Rudi Mathematici

Numero 016 - 2000-05

1. Editoriale 1

2. Problemi 2

2.1 Vi piace la musica? 2
2.2 Bilance 2

3. Soluzioni e Note 3

3.1 [014] 3
3.1.1 Il libro 3
3.1.2 Divisione 3
3.2 [015] 5
3.2.1 Su che dito finisco? 5
3.2.2 Passeggiata per Torino 5
3.2.3 I nomi dei numeri 7
3.2.4 Problema dell'oste 7

4. Paraphernalia Mathematica 8

4.1 Frazioni Continue Aritmetiche [002] 8

1. Editoriale

Piu` che "editoriale", andrebbe titolato "A volte ritornano". E` con gioia che vi annuncio il ritorno di Luca tra i solutori! Il mese scorso, esattamente tre minuti dopo l'invio di RM, mi sono arrivate le soluzioni del numero 14, *tutte* e *tutte corrette* (solo una aveva un piccolo appiglio per essere polemico...). Non solo, ma ha anche fornito un problema; ragazzi, mi state viziando. L'ho inserito in un insieme di problemi dello stesso "tipo" (qualcuno facile, altri no); non e` necessario mandare la soluzione a tutti, ma questa volta trovate anche una domandina dove siete pregati di inventarvi qualcosa: secondo me, puo` nascerne qualcosa di divertente (non ardisco a dire "funzionante").

Altra cosa da dire: il nostro valido latinista (Piotr), mi fa notare che "accelerazione" si scrive con una "elle" sola. Vero. Questa fa il paio col sesso ellittico che i piu` affezionati e vetusti lettori ricorderanno sicuramente. Effettivamente, la mia compagnia preferita durante la stesura di RM sono il Rossotti e il Ghersi, non lo Zingarelli e il Devoto-Oli.

Ultima cosa: dato lo scarsissimo interesse (meno soluzioni della versione italiana: un record assolutamente imbattibile!), la versione inglese e` sospesa; quindi, Alice e` arruolata nel novero dei creatori di problemi (agli altri).

Attenti al mal di testa.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Vi piace la musica?

O meglio, vi piacciono gli U2? Ho sentito alcuni sostenere che trattasi di due cose completamente diverse.

Bene, essi hanno un problema.

Sono a piedi davanti a un ponte (tutti dalla stessa parte) e, tra 17 minuti, comincia il concerto al di la` del ponte. Per traversare il ponte hanno a disposizione una torcia elettrica.

Purtroppo, il ponte non puo` reggere piu` di due membri del gruppo per volta (anche i ponti hanno un senso estetico), quindi se passano prima due, uno di questi dovra` tornare indietro per portare la lampada agli altri (e dopo dovra` riattraversare); il possesso della lampada e` requisito necessario per passare il ponte; inoltre, non e` possibile lanciarla, posarla, clonarla o "qualcosarla", barando.

Inoltre, ogni componente del gruppo cammina ad una velocita` diversa:
Bono: 1 minuto per traversare il ponte
Edge: 2 minuti per traversare il ponte
Adam: 5 minuti per traversare il ponte
Larry: 10 minuti per traversare il ponte (i batteristi sono sempre un po` "suonati"...).

Logicamente, se traversano in due procedono entrambi alla velocita` del piu` lento; quando uno torna indietro, torna alla sua velocita` tipica.

Senza trucchi: come fanno?

2.2 Bilance

Come vi dicevo, Luca e` tornato, e ha proposto un problema; mi sono ricordato che di problemi di questo tipo, tempo fa, ne circolavano alcuni, ed ho pensato di riunirli tutti assieme; condizione iniziale comune del problema e` che avete alcuni mucchi di monete dello stesso valore, un mucchio e` fatto di monete false, le monete false hanno un peso diverso rispetto a quelle vere; inoltre, a disposizione avete una bilancia a due piatti (e, ogni tanto, dei pesi...)

1. (FacileFacile): dieci mucchi di monete, ciascuno di dieci monete; sapete che una moneta vera pesa 15 grammi e sapete che quelle false pesano un grammo in meno; avete tuttii pesi necessari per effettuare la pesata comparativa. Con quante pesate individuate il mucchio delle false?
2. (Menofacilediquelchesembra): in questo caso ho i pesi e sette gruppi di monete. *Tre* gruppi pesano (ogni moneta) un grammo in meno. Quante monete vi servono almeno, per ogni mucchio, per trovare la falsa in una pesata?
3. (Tostaforte... Grazie, Luca!): avete nove monete (e niente pesi), una e` falsa (pesa meno delle altre); trovatela in **due** pesate.

...Non solo, ma Luca ha proposto una generalizzazione: supponiamo di avere una bilancia a tre piatti: tra quante monete potete trovare quella matta con due pesate? E se questa non vi basta, sempre piu` generale: avete una bilancia a n piatti: tra quante (al massimo) trovate la falsa con k pesate?

Adesso pero` ho io una domanda: come e` fatta una bilancia a $n \geq 3$ piatti? Una cosina semplice, in grado di piazzare i tre piatti ad altezza diversa in funzione del loro peso ma, soprattuto, che non consumi energia (niente molle o piezoelettricita`: sarebbe solo una variazione sul tema del dinamometro; vietato mettere tre stadere in parallelo).Le soluzioni piu` matte vinceranno un giro turistico al mercato ortofrutticolo.

3. Soluzioni e Note

3.1 [014]

3.1.1 Il libro

Beh, qui vi avevo passato la mia soluzione; come vi dicevo, e` arrivata anche quella di Luca: la trovo piuttosto carina (per non sconvolgere tutto, stavolta le note sono al fondo):

Questo ha occupato la mia mente nei momenti buchi per almeno 2 giorni… lo ho fatto senza Excel ma solo con carta e penna… Supponiamo che il libro sia un libro "per bene", ovvero abbia le pagine con numeri interi e che le pagine siano numerate in successione.

Sia n una generica pagina ($0 \leq n \leq 225$), siano n_0, n_1 e n_2 i tre numeri tra 0 e 9 tali che $n = n_2*100 + n_1*10 + n_0$ (in poche parole le tre cifre di n). Sia m la pagina del libro successiva ad n (ovvero $m = n + 1$), siano m_0, m_1 e m_2 i tre numeri tra 0 e 9 tali che $m = m_2*100 + m_1*10 + m_0$ .Sia definita la funzione $\Sigma(n) = n_0 + n_1 + n_2$. Sia $S(n,m)$ la somma delle cifre delle due pagine successive: $S(n,m) = \Sigma(n) + \Sigma(m)$. Le pagine che cerchiamo hanno la proprieta' di avere $S(n,m) = 18$.

Verifichiamo l'effetto di questa uguaglianza sulla quantita' $S(n,m)$.

Ci sono 3 casi da considerare:

- $0 \leq n_0 < 9$: in questo caso $m = n + 1$ implica $m_0 = n_0 + 1$, $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$. Considerando $S(n,m) = \Sigma(n) + \Sigma(m) = n_0 + n_1 + n_2 + m_0 + m_1 + m_2$ si nota che $S(n,m) = 2\cdot\Sigma(n) + 1$. Senza procedere oltre si nota che $\forall n : 0 \leq n_0 < 9$, $S(n,m)$ e' dispari, essendo $\Sigma(n)$ una quantita' intera,. Quindi $S(n,m)$ non puoi mai essere uguale a 28.
- $n_0 = 9$ e $0 \leq n_1 < 9$: in questo caso $m = n + 1$ implica $m_0 = 0$, $m_1 = n_1 +1$, $m_2 = n_2$. Ai nostri fini risulta pero' piu' comodo indicare $m_0 = n_0 - 9$. Considerando $S(n,m) = \Sigma(n) + \Sigma(m) = n_0 + n_1 + n_2 + m_0 + m_1 + m_2$ risulta $S(n,m) = 2\cdot\Sigma(n) - 8$. Imponendo $S(n,m) = 2\cdot\Sigma(n) - 8 = 18$, $\Sigma(n) = n_0 + n_1 + n_2 = 13$. Ricordando che $n_0 = 9$, risulta $n_1 + n_2 =4$. Ricordando che il libro ha solo 225 pagine (ovvero $0 \leq n_2 \leq 2$), le combinazioni possibili sono $(n2,n1) = \{(0,4); (1,3); (2,2)\}$. Traducendo le combinazioni in numeri di pagina otteniamo $n' = 49$, $n'' = 139$, ($n = 229$ e' troppo grosso per il nostro libro). Di conseguenza risulta $m' = 50$ e $m'' = 140$.
- $n_0 = 9$ e $n_1 = 9$: il procedimento e' molto simile a precedenti, $m_0 = 0 = n_0 - 9$, $m_1 = 0 = n_1 - 9$, $m_2 = n_2 + 1$. Risulta $S(n,m) = 2\cdot\Sigma(n) -17$. Come nel primo caso la $S(n,m)$ risulta sempre dispari e quindi non puo' essere uguale a 28.

Quindi la pagina iniziale del II capitolo e' la pagine numero 49 (n'), mentre quella finale e' la numero 140 (m''). Il numero di pagine del II capitolo e' $N = m'' - n' + 1 = 92$.

Devo ammettere che ritenevo una cattiveria lo sfruttare il fatto che i capitoli cominciano sempre a pagine dispari; questa soluzione non ne ha bisogno.

3.1.2 Divisione

Per prima cosa, devo dirvi che si, Federico e` riuscito a "telare" alla svelta con i suoi otto cioccolatini conquistati con il sudore della fronte.

Veniamo ora alla soluzione di Luca (come al solito, il non-corsivo e` mio):

Questo ha salvato un venerdi' pomeriggio altrimenti inutile… Il casino qui e' non perdersi… Ho indicato con C l'eta' di Consuelo, con A quella di Alberto e con F quella di

Fabrizio (...e chi e` Fabrizio? Mio figlio piccolo si chiama Federico, detto Attila 2). *Con n_C, n_A ed n_F il numero di cioccolatini che hanno rispettivamente Consuelo, Alberto e Fabrizio* (aridanghete...). *La divisione dei cioccolatini avviene in 4 fasi:*

$$\text{I-}\begin{bmatrix} n_C \\ n_A \\ n_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ A \\ F \end{bmatrix};\ \text{II-}\begin{bmatrix} n_C \\ n_A \\ n_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C+\frac{F}{4} \\ A+\frac{F}{4} \\ \frac{F}{2} \end{bmatrix};\ \text{III-}\begin{bmatrix} n_C \\ n_A \\ n_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C+\frac{F}{4}+\frac{A}{4}+\frac{F}{16} \\ \frac{A}{2}+\frac{F}{8} \\ \frac{F}{2}+\frac{A}{4}+\frac{F}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C+\frac{A}{4}+\frac{5}{16}F \\ \frac{A}{2}+\frac{F}{8} \\ \frac{A}{4}+\frac{9F}{16} \end{bmatrix};$$

$$\text{IV-}\begin{bmatrix} n_C \\ n_A \\ n_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C}{2}+\frac{A}{8}+\frac{5}{32}F \\ \frac{A}{2}+\frac{F}{8}+\frac{C}{4}+\frac{A}{16}+\frac{5}{64}F \\ \frac{A}{4}+\frac{9F}{16}+\frac{C}{4}+\frac{A}{16}+\frac{5}{64}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C}{2}+\frac{A}{8}+\frac{5}{32}F \\ \frac{C}{4}+\frac{9}{16}A+\frac{13}{64}F \\ \frac{C}{4}+\frac{5}{16}A+\frac{41}{64}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Sappiamo che alla fine tutti e tre hanno 8 cioccolatini. Ora si tratta di risolvere il sistema. Dapprima ho eliminato i denominatori (non mi trovo bene con le frazioni):

$$\begin{bmatrix} 16\cdot C+4\cdot A+5\cdot F \\ 16\cdot C+36\cdot A+13\cdot F \\ 16\cdot C+20\cdot A+41\cdot F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32\cdot 8 \\ 64\cdot 8 \\ 64\cdot 8 \end{bmatrix}$$

Dati i coefficienti orribili delle 3 espressioni sopra, io ho scartato la terza equazione sostituendola con A + B + C = 24 (dopotutto ad ogni fase i cioccolatini sono sempre 24). Alla seconda ho poi sottratto la terza, in modo da eliminare la variabile C ed il coefficiente ed avere subito una relazione tra A e F. In definitiva il sistema che ho risolto e':

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 5 \\ 0 & 16 & -28 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ A \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 256 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con un po' di pazienza ed un blocco di fogli si fa per sostituzione, oppure con l'aiuto di un HP-48 si inverte la matrice e si ottiene:

$$\begin{bmatrix} C \\ A \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

che sono le eta' dei tre interessati.

Correttissima (a parte "Fabrizio")! Devo dire che, come Luca non si trova bene con le frazioni, io non mi trovo bene con i determinanti (quando hanno spiegato il metodo di Cramer sono stato operato di tonsille: mai capito bene). Per quanto riguarda l'utilizzo dell'HP-48, tollereremo... L'importante e` che non sia Excel.

La soluzione che avevo seguiva un ragionamento "a ritroso" (senza determinanti):

Consuelo resta con 8 cioccolatini: siccome ha dato meta` di quelli che aveva alle altre due pesti, aveva 16 cioccolatini; allora, ne ha dati 4 ad ognuno dei due pischelli.

Siccome alla fine del gioco anche i due hanno 8 cioccolatini, prima di ricevere quelli di Consuelo sia Alberto che Federico avevano 4 cioccolatini.

Ma se Alberto aveva 4 cioccolatini, prima di fare la sua divisione doveva averne 8 (ne tiene la meta`) e ne ha dati 2 a Federico e 2 a Consuelo; quindi, la situazione prima della divisione di Alberto era 8 ad Alberto e 14 a Consuelo (cosi` arriva a 16); Federico, quindi, ne aveva 2 (cosi` arriva a 4).

Infine, la prima divisione e` di Federico; se a lui ne restano 2, vuol dire che prima della divisione ne aveva 4 e ne ha dato uno ad Alberto e uno a Consuelo, che quindi prima ne avweva 7; siccome non avanzano cioccolatini, Consuelo ne aveva 24−(7+4)=13.

La distribuzione iniziale (secondo l'algoritmo di Consuelo) prevedeva un numero di cioccolatini pari all'eta`, quindi Federico ha 4 anni, Alberto 7 e Consuelo 13.

Secondo me, Fred fara` molta strada (inseguito...).

3.2 [015]

3.2.1 Su che dito finisco?

Luca, clearly… Questo numero, praticamente lo ha scritto lui.

Questo é stato carino… Contando come descritto capita la seguente cosa:

pollice	*1*	*9*		*17*	…	$1 + k \cdot 8$	
indice	*2*	*8*	*10*	*16*	…	$2 + k \cdot 8$	$(k+1) \cdot 8$
medio	*3*	*7*	*11*	*15*	…	$3 + k \cdot 8$	$7 + k \cdot 8$
anulare	*4*	*6*	*12*	*14*	…	$4 + k \cdot 8$	$6 + k \cdot 8$
mignolo	*5*		*13*		…	$5 + k \cdot 8$	

Considerando il numero 2000, é un multiplo di 8 (2000 = 8 · 250), per cui lo contiamo sull'indice.

E` con gioia che vi comunico che (essendo riuscito a fare il calcolo) la mia mano e` Y2K compliant.

3.2.2 Passeggiata per Torino

Avevo una soluzioncella, semplicesemplice, poi mi e` arrivato questo trattato di quartierodinamica quantistica-relativistica (la mia soluzione e` relegata nella nota...sigh):

Questo era impegnativo… Allora nel testo si dice che percorriamo solo percorsi "furbi", ovvero non torniamo indietro. Supponendo che nella rappresentazione di Torino il nord sia verso l'alto, vuol dire che percorreremo le vie tra gli isolati verso est oppure verso nord. Se ci nel quartiere ci sono K^2 isolati (ovvero il quartiere è un quadrato con K isolati per lato), se indichiamo con l la lunghezza di un lato dell'isolato (supposto che siano tutti uguali e quadrati) la minor lunghezza del percorso per andare da uno spigolo del quartiere a quello diametralmente opposto è $d=2 \cdot K \cdot l$. Nel caso del problema ci sono 6 isolati su ogni lato del quadrato, per cui la distanza da percorrere e' $d_{(k=6)}=12 \cdot l$.
I diversi percorsi "furbi" differiscono tra loro su come percorro i 12 lati degli isolati. Abbiamo già visto che percorro i lati solo verso est o solo verso nord. Se indico con e un lato percorso verso est, con n uno percorso verso nord, ad esempio il tragitto che prima costeggia il lato inferiore del nostro quartiere da 36 isolati, poi quello est, può essere rappresentato come $P'_{K=6}=\{e,e,e,e,e,e,n,n,n,n,n,n\}$.
Gli altri percorsi "furbi" avranno lo stesso numero di e e n, solo in un diverso ordine. Quindi, dati K^2 isolati il numero dei possibili percorsi equivale al numero delle permutazioni dei $2 \cdot K$ elementi di uno dei percorsi. Ora, se tutti gli elementi fossero

differenti tra loro le possibili permutazioni "dovrebbero" (calcolo delle probabilità é ormai lontano) essere N=(2·K)! (fattoriale).
A questo punto se uno fosse fresco di Calcolo delle Probabilità si ricorderebbe la formuletta per le permutazioni con elementi uguali. Io non me la ricordo ed ho dovuto fare tutto il seguente casino per arrivare al risultato, che spero sia giusto.
Allora se nella stringa di un percorso scambio due e o due n il percorso non cambia. Quindi dalle (2·K)! permutazioni teoriche devo togliere le permutazioni che posso ottenere scambiando due lettere uguali.
In ogni percorso "furbo" di un quartiere quadrato come quello considerato ci sono K tragitti verso est (e) e K tragitti verso nord (n). Quindi preso un percorso ne posso ottenere K! uguali scambiando tra loro lettere e ed altrettanti scambiando lettere n. In definitiva i percorsi distinguibili "dovrebbero" essere:

$$N = \frac{(2 \cdot K)!}{K! \cdot K!} = \frac{(2 \cdot K)!}{(K!)^2}$$

Nel nostro caso K=6 quindi risulta:

$$N_{K=6} = \frac{12!}{(6!)^2} = 924$$

La formula funziona per quartieri più piccoli per cui ho calcolato le permutazioni a mano, infatti ho ottenuto $N_{K=1}=2$; $N_{K=2}=6$; $N_{K=3}=20$; $N_{K=4}=70$.

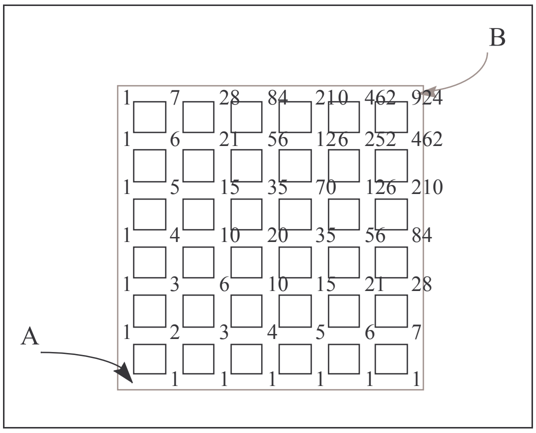
NOTA: in uno dei tentativi disperati precedenti alla soluzione che ho descritto, avevo trovato un metodo empirico, che non sono riuscito a dimostrare teoricamente, secondo il quale il numero di percorsi "furbi" possibili per attraversare diagonalmente un quartiere con K^2 isolati è uguale alla somma dei quadrati dei numeri della linea K+1 del triangolo di Tartaglia:

$N_{K=1}=1^2+1^2=2;$

$N_{K=2}=1^2+2^2+1^2=6;$

$N_{K=3}=1^2+3^2+3^2+1^2=20;$

$N_{K=4}=1^2+4^2+6^2+4^2+1^2=70).$



La dimostrazione "teorica" che Luca trovava e` andata avanti, tra le mie orecchie, suppergiu` cosi`:

L'incrocio a un isolato verso nord da ***A*** si raggiunge in un modo solo; idem per il punto a un isolato verso est. Identicamente, i punti a due, tre,...,***n*** isolati verso nord (o verso est) sono sempre raggiungibili in un modo solo. Quindi (disegno a fianco) scrivo ***1***.

Il punto a 1 isolato verso nord piu` un isolato verso est posso raggiungerlo (per la legge dell'intelligenza dei percorsi) o dall'incrocio a sud rispetto a lui o dall'incrocio a ovest rispetto a lui; da ognuno di questi punti, la via e` unica. Quindi, il numero di arrivi possibili in quel punto sara` la somma dei valori ai due incroci a sud e a ovest.

Ora, come fa notare Luca, questa e` la regola di costruzione del triangolo di Tartaglia, noto in Francia come triangolo di Pascal e in tutto il mondo anglofono come triangolo di Newton.

Tra l'altro (Luca, i miei ricordi di Probabilita` sono piu` polverosi dei tuoi...), da qualche parte c'e` un'espressione della potenza del binomio attraverso il binomiale...

3.2.3 I nomi dei numeri

Cominciamo col dire che Luca ci ha azzeccato, trovando la soluzione giusta; in compenso, qualcun altro (mi ha chiesto di non dire chi e`) si e` preso una "rupia" che non finisce piu`. Vediamo quest'ultimo, che e` piu` divertente.

*Lavorando in una generica base **N**, avro` bisogno di **N-1** termini (da 1 a 9, se lavoro in base 10); dopo aver inventato i numeri delle "ennita`"* [secondo me, su chiamano "unita`" anche qui...]*, devo inventarmi **N-1** nomi per le "ennine"* [queste invece sono l'equivalente delle decine]*, e avanti cosi`. In pratica, ogni volta che aumento l'ordine di grandezza, ho bisogno di **N-1** nuovi nomi come prefisso. Quindi, per 10000*$_N$*, mi serviranno* $4*(N-1)$ *nomi.*

...E sin qui siamo d'accordo, tranne che per due punti:

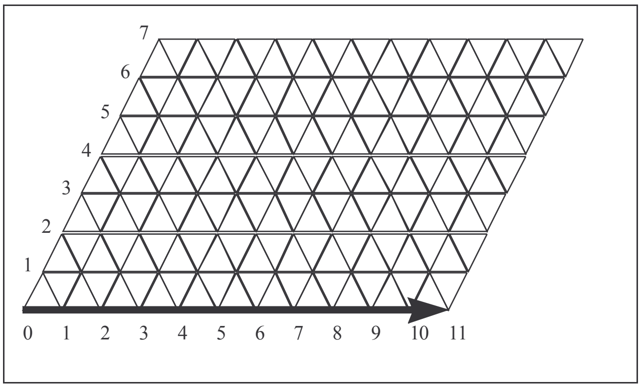
1. Manca il nome dello "zero"
2. Con quel numero di nomi arrivo solo fino al numero *prima* di 10000$_N$; per lui dovro` inventare un nuovo nome

Quindi, il risultato e`, in realta`, $4*(N-1)+2$. Ricordatevelo, caso mai doveste scrivere un dizionario.

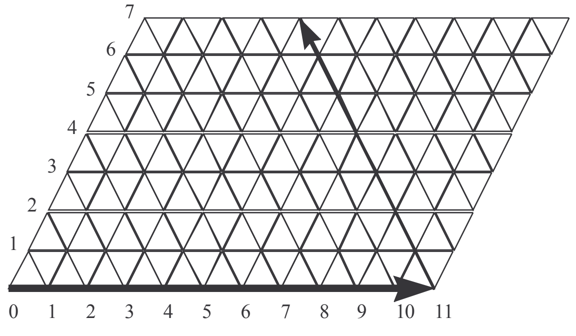
3.2.4 Problema dell'oste

Beh, la soluzione l'avete trovata tutti... Pero` io volevo un *metodo*, non un risultato...

La soluzione a problemi di questo tipo si trova giocando a biliardo su strani tavoli, di dimensioni e forme opportune; per questo problema in particolare, serve un tavolo ***romboidale*** di lati ***7*** e ***11***: per facilitarci la vita, disegnamolo su un *reticolo isometrico* (una volta la vendevano, la carta con il reticolo isometrico... Parlo di quando avevate dei problemi con la tabellina del due).

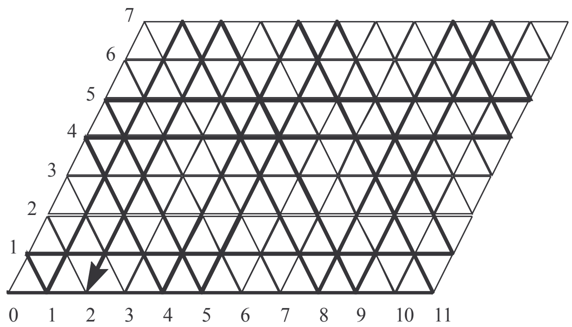


Sul nostro tavolo, supponiamo di cominciare riempiendo il contenitore da ***11*** litri; nel nostro modello, questo significa mettere la "pallina" nel punto (0,0) e mandarla sino all'angolo opposto, in (11,0); riempito il contenitore da 11.



Poi, travasiamo dal contenitore da 11 quello che ci sta nel contenitore da 7: ossia, la pallina "rimbalza" (lungo le righe del reticolo) e va a riempire il 7, finendo nel punto (4,7): da cui, ci sono 7 litri nel recipiente da 7 e ne restano 4 in quello da 11. Lo so che e` difficile da leggere, ma non si puo` avere tutto nella vita... Questo equivale alla seconda freccia nella figura successiva.

...Voglio sperare che ormai abbiate capito quali sono le regole di questo biliardo; quest'ultimo movimento significava semplicemente che adesso avete ***7*** litri nel contenitore da 7 e ***4*** litri nel contenitore da 11; tutto cio` che potete fare, e` continuare a travasare e fare attenzione quando andate a sbattere contro un "2" il che, come si vede dalla prossima figura, succede dopo un bel po` di passaggi...



Giusto per prenderci la mano, provate cosa succede se, anziche` partire riempiendo il contenitore da 11, comincio con quello da ***7*** (ossia se, con la prima freccia, arrivate in (7,0)). Se poi, colti da insana follia, continuate a tirare righe, vi accorgerete che potete generare ***tutti*** i valori compresi tra 0 e 11, ossia passate da tutti i "punti" sui lati del biliardo. Questo, come potrete verificare pensandoci un po` su, succede tutte le volte che i due contenitori hanno delle capacita` ***prime tra loro***. Da quando me lo hanno spiegato, ho sempre trovato questo metodo estremamente elegante.

Voglio sperare che, datovi anche il metodo risolutivo, vi impegnerete in questo problemino dello stesso tipo, leggermente piu` difficile[1].

Questa volta, abbiamo a disposizione un contenitore di ***8*** litri pieno di birra (almeno c'e` speranza che non ne sprechiate... niente risorse infinite, stavolta!) e due recipienti da ***3*** e ***5*** litri; l'intenzione, sarebbe di dividere fraternamente l'ambrato liquido in due parti da ***4*** litri (evidentemente, una nel contenitore da 8 litri e l'altra in quello da 5).

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 Frazioni Continue Aritmetiche [002]

Voglio sperare abbiate giocherellato abbastanza con la parte precedente riguardante le frazioni continue per riuscire a sopportarne una nuova dose.

Se l'utilita` delle frazioni continue si fermasse a quello che abbiamo visto la volta scorsa, va bene, Rudy e` rincretinito, spiace (mica tanto) ma andiamo avanti. In realta`, ci sono un paio di utilizzi non male; questa volta, ve ne spiego uno (l'altro lo troverete sotto altro titolo...)

Non so voi, ma io ho sempre avuto dei problemi immani a calcolare le radici quadrate. Consideriamo un numero abbastanza balordo, ad esempio $\sqrt{15}$; bene, vorremmo portarci dietro un valore piu` comodo, senza star li` ad estrarre la radice... Cominciamo con una prima, brutale apprpossimazione: l'intero minore del valore dato e` **3**, quindi possiamo scrivere:

$$\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{x_2} \qquad [001]$$

Ossia

[1] Leggenda vuole sia stato proposto a Tartaglia, e che ***lui*** lo abbia risolto in brevissimo tempo.

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{15}-3} * \left(\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3} \right) = \\ = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$$ **[002]**

In cui nel primo passaggio moltiplichiamo per 1 e nel secondo trasformiamo il tutto in prodotto notevole (*questo* spero ve lo ricordiate...). Sempre tagliando per i campi, il risultato e` (intero minore piu` vicino) circa **1**.

allora, possiamo dire che

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$ **[003]**

Ossia, sostituendo il valore trovato precedentemente,

$$\frac{\sqrt{15}+3}{6} - 1 = \frac{1}{x_3}$$ **[004]**

Che diventa (i calcoli sono lasciati come esercizio al lettore: portate "1" sulla frazione e invertite):

$$x_3 = \frac{6}{\sqrt{15}-3} * \left(\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3} \right) = \sqrt{15}+3$$ **[005]**

Che vale, suppergiu`, **6**.

Ancora un passaggio, dai:

$$x_3 = 6 + \frac{1}{x_4}$$ **[006]**

Con il solito blablabla (sostituisco il valore di x_3 dalla `[005]`, ricavo x_4) ottengo:

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{15}-3} * \left(\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3} \right) = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$$ **[007]**

...E adesso qualcuno tenga fermo Rudy mentre gli altri lo pestano: e` lo stesso risultato ottenuto con la `[002]`!

Gia`; infatti,

Teorema 1: *Lo sviluppo della radice di un irrazionale in frazione continua aritmetica e` periodico.*

In pratica, nel nostro caso:

$$\sqrt{15} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}} = [3, \overline{1,6}]$$ **[008]**

No, non ve lo dimostro: comunque, il metodo funziona anche per irrazionali piu` balordi (non per i trascendenti, sorry...).

Se pero` ci limitiamo alle radici degli interi, c'e` un altro grazioso teorema che (se siete abbastanza folli) vi risparmia grosse grane di memorizzazione:

Teorema 2: *Nello sviluppo in frazione continua aritmetica della radice di un intero, l'ultimo numero del periodo e` il doppio del primo numero e il periodo (con l'esclusione dell'ultimo numero) e` simmetrico.*

Ossia, genericamente:

$$\sqrt{N} = [a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, \ldots a_4, a_3, a_2, 2*a_1}] \qquad [009]$$

Anche per questo teorema, la dimostrazione e` la quintessenza della noiosaggine; quindi, accontentatevi dell'enunciato.

Una volta tanto, un foglio Excel in grado di calcolare lo sviluppo farebbe comodo...

Coraggio, che manca poco alle ferie.

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

Alice Riddle