Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Numero 018 - 2000-07

1. Editoriale

Fatemi sapere se vi e` piu` simpatico il Mandala di Penrose o i tre lucertoloni (il disegnino vecchio o quello nuovo, per capirci...sveglia!).

Questi li ha fatti Escher, e a me sono sempre stati simpatici. No, non li faccio colorati, non ho la stampante a colori.

Non essendo sicuro sappiate contare fino a tanto, ve lo dico: con lo scorso numero, abbiamo raggiunto quota cinquanta problemini. Se ci tenete, liberi di festeggiare, magari risolvendo qualcosa (le soluzioni ricevute le facciamo contare a mio figlio piu` piccolo: per lui, subito dopo l'undici, vengono il sedici e il ventidue e ci fate una figura migliore).

Tra l'altro, dal calendario non avete ancora risolto niente (francamente, me l'aspettavo); quelli non risolti, ve li ritroverete anche l'anno prossimo.

Alla fine di questo mese sono *di nuovo* in ferie... Credo dia assuefazione.

Secchiello, paletta, regolo calcolatore...C'e` tutto!

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Di nuovo il prof di mate!

...Ve lo ricordate, l'avaraccio di qualche numero fa, che al paesello torturava il figliolo con inenarrabili tornei di scacchi dotati delle piu` strampalate regole? Bene, non solo continua a non offrire il caffe`, ma all'ultima richiesta del giovine (supportata da grafi e tabelle sul calo dell'euro e sul prezzo della miscela), ha risposto con un ennesimo problemino:

"No, non ti aumento la paga... In compenso, quale anticipazione, ho dieci banconote da cinque euro e dieci banconote da venti euro, oltre a due cappelli *(i prof di mate portano sempre due cappelli...)*. Bene, sei libero di dividerle come ti pare in due mucchi; io mettero` un mucchio in un cappello e l'altro nell'altro cappello e tu prima sceglierai il cappello e poi pescherai una banconota, che puoi tenerti".

Logicamente, nessuno di noi si e` lasciato sfuggire l'occasione di fornire saggi e preziosi consigli al teppistello... Voi come fareste a massimizzare la probabilita` di "cacciare un ventone"?

2.2 Problemi di traghetti

No, questo non e` a Venezia.. Siamo su un fiume e abbiamo un molo cui sono attraccati due traghetti identici, che partono contemporaneamente, uno seguendo la corrente e l'altro controcorrente, entrambi con il motore al massimo dei giri. Emozionato dalla partenza, quello che segue la corrente perde un salvagente subito. Dopo un'ora, i due traghetti girano e tornano indietro.

Riuscira` il nostro traghetto a recuperare il salvagente prima di incontrare il collega?

2.3 Scacchiera senza pezzi

...E` un po` che la vostra scacchiera prende polvere, vero? Sembra infatti che il mondo degli scacchi ne abbia tratto indubbio giovamento.

Voglio sperare vi ricordiate che su quel coso ci sono sessantaquattro quadrati di una casella di lato; con una veloce occhiata, un foglio excel e un tremendo mal di testa probabilmente riuscirete a realizzare che c'e` un quadrato di otto caselle di lato; bene, il problema e`: quanti quadrati ci sono sulla scacchiera? Con un numero qualsiasi (purche` intero) di caselle di lato...

3. Soluzioni e Note

3.1 [016]

3.1.1 Vi piace la musica?

Terrificante. E non sto parlando degli U2, ma della vostra pigrizia. Nessuna risposta.

Di primo acchito, uno pensa di far traversare insieme i piu` lenti e poi vediamo (ci togliamo la spina piu` grossa), ma questo porta a scarsi risultati.

L'idea che ***non*** si e` fatta strada nelle vostre testoline e` che si, i piu` lenti possono traversare insieme, ma bisogna fare in modo che *nessuno di loro debba tornare indietro*.

Quindi, dall'altra parte deve gia` esserci *uno veloce*.

Siccome di lenti ne abbiamo due, per prima cosa facciamo traversare due veloci.

Poi ne facciamo tornare indietro uno.

Poi facciamo partire le due lumache.

Poi quello veloce gia` dall'altra parte torna indietro.

Infine, i due veloci traversano assieme.

