Rudi Mathematici

Numero 012 - 2000-01

1. Editoriale

Passate bene le vacanze? Avete sciato, bevuto cioccolata calda, cantato carole natalizie, risolto i problemi in felice compagnia? Non ci credo neanche se vi vedo.

Spero vi sia piaciuto il "regalino" dello scorso numero; in questo modo, potrete sfoggiare la vostra cultura nel campo della storia della matematica e dire "Hey! Sono nato lo stesso giorno di Pinkopalliner!". Non sto a dirvi che, per trovarne uno al giorno, ho dovuto sudare un po`... In altri casi, invece, ho dovuto "segarne" qualcuno perche` non ci stava proprio: le nascite dei matematici presentano degli strani punti di accumulazione[1].

So pero` che alcuni di voi, alla notizia data prima del caffe` mattutino che "Lo sai che oggi e` il compleanno di..." tendono a rispondere a male parole; per queste amabili persone, sono state inserite delle edificanti massime.

L'ultima parte e`, logicamente, un problemino (o due) al mese: se proprio non avete niente di meglio da fare e quelli su RM vi sembrano facili risolvete quelli: li ho cercati duri, tanto avete un anno davanti. E poi magari passa un matematico *serio* dal vostro ufficio, vi spiega come si fa, spacciate la soluzione per vostra e fate un figurone.

Auguri a tutte le Befane.

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

English Version is powered by *Alice Riddle*

---

[1] Prima che il solito saputello si faccia avanti, Isaac NEWTON e` nato il giorno di Natale secondo il computo giuliano, ma il 4 gennaio secondo quello gegoriano. Durante la sua vita e` cambiato il calendario e da quel momento lui ha detto "4 gennaio" (cosi` gli arrivavano due regali)

2. Problemi

2.1 Al paesello si scia!

...Dopo la sfacchinata della notte di Natale, e` abbastanza evidente che ho *riposato a lungo* (mia moglie preferisce "dormito come un ghiro").

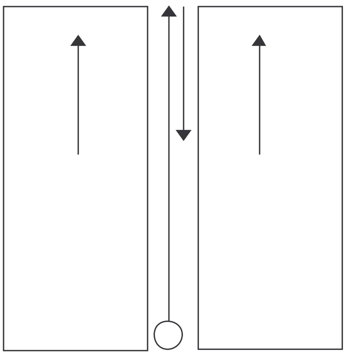
Mente dormivo, e` cominciato a nevicare (a rateo costante, e non smette).

Come tutti gli anni, a mezzogiorno l'unico spazzaneve in dotazione comincia a spazzare le strade; questo coso ha la particolare caratteristica che la sua velocita` e` inversamente proporzionale alla quantita` di neve da spazzare e, misurando (si, a mezzogiorno ero gia` in piedi!) si appura che nella prima ora percorre un kilometro mentre nella seconda ora (sta ancora nevicando...) solo mezzo kilometro.

In attesa del pranzo, la domanda e`: *ma a che ora e` cominciato a nevicare*?

2.2 La Parata di Natale

Beh, si, nei limiti del paesello c'e` stata la parata... Insomma, quello che si puo` fare avendo a disposizione 600 abitanti scarsamente collaborativi e una banda che ce la mette tutta.



Comunque, c'erano i boy-scout, che una volta tanto si erano organizzati: infatti, sono riusciti a fare tutto il percorso della parata in formazione quadrata (due rettangoli con il corridoio in mezzo); nel corridoio centrale, correva continuamente avanti e indietro la mascotte del gruppo, un cagnolino di razza (anzi, due o tre, sostengono i maligni).

Il suddetto botolo, partito dall'ultima fila nel momento in cui cominciava la parata, correva fino alla prima, per poi tornare all'ultima e avanti cosi`, secondo lo schema indicato a fianco (supponiamo, per semplicita`, un cagnolino perfettamente sferico...). Nel tempo che gli scout percorrono 50 metri, il cagnolino riesce a fare avanti e indietro una volta.

Quanta strada ha fatto il cane?

3. Soluzioni e Note

3.1 [010]

3.1.1 Salvate l'anatra!

Questa volta l'ho combinata grossa...

Spero abbiate ricevuto la mail di correzione "al volo"; per i puristi amanti della "bella forma", segue il tutto ben scritto.

