



1. Editoriale	1
2. Problemi.....	2
2.1 Su che dito finisco?	2
2.2 Passeggiata per Torino	2
2.3 I nomi dei numeri.....	2
2.4 Problema dell'oste	2
3. Soluzioni e Note	3
3.1 [014].....	3
3.1.1 Viaggio in macchina	3
3.1.2 Il libro	3
4. Paraphernalia Mathematica	4
4.1 Divisione di un segmento	4

1. Editoriale

Ho ricevuto un'interessante domanda, da qualcuno di voi:

"...Ma il motivo per cui hai inserito la nuova rubrica, e' forse che, vista la scarsita` delle risposte ai problemi, ci ritieni degli ignoranti tali in matematica da aver bisogno di un corso accelerato di aritmetica di base comprendente degli argomenti tranquillamente alla portata di un dodicenne?"

Adoro rispondere alle domande con delle domande:

"Cos'e', coda di paglia?"

In realta`, no; semplicemente, mi sono accorto che esistono dei campi della matematica (o meglio, dell'aritmetica superiore) che sono ingloriosamente caduti nel dimenticatoio (onestamente: la sapete fare una radice quadrata *a mano*?) e che mi pare interessante recuperare; poi, se vi siano utili o no, non mi interessa. Anche i problemi, ad utilita` pratica, viaggiano vicino allo zero. Fatemi comunque sapere se vi interessano (al momento: 2 "si", 0 "no", 314159 astenuti).

Com'erano, i pesci?

English Version is powered by

Rudy d'Alembert
Piotr R. Silverbrahms
Alice Riddle

2. Problemi

2.1 Su che dito finisco?

Questa l'ha inventata mio figlio più grande, la notte di capodanno; ci ha messo un po', ma c'è arrivato. Vediamo voi.

Mentre tutti aspettavano il 2000, lui ha cominciato a contare sulle dita in un modo un po' strano: "1" sul pollice; "2" sull'indice; "3" sul medio; "4" sull'anulare; "5" sul mignolo (*e fin qui, nulla di strano...*) "6" sull'anulare, "7" sul medio, "8" sull'indice... Alla domanda di cosa stesse facendo, si è incavolato perché aveva perso il conto; scopo del gioco era scoprire su che dito sarebbe arrivato il "2000"...

...E perché ce lo chiedi ad aprile?

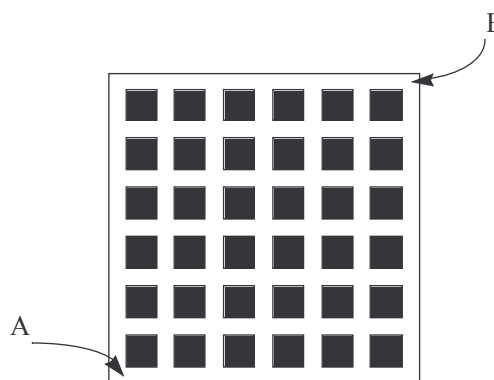
Semplice: prima ho dovuto risolverlo io.

2.2 Passeggiata per Torino

Come vi ho già detto, una delle caratteristiche di Torino è di avere le vie (buona parte, almeno... Nessuno è perfetto) perpendicolari e parallele tra di loro.

Presumendo per semplicità gli isolati tutti della stessa dimensione, possiamo dire che quella a fianco è una rappresentazione abbastanza fedele di una zona di Torino.

Supponiamo di avere la necessità di recarci a piedi dal punto **A** al punto **B**. Partiamo inoltre dal principio di non essere completamente scemi e di voler effettuare comunque un percorso della minima lunghezza possibile (quindi niente ritorni indietro), quanti sono i percorsi che posso fare?



Nota per i torinesi: vi ricordo che quello che ha provato a risolvere praticamente il problema dei ponti di Königsberg, l'hanno rinchiuso nell'accogliente manicomio che si trovava sulla strada...

P.S.: Se vedete delle ombre agli incroci, non è perché avete lavorato troppo... È un'illusione ottica nota come "Griglia di Hermann" (no, non so in che anno è nato).

2.3 I nomi dei numeri

Questo l'ho sentito in treno... Lo rendo solo un po' più "cattivello" (comunque è facile anche lui, dai)

Supponiamo una popolazione perfettamente logica con un linguaggio perfettamente logico che conta in base N . Per intenderci, per "linguaggio perfettamente logico" si intende quello in cui, se $N=10$, i numeri si leggono (ad esempio): 1 = uno, 11 = dieciuno (e non undici) e avanti così (ho detto "perfettamente logico", non "esteticamente valido"). Bene, per contare sino a 10000_N , (attenti alla base), quanti "nomi di numeri" mi servono?