Il problema ha quindi ***due*** soluzioni equivalenti: supponiamo partano dalla sinistra (orografica):

Operazione	**Lato sinistro**	**Lato destro**	**Tempo**	**Tempo totale**
Traversano Bono e Edge	Adam Larry	Bono Edge	2 minuti	2 minuti
Torna indietro Bono	Adam Larry Bono	Edge	1 minuto	3 minuti
Traversano Adam e Larry	Bono	Adam Edge Larry	10 minuti	13 minuti
Torna indietro Edge	Bono Edge	Adam Larry	2 minuti	15 minuti
Traversano Bono e Edge		Adam Bono Edge Larry	2 minuti	17 minuti

L'altra soluzione inverte tra loro i passi (2) e (4), impiegando lo stesso tempo.

L'unica scusante che avete e` averci provato con il grafo logistico, una volta tanto particolarmente inutile...

3.2 [017]

3.2.1 Ancora sulle bilance

Beh, poca roba, e per di piu` sbagliata... Vi meritereste, piu` che il ruolo di assistente ortofrutticolo, quello di dietologo degli elefanti... Voglio vedervi, con i pesi, a quel punto! A nessuno e` venuto in mente che, se la bilancia ha i bracci *uguali*, posso mettere pesi da *tutte e due le parti*, e quindi non ho bisogno delle *Potenze di due*[1].

In realta`, ogni peso $\boldsymbol{Y}$ e` esprimibile con una serie di pesi $\boldsymbol{X_i}$ come:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

dove (attenzione!) $\boldsymbol{a_i}$ puo` valere:

0 se non uso il peso

1 se il peso e` sul piatto opposto della bilancia rispetto all'oggetto

-1 se il peso e` *sullo stesso piatto dell'oggetto*.

...l'ultimo caso ve lo siete perso per strada.

Potendo ogni $\boldsymbol{a_i}$ assumere tre valori, le combinazioni possibili sono $\boldsymbol{3^n}$.

Ora, di queste combinazioni almeno una rappresentera` lo zero ($a_i = 0, \forall i$); delle restanti $\boldsymbol{3^n-1}$, qualcuna rappresentera` dei valori negativi (ad esempio: $a_i = -1, \forall i$); inoltre potremmo avere anche piu` valori zero (sempre ad sempio, basta che

[1] Testuale: e` stata la risposta piu` breve ricevuta, con espressione vagamente arieggiante "domanda cretina".

sia $X_i = X_j, i \neq j$). Per simmetria, le combinazioni per cui ***Y>0*** sono (al piu`) la meta`, quindi possiamo dire che, fissato ***n***, il peso massimo pesabile diventa $Y(n) \leq \frac{3^n - 1}{2}$; tutto questo, prego notare, senza imporre ancora nessuna condizione ai nostri pesi. Proviamo per induzione (*non scappate!*).

Credo sia abbastanza evidente che, per ***n=1***, ***X_1=1*** e quindi ***Y(1)=1***.

Supponiamo ora di aver scelto i vari ***X_1,...,X_n*** e di dover scegliere ***X_{n+1}***. Supponiamo inoltre la nostra scelta sia ottimale, ossia si sia in grado di pesare qualsiasi ***Y*** per $1 \leq Y \leq Y(n)$. Se ora scegliamo $X_{n+1} = 2 * Y(n) + 1$ si ha che sono pesabili i valori: $Y(n+1) = Y(n) + X_{n+1} = 3 * Y(N) + 1$; infatti, nei vari casi, si ha:

1. Se $1 \leq Y \leq Y(n)$:

Usiamo la "vecchia" serie di pesi ***{X_1,...,X_n}*** nel modo definito precedentemente

2. Se $Y(n) + 1 \leq Y \leq X_{n+1}$

Da una parte mettiamo il peso ***X_{n+1}*** e dall'altra, assieme al peso sconosciuto, abbastanza pesi scelti tra ***{X_1,...,X_n}*** tali per cui arrivo all'equilibrio. Sul piatto dove ho il peso sconosciuto ***Y***, in questo momento ho necessita` di aggiungere un peso $X_{n+1} - Y$ che, per definizione di ***X_{n+1}***, appartiene a ***{0,..., Y(n)}*** e quindi esiste nell'insieme dei pesi dati.