Come mi fa notare Piotr, se papera e volpe partono dallo stesso punto e si incontrano dall'altra parte, il rapporto tra i due percorsi e` $\pi$ e la volpe arriva appena in tempo se si muove $\pi$ volte piu` velocemente del succoso volatile. Infatti; il motivo e` che *ho sbagliato i conti* (potrei dire: li ha sbagliati Excel...). Se vi prendete la briga di fare i calcoli, potete facilmente vedere che la formula:

$$\pi + \arccos\left(\frac{1}{a}\right) - a * \sqrt{a^2 - 1} < 0$$

e` ***sbagliata***.

Infatti, dalla precedente a questa, che era:

$$r*(\pi + \vartheta) < a*r*\sin\vartheta$$

si ottiene (semplificando ***r***, trasformando il seno in radice di 1 meno cosenoquadro e quindi sfruttando il valore di arcoseno imposto) la formula corretta:

$$\pi + \arccos\left(\frac{1}{a}\right) - a*\sqrt{1-\frac{1}{a^2}} < 0$$

che da` un piu` realistico valore ***a***=4.605...

A mia parziale discolpa, posso dire che la formula l'avevo calcolata esatta (a *matita*, per essere sicuro di non fare errori); l'ho poi scritta (*sbagliata*) sul file di RM_011 e quindi l'ho impostata (cosi` come l'avevo copiata) in Excel. Da cui, ci voleva una volpe zoppa e decisamente scema per rientrare nei problemi.

Come ama dire Piotr: "Mi contraddico? Ebbene, mi contraddico... Sono un universo, quindi contengo i miracoli".

3.2 [011]

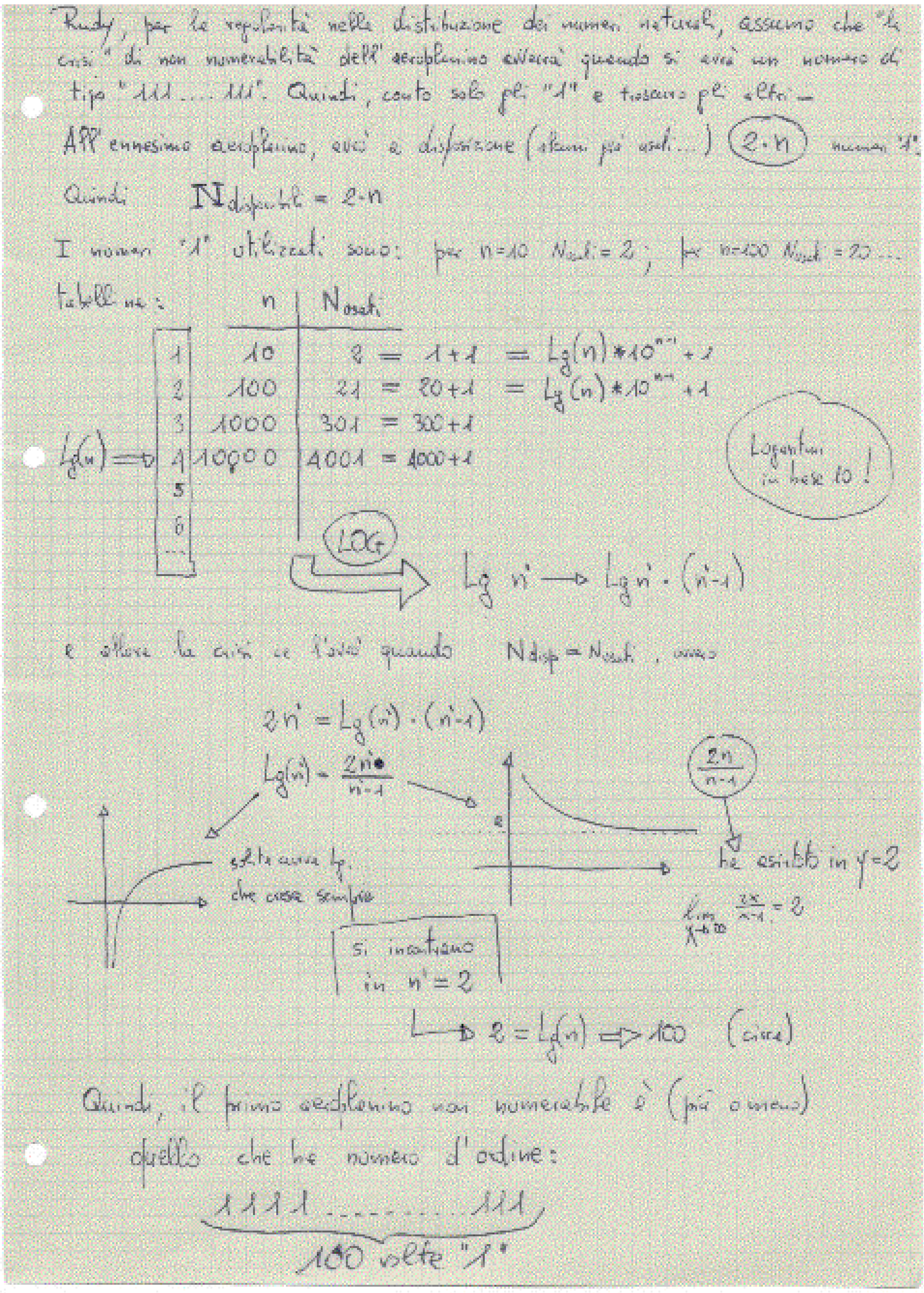
3.2.1 Problema da un altro Rudolph

A Natale sono tutti piu` buoni, tranne i problemi; questo era decisamente "cattivo". Quindi, niente soluzione...O meglio, vi passo una soluzione ***sbagliata*** (non crediate voglia arrogarmi il diritto di essere l'unico a sbagliare i conti...) di Piotr; ci tengo a sottolineare che e` arrivata via mail, e il testo allegato era: "...visto che ti piacciono le soluzioni con carta e penna...".

OK, pesce d'aprile ricevuto; comunque, sapete trovare l'errore? Come ho avuto modo di dire, credo che per la risoluzione di questo problema siano necessari nell'ordine:

1. Un colpo di genio
2. Una buona dose di sudore matematico e di ottimismo
3. Un altro colpo di genio

Al punto "1", Piotr c'e` arrivato, ma poi ha preso uno scivolone mica male... Sapete trovarlo?



Rudy, per la regolarità nella distribuzione dei numeri naturali, assumo che "la crisi" di non numerabilità dell'aeroplanino avverrà quando si avrà un numero di tipo "111 .... 111". Quindi, conto solo gli "1" e trascuro gli altri –

All'ennesimo aeroplanino, avrò a disposizione (alcuni già usati...) 2·n numeri "1".

Quindi $N_{disponibili} = 2 \cdot n$

I numeri "1" utilizzati sono: per n=10 $N_{usati} = 2$; per n=100 $N_{usati} = 20$ ...

tabellina:

	n	N_{usati}
1	10	2 = 1+1 = $Lg(n)*10^{n-1}+1$
2	100	21 = 20+1 = $Lg(n)*10^{n-1}+1$
3	1000	301 = 300+1
4	10000	4001 = 4000+1
5		
6		

$Lg(n) \Rightarrow$

Logaritmi in base 10!

LOG

$Lg\ n' \rightarrow Lg\ n' \cdot (n'-1)$

e allora la crisi ce l'avrò quando $N_{disp} = N_{usati}$, ovvero

$2n' = Lg(n') \cdot (n'-1)$

$Lg(n') = \frac{2n'}{n'-1}$

$\frac{2n}{n-1}$

solita curva lg. che cresce sempre

ha asintoto in y=2

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$

si incontrano in n'=2

$\rightarrow 2 = Lg(n) \Rightarrow 100$ (circa)

Quindi, il primo aeroplanino non numerabile è (più o meno) quello che ha numero d'ordine:

$\underbrace{1111 \ldots\ldots\ldots 111}_{100 \text{ volte "1"}}$

Per chi non lo sapesse, "10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000" (ci sono tutte?) si chiama "googol"; ricordo un problemino (brutto) in merito: "Quali sono le prime quattro cifre del fattoriale di un googol?" Siccome come problemino non mi piace, vi do` subito la soluzione: 1629. Ma torniamo al problema originale.

A questo punto, facevo notare a Piotr che doveva esserci un errore da qualche parte: infatti, Rodolfo R. ottiene 20 cifre ogni nuovo modello e all'inizio le accumula; quando pero` il numero che prendiamo in considerazione supera le 20 cifre, sto cominciando a mangiarmi il capitale accumulato e, come diceva Ernesto Calindri quando la TV era in bianco e nero e il secondo canale RAI era ancora sperimentale, "dura minga"; arrivato da quelle parti, il destino e` comunque segnato.

A giro di posta piuttosto largo, ricevevo il seguente messaggio:

Rudy,

ho riguardato velcecemente la soluzione(?) che ti ho mandato nel jpg, e vi ho trovato un errore grosso come una casa. Beh, questo non toglie il fatto che, anche correggendo l'errore, magari la soluzione non funziona, pero e'probabile che quantomeno si avvicini assai di piu' al numero giusto. In breve, ti ricordi che definisco il numero degli "1" usati come:

*N(usati)=Lg(n) * 10^(n-1)+1*

beh, e' una stronzata galattica... Volgio dire, se n=1000, e gli uno usati sono 301, il 301 lo esprimo come

*301= 3 * 100^2 + 1*

e vabbe' che 3=Lg(n), e vabbe' che 1=1 (ah, ah), ma esprimere 100^2 come 100^(n-1) quando n=1000 e' frutto di paranoia senile. Quel 100^2 (e tutti gli altri) si esprimono benissimo come n/10, e quindi la formula giusta e':

*N(usati)=Lg(n) * n/10 + 1*

N(disp) rimane uguale a 2n, e "finisco le scorte" quando N(disp)=N(usati), cioe' quando

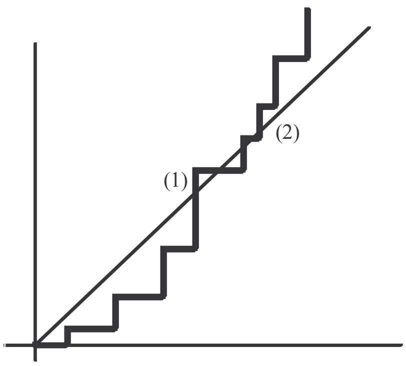
*2n = Lg(n) * n/10 + 1*

ovvero (se metto da parte il +1, che uso come indicatore di quando "me ne manca giusto uno per etichettare l'aereo"), quando

Lg(n)=20, e cioe' per n=10^20.

Il che mostra la forza dell' "obiezione Calindri" che avevi avanzato tu.

Secondo me, abbiamo un paio di problemi di fondo: per essere meno chiari, facciamo un disegno (figura a lato): in ascissa il numero di scatole aperte e/o modellini completati, in ordinata il numero di "1"; la spezzata "grossa" rappresenta il consumo di uno, l'altra retta quelli che mi arrivano dalle scatole[2].



Mi pare abbastanza chiaro che la funzione "uno acquisiti" e` una retta di equazione $y=2x$; il guaio e` che la funzione "uno consumati" e` abbastanza selvaggia e a gradini; esistera` di sicuro un punto (il "Punto di Calindri"?) oltre il quale la spezzata maggiora definitivamente la nostra retta, (punto 2 nella figura), ma e` sicuro che esistono dei punti "prima" (punto 1 nella figura) in cui la spezzata supera la retta per poi tornare al piano di sotto; in pratica, se Rodolfo R. arrivato al punto (1) decide di barare e apre delle scatole di modellini (che montera` in futuro) per prendere i numeri che gli servono, ce la fa e va avanti per un po`; quando pero` arriva al punto (2), non puo` proprio piu` farcela. Come statuito nel problema (questa volta ho fatto attenzione) quello che deve essere individuato e` il punto (1), non il punto (2); la formula di Piotr (che funziona perfettamente per i numeri nella forma 10^i) individua sostanzialmente la prima potenza di dieci successiva al punto (2) (o coincidente con il punto, fate voi... sto andando a spanne).

...Non crediate che sia finita qui...il 28 dicembre, l'intero comitato di redazione dei *Rudi Mathematici* si e` incontrato per prendere alcune decisioni strategiche (la data del

[2] Il disegno **non** e` in scala e, come scritto sulla pizza in scatole, l'immagine ha solo titolo esemplificativo di presentazione del prodotto: non serve neanche nella soluzione, secondo me...

prossimo meeting, sostanzialmente). Sono contento di poter comunicare ai suoi innumerevoli *fan* che l'Accademico Piort Rizierovich Silverbrahms:

1. E` sempre genialmente polemico
2. Ha un colbacco bello quasi quanto il mio.

Logicamente, abbiamo parlato di varia matematica e di questo problema; credo di essere riuscito a "pizzicare" un imbarazzante neo nella formulazione di Piotr. Segue dialogo:

P.:"...Il primo che *non posso* scrivere e` nella forma 100...000, perche ` finisco gli '1"

R.:"Scusa, ma prima hai scritto 99...999, giusto?"

P.:"Si"

R.:"E non hai usato degli '1'"

P.: "No, 99...999, 99...998,......,99...992 non contengono '1'"

R.:"Ma allora, *dove cribbio hai messo gli 1 che hai trovato in quelle scatole?*"

Ragazzi, la bocca di Piotr sembrava la "O" di Giotto....

3.2.2 Auguri per Natale

Sul fatto che non avete risposto non posso dirvi niente: come accennato, non piacciono neanche a me...Inoltre, era "dura".

Dunque, riprendiamo l'operazione (numerando i prodotti parziali cosi` e` piu` comodo):

							A	U	G	U	R	I	X
							N	A	T	A	L	E	
1						*	*	*	*	*	*	*	
2					*	*	*	*	*	*	*		
3				1	9	*	*	*	*	*			
4				*	*	3	*	7	*				
5		*	*	*	*	*	*	*					
6	*	*	*	*	*	*	*						
	*	*	*	*	*	0	0	*	0	*	*	*	

La prima cosa che si vede e` che tutte le cifre da **0** a **9** devono comparire nei due fattori (ci sono 9 lettere diverse).

Dal terzo prodotto parziale si vede che il quadrato di **A** (e` il prodotto della "A" di "AUGURI" per la seconda "A" di "NATALE": il risultato sono le ultime cifre sulla sinistra e ogni prodotto precedente su quella riga contribuisce con una sola cifra: quindi, deve dare due cifre) non e` superiore a 19 (potremmo avere del riporto da "A" per "U"); non potendo pero` un riporto in genere superare il valore 9 (anche se avete una fila di "9x9", non ce la fate), dovra` essere **A=4** (unico intero il cui quadrato sia di due cifre ma minore di 19) e **4*U** dovra` dare riporto 3 (=19−$A^2$), quindi U sara` 7, 8 o 9 (e perche` non 6? Semplice -mica tanto-: AxU=4x6=24 per dare riporto 3 deve aver ricevuto riporto almeno 7 -non ci sono zeri quindi deve fare almeno 31- Cioe` AxG deve fare settantaequalcosa; con A=4, G dovrebbe essere maggiore di 9; quindi, niente U=6).

La cifra **T**, moltiplicata per un numero di 6 cifre che comincia per 4, da` un prodotto di 6 cifre; quindi dovra` essere 1 o 2 (in quanto 4x3=12: non ridete, qui sono rimasto fermo un bel po` di tempo...).

Se fosse T=1, si avrebbe R=7, G=3 (sono esplicitati nel quarto prodotto parziale), da cui si avrebbe, al variare di "U", AUGURI= 47377I o 48387I o 49397I; il primo va escluso (sarebbe U=R); ma, non potendo esserci un 2 tra le cifre di NATALE (la "T" mi genera un prodotto parziale a 6 cifre e dovrebbe generarmela anche il 2; non essendoci altri parziali a 6 cifre, non c'e` il 2) dovrebbe essere I=2 e, dovendo esserci il 5 tra le cifre di NATALE (visto che non compare in "AUGURI"), comparirebbero degli zeri nei prodotti parziali (e sappiamo che non e` vero).

Dovra` quindi essere **T=2** e quindi RI=36, 37, 38 o 39, mentre GU= 18 o 19 (non 17 in quanto, essendo G=1, U non puo` essere 7); ma se GU=18, sarebbe AUGU=4818 e quindi AUGURI*5 conterrebbe degli zeri.

Quindi sara` GU=19 e RI=37, quindi AUGURI=491937 e quindi l'operazione diventa:

						4	9	1	9	3	7	X
						N	4	2	4	L	E	
					*	*	*	*	*	*	*	
				*	*	*	*	*	*	*		
			1	9	6	7	7	4	8			
			9	8	3	8	7	4				
	1	9	6	7	7	4	8					
*	*	*	*	*	*	*						
*	*	*	*	*	0	0	*	0	*	*	*	

Gli altri tre prodotti parziali non scritti dovranno essere (a meno dell'ordine):

5*491937=2459685

6*491937=2951622

8*491937=3935496

Per far risultare lo zero piu` a destra i prodotti di L e E devono avere la terzultima (L) e la quartultima (E) cifre tali che la loro somma sia maggiore o uguale a 10 e minore o uguale a 12; questo e` vero solo se **L=6** e **E=8**.

Quindi, la soluzione e`:

491937 x 542468 = 266860080516

...Avete capito perche` non mi piacciono, come problemi?

Andateci piano con il torrone.

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

Alice Riddle