2.4 Problema dell'oste

Esiste una categoria di problemi che, di primo acchito, sembrano abbastanza scemi ma che rivelano insospettite difficoltà nel momento stesso in cui si cerca un metodo per risolverli; quelli che io chiamo "problemi dell'oste" appartengono a questa categoria: giusto per scaldarvi i muscoli, ve ne passo uno facile:

Abbiamo due recipienti (vuoti) della capacita` di 11 e 7 litri; e` inoltre fornita una quantita` sostanzialmente infinita d'acqua. Senza barare (inclinazione, stima del "meta` livello" o quant'altro), come fate a misurare **2 litri**?

Il procedere per tentativi e` noiosissimo, ma esiste un metodo (in un punto insospettato della matematica) per risolverlo...

Chi sa trovarlo?

3. Soluzioni e Note

3.1 [014]

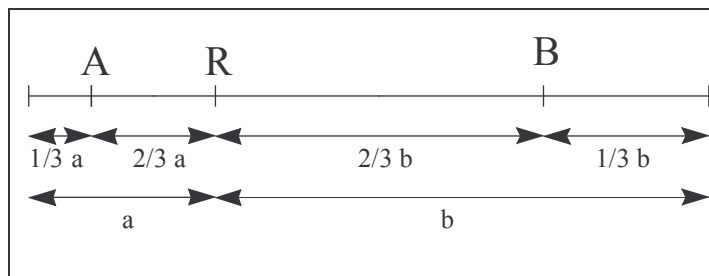
3.1.1 Viaggio in macchina

Allora, questo era facile:

Prima affermazione: "Abbiamo fatto meta` della strada di quella che ci resta da fare sino al ristorante". Questo implica che *mancano 2/3 di strada da casa al ristorante*.

Seconda affermazione: "Ci resta da fare meta` della strada che abbiamo fatto dal ristorante a qui per finire il viaggio". Questo implica che *abbiamo fatto 2/3 di strada di quella che c'e` dal ristorante alla fine del viaggio*.

La figura, probabilmente, rende piu` chiaro il tutto: sapendo poi che la distanza tra **A** e **B** e` di 200 chilometri, si ha:



$$\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b = 200 \text{ km}$$

$$\frac{2}{3}(a + b) = 200 \text{ km}$$

$$(a + b) = 300 \text{ km}$$

...indipendentemente da
velocita`, ora di partenza e

costo del pranzetto...

3.1.2 Il libro

...Come vi dicevo, c'e` una sorpresa... *La prima risposta che mi e` arrivata e` mia!* Voglio sperare che non vi offenderete, se approfitto dell'occasione (unica nell'arco di un anno) di vantarmi del fatto che ho risolto un problema... allora, questa volta le parti in corsivo sono mie e i commenti non in corsivo anche...

*In un libro, un capitolo comincia sempre in una pagina sulla **destra**, quindi in una pagina **dispari**. La seconda pagina del capitolo, quindi, sara` un numero **pari**.*

Allora, le unita` possibili per la seconda pagina sono 0,2,4,6,8; da cui, le unita` possibili per la prima pagina sono le corrispondenti 9,1,3,5,7.

Allora, per ottenere la somma 18, se x_1, y_1 sono centinaia e unita` della prima pagina e x_2, y_2 quelle della seconda, possiamo dire che:

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 18 - \begin{bmatrix} 0+9 \\ 2+1 \\ 4+3 \\ 6+5 \\ 8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 11 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ha l'aria tosta, ma se notiamo che il risultato e' sempre dispari, riusciamo a dedurre che (x_1, x_2) oppure (y_1, y_2) devono essere diversi tra loro; quindi, all'inizio di questo capitolo, stiamo (quantomeno) **saltando** alla decina successiva; quindi, la prima pagina del capitolo ha un numero che finisce per 9. Si noti che le decine non possono essere uguali a 9 (facendo "scattare" le centinaia), in quanto in questo caso la prima pagina farebbe gia' 18 di somma e non esisterebbe la seconda [...non succede una cosa del genere in un racconto di Borges?]. Allora, considerando solo decine e centinaia, possiamo scrivere: $(x + y) + (x + y + 1) = 9$, in cui abbiamo "portato fuori" dalle decine l'incremento. Quindi [dopo semplici ma noiosi passaggi] $x+y=4$.

Per $x \in \{0,1,2\}$ si hanno i valori di y 4,3,2; quindi, possiamo costruire i valori "papabili" di inizio capitolo:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} * 10^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} * 10^1 + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} * 10^0 = \begin{bmatrix} 49 \\ 139 \\ 229 \end{bmatrix}$$

L'ultimo valore e' [purtroppo] da escludere, quindi il capitolo inizia a pagina 49 e finisce alla pagina successiva alla 139, cioe' la 140. ha quindi $140-49+1=92$ pagine.

Allora, sono stato bravo? Grazie.

...Ma perche' hai detto "purtroppo", alla fine? Perche' ho letto male i dati del problema, e ho preso uno svarione che non finisce piu': seguite il mio ragionamento:

1---Anziche' "225", ho letto "255", quindi nell'ultima espressione anche "229" era una soluzione.

2---(Inizio svarione) Allora, il capitolo puo' cominciare a pagina 49 e finire a pagina 140 o cominciare a pagina 139 e finire a pagina 230... Qual'e' quella giusta? Insignificante, perche' il problema chiede quante pagine e' lungo e in entrambi i casi viene 92 (fine svarione).

Peccato che non avessi considerato il caso di un libro con un secondo capitolo da pagina 49 a pagina 230...

Trovo comunque il problema molto bello; Thanks, Frank!

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 Divisione di un segmento

Dovete sapere che nel mio set da matematico errante ci stanno due squadrette, ma il compasso proprio si rifiuta; quindi, le costruzioni seguenti sono con *coppia di squadrette* (45 e/o 30-60) ma *senza compasso*

Per prima cosa, decidiamo in quante parti intendiamo dividere il nostro segmento: la costruzione e' diversa se il numero delle parti e' **pari** o **dispari** (con un caso particolare per il **Due**).

Premessa

Dato il segmento AB , si costruisca il rettangolo (altezza a piacere) $ABCD$;

Due

Per bisecare il segmento AB , il modo piu' divertente e' quello di costruire un altro rettangolo $ABEF$ e tracciare le diagonali dei rettangoli; queste si incontrano nel centro del rettangolo e, unendo i due punti di incontro, si biseca il segmento. La **Figura 1** mostra un modo complicato per fare tutto (in realta' il rettangolo $ABEF$ potete metterlo tranquillamente *sotto* AB , ottenendo un disegno piu' chiaro).

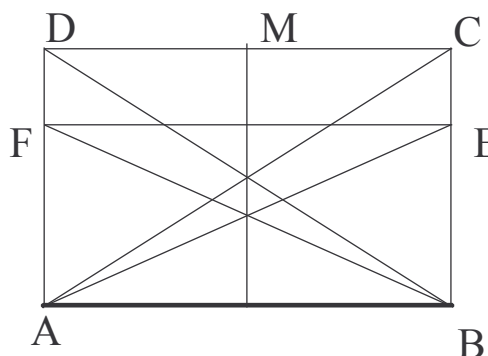


Figura 1

Dispari

Per prima cosa, prendiamo il nostro rettangolo $ABCD$ con il punto medio M sul lato CD ; a questo punto, tracciamo le due diagonali DB e AM , tirando quindi la perpendicolare per il punto di incrocio G al segmento AB (se volete fare i puristi, trovate il secondo punto per cui far passare la retta con lo stesso metodo del secondo rettangolo visto prima). Il punto X divide il segmento AB in modo tale che (come si vede

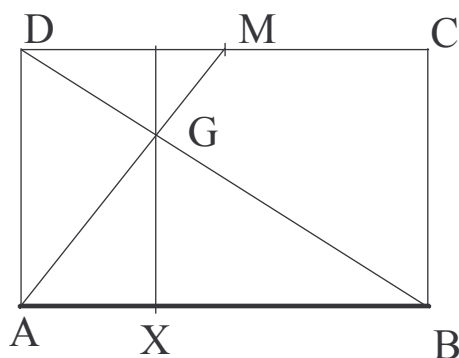


Figura 2

in **Figura 2**) $AX = \frac{1}{3} AB$. Per quanto riguarda ulteriori divisioni in un numero **dispari** di parti, il metodo seguito e' esattamente lo stesso, applicato pero' al segmento precedente; in questo modo, si riesce ad ottenere il segmento "un quinto" (cfr **Figura 3**)

$AY = \frac{1}{5} AB$ e, con lo stesso metodo, il

segmento "un settimo" e avanti... $AZ = \frac{1}{7} AB$

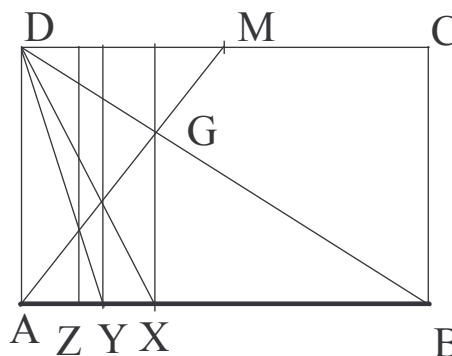


Figura 3

.Procedendo in questo modo, si possono ricavare tutte le divisioni dispari.

Per dimostrare queste asserzioni, facciamo riferimento alla **Figura 4**: nostra intenzione e' verificare che la cosa funziona per **n=3**.

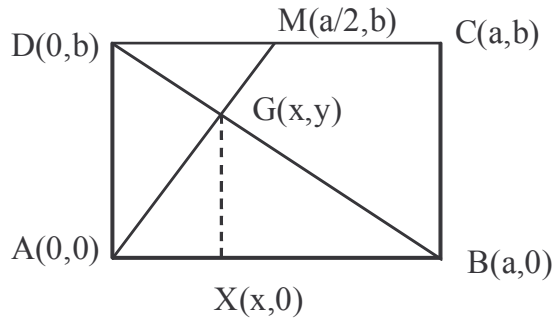


Figura 4

All'uopo, consideriamo due assi cartesiani con origine in **A**, calcoliamo le equazioni delle due rette comprendenti i segmenti **DB** e **AM** e quindi cerchiamo l'ascissa del punto di intersezione.

Abbiamo che l'equazione di **AM** e' $y = \frac{2b}{a}x$ mentre quella di **BD** risulta

essere $y = -\frac{b}{a}x + b$ e quindi l'ascissa di

G soddisfa l'equazione $\frac{2b}{a}x = -\frac{b}{a}x + b$

da cui si ha $x = \frac{a}{3}$, Come Volevasi Dimostrare.

Per quanto riguarda gli altri casi di divisione in parti dispari, la cosa diventa un po' tosta, ma comunque fattibile; supponiamo il teorema dimostrato per **2k+1**, e vediamo cosa succede quando cerchiamo di ottenere il punto successivo.

in sostanza, partiamo dall'assunto che il punto **Z** in **Figura 5** ha coordinate $\left(\frac{a}{2k+1}, 0\right)$ e costruiamo, come d'uso,

il punto **W**. L'equazione di **AM** e' sempre la stessa, ma l'equazione di

DZ diventa $y = -\frac{(2k+1)b}{a}x + b$; nel punto **E**, deve essere

$\frac{2b}{a}x = -\frac{(2k+1)b}{a}x + b$ il che

implica $\frac{b}{a}[2 + (2k+1)]x = b$ ossia

anche $x = \frac{a}{2k+3}$ che era lo scopo del nostro tedioso calcolo.

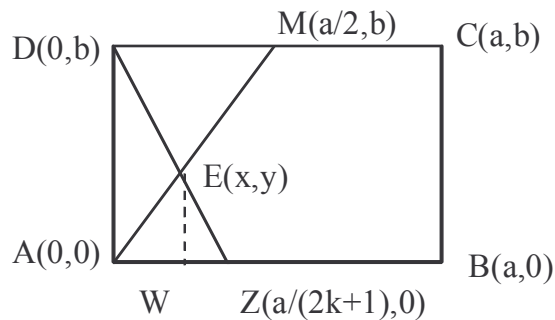


Figura 5

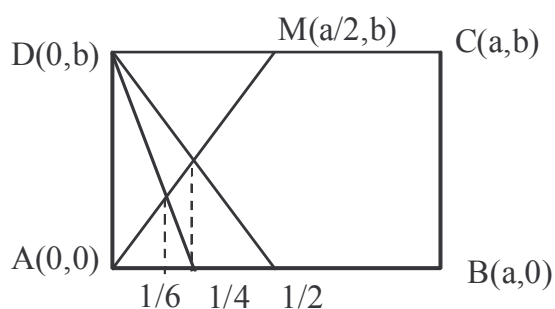


Figura 6

nello stesso modo, si ottengono gli altri segmenti (se non e' chiaro, probabilmente **Figura 6** aiuta...). La dimostrazione e' sostanzialmente identica alla precedente, quindi vi rimando a quella.

Utilita' per i problemi matematici: zero.

Utilita' pratica: epsilon (mooolto piccolo).

Pero' mi e' sempre piaciuta molto.

Attenti alla curva!

Pari

A questo punto, ritengo che tutti quelli tra di voi con le mascelle non slogate dagli sbadigli siano riusciti a capire come si fa nel caso di divisione in un numero pari di parti.

In questo caso, si procede con lo stesso metodo ma, anziche' tracciare il segmento **BD** di Figura 1, si traccia il segmento che unisce **D** alla proiezione su **AB** di **M**; l'intersezione tra i due segmenti dati, proiettata su **AB** fornisce il segmento di lunghezza $\frac{1}{4}$. Procedendo

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

Alice Riddle