3. Se $Y(n+1) \leq Y \leq 3 * Y(N) + 1$

In questo caso metto sul piatto opposto al peso incognito ***Y*** il peso ***X_{n+1}*** e abbastanza pesi ***{X_1,...,X_n}*** sufficienti ad ottenere il valore ***Y-X_{n+1}*** che, per definizione, appartiene all'insieme ***{0,..., Y(n)}*** e quindi esiste nell'insieme dei pesi dati.

E quindi, abbiamo:

$$\begin{cases} X_1 = 1 \\ Y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{n+1} = 2 * Y(n) + 1 \\ Y(n+1) = Y(n) + X_{n+1} = 3 * Y(n) + 1 \end{cases}$$

Da cui, per induzione, si ricava:

$$\begin{cases} Y(n) = \dfrac{3^n - 1}{2} \\ X_n = 3^n \end{cases}$$

Notate che ***Y(n)*** coincide con il valore massimo pesabile che abbiamo ricavato prima; da cui, la suddivisione e` ottimale.

Come nota a margine, vi ricordo (so che le vostre conoscenze di storia sono polverose quanto quelle sull'aoristo) che negli anni settanta (millenovecento: ora bisogna specificarlo) in Unione Sovietica fu costruito un elaboratore elettronico (credo si chiamasse *Strela*) che funzionava in logica ternaria, cioe` attraverso lo schema che abbiamo appena ricavato; questo permetteva di far stare numeri "piu` grossi" in notazione compatta. Qualcuno ha voglia di progettare un addizionatore? Di quelli di una volta, con gli AND, gli OR e ogni tanto una resistenza da 2.2 KΩ...

3.2.2 Estrazioni del lotto

Bene, fa piacere vedere che non ci siete cascati... Forse perche` *en passant* avevamo gia` usato il trucchetto. Giorgio docet:

Piu` che parlare del gioco, meglio parlare del prof: ha sbagliato i conti! Le terne possibili sono:* $N*(N-1)*(N-2)$, *ossia il prodotto di tre numeri consecutivi; almeno uno di questi numeri sara` divisibile per tre, quindi il risultato deve essere divisibile per tre. Il numeraccio non e` divisibile per tre, quindi si e` sbagliato.

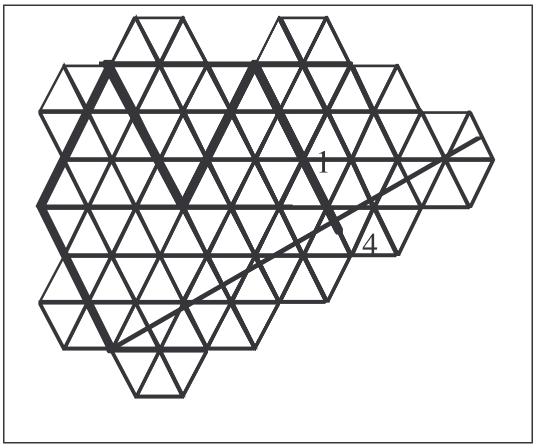
...Gli altri, quanti fogli Excel hanno consumato?

3.2.3 Problema dell'oste

...Nenche provato... Potevo bermela tutta io, la birra, che non ve ne fregava niente.

Tanto per cominciare, vi prego di notare che i nostri contenitori misurano capacita` ***intere***, quindi il risultato finale deve essere intero.

Questo vuol dire che ad Alice e a Piotr porto 3, 6 o 9 litri.



Siccome alla fine devo avere un recipiente pieno, devono essere dei valori multipli di tre ma non possono essere 3 o 6 in quanto un terzo di entrambe e` minore della capacita` minima e non potro` mai misurarlo.

Quindi, devo portare ***9*** litri da bere assieme. Per ottenere un litro da bermi da solo, la cosa e` abbastanza veloce: la trovate qui di fianco. I 10 litri sono sulla diagonale "fuori dal rombo", le operazioni dovreste riuscire a vederle da soli. Mi aspetto che, quindi, sarete in grado di ottenere tre litri (avendo a disposizione un contenitore da tre).

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 Criteri di divisibilita`

Bene, volevo parlare d'altro ma il problemino delle estrazioni del lotto mi ha fatto venir voglia di giocherellare un po` con questa roba... In fondo, questa rivista potrebbe tranquillamente intitolarsi "De Inutilitate", e oggi cose del genere non sono sicuramente piu` di moda. Prendiamo il nostro vecchio amico, 31415926535879.

Spero in meno di mezz'ora ci arriviate a capire che non e` divisibile per due. Qualcuno si ricorda come si fa per gli altri numeri, senza fare la divisione?

Il tutto si basa sul calcolo dei *residui*. Cominciamo "dal fondo", una volta tanto; in modo fideistico, tempo fa vi devono aver spegato una cosa; partiamo da una moltiplicazione (unico sistema operativo consentito: C P/M, ossia Carta, Penna/Matita):

```
      2  3  5    X
      1  6  2    =
     ------------
      4  7  0
1  4  3  0
2  3  5
-----------
3  8  8  7  0
```

Ora, se la vostra memoria funziona almeno quanto la mia, sommando le cifre del moltiplicando, sommando le cifre del moltiplicatore, moltiplicando tra loro questi due valori, sommandone le cifre sino all'unicita` e confrontandole con la somma delle cifre del risultato, dovremmo ottenere lo stesso risultato. Infatti:

Moltiplicando: 2+3+5=10, 1+0=1. Moltiplicatore: 1+6+2=9. Risultato: 3+8+8+7+0=26, 2+6=8. Quindi, 9*1=9=8. Voglio sperare l'errore l'abbiate trovato anche voi.

Il metodo si basa sul fatto che quello che calcoliamo continuando a sommare sino alla cifra singola non e` altro che il *residuo modulo 9*, ossia il resto della divisione per nove[2]. Il motivo per cui si segue una strada cosi` semplice e` dato dal fatto che:

$$10^N = \underbrace{999........9}_{"N"volte} + 1$$

e il primo termine e` un multiplo di 9 (questo lo vedete, si?). Da cui, con semplici ma noiosi passaggi lasciati per esercizio a vostro fratello piu` piccolo (che ci mette meno), si ha:

$$\begin{aligned} &10^N \equiv 1 \ (\text{mod } 9) \\ &2*10^N \equiv 2 \ (\text{mod } 9) \\ &.... \\ &K*10^N \equiv K \ (\text{mod } 9) \end{aligned}$$

Quindi, in un qualsiasi numero, il residuo modulo 9 e` la somma delle sue cifre. Siccome la moltiplicazione in modulo da` un risultato (in modulo) corretto, *il modulo del prodotto deve essere pari al prodotto dei moduli*.

C'e` da dire che ci azzecca nove volte su dieci, e so che per molti di voi questo puo` essere pericoloso. A questi lontani parenti del genere umano, posso consigliare (l'estensione e` immediata) il metodo del "Casting out ninety-nines", basato sul modulo 99: quello sbaglia una volta su cento e se riuscite a sbagliare anche cosi` allora vi lascio usare Excel, ma mi scelgo un altro commercialista.

Tornando alla prova del nove, quello che facciamo e` prendere il resto della divisione per nove di tutti i numeri e verificare se il conto e` corretto. Questo vuol dire che abbiamo trovato un metodo per vedere se un numero e` divisibile per nove (e, incidentalmente, sapere quanto da` di resto). Gia`, ma per il nove era facile... Come funziona, negli altri casi? Sarebbe interessante trovare un metodo generale, possibilmente da applicare anche a batterie scariche... Beh, non resta che seguire la stessa strada: il numero ***N*** posso esprimerlo come:

$$N = \sum_{i=0}^{K} a_i * 10^i$$

Ora, nota per un certo ***P*** la tabella:

$$10^i \equiv r_i \ (\text{mod } P) \qquad 0 \le i \le K$$

possiamo affermare che e` (il cambio di notazione del modulo e` per motivi tipografici)

$$N|_P = \sum_{i=0}^{K} a_i * 10^i \Bigg|_P = \sum_{i=0}^{K} a_i * 10^i \Bigg|_P = \sum_{i=0}^{K} a_i * r_i \Bigg|_P$$

Ossia, tornando alla vecchia notazione,

$$N \equiv \sum_{i=0}^{K} a_i r_i \ (\text{mod } P)$$

Gia, ma il problema sono gli $\boldsymbol{r_i}$... Prego notare che, trattandosi delle classi di equivalenza dell'anello dei ***P***, sono al piu` ***P-1*** (non mi pare il caso di contare lo zero...).

[2] Non per niente, questo giochino in inglese e` noto come "casting out nines", ossia "cacciar fuori i nove".

Sono d'accordo con voi che, per il 2 e il 5, non sia il caso di tirar fuori tutta 'sta manfrina. Gia` con il 3, pero`, puo` non essere cosi` immediato. Se pero` ci date un'occhiata piu` da vicino, si vede subito che e` $\boldsymbol{10^i \equiv 1 \ (mod\ 3)}$ (sara` per caso dovuto al fatto che 9 e` multiplo di 3?), quindi per il 3 la regola e` la stessa che per il 9.

Per il 4, la tabella diventa quella a fianco; prego notare un paio di cose interessanti. Tanto per cominciare, il fatto di aver ricavato uno zero (per ***i=2***, quindi per il valore 100, notorio multiplo di 4) fa si` che possa fermarmi; quindi, un numero e` divisibile per 4 se lo sono le ultime due cifre. La seconda cosa e` pero` la regola "standard" (e a questa, lo confesso, non ci avevo mai pensato): *Se moltiplicate per **2** la cifra delle decine e sommate la cifra delle unita`, ottenete il residuo modulo **4**.* Tutto questo grazie allo zero per ***i=2***. Per la gioia dei nostri numerologi.

i	***Residuo***
0	1
1	2
2	0

Voglio sperare che per il 6 siate in grado di scoprire tutto da soli.

Il 7 rappresenta un problema, tant'e` che raramente e` affrontato alle elementari (ragazzi, e` il momento di vendicarsi del fratellino saccente che vi frega RM per risolverli lui...). La tabella risulta un qualcosa di decisamente intrattabile; bisogna andare avanti per sei valori (cioe` ***P-1***, quindi il valore massimo) prima di trovare il ciclo; effettivamente, la cosa non ci torna piu` molto utile.

i	***Residuo***
0	1
1	3
2	2
3	6
4	4
5	5
6	*1*
7	*3*

Fortunatamente, l'anello delle congruenze e` quello che e`. Esattamente le stesse cose sono esprimibili sia utilizzando i valori ***[0,P]*** che utilizzando i valori $\left[\left(-\frac{P}{2}+1\right),\frac{P}{2}\right]$; questo ci riduce la tabella (anche per il 7) ad un qualcosa di piu` trattabile, come si vede dall'altra parte. Vi siete accorti, vero, che esiste una simmetria a meno dei segni tra la prima e la seconda parte? No, questa non ve la spiego. A questo punto e` "immediato" (quindici secondi a mente se ve la prendete comoda e usate le dita come memoria di massa) che e`:

i	***Residuo***
0	1
1	3
2	2
3	-1
4	-3
5	-2

```
31415926535879 (mod 7) =

9*1 +7*3 +8*2 -5*1 -6*3 -2*2 +9*1 +5*3 -1*1 -4*3 -1*2 +3*1 =

2   +0   +2   +2   +3   +3   +2   +1   -1   +2   -2   +3   = 17
```

Quindi la bestia divisa per 7 da` resto 3. Spero abbiate notato il paio di sporchi trucchi applicati nel secondo passaggio.

L'otto ve lo lascio come esercizio: forza che e` facile. Il nove lo abbiamo gia` visto... Vi ricordate dell'11? E` quello che viene dopo il dieci e prima del dodici. Se applicate il giochino, vi salta fuori la regoletta che dovreste ricordarvi di "Somma delle cifre di posto pari meno la somma delle cifre di posto dispari"... Quello che non ho mai capito e` perche` a scuola ti spiegano l'undici e non ti spiegano il sette; in fondo, dovendo essere oggetto di accettazione fideistica, i metodi sono bislacchi nello stesso modo. Sara` perche` cosi` l'aritmetica diventa divertente?

CroccantiCanditiBomboloniPizzeee!

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms