q\,.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}&(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\\&=[(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)][(\delta-\alpha)(\delta-\beta)]\\&=(\gamma^2-p\gamma+q)(\delta^2-p\delta+q).\end{aligned}$$

Sapendo che

$$\begin{aligned}\gamma+\delta&=-P\\ \gamma\delta&=Q\end{aligned}$$

si ricava:

$$\begin{aligned}&(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\\&=\gamma^2\delta^2+p\gamma^2\delta+q\gamma^2+p\gamma^2+p^2\gamma\delta+pq\gamma+q\delta^2+pq\delta+q^2\\&=(\gamma\delta)^2+p\gamma\delta(\gamma+\delta)+q\left[(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\right]+p^2\gamma\delta+pq(\gamma+\delta)+q^2\\&=Q^2-pPQ+q(P^2-2Q)+p^2Q-pqP+q^2\\&=Q^2+q^2-pP(Q+q)+qP^2+p^2Q-2qQ.\end{aligned}$$

Seconda Parte

Utilizzando il risultato della prima parte, si ha che condizione necessaria e sufficiente affinché le due equazioni date abbiano radici comuni è che la seguente espressione assuma valore ***zero***:

$$
\begin{aligned}
& a^2 + 1 - a \cdot 1(a+1) + a^3 - 2a \\
& = a^3 - 3a + 2 \\
& = (a-1)(a^2 + a - 2) \\
& = (a-1)^2 (a+2).
\end{aligned}
$$

Questo implica

$$
\begin{aligned}
& a_1 = -2, \\
& a_{2,3} = 1.
\end{aligned}
$$

7. Paraphernalia Mathematica

Questa volta la prendiamo talmente alla lontana che la citazione iniziale la trovate nella seconda parte.

7.1 Prima o poi litighiamo

Su una cosa Rudy e Doc sono d'accordo: la bellezza della Formula di Eulero.

Va detto che Rudy tende a sorvolare sul fatto che parlano di due cose diverse: infatti, Doc di solito si riferisce alla:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

mentre Rudy tende ad intenderne *un'altra*:

$$V - S + F = 2,$$

ma lui non insiste troppo e gioca sull'equivoco. Anche perché ci sono alcune cose che non lo convincono.

Per prima cosa, statuiamola in modo corretto: in un poliedro convesso, *la somma dei numeri dei vertici e delle facce è maggiore di **2** rispetto al numero degli spigoli*. Già il definire un poliedro convesso non è semplicissimo[21]; inoltre, una dichiarazione così generale richiede un'accurata dimostrazione, e qui cominciano i punti dolenti; un matematico (Eppstein) ne ha raccolte ***diciannove***, ma secondo Rudy nessuna di queste ha l'eleganza e la potenza estetica contenute nella formula; la migliore (che probabilmente è anche la più semplice) secondo lui è quella che segue, originata da un Cauchy di vent'anni[22].

> Partiamo da un poliedro qualsiasi, e rimuoviamone una faccia; stirando opportunamente quello che resta, possiamo trasformare il tutto in un grafo (planare) sul piano; con opportuni stiramenti, possiamo anche fare in modo che tutti gli spigoli siano rappresentati da linee rette. Non solo, ma (se ci ricordiamo di contare come "faccia" l'esterno del disegno) il numero di facce, vertici e spigoli resta invariato rispetto al poliedro originale.
>
> Ora cominciamo con le modifiche.
>
> Trasformiamo ogni faccia non triangolare in un insieme di facce triangolari; ogni volta che "mettiamo un triangolo", aggiungiamo uno spigolo e una faccia quindi incrementiamo sia ***S*** che ***F***, e quindi la nostra formula resta invariata per il nuovo aggegio che otteniamo alla fine.
>
> A questo punto, consideriamo i triangoli sul bordo: per tutti quelli che condividono due lati con l'esterno (ricordatevi che anche lui è contato tra le "facce") togliamo i due lati e andiamo avanti sin quando è possibile: in questo modo ad ogni passo decrementiamo ***F*** e ***V***, mentre ***S*** cala di ***2***; anche qui, la formula non varia.

---

[21] Vi diamo quella che Rudy ci ha messo solo due ore a capirla: un poliedro convesso è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni lineari:

$$M\vec{x} \le \vec{b},$$

dove ***M*** è una matrice reale $S \times 3$ e ***b*** è un ***s***-vettore reale. Alcuni pignoli inseriscono, dopo "soluzioni", "limitate". Ma non staremo a sottilizzare.

[22] La formula è stata scoperta da Eulero nel 1750 e provata da Legendre nel 1794. Dimostrazioni decisamente noiose.

Infine, consideriamo i triangoli che hanno *un solo* lato in comune con l'esterno e rimuoviamolo, ripetendo l'operazione sin quando è possibile; in questo modo decrementiamo ***F*** e ***S*** e, anche in questo caso, la nostra formula non varia.

Ripetendo eventualmente gli ultimi due passi, in funzione della complicazione del nostro poliedro originale, ci ritroveremo prima o poi con soltanto ***un triangolo***, per il quale abbiamo ***2 facce*** (contando anche l'esterno), ***3 vertici*** (i tre angoli) e ***3 spigoli*** (che sarebbero i lati); siccome $3-3+2=2$, la nostra formula è dimostrata.

"Dimostrata", appunto, non "ricavata". E la cosa secca molto Rudy[23], che ha sempre avuto dei problemi a ricordarsi "cosa ha il più e cosa ha il meno".

7.2 Forse ha ragione Doc

"No, guarda, ho deciso: ricomincio da tre"
"Vuoi dire 'Ricomincio da zero'?"
"No, tre cose giuste nella vita le ho fatte. Perché dovrei lasciarle perdere?"
Massimo Troisi

Quello che lascia in dubbio Rudy e potrebbe rendere vero il titolo di questa parte è la presenza del "***2***". Effettivamente, è arduo capire cosa c'entri nella formula, e resta il vago sospetto che, se fosse ricavata, forse si riuscirebbe a capirne meglio il recondito significato.

Va detto che abbiamo sempre nutrito un'antipatia per i numeri che compaiono senza ragione apparente nelle formule, e anche solo i volumi del cono e della sfera (o la superficie di quest'ultima) sono stati fonte di profondi dubbi sino alla scoperta degli integrali; non stiamo parlando delle costanti dettate dalle unità di misura (eliminabili facilmente), ma Rudy ancora adesso mostra palesi segni di insofferenza al ricordo di un 27 (Termodinamica: formula dei gas reali) e di un 80 (Struttura della Materia: dimenticata la formula) di cui non ha mai avuto chiaro il motivo di base; a stento, tollera "e" e pigreco[24].

Fortunatamente, ***Schläfli*** si è dato da fare in merito; la cosa però richiede di partire, anzichè dal solido, dalla sua assenza; insomma, tanto per cambiare, meglio prenderla alla lontana.

Se fate un giro su *MathWorld*, alla voce "Hole" trovate una bellissima definizione di "buco": *Un buco è quella struttura topologica che vi impedisce di ridurre in modo continuo l'oggetto ad un punto*; non solo, ma trovate quella che è probabilmente l'unica battuta (non si sa quanto volontaria) di questo peraltro serissimo sito[25].

Ora, se contate i buchi di un oggetto, dovreste arrivare ad un numero; senza addentrarci in astruse dimostrazioni di topologia, il numero dei buchi è anche il numero dei *tagli* che potete fare sul vostro oggetto *senza che ve ne cadano dei pezzi* (o, se preferite, il numero delle curve chiuse semplici che potete tracciare senza separare l'oggetto); un valore di questo genere diventa piuttosto interessante, quindi i topologi si sono affrettati a trovargli un nome; quasi l'intero mondo (anche i francesi, una volta tanto) lo chiama

[23] Alcuni detrattori sostengono sia anche perché molte cose di Cauchy (dalla convergenza delle serie alle idee politiche) gli stanno antipatiche; lui in questi casi si chiude in uno sdegnoso silenzio, mostrando che un fondo di ragione forse ce l'hanno.

[24] Semplicemente per mostrarvi a quali abissi di abiezione possa arrivare questa idiosincrasia: quando abbiamo parlato di paginazione, nel numero scorso, la Sezione Aurea non è stata assolutamente presa in considerazione.

[25] Stiamo parlando del sito (Wolfram) di Eric Weisstein: http://mathworld.wolfram.com/: non esattamente la quintessenza della semplicità nello spiegare le cose, ma decisamente valido. La battuta è: "ci sono molti modi per misurare i buchi nello spazio". *[Nota a margine: un "nodo", matematicamente parlando, è un buco nello spazio]*

genus: in alcuni libri italiani lo abbiamo visto chiamare *genere* ma, per una volta che tutto il mondo usa il latino, non vediamo motivo per inventarci una traduzione.

Se ricordate, quando avevamo parlato di solidi platonici in più dimensioni avevamo introdotto il concetto di ***celle***: giusto per cavarcela con una serie di esempi senza complicarci la vita, una ***0-cella*** è un vertice, una ***1-cella*** è uno spigolo, ***2-cella*** una faccia, e avanti così.

Ora, Schläfli[26] ha inventato un simpaticissimo modo per spiegare come sono fatti poligoni, poliedri eccetera (regolari); per uno poligono, ci basta sapere quanti angoli ha (le "0-celle"): quindi, possiamo indicare un ***p-agono*** come $\{p\}$. Nel caso vogliate parlare di "poligoni messi assieme", ad esempio se volete tassellare il piano, oltre a quanti angoli hanno vi serve anche sapere quanti di loro (le "2-celle") si incontrano in un punto; dovreste ricordare che le uniche tassellature regolari del piano sono $\{4,4\}$ (fatta di quadrati), $\{6,3\}$ (fatta di esagoni) e $\{3,6\}$ (triangoli). Sostanzialmente lo stesso dato ci serve quando parliamo di un poliedro, e qui gli unici possibili sono $\{3,3\}$ (tetraedro), $\{3,4\}$ (ottaedro), $\{4,3\}$ (esaedro), $\{3,5\}$ (icosaedro) e $\{5,3\}$ (dodecaedro); la cosa simpatica è che (evidentemente) vi basta invertire i due numeri per ottenere il duale del poliedro originario. La cosa si estende in modo immediato alle dimensioni superiori

Allora, per usare le parole difficili: per un ***politopo n-dimensionale*** ("iperpoliedro convesso": forse una semplificazione eccessiva, ma per il momento accontentiamoci), se N_i rappresenta il ***numero delle i-celle***, si ha:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i N_i = 1-(-1)^n \qquad \textbf{[7.1]}$$

...e qui Rudy è contento: solo degli uni, e un modo facile per ricordarsela!

Non che abbia esattamente eliminato il "***2***", ma qualche progresso lo abbiamo fatto. Il bello è che il Schläfli riesce non solo a renderla più "simpatica", ma anche più generale: infatti, se un oggetto ha *genus* **g**, possiamo scrivere, con la notazione "classica":

$$V - E + F = 2 - 2g\ . \qquad \textbf{[7.2]}$$

Dovrebbe essere interessante la generalizzazione della **[7.1]** secondo la **[7.2]** (possibilmente eliminando i "2" e facendo comparire degli "1"), ma preferiamo lasciarvela come compito a casa: i buchi quadridimensionali, fuori dai romanzi di fantascienza, hanno l'aria piuttosto intrattabile con i metodi del senso comune.

Comunque, il secondo membro, solitamente indicato con $\chi(g)$, è diventato noto come ***Caratteristica di Eulero***.

Va detto che questo aggeggio non funziona sempre; il ***grande dodecaedro*** e il ***piccolo dodecaedro stellato*** non vanno d'accordo con quanto detto; pragmaticamente (e anche per questo riscuote la nostra simpatia), Schläfli si rifiutava di prenderli in considerazione.

Di seguito (ricavati dal solito sito di Weisstein), i disegni e gli sviluppi di questi due aggeggi: se volete costruirveli, attenzione che quella roba che sembra un farfallino nel secondo è un buco.

[26] Ci scusiamo con questo signore; continuiamo ad incontrarlo e meriterebbe una trattazione decisamente più approfondita, ma ha un cognome decisamente complicato. L'unica tastiera tedesca a nostra disposizione è quella di Alice, la quale si rifiuta di scriverne...

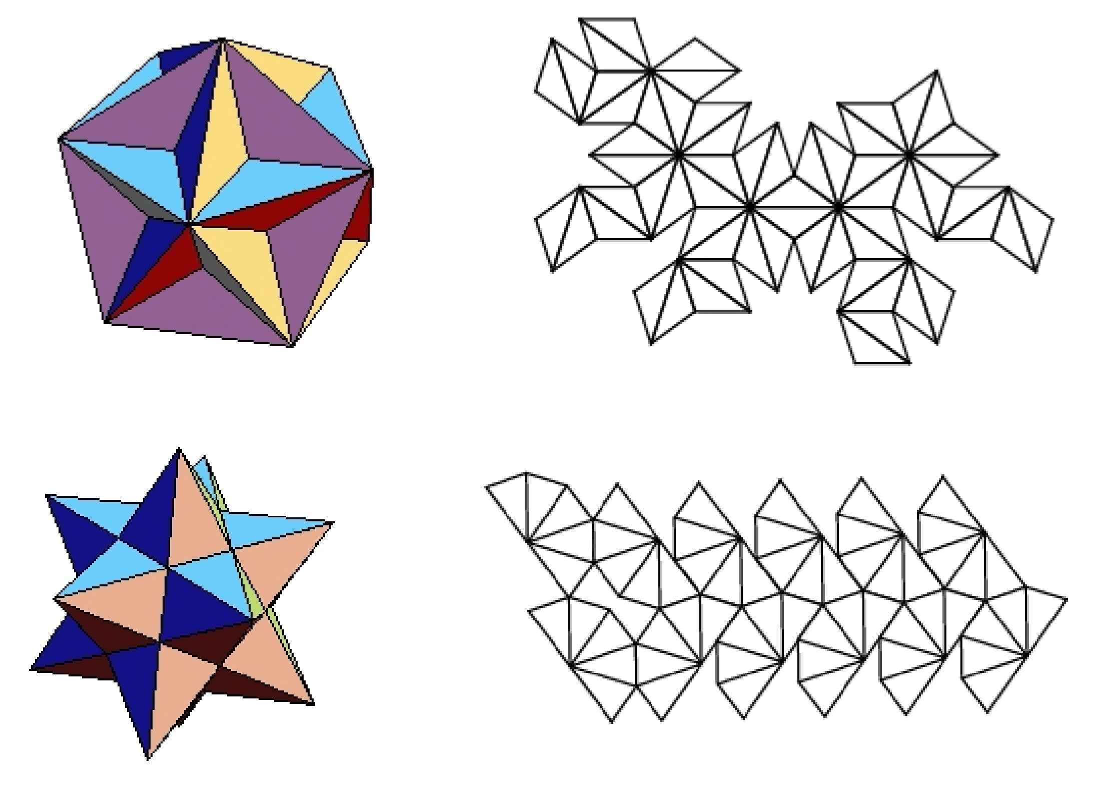


Figura 1 - Secondo Schläfli, non esistono

7.3 Chi l'ha visto?

Un altro punto interessante da esaminare potrebbe essere il chiedersi come ci sia arrivato Eulero, alla formula; beh, la cosa non è molto chiara, anche se ci sono alcuni indizi che, una volta tanto, non sia tutta farina del suo sacco.

Tra il 1619 e il 1621, ***Cartesio*** scriveva il suo *Trattato Elementare sui Poliedri*; nelle prime pagine, compare un interessante teorema:

> Se ***4*** angoli retti sono moltiplicati per il numero dei vertici di un poliedro convesso e dal prodotto sono sottratti ***8*** angoli retti, il risultato è pari alla somma degli angoli sulla superficie del poliedro.

Insomma, moltiplicate ***360º*** per ***V***, poi sottraete ***720º***; il risultato è la somma degli angoli piani del poliedro.

Ora, Cartesio non ha mai pubblicato il Trattato; alla sua morte (1650), il manoscritto viene passato con altre carte al suo amico Hector-Pierre Chanut (ambasciatore francese in Svezia) per arrivare alla fine a casa di Claude Clerselier.

Bisogna aspettare il 1675, quando Leibniz (Gottfried Wilhelm: 1646-1716) riceve il permesso di consultare le carte di Clerselier, perché si riesca a ritrovare il Trattato; Leibnitz lo copia, purtroppo (per noi) utilizzando la notazione ***cossica***, che non è propriamente una stella di chiarezza; ne abbiamo già parlato, ma giusto per ripassarla vi forniamo un esempio (calligrafia di Leibnitz) di un'espressione e della sua notazione cossica:

$3x^3 + 9x^2 + 2x$ .

Finalmente, a questo punto, arriva Eulero. E scrive, all'inizio di una pagina:

> Se ***4*** angoli retti sono moltiplicati per il numero dei vertici di un poliedro convesso e dal prodotto sono sottratti ***8*** angoli retti, il risultato è pari alla somma degli angoli sulla superficie del poliedro.

Vi sembra di conoscerla? Vero, Copia&Incolla. Ma il Nostro va avanti:

Dalla geometria piana sappiamo che la somma degli angoli interni di un poligono di ***n*** lati vale $(n-2)\pi$; in un poliedro, allora, la somma degli angoli su tutte le facce diventa pari alla somma su tutte le facce di π moltiplicato il numero degli spigoli meno ***2*** (e qui il motivo del "2" è chiaro); siccome ogni spigolo compare ***2*** volte come lato di una faccia, si ha che la somma di tutti gli angoli piani risulta pari a $\pi(2S-2F)$.

Dal teorema doppiamente statuito qui sopra, sappiamo che la somma degli angoli piani vale $\left(\pi/2\right)(4V-8)$; uguagliando questi due risultati, si ha:

$$S-F=V-2$$

da cui dovreste poter ricavare qualcosa di interessante.

Il dubbio che resta è: ma Eulero, ha copiato?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms