Rudi Mathematici

Numero 013- 2000-02

1. Editoriale

Sono contento che il calendario vi sia piaciuto; tra l'altro, vi invito a tenere buona la copia che avete, perche` rappresenta un caso interessante nella storia della calendaristica: quando e` stato inviato era corretto, ma adesso e` sbagliato! Siccome non so se i distributori vi hanno passato la mail relativa, ve lo riscrivo qui.

Come vi dicevo, Newton e` nato due volte, abbiamo visto il perche`; il bello e` che se guardate alla voce "Babbage", vi accorgete che risulta nato il 26/12/1791 **e** il 18/10/1791; quello che non sapete (quelli non li ho scritti sul calendario) e` che e` morto il 18/10/1871.

La sua data di nascita precisa non era nota al momento della stesura del calendario, e le ipotesi erano o il giorno dopo Natale o (curiously and curiosly, cried Alice!) lo stesso giorno della sua morte (anno diverso, spirotosoni!).

Ai primi di dicembre, e` saltato fuori l'atto di nascita[1] che riporta la data (presumibilmente) esatta: 26 dicembre. Lasciatemi fare due considerazioni: (1). Da un tipo cosi`, poteva solo nascere una scienza con il Millennium Bug. (2). Morire il giorno del proprio compleanno e` una bella sfortuna, ma passare la vita come nati a Santo Stefano non e` poi tanto meglio... Secondo voi, quanti regali riceveva a Natale?

Chiudete la bocca, che l'aria e` piena di coriandoli

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

English Version is powered by *Alice Riddle*

[1] Nascita registrata il 6/1/1792, per complicare le cose...

2. Problemi

2.1 Mathland Airlines

...Ve li ricordate quei matti che giocherellavano con l'aereo e giravano intorno al mondo, problema nel quale ho fatto una figuraccia terribile in quanto mi dimenticavo di salvare i piloti?

Beh, mi hanno proposto un altro problemino in merito, facilefacile:

Supponiamo un aereo faccia servizio di linea (quindi va recuperato, poco da fare) tra **A** e **B** e viceversa; un giorno, in totale assenza di vento, per effettuare il percorso di andata e ritorno impiega un tempo che per originalita` chiameremo **m** (non e` una "emme", e` una "ti" in cirillico! Si legge "teh"); in un giorno successivo, in cui il vento soffia con regolarita` da **A** verso **B**, inpiega un tempo τ (si, questa e` una "tau") per compiere lo stesso percorso di andata e ritorno; secondo voi, **m** e` maggiore, minore o uguale a τ?

2.2 Problema di gondole

Si, siamo stati a Venezia: il motoscafo non partiva, e il marinaio ha detto: "Scendi e spingi!".

Comunque, una scena mi ha ricordato un grazioso problemino matematico.

In un certo punto ci sono due imbarchi delle gondole, uno di fronte all'altro sulle due rive opposte del canale; da ognuno di questi due imbarchi, partono nello stesso momento due gondolieri (di diversa stazza e quindi diverse velocita`, anche se costanti). Il primo incrocio ("Ciao, Bepi!" "Ciao, Toni!") avviene a 720 metri dalla riva piu` vicina. Giunti all'ormeggio, si fermano 10 minuti prima di ripartire e si reincontrano ("Ciao, Toni!" "Ciao, Bepi!") a 400 metri dall'altra riva.

Quanto e` largo il canale?

2.3 E` il compleanno di qualcuno!

Ma vi siete accorti che RM compie un anno? Mi pare giusto organizzare una festa e, per l'occasione, vi presento un grazioso problemuccio relativo alle feste.

Ve lo ricordate il metodo di Newton per dividere una torta in due parti uguali? Semplice: uno taglia e l'altro sceglie; in questo modo, il primo cerchera` di essere il piu` onesto possibile, il secondo avra` sempre la convinzione di aver scelto la parte piu` grossa. Supponiamo questa richiesta non sussista, e il nostro interesse sia unicamente quello di dividere la torta nel massimo numero possible di parti (disuguali quanto si vuole) con un certo numero di tagli rettilinei.

Domanda: supponendo che non sussistano problemi di dieta o di golosita`, qual'e` il numero massimo di parti in cui si puo` tagliare una torta con "n" tagli rettilinei *senza toccare le fette tra un taglio e l'altro*?

3. Soluzioni e Note

3.1 [011]

3.1.1 Problema da un altro Rudolph

Siete riusciti a destreggiarvi tra la grafia e il turpiloquio di Piotr? Alice, a quanto pare, ce l'ha fatta ed eroicamente si e` impegnata nella soluzione...

Vi risparmio i "prosperi" che ha tirato (Piotr e` un ottimo maestro, nel ramo...), passandovi il suo risultato: essendo arrivata in modo testo, "aggiusto" i numeri (elevamenti a potenza & C.) e inserisco, come al solito, le mie note...

Caro Rudi (io)*, questa era veramente cattiva. Non sono neppure sicura che la mia soluzione sia formalmente e completamente corretta, ma ne ho trovata una, che quindi vi sottopongo.*

Per prima cosa voglio sottolineare un fatto che abbiamo dato tutti per scontato, cioè che la cifra che si esaurisce per prima è proprio "1". Perché? Il destino che tocca agli "1" è quello dei primi della fila, che non sanno mai il lavoro che gli toccherà fare: cominciano le decine, le centinaia, e così via. Le altre cifre fanno poi lo stesso, subito dopo e in successione, ma ad ogni salto di un ordine di grandezza (da n a n+1) è proprio lei, "1", che deve sudare tutte le sue camicie per accompagnare l'avanzata dei successivi 10^n *numeri, sempre in prima fila.*

Lo sottolineo perché subito non ci avevo fatto caso, e mi ero buttata a calcolare a testa bassa cifre su cifre. Ho una bella formuletta per determinare quanti "1" ci vogliono per arrivare ad un numero del tipo 10^n*, per inciso è quella di Piero scritta senza logaritmi (odio i logaritmi, non ho mai capito se si mangiano o si bevono...*-ne l'uno ne` l'altro: si aggirano*):*

$$n*10^{(n-1)}+1$$

quando il numero di "1" che nel frattempo sono usciti dalla scatola è $2*10^n$*.*

Basandosi su questo calcolo viene proprio quello che Piero ha ricavato e Rudi (io) *tanto bistrattato, il numero di aeroplanini che il Rodolfo "baro"* (l'altro) *in un'altra dimensione è riuscito a targare aprendo le scatole in anticipo sulle costruzioni...*

Dato che Rudi (io) *ci rimanda alla rudezza di questa dimensione concreta in cui la gente è onesta (almeno al paesello e nei giochi matematici), mi sono dedicata ad un conto ala rovescia (sempre calcoli a testa bassa, sto proprio lavorando troppo), dal numero di Piero.*

Per provare a facilitarmi i conti ho trovato una formuletta per il numero di "1" utilizzati per costruire un numero di aeroplanini pari a $c*10^n$*, vi risparmio i dettagli:*

$$c*n*10^{(n-1)}+10^n$$

che avrebbe dovuto fare finalmente suonare qualche campanello, ma niente... ho fatto i conti alla rovescia per ore, poi ho preso un fogliettino excel (grunt...mumblemumblemumble...) *e ho finalmente notato un dettaglio: passando da* 10^n *a* $2*10^n$ *il numero di "1" utilizzati aumenta di un ordine di grandezza, mentre le scatole aperte raddoppiano (cioè il numero di cifre a disposizione). Continuando a contare fino all'ordine di grandezza successivo la velocità di utilizzo diventa sempre più trascurabile rispetto all'apertura di nuove scatole*

Ciò significa che l'aeroplano sfortunato deve cadere in uno di questi "salti" tra 10^n *e* $2*10^n$ *... provando a fare qualche calcolo, con l'ultima formuletta che ho scritto, per* $2*10^{18}$ *ho bisogno di* $4.6*10^{18}$ *"1", avendone solo* $4*10^{18}$*... scendendo ordini di grandezza di questo passo si arriva fino a* $2*10^{16}$ *(usate* $4.2*10^{16}$*, troppe!), e quindi* $2*10^{15}$ *(usate esattamente* $4*10^{15}$*... puzza un po').*

Ecco, guardiamolo questo numero: $2*10^{15}$ *non contiene neppure un "1", per cui è evidente che per arrivarci ho barato, solo adesso ho il numero di cifre che mi sarebbero state necessarie. Adesso sì che si può contare alla rovescia:*

$2*10^{15}-1$ *ha usato lo stesso numero di "1" avendone a disposizione 2 in meno, (-2)*

$2*10^{15}-2$ *ha usato lo stesso numero di "1" meno uno (quello usato per scrivere la prima cifra del numero precedente) avendone a disposizione 4 in meno, (-3)*

$2*10^{15}-3$ *ha usato lo stesso numero di "1" meno due (il gioco è chiaro, no?) avendone a disposizione 6 in meno, (-4)*

...

$2*10^{15}-8$ *idem meno 7, con 16 in meno (-9)*

$2*10^{15}-9$ *ha un "1" in fondo, per cui ne usa idem meno 9, con 18 in meno (-9)*

... poi si cala regolari di altri dieci:

$2*10^{15}-19$*, usati idem meno 20, a disposizione idem meno 38 (-18)*

... era una vita che erano finite le cifre, come siamo arrivati fino qui?

$2*10^{15}-29$*, usati idem meno 31, a disposizione idem meno 58 (-27)*

... ma perché non andare direttamente al "salto"?

$2*10^{15}-89$*, usati idem meno 97, a disp idem meno 178*

ora devo andare, ma funziona, no?

Quanto fa?

Ciao!

Fran

...Quanto fa non ve lo dico, ma il metodo e` corretto, e Alice e` decisamente vicina al risultato ed ha avuto anche il secondo "colpo di genio" (anche se non se ne e` accorta: comunque, promossa!), consistente nel lavorare con i numeri nella forma $2*10^n$, che ***non*** contengono degli "1" (e facilitano alcuni calcoli...).

Si, e` un numero "dalle parti" di $2*10^{15}$, e da qui in poi, effettivamente, si "suda" (anch'io ho dovuto "remare" per tentativi, da qui... e non sono pochi!). Beh, qualcuno vuole provare ad "affinare" il metodo? Farebbe comodo, ad esempio, una formuletta generale per fare il conto con *qualunque* numero, anche se "scomoda". Se non ci sono novita`, la prossima volta ve la passo, ancora complimenti a Alice (e a Piotr, che, come tutti i pionieri, rischia di essere misconosciuto).

Non sia mai! Avevo appena scritto la frase precedente, che ho ricevuto una mail da Piotr: come al solito, non si sogna neppure di trovare una soluzione migliore, ma comincia ad esplorare nuove, improbabili direzioni... Credo la sua mail meriti gli onori delle cronache.

Con gli aeroplanini va male, obviously... non ne verro' fuori, lo so.

L'ultimo tentativo di approccio l'ho fatto diversi giorni fa, quando ho deciso che per punire il tuo omonimo modellista gli avrei tagliato volentieri delle dita. Di li', pensando a un modellista con meno di dieci dita e arrivare ad un modellista con base numerica diversa da dieci il passo e' breve...

Allora, ho riscritto la mia equazioncella svincolandomi da base 10, e, passando da una ovvia

$$2n=\frac{n}{b}\log_b n$$

(dove b e' la base notazionale) si arriva alla banalissima:

$N = b^{2b}$

(insomma, lo stupido $N = 10^{20}$*, per b=10).*

Quello che ha di bello quest'equazione e' che l'unico numero che vi compare e' il 2 dato dall'arbitrario "due serie di cifre" che espone il problema.

Quello che ha di comodo e' che, per un Rodolfo assai mutilato, posso fare delle verifiche puntuali tra valore reale e valore teorico [Il "valore reale" e` il punto calcolato da Fran, il "valore teorico" e` il "punto di Calindri"][2]*.*

Il matrimonio tra la mia pazienza ed Excel e' riuscito a figliare i risultati "puntuali" per le basi 3 e 4 (per la base 2 bastava la matita, e per la base 1 bastava la testa): la giuria ha cosi' votato:

Base	***Teorico***	***Reale***	***Rapporto*** $\frac{T}{R}$
1	*1*	*4*	*0.25*
2	*16*	*16*	*1*
3	*729*	*365*	*circa 2*
4	*65536*	*8023*	*circa 8*

beh, fa un po' ridere, no?   Trascura la base 1, per ora....

La base 2 e' perfetta.

La base 3 ci dice un teorico che esattamente "il doppio meno uno" del reale

La base 4 ci da' un teorico che e' piu' di otto volte il reale (sempre che il reale lo abbia calcolato bene...)

Come prosegue il rapporto?

Col senno di Alice, sappiamo anche che il rapporto della base dieci tra valore teorico e reale (10^20 contro 10^15) sara' dell'ordine di 10^5 ...

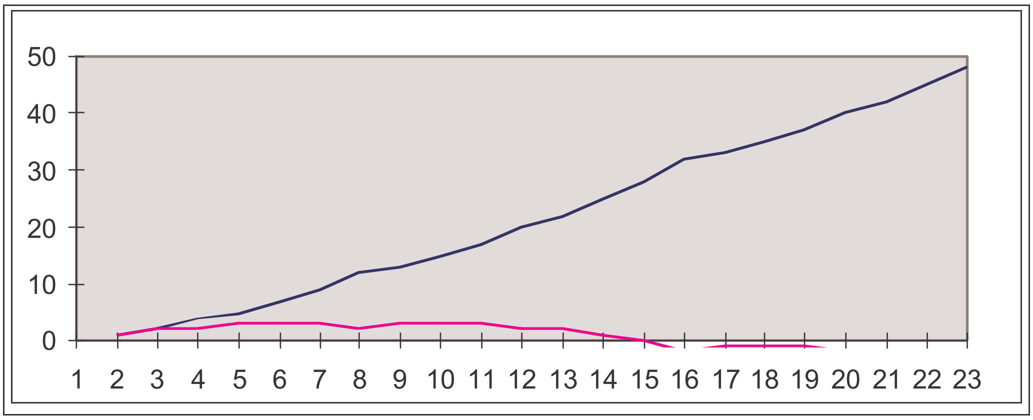
quindi....

Base	***Teorico***	***Reale***	***Rapporto*** $\frac{T}{R}$
10	10^{20}	10^{15}	10^{5}

... poi mi sono rotto.

Bella idea, penso... Beh, giocherellando in Excel (colpevole, vostro onore! Ho peccato anch'io) sono riuscito a trovare i grafici del consumo degli uno in base 2:

[2] *Piotr R. Silverbrahms*, comunicazione personale



La funzione monotona crescente (blu, per intenderci) rappresenta la "necessita`" di cifre "1"; la funzione sempre scandalosamente vicina allo zero, rappresenta il "resto" degli uno, una volta spiccicato l'N-esimo aereo.

Se andate in Open sul grafico (attenti, che a me "fa danni": spero il vostro Office sia piu` stabile del mio), nel foglio 1 trovate la "formuletta"; inserendo in "A1" la base, avete i risultati (si, lo so, esteticamente fa schifo; considerate che ho saltato pranzo, per buttarla giu`).

Se volete divertirvi con la base 3, dovete "allungare" la tabella.

Se volete divertirvi con basi superiori, il mio consiglio e` di comprarvi un Cray, ma di quelli "grossi".

Non contento dei danni combinati sino a questo momento, Piotr e` di nuovo partito per la tangente:

Ho deciso anche di far venire un periodo di crisi economica alla fabbrica degli aeroplanini. Colta da cotanta crisi, la fabbrichetta taglia sui costi, e non mette piu' nelle scatoline due serie di numeri, ma solo una.

La cosa ha stimolato la mia fantasia di narratore, ed ho proseguito la storia:

...Sin quando un giovane ma capace genio del marketing si accorge che, dal punto di vista dei costi, mettere una striscia numerata da 0 a 9 costa quanto metterne cinque numerate da 0 a 1... Con quale delle due tipologie di confezioni il nostro modellista riesce a fare piu` aerei?

Piu` veloce della mail, e` arrivata la risposta, che vi riassumo:

1. Il foglio Excel di Piotr riesce a fare (decentemente) i calcoli sino alla base 7, per una striscia: dopo, "schianta". Per questo valore, con una striscia, il Nostro monta 3931 aeroplanini

2. In base 2, Piotr ha provato per un numero di strisce δ variabile da 1 a 5, ottenendo i valori 3, 15, 63, 255 e 1023; da questo (con un'applicazione piuttosto anarchica del principio di induzione), ne deduce il seguente teorema:

Nello spazio della numerazione degli aeroplanini, la base di numerazione "2" mostra la coincidenza, per qualsiasi δ, del punto Calindri e del del Punto di Fran, che e' pari a

$$N = 2^{2\delta} - 1.$$

Al crescere della base, la distanza tra i due punti cresce; quindi, la base 2 e` l'unica con questa proprieta`.

Colto da mania di grandezza, Piotr ha anche enunciato (non dimostrato: non sia mai!) una cosa che ha pomposamente chiamato Corollario dei Residui:

Il numero di "1" che mancano per numerare l'aeropanino critico e`, in base 2, esattamente pari a ***δ***.

Qualcuno vuole formalizzare?

3.2 [012]

3.2.1 La Parata di Natale

...Noto che i problemi con i cani sono sempre apprezzati... Ho la mente rutilante di battute sarcastiche.

Allora, Giorgio il Grande e` arrivato alla soluzione piu` semplice:

"Supponiamo il lato del quadrato di ragazzini sia 1, e sia anche 1 il tempo necessrio a percorrere, da parte dei ragazzini, una distanza pari al lato del quadrato; da cui, anche la velocita` del grupopo sara` 1 [uno cosa? Beh, fate voi: metri&secondo, kilometri&ora, inches&fortnight... Vanno bene tutti].

Nello stesso tempo, il cane percorre una distanza ***x***. *Allora, la velocita` del cane rispetto ai boy-scout sara`:*

all'andata (in avanti): $x-1$

al ritorno (indietro): $x+1$

Ognuno dei due viaggi e` su una distanza 1 (sempre relativamente ai boy-scout) e i due viaggi vengono completati in un'unita` di tempo; da cui, sempre lavorando sulle velocita` relative,

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1$$

Ossia

$$x^2-2x-1=0$$

Escludendo il valore negativo (che rappresenta il cane con la "freccia del tempo" invertita) si ha

$$x=1+\sqrt{2}$$

Che rappresenta la velocita` relativa del cagnolino rispetto ai boy-scout; sapendo che i ragazzini hanno fatto 50 metri, risulta che Bobi si e` sparato 120,7.... metri. [Non solo, ma Giorgio propone un'espansioncella...] *E se il cane fa il* ***giro*** *del quadrato? E se anziche` in quadrato sono in* ***n-agono*** *regolare, e il cane gira attorno? E se sono in* ***cerchio****? Al momento ho risolto solo la prima... E ho dovuto usare Excel (umili scuse a Rudy...). Per gli altri due, sono in alto mare. Qualcuno vuole provarci?"*

Umili scuse accettate, anche se non necessarie: effettivamente, si va sul tosto, come calcoli... Non sono un pasdaran del calcolo manuale, semplicemente lo preferisco.

Dasvidanje

Rudy d'Alembert
Piotr R. Silverbrahms
Alice Riddle