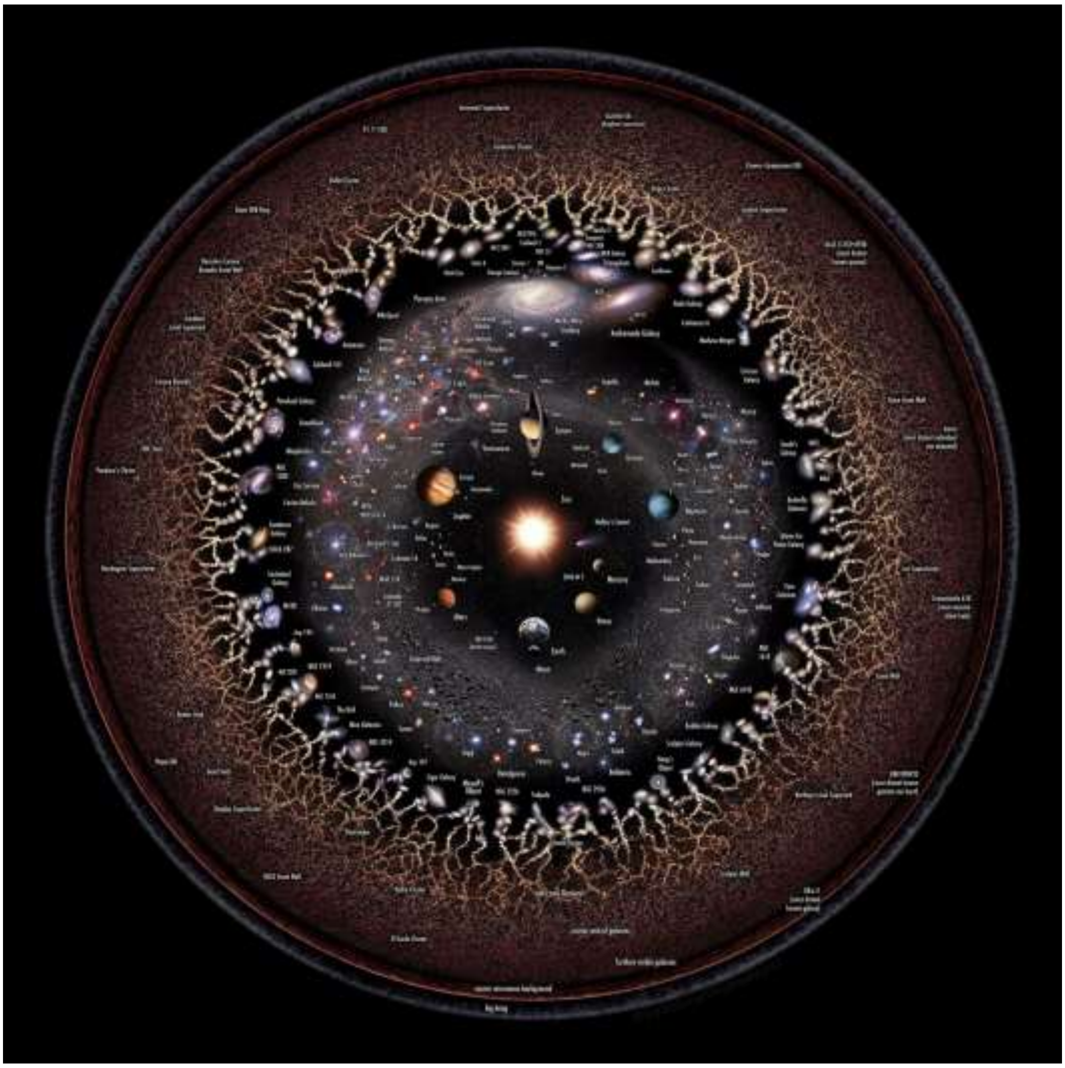
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 322 – Novembre 2025 – Anno Ventisettesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

I più stagionati tra di noi ricordano un documentario della loro infanzia intitolato ***Potenze di dieci*** nel quale veniva esplorata la scala delle realtà dai quark sino all'ammasso locale. Abbiamo sempre ritenuto impossibile rappresentare (quasi) tutto ciò in un'unica immagine, ma a quanto pare qualcuno ci è riuscito. L'immagine in copertina rappresenta l'intero universo a partire dalla Terra in scala logaritmica, e alcune scelte (possiamo dirlo?) prospettiche relativamente alla nostra galassia e alla superstruttura ci lasciano piacevolmente stupiti. Per una discussione più approfondita, altre immagini e gli opportuni credits all'artista (***Pablo Carlos Budassi***), potete partire da https://bigthink.com/starts-with-a-bang/logarithmic-view-universe/.

1. Taccuino di viaggio - Ginevra

«Cerchiamo di scoprire di che cosa è fatto l'universo, e come funziona.»
(CERN, mission statement)

L'antro del Mostro è oscuro, quasi buio.

Noi siamo tutti con le spalle al muro, trattenendo il respiro, proprio di fronte alla sua mole. È enorme, gigantesco; è – appunto – mostruoso. Immobile, certo perché sente il peso delle sue centinaia, forse migliaia di tonnellate; dista da noi solo qualche metro: quattro o cinque, non di più, magari ancora meno. Ne avessimo il coraggio, riusciremmo a toccarlo facendo solo pochi passi. Invece restiamo tutti fermi, senza parlare; perfino quando luci misteriose e colorate danzano sulle sue parti, mettendone in evidenza ora una, ora l'altra, come fosse una tigre leggendaria che terrorizza prima con il luccichio riflesso ora dai suoi artigli, ora dalle sue zanne. Non parla, però; e non ruggisce. Questa è casa sua, la tana costruita su misura per le sue dimensioni e per la sua potenza invisibile e misteriosa. Perfino la porta del suo antro non ha niente di familiare, tutt'altro: è un enorme macigno cilindrico inamovibile: neppure venti uomini uniti nello sforzo riuscirebbero a spostarlo, se fossero così folli da provarci. E là, sulle pareti rugose e grigie dell'antro, sono appesi i suoi strumenti di bellezza: non diversi da quelli maneggevoli e familiari che si trovano nei nostri negozi di ferramenta, ma molto, molto più grandi.


1 *Il Sincrociclotrone (alias SC, alias Il Mostro)*

Siamo tutti ancora lì: spalle al muro, muti e in ascolto attento, ma non abbiamo paura. Non abbiamo paura per molte ragioni: innanzitutto perché pochi minuti prima Marco, conosciuto in caffetteria, dopo poche parole di presentazione aveva già cominciato a raccontarci dell'incredibile avventura di quella prima macchina costruita al CERN. Ci aveva persino già mostrato, dalla finestra del bar e con un caffè in mano, l'esterno dell'antro del Mostro, ovvero uno degli edifici più vecchi dell'intero complesso dell'Organizzazione Europea di Ricerca Nucleare. L'edificio che ancora oggi ospita il Sincrociclotrone (che è il vero e unico nome del Mostro) per noi sarà la prima tappa attraverso la storia del più grande laboratorio di fisica del mondo. Non siamo entrati impreparati, in quest'antro.

E non abbiamo paura anche perché alla nostra sinistra sta parlando l'immagine un po' sfocata di Giuseppe Fidecaro, uno dei tanti padri del Mostro: è appena comparso nel filmato che già da qualche minuto ci sta raccontando gli inizi del CERN, delle sue prime macchine. Quando il narratore parla di qualche elemento del Sincrociclotrone, sul Mostro che fronteggiamo si illumina esattamente la parte chiamata in causa dal filmato, in un gioco didattico di luci che sarebbe bello anche se non fosse fatto a fini istruttivi, ma solo estetici. Fidecaro, dalla parete dell'antro che fa da schermo, rammenta la sua più celebre avventura con la macchina; quando nel 1958 il Mostro, a quei tempi appena nato, rivelò il decadimento del pione in un muone e il suo corrispondente neutrino. Era davvero il suo primo vagito: costruito appena quattro anni dopo la cruciale decisione di dare vita al *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire* ed entrato in funzione da appena un mese, il Sincrociclotrone sfornava già i suoi primi, definitivi responsi. Dalla parete alla nostra sinistra, l'immagine di Giuseppe Fidecaro ci mostra, muovendo appena il volto magro e la corona dei suoi capelli bianchi, la semplice formula del decadimento osservato, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, e la spiega con il tono pacato dei ricordi, con quel raro tono delle persone dal cui volto traspare molto affetto e neanche un briciolo di vanità.

Sopra di noi, sulla parete alle nostre spalle, abbiamo visto una catena di ritratti di personaggi che sono stati fondamentali per la nascita del CERN, e a ogni volto riconosciuto un milligrammo di soddisfazione nutriva i nostri cuori: eccolo là, il principe Louis De Broglie, quello che tornò a legare indissolubilmente le onde alla materia, e anche il primo che spiegò agli europei la necessità di grande laboratorio congiunto di fisica delle particelle; ecco Edoardo Amaldi, il ragazzo di via Panisperna che ha fatto da motore instancabile per la nascita e la crescita del CERN; e quello è il faccione di Niels Bohr, e dietro gli occhiali spessi si riconosce il viso di Isidor Rabi, che spiegò memorabilmente all'UNESCO perché era importante che questo centro prendesse vita. E poi Pierre Auger e Lew Kowarski, e poi Bloch, e Perrin, e… e però, in tutto questo, c'è il tarlo dell'imbarazzo cruciale e fastidioso che serpeggia nella testa di almeno qualcuno di noi: «perché non riconosco il nome di quest'uomo che sta parlando? Com'è possibile che non sappia nulla di Giuseppe Fidecaro?»

Dalla parete a sinistra, intanto, continua il racconto bidimensionale che, dopo averci mostrato immagini lontane nel tempo fissate nel bianco e nero caratteristico dei documentari del dopoguerra, ricostruisce l'immagine di un'Europa ancora ferita, ma che già si muove, quasi tutta, in un grandioso progetto comune. Erano tempi strani, quelli: tempi densi di miseria e di ferite, tempi grondanti di desiderio di pace e ricostruzione, almeno in Europa. Erano gli stessi tempi in cui germogliava la CECA, la Comunità Europea del Carbone e dell'Acciaio, con il suo grande carico programmatico di pace e di ricostruzione. Dopo due guerre mondiali germinate in Europa, trascorse con le due sponde del Reno scavate sempre più profonde a marcare divisioni, sei nazioni decidono di mettere insieme le risorse energetiche che fino ad allora erano quelle indispensabili per fare le guerre: metterle in comune era molto più significativo della firma su un trattato di pace, era promessa di fratellanza. Era una scommessa sulla speranza. Dalla CECA, patto dopo patto, attraversando mezzo secolo irto di fatiche e difficoltà, alla fine si arriverà all'Unione Europea. Una grande promessa politica: ma il germe comunitario della scienza è perfino più vasto e visionario.

2 *Un pezzo del Mostro viaggia dal Belgio verso Meyrin. (fonte: https://cds.cern.ch/record/795462)*

La Svizzera, tanto per dire, è ancora oggi fuori dall'Unione Europea, ma fin dall'inizio è protagonista del CERN. E forse è per caso, o forse per farne un simbolo politico, o forse ancora per dare un segnale forte sulla natura sovranazionale della scienza che il CERN trova casa in una scheggia di territorio svizzero strettamente incuneata tra i confini francesi, e a pochi chilometri sia dall'Italia che dalla Germania. A Meyrin che è praticamente Ginevra, e che ancor più di Ginevra è stretta dalle colline francesi. Distillato d'Europa, insomma.

Quel filmato ci fa cambiare subito la prospettiva. Il CERN è il CERN, pensavamo noi: una fucina di fisici e di ingegneri, dove particelle vengono costrette a correre controvoglia quasi alla velocità della luce, con anelli sotterranei di tunnel dove materia, energia, campi, onde, si scontrano per farci capire cosa siano davvero le onde, i campi, l'energia e la materia. E non pensavamo noi – sempre ingenui anche se usciti da facoltà come fisica e ingegneria – a qualcosa di assai più evocativo, come invece ci sta dimostrando quel filmato. E quello di noi che si preoccupava di non aver saputo nulla di Giuseppe Fidecaro ha quasi dimenticato già la sua vergogna. Se non fosse che poi, sulla parete, compare un'altra Fidecaro: Maria.

Come Giuseppe, Maria parla e racconta; come Giuseppe, sorride e spiega, e gli somiglia così tanto che ci fa pensare che a unirli nel cognome sarà stata la genetica, e non la scelta di vita. «Saranno fratello sorella,» pensiamo, «si somigliano troppo». Persino la voce ci sembra simile, quantomeno nel tono, nel placido modo di raccontare che hanno entrambi. Ma ci sbagliamo, hanno lo stesso cognome per scelta: Maria Cervasi lo acquistò nel 1955, sposando Giuseppe. Volendo a tutti i costi trovare tra loro qualche differenza, forse gli occhi di Maria brillano un po' di più, rivelando la cocciuta permanenza di un immutato entusiasmo. Ma noi… noi neanche di lei sapevamo niente: e solo dopo, tornati a casa, abbiamo cercato quel cognome in rete, fino a trovare un blog che ricorda entrambi. La cosa migliore che possiamo fare è ringraziare Riccardo Maria Bianchi (anche lui abitante di qualche laboratorio del CERN) per averci concesso la possibilità di usare l'immagine che correda il suo post, e suggerire a chi sta leggendo di smetterla, e di correre a vedere il suo articolo che parla degli occhi di Maria[1]. Come dal filmato che accoglie i visitatori nell'antro del Mostro, anche da quel blog trasuda quella strana sensazione, quella particolare atmosfera che ci ha accompagnato per tutta la permanenza a Meyrin.

3 *Maria e Giuseppe Fidecaro*

Atmosfera che non riusciremo a spiegare a dovere. Come potremmo, poi? È solo la prima volta che veniamo qua, come potremmo riuscire a darne conto? Tutta la Svizzera – l'abbiamo attraversata per intero, in treno, da Zurigo fin qua – ci ha riservato una giornata col cielo coperto; non ha acceso le luci che sa accendere quando decide di suscitare emozioni con le meraviglie dei suoi paesaggi. Ci mostra un'ordinaria giornata autunnale di grigio cielo alpino, ma forse anche questo fa parte di una scenografia decisa a tavolino per non farci sembrare troppo straordinaria quella che, almeno per chi ci lavora e ci studia, è certo davvero una giornata qualunque. Quindi quell'atmosfera che non riusciamo a descrivere sarà ordinaria, per chi la conosce, ma resta difficile da spiegare per chi, come noi, la sta vivendo come eccezionale e memorabile. Però anche noi riusciamo a sentirla come curiosamente operosa e rilassante, con buona pace della grammatica che di solito non vede andare d'accordo i due aggettivi.

Eppure c'è, si sente. La si vede perfino: non solo negli occhi di Maria che continuano a lampeggiare ormai solo più dal filmato, ma anche dall'espressione di Marco, la nostra guida, che quel video avrà rivisto mille volte. Non lo guarda come lo guardiamo noi, ma non solo perché per noi è nuovo mentre per lui l'ennesima replica: sembra piuttosto che, mentre noi scopriamo impreviste meraviglie, lui stia riguardando l'album di famiglia, con l'espressione che hanno sempre tutti, quando riguardano le vecchie foto ricordo conservate con cura.

A un certo punto, ci sembra quasi di capire. Forse il trucco è davvero quello di tornare a indossare la mente dei bambini, quando al posto della parola "ricercatore" conoscevamo solo la magica parola "scienziato". Perché è vero, certo "ricercatore" è parola più precisa e acconcia, ma "scienziato" è più forte e diretta, perfetta per romanzi, bambini, ed emozioni. E anche se Marco sta qui con noi a farci da guida, è indubbiamente anche lui uno scienziato come Giuseppe e Maria Fidecaro.

[1] https://www.zuppadiparticelle.it/maria-fidecaro/


4 *Marco Silari.*

Legato al CERN fin dal 1994, Marco Silari, a ben vedere, mostra chiaramente tutti i loro stessi sintomi. Una vita passata nella ricerca, quasi tutta sul crinale difficile e fruttuoso che unisce fisica e medicina, lo ha inguaribilmente legato a questo grandioso laboratorio. Per Giuseppe e Maria ogni edificio del CERN era come fosse una stanza della loro casa, e Marco ce li racconta alla stessa maniera, come se ci stessimo muovendo nelle stanze di casa sua. Così come Maria e Giuseppe continuavano a frequentare queste vie, questi edifici, questa cittadella anche da vecchi, perché per loro questo luogo restava più familiare della loro stessa casa, così Marco porta in giro i curiosi come noi, continuando a mostrare meraviglie agli altri e a ricordare ricordi a sé stesso. Gli scienziati devono essere un po' tutti così, troppo abituati a rendere ordinario lo straordinario, arrivando al punto di considerare ordinari sé stessi, anche se non lo sono per niente.

Che la scienza sia (e debba essere) patrimonio di tutti ce lo ricorda anche il gruppo di giovani che incrociamo appena usciti dall'antro del Mostro; studenti in visita, proprio come noi; a differenziarci c'è solo un mezzo secolo di differenza d'età. Probabilmente liceali, seguono anche loro una guida, proprio come faceva anche l'altro gruppo di visitatori, quelli che erano tutti alti un metro o poco più, e che abbiamo incrociato ancora prima, al tornello esterno. Il CERN è anche casa loro, che lo sapessero già o meno; seguivano i loro insegnanti, maestre e maestri di scuola elementare, e si guardavano intorno con occhi curiosi. Anche se probabilmente non avevano ancora digerito quella strana storia del dualismo onda-particella e forse neppure la matrice ben ordinata che riepiloga il Modello Standard, di certo avevano già intuito l'eccezionalità del luogo.

Alessandro ci aveva anticipato, ripetutamente avvertito, che lunedì non era il giorno ideale per arrivare a Ginevra. Di lunedì il complesso dello Science Gateway è chiuso, ed è un peccato mortale venire al CERN proprio quando non è possibile entrare nel grande centro progettato apposta per illustrare il CERN ai visitatori. Noi non potevamo scegliere altrimenti, ma poco prima non abbiamo nascosto qualche sospiro di rimpianto, quando siamo passati sotto i futuristici cilindri di vetro e cemento disegnati da Renzo Piano. Oggi è il 13 ottobre 2025, proprio un lunedì, e i gruppi di studenti che abbiamo incrociato sono pochi, spiegano Marco e Alessandro, per questa ragione. E, a pensarci un po', è impressionante e assai significativo che per entrare in questa piccola città che è il più grande laboratorio di fisica delle particelle del mondo non serva nient'altro che chiederlo. È vero, noi abbiamo approfittato della gentilezza di Alessandro e lo abbiamo usato un po' come un nostro agente sotto copertura, ma quello che davvero è necessario per entrare in questa grandiosa cattedrale della scienza è solo una prenotazione[2].

Adesso stiamo camminando attraverso quello che gli americani chiamerebbero *campus*, e non sbaglierebbero poi tanto. Fare ricerca significa studiare, innanzitutto, e anche se sottoterra ci sono adroni che si frammentano precipitandosi l'uno contro l'altro, anche se stuoli di strumenti tra i più sofisticati mai concepiti e costruiti dagli esseri umani intercettano e misurano senza sosta i loro frammenti, qua sopra, in questa zona, l'aspetto è quasi quello di un'università. Gli edifici sono semplici, poco alti, moderni, poco disposti ai

[2] Basta fare richiesta, con un po' di anticipo sulla data di visita desiderata, seguendo le istruzioni che si trovano sul sito https://visit.cern/.

fronzoli. Dalle vetrate si vedono e si indovinano scene ordinarie di studio e di lavoro: gente alla scrivania, persone che dialogano, anche qualche aula piena di gente giovane, probabilmente intenta a seguire una lezione o un seminario. Noi restiamo liberi di guardarci in giro, senza paura di perderci, perché per arrivare a destinazione è sufficiente applicare la facile regola del gregge; seguiamo Marco e Alessandro senza preoccuparci del percorso. E poi, in realtà, dove stiamo andando lo sappiamo benissimo: è ora di pranzo.

5 *Francesca, la nostra Alice (a sinistra), orgogliosa di posare con Giovanna Lehmann.*

Ci avvertono, si premurano di avvertirci che la mensa del CERN non produce leccornie strabilianti, ma la cautela si dimostrerà troppo pessimista, e poi la verità è che del cibo non ci importa niente. E poi siamo nervosi. Lo sapevamo già, eravamo stati preavvertiti, ma questo non riduce l'ansia e l'emozione: stiamo per incontrare Giovanna Lehmann.

È probabile che gli esseri umani abbiano un bisogno fisiologico dei miti. Non si spiega altrimenti l'universale diffusione della smisurata ammirazione che intere folle riservano ai propri idoli. Quando si crea un mito, non conta più cosa sia, cosa faccia, cosa rappresenti la persona in sé; e pur tuttavia l'adorazione ha bisogno di concentrarsi attorno a persone umane. Il ruolo dell'idolo potrà essere assunto da un attore, una cantante, dal miglior giocatore di una squadra di basket, da una pianista dal talento eccezionale, perfino da un leader politico, o da una scacchista. Forse è un retaggio biologico antico, primordiale: i cuccioli dei mammiferi e degli uccelli devono imparare molte cose, prima di raggiungere la piena indipendenza, e le possono imparare solo per imitazione; e forse si attiva un circolo virtuoso. Imparando dai genitori, la vita dei piccoli migliora, e così la fiducia negli adulti (gli esperti) cresce, e più cresce la fiducia più l'obiettivo della piena maturità si avvicina, e tutto tende a ripetersi anche da adulti, nell'elezione unilaterale di una guida, di un idolo. O forse è solo che ci piace ammirare chi è bravo a fare le cose che ci piacerebbe saper fare. Sia come sia, è sacrosanto e legittimo che uno si scelga e si coccoli i miti che preferisce. Statuito questo, ci perdonerete se, accanto a idoli più tradizionali come quelli sportivi, del cinema e della musica (che peraltro coltiviamo anche noi, come fanno tutti), noi ci concediamo anche il meno tradizionale lusso di avere dei miti scientifici. Sapendo questo, cercate adesso di capire come potevamo sentirci quando stavamo per incontrare colei che era stata appena nominata *Head of the Experimental Physics Department* per il quinquennio 2026 – 2030; per dirlo in facili parole della lingua italiana, la Capa del Dipartimento di Fisica Sperimentale del più grande comprensorio di fisica sperimentale del mondo.

6 *Per arredare le zone verdi, al CERN basta recuperare vecchi pezzi di acceleratori.*

Quale può essere il paragone più vicino, per le interazioni idolo-fan più tradizionali? Vediamo… guardare la propria squadra del cuore disputare la finale di *Champions League* seduti in panchina vicino all'allenatore? Avere libero accesso alle quinte del palco durante un megaconcerto della band che seguite da mezzo secolo? Essere invitati sul set dove la vostra star preferita sta girando una scena madre del prossimo film, come succede al personaggio interpretato da Hugh Grant in *Notting Hill*? Scegliete voi la pietra di paragone che più vi aggrada, e sappiate che ci sentivamo così. Abbiamo cercato di mantenere il nostro ruolo naturale di fan adoranti, e ci saremmo riusciti pienamente, se non fosse che Giovanna ha invece interpretato malissimo il ruolo della star. Si è capito fin dall'inizio che quel ruolo non le piaceva: ci ha teso un agguato già all'ingresso del ristorante aziendale, sequestrando tutte le componenti femminili del nostro gruppo per condurle in un luogo acconcio ove rinfrescarsi; immediata conseguenza di cotanta azione è che tutta la sezione dei maschietti, senza punti di riferimenti stabili, si è un po' dispersa, finché Giovanna non è tornata conducendo i vagolanti, uno per uno, a un tavolo della mensa. Chi scrive si vergogna un po' a dover confessare che si sentiva già mezzo perduto, finché non è arrivata proprio lei che, sorridente, gli ha indicato la retta via per trovare il tavolo giusto.

E ha continuato così per tutto il tempo: ci trattava da colleghi, cosa sbagliatissima perché il massimo che noi riusciamo a fare è rubare in giro dei giochetti matematici da propinare a ignari lettori, e soprattutto perché le vere star non fanno certo così. Magari saranno gentili, ma certo sempre facendo sentire appieno la divisione dei ruoli («Io star, tu fortunato fan», un po' come «"Io Tarzan, tu Jane» dei vecchi film con le giungle piene di liane), ma lei niente, non ci riusciva proprio. Con tutte le responsabilità che si porta addosso, con un *curriculum vitae* più lungo di *Guerra e pace*, con un *h-index* che resterebbe strabiliante anche dopo averlo diviso per sette, lei stava lì, a conversare con noi, e sembrava sinceramente interessata alle nostre scialbe esistenze. No, non è davvero così che si comporta una star: deve decisamente applicarsi di più, la ragazza.

Il piccolo tarlo che ci perseguita fin dal superamento del primo tornello torna rafforzato quando ci alziamo tutti per andare a celebrare l'italico rituale del caffè di fine pranzo. È sempre colpa di quella strana atmosfera che ci piacerebbe tanto saper descrivere, e che abbiamo la certezza di non riuscire a farlo. La si vede attorno a Marco, che ci ha lavorato tanto e che ritorna regolarmente a farlo, in altre vesti; la si vede risplendere intorno a Giovanna, che continua quotidianamente a impegnarsi nel cuore dei progetti, e a impegnarsi tanto. Ma la si vede chiarissimamente anche in Alessandro, che al CERN ha lavorato per anni, poi ne è uscito per fare altre cose, e questo potrebbe stupire. I due di noi che sono usciti da una facoltà di fisica potrebbero sperare che fosse questo il fattor comune; il corso di laurea. Una sorta di minimo comune multiplo generatore di quello sguardo verso il mondo che qui tutti sembrano avere, ma siamo proprio noi il fatale controesempio, quindi c'è davvero poco da fare, dev'essere qualcosa che traspira dalle mura del CERN, e che non va più via. E invece sulla faccia di Alessandro lo si vede benissimo, e non solo perché ha tuttora qui dentro, sia metaforicamente che letteralmente, un grande pezzo della sua vita.

7 *Alessandro Miotto.*

Alessandro Miotto lo abbiamo visto per la prima volta questa mattina, alla stazione ferroviaria di Ginevra Cornavin. Del suo aspetto fisico sapevamo una sola cosa, ma era quella essenziale: ci aveva detto di essere alto, e infatti è stato facilissimo individuarlo appena scesi sul marciapiede del binario. Lo conoscevamo lo stesso, però, perché da qualche tempo ci sono arrivate le sue mail, e le sue soluzioni ai problemi che pubblichiamo su questa nostra e-zine.

C'è un aneddoto abbastanza famoso che riguarda alcuni ragazzi che giocavano in un parco milanese. Un giorno, un signore chiese loro se poteva giocare anche lui. Si presentò come "Ceramica", senza neppure spiegare se fosse un nome, un cognome o un soprannome. Quel torneo che i ragazzi stavano disputando nel parco era a malapena qualcosa per divertirsi, ma loro ci tenevano: e Ceramica, in tutta evidenza, non era più giovanissimo e non si capiva se avrebbe davvero potuto essere utile. Alla fine, decisero di lasciarlo provare, certo più per evitare di continuare a essere subissati dalle sue richieste che per altro, e Ceramica riuscì a entrare in gioco. Giocava molto bene, e per i successivi due anni restò una presenza fissa nella squadra dei giovanotti, finché qualche vecchio spettatore non riconobbe in lui Giovanni Lodetti, un ex-calciatore di prima grandezza nella massima serie e anche della Nazionale. Aveva smesso di giocare da anni, ma la voglia di tirare i proverbiali calci al pallone gli era rimasta.

Ecco, ci è quasi impossibile parlare di Alessandro senza che quell'episodio ci venga in mente. Alessandro ha scoperto *Rudi Mathematici* abbastanza di recente, e per qualche misteriosa ragione lo ha trovato abbastanza interessante da iniziare a giocarci e a spedirci le sue soluzioni, anche di problemi vecchi di decenni che per decenni sono rimasti insoluti. Fin dalle prime mail ci è stato chiaro che, per quanto riguarda la matematica, lui giocava in un campionato diverso dal nostro. Forse nello stesso campionato in cui ormai giocano alcuni dei nostri lettori[3], ma non nel campetto di periferia in cui noi redattori siamo soliti tirare calci. Non riusciamo a non pensare che, al pari della nostalgia del pallone che aveva Lodetti, Alessandro abbia ancora una grande nostalgia dei problemi matematici. Mail dopo mail, abbiamo scoperto che abitava nei pressi di Ginevra, e gli abbiamo raccontato che una visita al CERN era stata a lungo presa in considerazione come corollario delle periodiche riunioni in Svizzera del Comitato di Redazione di RM, ma l'ipotesi finiva sempre con l'essere scartata per ragioni organizzative e di distanza[4].

[3] Siamo orgogliosamente fieri del fatto che la consapevolezza matematica media dei lettori di questo nostro giornaletto sia strettamente maggiore di quella che hanno coloro che lo scrivono. Sospettiamo, anche se non ne siamo sicurissimi, di essere l'unica rivista dotata di questa lusinghiera caratteristica.

[4] Se anche a voi il retropensiero «*Siamo a Zurigo, facciamo un salto a Ginevra*» suonasse ragionevole, suggeriamo un breve esercizio con un atlante o con GoogleMaps. Basta tracciare tre segmenti rettilinei che uniscono Torino, Zurigo e Ginevra per veder comparire sulla mappa – non senza un briciolo di stupore – un triangolo quasi perfettamente rettangolo, con l'angolo retto posizionato su Ginevra. I due cateti quotano all'incirca uno 173, l'altro 224 km; l'ipotenusa si snoda tra Zurigo e Torino, lungo la rotta rettilinea di km 263. In buona sintesi, per dei torinesi, trovare saggio "fare un salto a Ginevra" quando ci si trova a Zurigo è come pensare che per percorrere il cateto corto di un triangolo rettangolo la soluzione migliore sia quella di passare dall'ipotenusa e poi piegare lungo tutto il cateto maggiore. A conferma della nostra lungimiranza geometrica, è esattamente quello che abbiamo fatto noi per raggiungere il CERN, sia all'andata che al ritorno.

E così è finita che Alessandro, alzando un virtuale sopracciglio, ci ha ribadito che visitare il CERN non richiede altro che la già citata prenotazione, e che se era quella a spaventarci ci avrebbe pensato lui. È per questo che stamattina, appena scesi dal treno, abbiamo a malapena fatto in tempo a vederci, conoscerci e stringerci le mani, prima di saltare al volo sul tram che da Cornavin era diretto a Meyrin. E a proposito di corsa, è davvero tempo di riprenderla; Giovanna è già tornata al lavoro, il pomeriggio è cominciato, e noi abbiamo ancora mezzo CERN da visitare.

8 *Il Globo della Scienza e dell'Innovazione*

Ma come ci riusciranno, in pratica? Con lunghe sessioni di riunioni con molti esperti, da quelli di fisica nucleare ai professionisti della comunicazione, e magari perfino qualche enigmista come consulente? O si affidano al colpo di genio (non devono essere infrequenti, da queste parti) di qualche oscuro topo di laboratorio? Lanciano un concorso a premi, coinvolgono la popolazione tutta? Ce lo siamo chiesti spesso, senza riuscire mai a capirlo, e per una volta che eravamo nel posto giusto, ci siamo scordati di chiederlo. Così la domanda resta viva e irrisolta: come diavolo fanno, quelli del CERN, a trovare sempre nomi bellissimi per i loro esperimenti? Adesso, per esempio, stiamo camminando veloci all'aperto, e l'enorme e magica cupola lignea del *Globe* ci saluta restando un po' sulla destra, mentre noi a passo svelto siamo diretti nell'edificio che ospita la sala controllo di ATLAS (***A*** *Toroidal* ***LHC*** *Apparatu****S***); come diavolo sono riusciti a trovare un riassunto linguistico così efficace? Quasi per gioco avevamo scoperto da soli che i quasi-acronimi dei nomi degli esperimenti[5] del CERN cercano di rispettare ben tre diverse esigenze: 1) rivelare la natura tecnica dell'esperimento; 2) riassumerla in un nome familiare, facilmente pronunciabile e a ancor più facile da ricordare; e infine 3) fare in modo che il nome prescelto richiami un personaggio mitico o letterario che possa, in qualche modo, essere attinente all'esperimento stesso. Naturalmente, la cosa più divertente è cercare di indovinare in quale maniera il punto numero tre possa essere soddisfatto, perché è qualcosa con intenti solo evocativi, e quindi ragionevolmente opinabili. Prendendo proprio ATLAS come esempio, il punto 1) è soddisfatto dalla definizione "un apparato toroidale del LHC"; il punto 2) dall'estrazione (un po' forzata) dell'acronimo ATLAS, che è facilissimo da pronunciare e assai usato nei romanzi di fantascienza, e che soprattutto spiana la strada al punto 3) che unisce tutto, perché *Atlas* è il nome del povero titano Atlante costretto da Zeus a portare sulle spalle tutto il peso della volta celeste. C'è qualcos'altro? Oh, basta cercarlo, o magari lasciarlo inventare al resto del mondo. Atlante, il titano, è simbolo di forza, di sostegno, di grandezza; ATLAS, l'esperimento, è caratterizzato dalla grandezza, dalle dimensioni, e dalla forza dei 14 TeV che il suo mentore LHC riesce a sprigionare, e che ATLAS deve intercettare e vagliare, evento per evento. Ma noi, ingenui come al solito, ricordavamo le mappe schematiche degli acceleratori del CERN, orientate come sempre con il nord in alto, dove gran parte dello schema sono occupate dai 27 chilometri del toro del LHC, con ATLAS, ridotto a misero quadratino pur essendo forse la macchina più grande e complicata mai costruita, posizionato all'estremo sud dell'anello. Ecco perché, pensavamo: LHC è la volta celeste, e ATLAS, al pari del povero Atlante, è costretto a tenerla sulle spalle.

[5] Soprattutto gli esperimenti, ma talvolta anche i grandi impianti stessi. Questi ultimi, però, sono spesso travolti dalla loro fisicità e polivalenza, pregi che fanno sembrare quasi limitante l'associarli a un solo scopo esplorativo. Forse per questo, di solito, per molti di essi la sigla basta e avanza, come per il Sincrociclotrone (SC), per il LEP (*Large Electron-Positron Collider*), e naturalmente per il grandioso LHC (*Large Hadron Collider*), e molti altri.

Gripped by the intensity of original thought – Markus Schmid plays Paul Dirac, the spiritual father of antimatter.

Delphi revealed: at the play's end, the backdrop parts to show the experiment in the world's largest electron–positron collider.

9 *DELPHI in scena (cento metri sottoterra)*

Sbagliavamo? Forse, ma non conta. I nomi ben riusciti aprono sempre le porte a fantasie, a ricordi mitologici e letterari, cose che ai fisici e agli ingegneri piacciono molto, anche se tutti sono convinti del contrario. Pensate a DELPHI (***DE**tector with **L**epton, **P**hoton and **H**adron **I**dentification*), di cui Marco ci narrava che al CERN avevano addirittura messo in scena una pièce teatrale per celebrarlo: Delfi è la sede del maggior oracolo dell'antica Grecia, quello dove vaticinava la Pizia. A un oracolo si chiedono divinazioni, identificazioni, informazioni: e cos'altro faceva DELPHI, se non chiedere vaticini ai resti delle collisioni generate dal LEP?

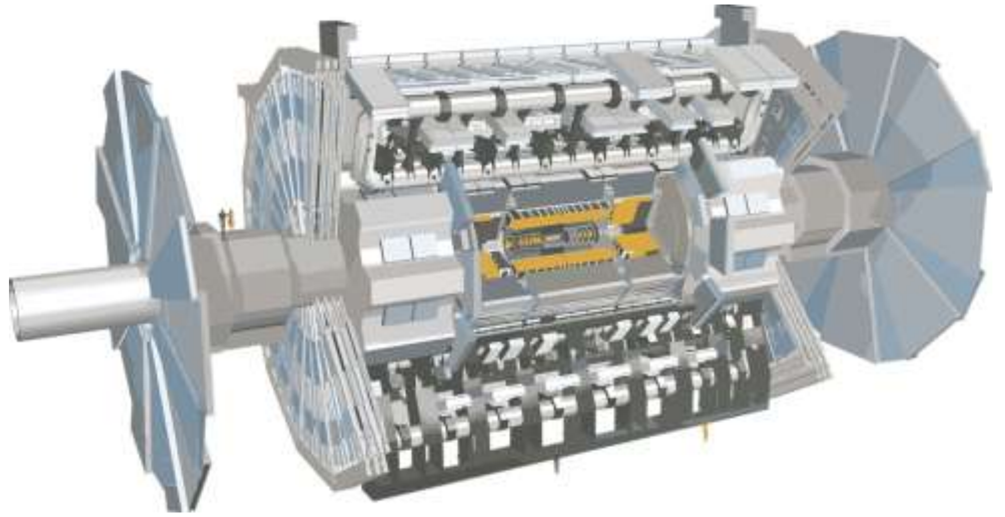
E poi tutto lo stuolo di nomi femminili: ISOLDE (***IS**otope **S**eparator **O**n-**L**ine **DE**vice*), che altri non è che l'Isotta amata da Tristano, non è forse il nome migliore per una macchina che separa gli isotopi? Di sicuro Isotta voleva accanto a sé soltanto il Tristano originale, e rifuggiva da altri, per quanto potessero somigliargli. ALICE (***A** **L**arge **I**on **C**ollider **E**xperiment*) non ha forse palesi legami con l'Alice di Lewis Carroll, che bevendo da una fiaschetta si ritrova a viaggiare in un microscopico mondo governato da regole diverse da quelle che ci sono familiari? Per non parlare di Minerva, la dea della conoscenza, che non solo entra in gioco di persona con ATHENA (***A**pparatus for the production and study of **A**n**T**i**H**ydrog**EN** **A**toms*), ma per sicurezza si porta dietro anche l'Egida, il suo invincibile scudo pietrificante, sotto la forma greca di AEGIS (***A**ntimatter **E**xperiment: **G**ravity, **I**nterferometry, **S**pectroscopy*), per dominare con la sua sapienza non solo il nostro mondo, ma anche quello dell'antimateria[6].

Funziona, no? E inventare ragioni fittizie è anche divertente, quanto leggere un libro giallo. C'è persino spazio per un po' di tensione finale, quando scopriamo il circolo vizioso logico del maestoso progetto (100 chilometri, 100TeV) che *attualmente* viene chiamato FCC (***F**uture **C**ircular **C**ollider*), ma che se entrerà in funzione dovrà per forza cambiare la sua prima parola *Future*, per evitare un paradosso temporale (o quantomeno semantico). Ma tutti questi restano solo pensieri oziosi, e adesso non c'è davvero tempo per l'ozio: l'edificio in cui stiamo per entrare ospita il più grande detective del mondo.

ATLAS non lo si può vedere tutto intero, e forse per questo nell'atrio della sala di controllo troviamo solo indizi della sua grandezza. Vediamo modellini fatti con le costruzioni dei bambini, ma estremamente chiari, e in grado di mostrare bene le dimensioni relative. Anche se "dimensioni" (con al seguito l'aggettivo "enormi") è la parola che viene più facilmente in mente quando si tenta di descriverlo, resta parola poverissima, se si pensa ai virtuosismi di razionalità che sono stati necessari per produrlo. Racchiude in un toro cilindrico sei diversi strumenti di misurazione, architettati in modo da non interferire uno con l'altro. Può sembrare semplice, vero? Se si volesse suddividere un mucchio di sassi in sei gruppi dimensionali, basterebbe farli passare attraverso una griglia a maglie molto larghe, che intercetterà solo le pietre più grandi; e poi ripassare i residui attraverso una griglia a maglie più piccole, e poi di nuovo attraverso un'altra a maglie ancora più strette, e così via. Ma le particelle elementari sono molto diverse dai sassi, dove contano solo le

[6] Lasciamo al lettore la gioia di trovare (o inventare) evocazioni per ELENA (***E**xtra **L**ow **EN**ergy **A**ntiproton ring*), TOTEM (***TOT**al **E**lastic and diffractive cross section **M**easurement*), SHIP (***S**earch for **HI**dden **P**articles*) e qualche altra decina di nomi, perché sennò non la finiamo più e questo articolo è già troppo lungo.

dimensioni. Hanno massa, carica, spin, cento altre peculiarità e una strepitosa voglia di interagire fra loro. Provate anche solo a immaginare quali siano le variabili di cui occorra tener conto; anche solo in via teorica, anche per solo un paio di caratteristiche che si volessero misurare, e rabbrividite.



10 *ATLAS – Trovare in rete bellissime foto di ATLAS è facile, ma quasi tutte hanno il difetto di mostrare solo il maestoso "Inner Detector" che, per quanto grande, non rende bene l'idea delle dimensioni totali. In questo disegno si vede come il rilevatore interno (la parte in arancione) sia in realtà solo una piccola parte di ATLAS, anche grazie ai disegni delle due coppie di umani messi come riferimento (cercateli, ci sono).*

Sempre nell'atrio, due grandi contatori sono pronti a ticchettare. Il primo mostra il numero di eventi rilevati dalla messa in funzione del LHC, e segna un numero dell'ordine delle migliaia di miliardi. Il secondo registra il numero di bosoni di Higgs intercettati, che non va troppo oltre la decina di milioni. È qui che la particella più sfuggente si è rivelata per la prima volta, nel 2012; qui e nel rilevatore all'altro capo del grande anello di 27 chilometri, il CMS (***C**ompact **M**uon **S**olenoid*).

Chissà com'era questo luogo, in quel fatidico giorno. Però la centrale di controllo è assai affascinante anche oggi, che è un giorno del tutto ordinario. Ordinario, ma pur sempre fantascientifico: una mezza dozzina di persone siedono ai loro tavoli che è comunque difficile chiamare scrivanie, non fosse altro perché ognuno ospita quattro o cinque grandi schermi di computer pieni di grafici e tabelle colorate, e tutti raccontano qualcosa a chi li sa leggere. Ordinario, ma pur sempre un giorno in cui il LHC è in funzione, centro metri più in basso: e quando è in funzione è luogo inviolabile, sigillato. Nessuno può assistere dalle tribune al toroidale Gran Premio di Formula Uno degli adroni; nella galleria si può accedere solo durante i periodi di ferma. Oggi, le particelle caratterizzate dall'interazione nucleare forte corrono, oggi i contatori misurano, oggi ATLAS è al lavoro; e noi ci accontenteremo di salire al piano superiore, indossare gli occhialini 3D e gustarci la sua storia in un filmato.

Poi, di nuovo all'aperto, di nuovo nei giardini arredati con pezzi di acceleratori, con involucri di bobine grandi quanto un passabile monolocale, e con giusto un pizzico di malinconia. Lo Science Gateway aprirà solo domani, il pomeriggio è inoltrato, e ci aspettano tre ore di treno. Insomma, è già quasi ora di prepararsi al ritorno, togliersi cordino e badge dal collo (saranno gelosamente conservati), salutare Marco e tornare a lasciarsi guidare da Alessandro verso la fermata del tram. Tutto il programma è stato svolto, la visita su cui avevamo molte aspettative le ha soddisfatte tutte, anzi di più, e quindi siamo pronti al rituale dei saluti e delle promesse di rincontrarci, prima o poi, qui o in qualche altra parte del mondo. Solo che Marco non sembra essere d'accordo.

11 *Il magico Science Gateway*

Ha preso una direzione chiara e decisa, ma non sembra quella della fermata del tram. Col passo svelto di chi teme d'essere in ritardo, e forse armeggiando col telefono, ci conduce di fronte a una grande porta a vetri, che solo dopo qualche minuto riconosciamo essere l'ingresso dello Science Gateway. La porta è chiusa, l'atrio è deserto: si intravede in fondo lo shop con i gadget (è pieno di fantastici elmetti da cantiere!) e i primi strumenti storici messi in mostra nell'ingresso: certo, SG non è solo un museo, ma è *anche* un museo. Ma perché ci ha portato di fronte a questa crudele porta chiusa? È stato colto da un soprassalto di sadismo, vuole farci intravedere cosa ci siamo persi, con la nostra disgraziata scelta di venire qui di lunedì?

Non facciamo in tempo a chiederglielo direttamente, perché all'interno, da qualche misterioso passaggio, è sbucato fuori un signore che adesso armeggia con un mazzo di chiavi e schiude la crudele porta. Marco ci esorta a entrare, e noi lo facciamo, destreggiandoci con le due emozioni contrapposte della sorpresa e dell'imbarazzo. La sorpresa non ha bisogno di spiegazioni, l'imbarazzo è evidentemente scatenato dal fatto che il signore che ci ha aperto la porta e che ora sta parlando in francese con Marco è stato, con tutta evidenza, distolto dai suoi compiti istituzionali (o, peggio, dalle sue sacrosante ore di riposo) solo per colpa nostra. Non sappiamo se sia un custode, un tecnico di laboratorio, magari una guardia giurata in borghese; l'unica cosa che capiamo è che lui e Marco ci guidano ben diretti da qualche parte, forse perché il tempo è poco, forse perché è una scorciatoia verso l'uscita, e Marco ha voluto regalarci la sensazione di poter dire di aver calpestato anche il pavimento dello Science Gateway, anche se mentre lo attraversavamo lo Science Gateway e tutte le sue meraviglie dormivano, in attesa dei visitatori che sarebbero arrivati all'indomani.

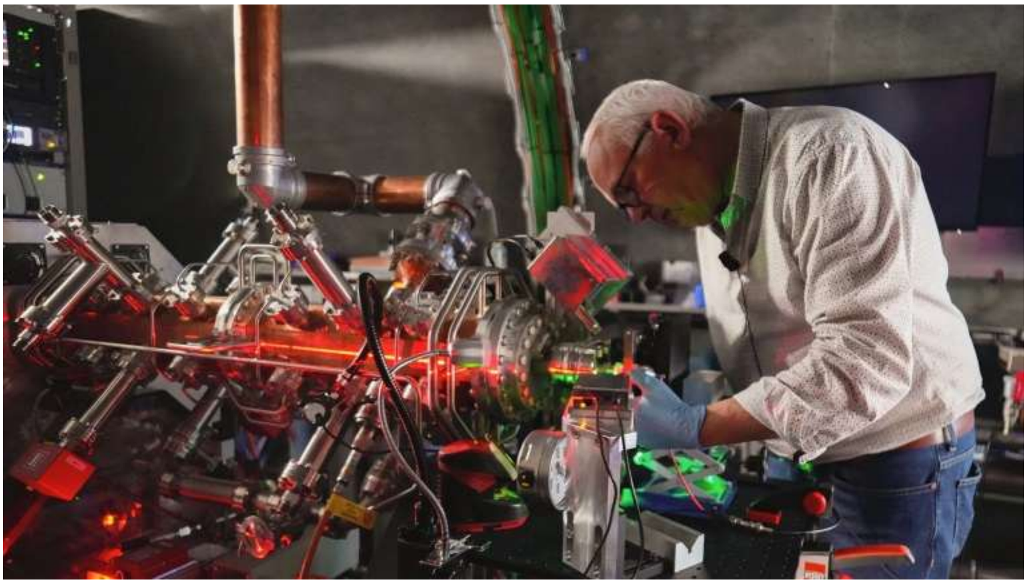
12 *Science Gateway, oltre la porta chiusa.*

Seguiamo le nostre guide che continuano a parlare la lingua di Robespierre, senza capire niente. Oddio, probabilmente Rudy capisce qualcosa, e certo Alessandro ha già capito – o già sa – dove stiamo andando a parare, ma il resto di noi si gode la veloce camminata cercando di interpretare quel che lo Science Gateway, anche da fermo, riesce a mostrare. Adesso, per esempio, stiamo passando dentro a uno dei due grandi cilindri, e dal soffitto pendono grandi sculture che certo avranno un chiaro significato scientifico. Tutto il corridoio è pieno di teche, giochi per ragazzi, e mille altre cose misteriose: c'è perfino una specie di grande macchina che si aspetta che due visitatori si lancino uno contro l'altro, in modo che essa possa misurare l'energia della collisione. In MeV, naturalmente.

Ma poi abbandoniamo il percorso principale, finiamo in una stanza semibuia, dopo aver attraversato una specie di anticamera parimenti in penombra. Al centro della stanza poco illuminata, un grande tavolo sostiene la macchina futuristica per eccellenza; l'avesse vista George Lucas, come minimo avrebbe fatto cambiare il design degli incrociatori imperiali di *Star Wars*, se non quello dell'intera Morte Nera. Un cilindro arancione, quasi rosso, da cui emergono come capelli spettinati altri cilindri, e da questi altri ancora; e cavi, fili, tubi che solo a un occhio distratto possono sembrare disordinati. Tutt'altro: quella macchina è evidentemente magica, e la sua magia scaturisce tutta dalla sua geometria caratterizzata da precisione ultramillimetrica.

Il signore che ci ha aperto la porta deve davvero essere un tecnico di laboratorio, perché adesso entra nella zona dei controlli, batte sulla tastiera del pc, mentre noi restiamo diligentemente a un passo di distanza, di fronte a quell'oggetto misterioso. La conferma che si tratti di qualcosa che ha a che vedere con cavalieri Jedi e perfidi Sith ce l'abbiamo quando, dopo averla accesa, un fascio di ioni che escono dal corpo della macchina si rendono visibili, e colorati di blu, all'interno di un lungo tubo di vetro. È, in tutta evidenza, una spada laser, pensano i più sciocchi di noi.

Il tecnico spiega e racconta, parla di ioni e di gas nobili, agita e cambia i tubi trasparenti e il raggio colorato all'interno cambia colore, cambia spessore, perfino forma e curvatura. Il vostro povero cronista è distante, ha l'udito debole, è meno familiare all'inglese parlato di quanto gli piaccia ammettere, e così perde molte parole, molti concetti spiegati e raccontati. Intuisce che la macchina è in grado di riconoscere gli elementi che compongono un oggetto, un po' come fosse un analizzatore multicanale, e infatti Francesca sorride quando il signore che parla francese le conferma che l'anello che gli ha lasciato esaminare è davvero d'oro. Ogni raggio che esce luminoso dalla macchina conferma qualcosa, può essere usato per fare qualcos'altro, e soprattutto la macchina è poliedrica, può servire a molti scopi, proprio come un coltellino svizzero. Del resto, è proprio in Svizzera che siamo: divertente, vero? Divertente, sì; ma il vostro povero cronista duro d'orecchi si ripromette di capire tutto un po' meglio, non appena gli sarà possibile fare qualche ricerca in rete.



13 *L'incredibile RFQ (Radio Frequency Quadrupole) di ELISA e il suo creatore, Serge Mathot.*

E quella ricerca ci farà cambiare di nuovo prospettiva, rivelandoci ancora una volta diverse sorprese, e confermandoci la nostra pochezza di giudizio.

Quello che qui a Meyrin ancora non avevamo capito è che quel fantascientifico strumento che abbiamo visto all'opera non è una spada laser di *Star Wars*, ma una bacchetta magica che susciterebbe l'invidia di *Harry Potter*. Non ci è voluto molto a trovare in rete un documento[7] che suggeriamo caldamente di andare subito a consultare, senza lasciarsi

[7]"*The RFQ'S Serge Mathot*", che si trova più facilmente scrivendo il titolo del documento nella barra di ricerca che digitando per esteso il link corrispondente, che comunque riportiamo di seguito per intero: https://indico.cern.ch/event/958382/contributions/4039619/attachments/2168370/3660261/RFQs-CAS%20MME-Jan2020_01.pdf – O, se foste pigri e voleste un articolo più breve e meno tecnico che parla esattamente dell'acceleratore che abbiamo avuto l'onore di vedere, correte a cercare "*ELISA: a compact linear accelerator for societal applications*" (https://cds.cern.ch/record/2939282/files/document.pdf).

troppo spaventare da grafici e formule. Quel che abbiamo fatto è stato condividere la stanza con ELISA (***E**xperimental **LI**nac for **S**urface **A**nalysis)*, che è animata da un RFQ (***R**adio **F**requency **Q**uadrupole*), e che è capace di magie.

Siamo stati, entrando in quella stanza, nell'unico posto al mondo in cui è possibile osservare con i propri occhi un fascio di particelle accelerate. Abbiamo potuto vedere il cambio di forma del fascio nel picco di Bragg, che è l'effetto sul quale si basa l'adroterapia, la cura medica che più di tutte è efficace contro alcuni tumori rari[8]. Abbiamo visto all'opera la tecnica PIXE (***P**roton **I**nduced **X**-rays **E**mission*) che riesce ad analizzare componenti di materia usandone un picogrammo, e così consentire di capire anche l'autenticità e l'origine di reperti storici.

Ma, più ancora, gli RFQ sono strumenti davvero prossimi alla magia; sono acceleratori lineari del tutto sicuri, lunghi poco più di un metro, con decine di possibili applicazioni diverse. Sono frutto di un lavoro di una precisione che è difficile da descrivere, ed è quasi ironico che servano anche ad analizzare l'autenticità delle opere d'arte, perché, almeno secondo il nostro metro di valutazione, sono *davvero* delle opere d'arte essi stessi. Che cos'è che caratterizza l'arte, in fondo? È l'abilità tecnica che riesce a riprodurre la realtà, è la capacità di guardare il mondo da un punto di vista originale e diverso, è la cura maniacale verso i dettagli significativi, è saper rivelare significati profondi nelle cose che tutti vedono ma non colgono, è togliere il velo da quegli occhi che non sanno intuire, senza di essa, la bellezza. Non c'è nessuna di queste definizioni che manchi nell'ideazione e costruzione di un oggetto come un RFQ, e quindi è del tutto indubbio che il suo creatore sia un artista. Certo, sarà pure uno straordinario fisico sperimentale, ma è anche, e forse soprattutto, un artista.

E solo dopo, ormai a casa, davanti allo schermo che ci faceva leggere quei documenti corredati da una vasta documentazione fotografica, ci siamo resi conto che quell'artista lo conoscevamo. Non era un custode, non una guardia giurata, e nemmeno un tecnico di laboratorio, quel signore che parlava in francese con Marco e in inglese (ma a volume troppo basso, per certe orecchie!) con noi. Era proprio il papà, il creatore del RFQ, Serge Mathot. Colui che aveva immaginato nella testa la spada laser dei Jedi e la bacchetta magica di Harry Potter, e aveva cominciato a costruirla con le sue mani. Anche lui, come Giovanna, incapace di vantarsi; anche lui, come tutti qua dentro, con quell'aria da gente normale, serena, che non siamo ancora riusciti a identificare. Forse aveva ragione Francesca, che quando abbiamo capito che il nostro anfitrione nella stanza di ELISA non era un semplice tecnico di laboratorio, ha commentato: «*Tanto sarebbe stato lo stesso… qua dentro saranno tutti dei geni*».

Ma poi no, lo sappiamo che non è così. Lo sappiamo che noi eravamo come bimbetti alla loro prima visita al luna-park, ma sappiamo anche che perfino i luna-park veri richiedono fatica, sudore, arrabbiature, problemi, fastidi. Sarà così anche al CERN, ogni tanto; saremo ingenui, ma anche vecchi abbastanza da sapere come va il mondo. Possiamo solo provare a immaginare – e senza la minima speranza di riuscirci – cosa deve voler dire mandare avanti un'organizzazione del genere, giustificarne gli investimenti, formare nuove generazioni di ricercatori, tenere in ordine un bilancio così complicato e renderne conto ai governi di così tante nazioni. Noi abbiamo fatto un giro sulla giostra, ma dev'essere davvero complicato far funzionare a dovere una giostra così grandiosa e importante.

Così, già sul tram che ci riportava a Cornavin, mentre guardavamo il pomeriggio ginevrino che si mutava in sera fuori dal finestrino; e poi anche dopo, sul binario dove Alessandro ci aveva accompagnato di nuovo, per darci il suo augurio di buon viaggio proprio dove ci aveva dato quello di benvenuto neanche otto ore prima, già rimuginavamo su quel che stavamo riportando a casa. Una giornata magnifica, anche se con il cielo coperto; un cartellino e un cordino con su scritto CERN, che finirà nella scatola dei ricordi; la soddisfazione di aver

[8] In estrema e molto grossolana sintesi: il problema principale della radioterapia ordinaria è che, per raggiungere ed eliminare le cellule tumorali, il fascio di particelle radioattive deve attraversare anche tessuti sani, con il rischio di danneggiarli. Sfruttando l'effetto del picco di Bragg si può invece far in modo che le particelle diventino attive solo in un punto ben focalizzato dei tessuti, senza danneggiare quelli intorno.

realizzato una visita che cullavamo nella testa da quando eravamo ragazzi, anche se ormai ragazzi non lo siamo proprio più. Allo stesso tempo, ci rendiamo conto che il nostro giudizio non vale: anche se lontanissimi da ogni attività di ricerca, anche se incapaci di immaginarci in un ruolo qualunque che giustificasse la nostra presenza professionale dentro quella cittadella, siamo comunque tifosi della scienza, della corsa alla conoscenza, della curiosità sull'universo e le sue regole.

E quando ci accorgiamo che questo non è altro che il *mission statement* del CERN, forse capiamo un po' meglio cosa potrebbe essere quella strana atmosfera, la ragione di quelle strane espressioni che leggevamo su tutti i volti, quel nonsoché che abbiamo cercato di individuare per tutta la giornata. In fondo, se per magia (per una magia davvero grande) gli esseri umani riuscissero a risolvere tutti i loro problemi: guerre, ambiente, crisi economiche, malattie, tutto; un po' come se diventasse realtà il mondo cantato da John Lennon in *Imagine*, cosa resterebbe da fare, se non cercare di capire? Giustificare la ricerca di base è sempre drammatico, perché non è possibile quadrarla con una partita doppia, con un bilancio costi-benefici, perché la ricerca di base cerca tutto senza avere la certezza di trovare niente; ma non c'è ricerca mirata, soluzione trovata, beneficio applicato, vita cambiata che sia possibile, senza di essa. Ma è difficile spiegarlo, e ancora più difficile capirlo: a meno che non ci sia la certezza – o potrebbe bastare persino la convinzione, quasi solo l'illusione – che capire come tutto sia fatto è importante. Anzi, cruciale.

Forse è per questo che lo sguardo della gente del CERN è diverso, particolare, curiosamente modesto e comunque perennemente vigile e attento. Chissà, forse hanno tutti questa consapevolezza di star facendo qualcosa di essenziale, di star portando avanti, tutti, qualcosa che dà significato a tutto il resto.

O magari, invece è solo che sono contenti di fare quello che stanno facendo.

In entrambi i casi, deve essere una sensazione davvero invidiabile.

2. Problemi

No, non sono tre problemi: l'ultimo è una richiesta, se qualcuno se la sente: come detto, ci serve per un'altra cosa; il penultimo (aka il secondo) è un bel problema, ma la domanda è poco interessante; il primo, poi, ha un'ambientazione fetente. E li ho scritti in quest'ordine (non questo, l'altro... Oh, insomma, ci siamo capiti).

2.1 Cosa c'entrano i nani?

Non abbiamo una profonda cultura nel campo della *high fantasy* (per intenderci: J.R.R. Tolkien e compagnia cantante: su Terry Pratchett, in compenso, la *Heritage Foundation* ce spiccia casa), ma ci pare assodata una cosa: i nani sono, in questo ambito, creature piuttosto irascibili. Il fatto che si sottopongano a prove del tipo che vedremo senza passare ad una veloce soluzione contemplante un'ascia destramente manovrata in prossimità di punti vitali ci fa dubitare della scelta dei personaggi, e l'unico motivo per cui potremmo prendere in considerazione l'ipotesi è che in tutta la trilogia tolkieniana non ci risulta un solo momento nel quale un nano faccia un bagno (neanche gli altri personaggi, però, a ben pensarci... possiamo dire che la faccenda "puzza", per qualsiasi significato del termine?).

Comunque, abbiamo *N Persone a Massa Fortemente Variabile* del peso[9], rispettivamente, di 1, 2, ..., *N* chilogrammi sulla riva di un fiume decisamente impetuoso (diciamo che sono sulla destra orografica, per uniformare la notazione) e una barca in grado di trasportare al più *N* chilogrammi per volta[10]; ognuna delle PaMFV (Persone a Massa... eccetera) è un provetto rematore (e anche qui, parlando di nani, abbiamo dei dubbi, ma *transeat*, come direbbe Doc) in grado di traversare il fiume sulla barca, ma come dicevamo il fiume è agitato, tant'è che ogni PaMFV ha la capacità di traversare come rematore il fiume solo *due* volte: in compenso, nutrendo un'infinita fiducia nelle capacità marinare dei suoi colleghi, può fare avanti e indietro come passeggero quante volte vi pare.

Lo Scopo Ultimo (sempre maiuscolo, in questi romanzi) prevede di traversare tutti, e sappiamo che ce la faranno, visto che il romanzo deve andare avanti ancora per qualche centinaio di pagine; la domanda che ci poniamo, in quanto estensori del romanzo, è: quanti sono i PaMFV? O, detta meglio, per quali valori di *N* riusciamo a portare i Nostri Eroi sull'altra riva, continuare l'Epico Ciclo, sconfiggere l'Oscuro Signore[11] e garantire una Festa Finale di inusitate proporzioni, nella quale tutti ingrasseranno sino a rendere impossibile una Seconda Gloriosa Impresa, a meno di cambiare barca?

2.2 Ma chissenefrega degli angoli?

Adesso spieghiamo, tranquilli.

Abbiamo un problema di geometria che ci sembra carino, ma ha un guaio: alla fine, chiede il valore di un angolo. Abitualmente, i problemi astratti di geometria possono essere facilmente adattati alla matematica ricreativa sezionando torte, sventrando giardini o costruendo muri, ma non ci risultano ambientazioni che riescano a trasformare in divertente il misurare un angolo (cacciato in un posto piuttosto balordo, tra l'altro); quindi, se riuscite a trovare un'ambientazione anche solo vagamente reale per quanto segue, ben venga. No, niente disegno. E *sens trigonométrique*, come dicono Oltralpe: nel senso che il senso di lettura dei triangoli è antiorario (così i disegni – vostri – vengono almeno simili).

Nel triangolo ABC, il piede dell'altezza da A è T, e la bisettrice di B interseca AC in D. Se l'angolo BDA vale 45°, trovare il valore dell'angolo DTC.

A noi pare carino, come tutti i problemi che stanno in due righe, anche se non ci viene in mente nessuna ambientazione; ci sembra però immediata la generalizzazione: ... E se BDA

---

[9] Inserire qui le scuse ai fisici pignoli. Ma anche no: l'importante è che sia chiaro.

[10] Vi ricordiamo che gli standard di sicurezza nella Terra di Mezzo hanno dei margini esattamente dello zero per cento (cfr. "Ponte del Balrog").

[11] Il che, come narrano gli aedi, richiede "grandi valori di N".

fosse un generico α (non si vede, ma è un alfa)? Come si comporta BTC al variare di BDA? E che campo di esistenza ha? Insomma, se c'è una soluzione generica, studiate la funzione...

2.3 Una richiesta (in linguaggio formale)

Anche qui, potevamo tirare in ballo il solito giardino con le solite aiuole balorde, ma questa volta ci serve una dimostrazione formale, da integrare in un (futuro) Bungee Jumpers (quindi no, non pubblicheremo in "Soluzioni e Note" la miglior soluzione, ma ne riconosceremo la paternità a "Pagina 46", un giorno...). In "Soluzioni e Note" andranno, eventualmente, le elaborazioni (che ci sembrano possibili e interessanti, ma vedete un po' voi...).

Dimostrate che in un poligono convesso il triangolo inscritto di area massima è uno dei triangoli aventi i vertici su vertici del poligono.

3. Bungee Jumpers

In quanti modi un'affrancatura[12] da *n* euro può essere ottenuta utilizzando solo:

1. Francobolli da 1, 2 e 3 euro?
2. Francobolli da 1, 2 e 5 euro?

In quanti modi è possibile cambiare una banconota da 100 euro in tagli da 1, 2, 5, 10, 20 e 50 euro?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre!

4.1 [041]

4.1.1 Tutti in giardino!

Forse ne abbiamo già parlato: ***Alessandro*** sta rivisitando tutti i numeri di RM dall'inizio, e gioca con i problemi che più lo interessano. E siccome ha mandato un lavoro molto interessante su questo problema, gli passiamo la parola poco sotto il testo del problema, senza indentare per rendere la lettura più scorrevole. Abbiamo tagliato le parti con codice, ma come sempre basta chiedere! Ecco il problema:

> *In giardino abbiamo tre aiuole perfettamente circolari e di raggi rispettivamente 1, 2, 3 metri. Di quanto viene l'aiuoletta al centro?*

Questo problema è assai ricco, nel senso che con la giusta motivazione si può andare avanti a ravanare per giorni. Poi a cose fatte si scopre che esiste una letteratura abbastanza recente, per cui ci si divertiva di più a risolverlo nel 2002. Per esempio, nel programmino per disegnare i cerchi è inserita una formuletta che mette in relazione i loro centri che è stata apparentemente scoperta solo nel 2001[13].

Ma il materiale è parecchio e quindi vado con ordine. […]

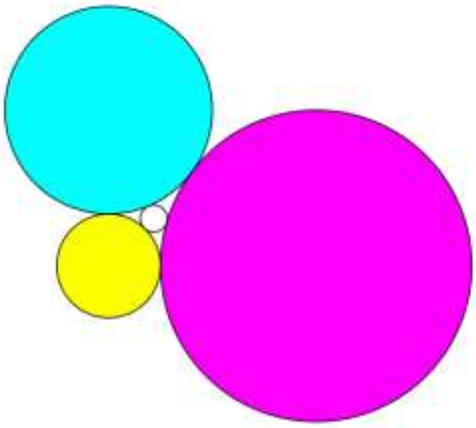
Il problema originale

[12] L'ordine nel quale vengono incollati i francobolli non è significativo.

[13] Bibliografia:

Una prova sostanzialmente simile a questa, ottenuta per quadrature è *A straightforward proof of Descartes's circle theorem*, pubblicata nel 2019.

Il programmino per i disegni utilizza un teorema originariamente presentato nel 2001 in *Beyond the Descartes Circle Theorem*, ma la dimostrazione bisogna trovarla altrove.



La mia soluzione inizia come quella di Cld pubblicata in RM042. Come visto la formula di Erone in questo caso si trasforma in

$$\sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3} = \sqrt{(r_1+r_2+r_4)r_1r_2r_4} + \sqrt{(r_1+r_3+r_4)r_1r_3r_4} + \sqrt{(r_2+r_3+r_4)r_2r_3r_4}$$

e sostituendo i raggi del problema originale si ottiene

$$A = 6 = \sqrt{(3+r_4)\,2r_4} + \sqrt{(4+r_4)\,3r_4} + \sqrt{(5+r_4)\,6r_4} \qquad (2)$$

Il seguito illustra il fatto che non sono pusillanime e nemmeno quadratore, ma neppure un fine osservatore: il valore dell'area uguale a 6 ha cominciato a puzzare sono quando avevo già trovato il risultato.

Si possono fare un paio di osservazioni a proposito della formula (2):

L'unica maniera in cui la somma di tre radicali possa dare come risultato A è che ognuno valga un numero razionale < 1 moltiplcato per A.

Se A è un numero razionale, il radicale può trasformarsi come al punto precedente solo se r_4 è un numero razionale, cioè $r_4 = \frac{p}{q}$.

Tenendo conto di quanto sopra, ognuno dei radicali della (1) può essere riscritto come

$$\sqrt{(m_i+r_4)n_ir_4} = \sqrt{\left(m_i+\frac{p}{q}\right)n_i\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\sqrt{n_i+m_in_i\frac{q}{p}}$$

E un valore ovvio per p, in modo da semplificare numeratore e denominatore, è il massimo comun divisore delle quantità m_in_i. Quindi:

$$p = \mathrm{MCD}(6{,}12{,}30) = 6 \qquad (3)$$

La (2) si trasforma in

$$6 = \frac{6}{q}\left(\sqrt{2+q} + \sqrt{3+2q} + \sqrt{6+5q}\right) \qquad (4)$$

e numericamente i tre radicandi devono essere dei quadrati perfetti e avere come somma q, cioè

$$\begin{cases} q+2 = i^2 \\ 2q+3 = j^2 \\ 5q+6 = k^2 \\ i+j+k = q \end{cases}$$

Provando i valori possibili per i in successione, $i = 3$ e $i = 4$ devono essere scartati ma $i = 5$ risulta in $j = 7$, $k = 11$ e $q = 23$.

Quindi il risultato cercato è $r_4 = \frac{6}{23}$. A questo punto c'è stato il clic sul fatto che si trattava di un banale triangolo rettangolo. Anche se non mi sembra che i calcoli fatti siano più complessi della risoluzione di un sistema di due equazioni di secondo grado non potevo certo fermarmi così.

<u>Formalizzazione</u>

Per ragioni di simmetria r_4 deve dipendere nella stessa maniera dalle variabili r_1, r_2 e r_3, per cui viene naturale adottare una notazione basata sui polinomi simmetrici elementari di tre variabili

$$e_1(r_1,r_2,r_3) = r_1 + r_2 + r_3$$
$$e_2(r_1,r_2,r_3) = r_1r_2 + r_2r_3 + r_2r_3$$
$$e_3(r_1,r_2,r_3) = r_1r_2r_3$$

Su queste basi, ognuno dei radicali della (1) può essere riscritto come

$$\sqrt{(e_1 - r_i + r_4)\frac{e_3}{r_i}r_4} = \sqrt{\left(e_1 - r_i + \frac{p}{q}\right)\frac{e_3}{r_i}\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{e_3}{r_i} + \frac{e_3}{r_i}(e_1 - r_i)\frac{q}{p}}$$

e infine la (1) diventa

$$A = \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\frac{e_3}{r_i} + \frac{e_3}{r_i}(e_1 - r_i)\frac{q}{p}} \tag{5}$$

Magari adesso sembra che io stia complicando inutilmente la notazione, ma ogni cosa ha il suo perché.

Per il momento continuo a imporre che A sia un intero, e così i radicandi. Si deduce facilmente che

Ogni radicando deve essere un quadrato perfetto.

Ognuno dei termini della sommatoria deve essere $< A$.

Almeno un termine della sommatoria deve essere $\geq \frac{A}{3}$.

Posso quindi imporre che q soddisfi contemporaneamente alle due disuguaglianze:

$$\begin{cases} \sqrt{e_1e_3} > \dfrac{p}{q}\sqrt{e_3}\sqrt{\dfrac{1}{r_i} + \dfrac{q}{p}\dfrac{1}{r_i}(e_1 - r_i)} \\[2ex] \sqrt{e_1e_3} \leq \dfrac{3p}{q}\sqrt{e_3}\sqrt{\dfrac{1}{r_i} + \dfrac{q}{p}\dfrac{1}{r_i}(e_1 - r_i)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^2 + q\,p\left(\dfrac{1}{e_1} - \dfrac{1}{r_i}\right) - \dfrac{p^2}{e_1r_i} > 0 \\[2ex] q^2 + 9q\,p\left(\dfrac{1}{e_1} - \dfrac{1}{r_i}\right) - 9\dfrac{p^2}{e_1r_i} \leq 0 \end{cases}$$

e infine

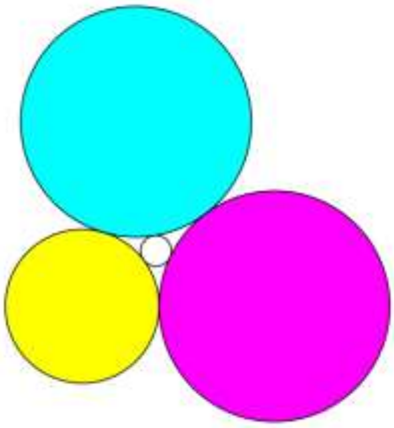
$$\begin{cases} q > \dfrac{p}{r_i} \\[2ex] q \leq \dfrac{3p}{r_i}\dfrac{3(e_1 - r_i) + \sqrt{9e_1^2 - 14e_1r_i + 9r_i^2}}{2e_1} \end{cases} \tag{6}$$

dove la seconda disuguaglianza vale per il termine i per cui è massimo il coefficiente $(e_1 - r_i)$, e quindi $r_i = \min(r_1,r_2,r_3)$.

Facendo i conti col problema originale e la scelta $p = 6$, troviamo che $6 < q < 46$, da cui $\sqrt{8} < 3 \leq i \leq 6 < \sqrt{48}$, che lascia solo quattro tentativi per trovare la soluzione.

<u>Verifica</u>

In giardino abbiamo tre aiuole perfettamente circolari e di raggi rispettivamente 2, 2, 3 metri. Di quanto viene l'aiuoletta al centro?



Per verificare quanto trovato finora proviamo con un altro triangolo con lati interi. Le equazioni (2),(3) e(4) diventano

$$A = 12 = \sqrt{(5+r_4)\,6r_4} + \sqrt{(5+r_4)\,6r_4} + \sqrt{(6+r_4)\,9r_4}$$
$$= \frac{p}{q}\left(\sqrt{6+30\frac{q}{p}} + \sqrt{6+30\frac{q}{p}} + \sqrt{9+54\frac{q}{p}}\right)$$
$$p = \mathrm{MCD}(30{,}30{,}54) = 6$$
$$12 = \frac{6}{q}\left(\sqrt{6+5q} + \sqrt{6+5q} + \sqrt{9+9q}\right)$$

da cui si può scrivere il sistema

$$\begin{cases} 5q+6 = i^2 \\ 9q+9 = j^2 \\ 2i+j = 2q \end{cases}$$

con i seguenti vincoli su q e i:

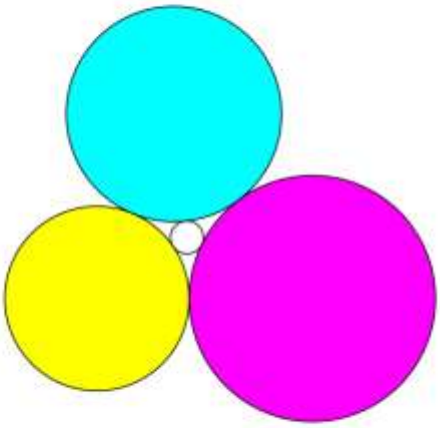
$$\begin{cases} 3 < q < 21 \\ \sqrt{21} < 5 \le i \le 10 < \sqrt{111} \end{cases}$$

Provando i valori possibili per i si trova una soluzione per $i = 9$, $j = 12$ e $q = 15$. Il risultato cercato è $r_4 = \frac{2}{5}$.

L'aver scelto un valore troppo alto per p è risultato ininfluente, visto che comunque il valore risultante di q risulta moltiplicato per lo stesso fattore.

<u>Difficoltà 3 pipe e ½</u>

In giardino abbiamo tre aiuole perfettamente circolari e di raggi rispettivamente 6, 7, 8 metri. Di quanto viene l'aiuoletta al centro?



Questa variante introduce una complicazione: cosa succede quando p è troppo piccolo? Ormai il procedimento da seguire è chiaro:

$$A = 84 = \sqrt{(13 + r_4)\,42r_4} + \sqrt{(14 + r_4)\,48r_4} + \sqrt{(15 + r_4)\,56r_4}$$

$$= \frac{p}{q}\left(\sqrt{42 + 546\frac{q}{p}} + \sqrt{48 + 672\frac{q}{p}} + \sqrt{56 + 840\frac{q}{p}}\right)$$

$$p = \mathrm{MCD}(546{,}672{,}840) = 42$$

$$84 = \frac{42}{q}\left(\sqrt{42 + 13q} + \sqrt{48 + 16q} + \sqrt{56 + 20q}\right)$$

Il sistema risultante diventa

$$\begin{cases} 13q + 42 = i^2 \\ 16(q + 3) = j^2 \\ 4(5q + 14) = k^2 \\ 2(i + j + k) = q \end{cases}$$

ed i vincoli su q e i:

$$\begin{cases} 7 < q < 47 \\ \sqrt{133} < 12 \le i \le 25 < \sqrt{653} \end{cases}$$

Ma iterando su i non si trova nessuna soluzione!

<u>Cosa ho sbagliato?</u>

La scelta di $p = \mathrm{MCD}(m_i n_i)$ ha funzionato nei casi più semplici ma non ha retto alla distanza. In realtà sarebbe stato più saggio definire $p = k^2 \cdot \mathrm{MCD}(m_i n_i)$, con k da determinarsi. Proviamo cosa succede con $k = 2$:

$$p = 4\,\mathrm{MCD}(546{,}672{,}840) = 168$$

$$84 = \frac{168}{q}\left(\sqrt{4 \cdot 42 + 13q} + \sqrt{4 \cdot 48 + 16q} + \sqrt{4 \cdot 56 + 20q}\right)$$

$$\begin{cases} 13q + 4 \cdot 42 = i^2 \\ 16(q + 4 \cdot 3) = j^2 \\ 4(5q + 4 \cdot 14) = k^2 \\ i + j + k = q \end{cases}$$

con i vincoli:

$$\begin{cases} 28 < q < 190 \\ \sqrt{532} < 23 \le i \le 51 < \sqrt{2638} \end{cases}$$

e iterando si trova la soluzione $i = 47$, $j = 52$, $k = 58$, $r_4 = \frac{168}{157}$. Ciononostante, aumentando p aumenta di altrettanto q, così come il range di iterazione.

<u>Divagazioni dimensionali</u>

Bisognerebbe trovare un'alternativa al MCD. Un'altra strada, ritornando all'equazione (5), è di osservare quel termine e_3 a numeratore dappertutto. Potrebbe $p = e_3$ essere una scelta più sensata? Dopotutto $\sqrt{e_3}$ è un fattore dell'area, ed abbiamo visto che una scelta di p troppo grande non ha dato problemi nel secondo esempio.

Con questa scelta p ha le dimensioni di un volume. Per fare tornare i conti dimensionalmente q dovrà avere le dimensioni di una superficie. E poiché deve anche essere simmetrico rispetto a r_1, r_2 ed r_3 dovrà essere una combinazione lineare di polinomi simmetrici di grado 2.

Ora, se uno fa caso che l'indice i di $e_i(r_1, r_2, r_3)$ non è altro che il grado del polinomio simmetrico, non ci sono molte combinazioni possibili di polinomi di secondo grado. q deve essere qualcosa del tipo:

$$q(e_1, e_2, e_3) = \alpha e_1^2 + \beta e_2 + \gamma\sqrt{e_1 e_3}$$

Il termine sotto radice a prima vista può sembrare fuori posto, ma è perfettamente naturale dato che non è altro che l'area del triangolo d'origine.

Abbiamo una equazione in tre incognite, e guarda caso abbiamo risolto tre problemi di aiuole - linearmente indipendenti - per cui non ci resta che scalare il valore trovato di q in base al nuovo valore di p, ed ottenere il sistema

$$\begin{cases} 36\alpha + 11\beta + 6\gamma = 23 \\ 64\alpha + 21\beta + 12\gamma = 45 \\ 441\alpha + 146\beta + 84\gamma = 314 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Se non ho commesso altri errori, il valore che cerchiamo per r_4 è

$$r_4 = \frac{p}{q} = \frac{e_3}{e_2 + 2\sqrt{e_1 e_3}}$$

Ma non è il momento di fermarsi qui. Si può moltiplicare numeratore e denominatore per $e_2 - 2\sqrt{e_1 e_3}$ per ottenere

$$r_4 = \frac{e_2 e_3 - 2e_3\sqrt{e_1 e_3}}{e_2^2 - 4e_1 e_3}$$

Se aggiungiamo anche la soluzione con il segno + al numeratore, i due valori si ottengono come soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$(e_2^2 - 4e_1 e_3) r_4^2 - 2e_2 e_3 r_4 + e_3^2 = 0 \tag{7}$$

<u>Cambio di base</u>

Finora ho usato i polinomi simmetrici di tre variabili, ma ora è necessario passare a quelli di quattro!

$$\begin{aligned} e_1(r_1, r_2, r_3, r_4) &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \\ e_2(r_1, r_2, r_3, r_4) &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 \\ e_3(r_1, r_2, r_3, r_4) &= r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 \\ e_4(r_1, r_2, r_3, r_4) &= r_1 r_2 r_3 r_4 \end{aligned}$$

Usando con criterio le seguenti relazioni tra le due basi:

$$\begin{aligned} e_1(r_1, r_2, r_3, r_4) &= e_1(r_1, r_2, r_3) + r_4 \\ e_2(r_1, r_2, r_3, r_4) &= e_2(r_1, r_2, r_3) + r_4\, e_1(r_1, r_2, r_3) \\ e_3(r_1, r_2, r_3, r_4) &= e_3(r_1, r_2, r_3) + r_4\, e_2(r_1, r_2, r_3) \\ e_4(r_1, r_2, r_3, r_4) &= e_3(r_1, r_2, r_3)\, r_4 \end{aligned}$$

è possibile riscrivere la (7) in maniera molto semplice nella nuova base

$$e_3^2 - 4e_4 e_2 = 0$$

Ci vuole un po' di pratica ma ci si arriva in qualche passaggio. Ora dividendo per e_4^2 si ottiene

$$\frac{e_3^2}{e_4^2} - \frac{4e_2}{e_4} = 0$$

che, ci crediate o no, è proprio il teorema di Cartesio, o formula di Soddy.

<u>Dimostrazione</u>

Cominciamo con qualche sostituzione facilmente verificabile:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{e_3}{e_4} \tag{8}$$

$$\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_1 r_4} + \frac{1}{r_2 r_4} + \frac{1}{r_3 r_4} = \frac{e_2}{e_4} \tag{9}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = \frac{e_3^2}{e_4^2} - \frac{2e_2}{e_4} \tag{10}$$

e infine

$$\frac{e_3^2}{e_4^2}-\frac{4e_2}{e_4}=2\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}-\frac{2e_2}{e_4}\right)-\frac{e_3^2}{e_4^2}=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)-\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=0$$

Nota bene che siamo partiti con l'ipotesi di aree e lati di valore intero, ma l'uso dei polinomi simmetrici ha portato ad un risultato di validità più generale.

<u>Quadrature</u>

Beh, il metodo è interessante ma a me non sembra proprio una dimostrazione. Così ho voluto anche provare ad ottenere lo stesso risultato quadrando i radicali, ed il risultato è che l'uso dei polinomi simmetrici porta ad una semplificazione notevole dei calcoli. Anche qui uso esclusivamente polinomi simmetrici di quattro variabili.

Sostituzioni

Nella formula di Erone sostituiamo i polinomi simmetrici e dividiamo per $e_1 e_4$.

$$\sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}=\sqrt{(r_1+r_2+r_4)r_1r_2r_4}+\sqrt{(r_1+r_3+r_4)r_1r_3r_4}+\sqrt{(r_2+r_3+r_4)r_2r_3r_4}$$

$$\sqrt{(e_1-r_4)\frac{e_4}{r_4}}=\sqrt{(e_1-r_1)\frac{e_4}{r_1}}+\sqrt{(e_1-r_2)\frac{e_4}{r_2}}+\sqrt{(e_1-r_3)\frac{e_4}{r_3}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}}=\sqrt{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}}+\sqrt{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_1}}+\sqrt{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}}$$

Prima quadratura

Sottraggo il primo termine a destra ed elevo al quadrato:

$$\sqrt{\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}}-\sqrt{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}}=\sqrt{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_1}}+\sqrt{\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}}$$

$$\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}-2\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}\right)}+\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}=\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_4}+2\sqrt{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}\right)}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}$$

Seconda quadratura

Isoliamo i radicali a destra e quadriamo di nuovo.

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=2\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}\right)}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)-2\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}-\frac{1}{r_2r_3}-\frac{1}{r_1r_4}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_3r_4}\right)\\&=\frac{8}{e_1^2}-\frac{4}{e_1}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+4\left(\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_4}\right)\\&+8\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}\right)}\end{aligned}$$

Sottraendo il terzo termine a destra ottengo una uniformizzazione dei segni del secondo termine a sinistra.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)-2\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_4}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_3r_4}\right)\\&=\frac{8}{e_1^2}-\frac{4}{e_1}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)+8\sqrt{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}\right)}\quad(11)\end{aligned}$$

Sostituzioni

Oltre alle formule già viste (8), (9) e (10) ce ne serve un'altra:

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{e_1}\right)\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{e_1}\right)=\frac{1}{e_1^4}-\frac{1}{e_1^3}\frac{e_3}{e_4}+\frac{1}{e_1^2}\frac{e_2}{e_4}-\frac{1}{e_1}\frac{e_1}{e_4}+\frac{1}{e_4}$$
$$=\frac{1}{e_1^4}-\frac{e_3}{e_1^3e_4}+\frac{e_2}{e_1^2e_4}$$

La (11) si può ora riscrivere come

$$\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}-\frac{4e_2}{e_4}\right)=\frac{4}{e_1^2}\left(2-\frac{e_1e_3}{e_4}\right)+8\sqrt{\frac{1}{e_1^4}-\frac{e_3}{e_1^3e_4}+\frac{e_2}{e_1^2e_4}} \tag{12}$$

Siamo quasi arrivati, dobbiamo solo riscrivere il termine sotto radice in maniera che sia più malleabile (i primi due termini a destra sono già stati massaggiati).

$$\frac{1}{e_1^4}-\frac{e_3}{e_1^3e_4}+\frac{e_2}{e_1^2e_4}=\frac{1}{4e_1^4}\left(4-\frac{4e_1e_3}{e_4}+\frac{e_1^2e_3^2}{e_4^2}\right)-\frac{1}{4e_1^2}\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}+\frac{4e_2}{e_4}\right)$$
$$=\frac{1}{4e_1^4}\left(2-\frac{e_1e_3}{e_4}\right)^2-\frac{1}{4e_1^2}\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}+\frac{4e_2}{e_4}\right)$$

da cui

$$\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}-\frac{4e_2}{e_4}\right)=\frac{4}{e_1^2}\left(2-\frac{e_1e_3}{e_4}\right)+\frac{4}{e_1^2}\sqrt{\left(2-\frac{e_1e_3}{e_4}\right)^2-\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}+\frac{4e_2}{e_4}\right)} \tag{13}$$

Terza quadratura?

Se ci accontentiamo di una soluzione non occorre quadrare una terza volta. Basta osservare che quando

$$\frac{e_3^2}{e_4^2}-\frac{4e_2}{e_4}=0$$

il radicale preso col segno $-$ si annulla col primo termine a destra, e guarda caso la soluzione trovata coincide con quella precedente.

Se volessimo accertarci che non ci siano altre soluzioni reali bisognerebbe isolare il radicale a destra, quadrare, semplificare e fattorizzare per arrivare a una formula del tipo

$$\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}-\frac{4e_2}{e_4}\right)\left(\frac{e_3^2}{e_4^2}-\frac{4e_2}{e_4}+\frac{8e_3}{e_1e_4}\right)=0$$

dove il primo fattore è la soluzione già trovata. Sottraendo il secondo fattore a sinistra nella (13), ci si trova con un termine negativo a sinistra e dei termini che sono sicuramente positivi a destra, il che significa che il secondo fattore non può annullarsi.

Ma perché mai dovrei eseguire una terza quadratura?

4.2 [321]

4.2.1 Strane scatole sparenti

Per questo problema siamo diventati collezionisti di numeri:

> *Avete una collezione di 100 scatole numerate fuori da 1 a 100, ciascuna delle quali contiene un numero. Tutti i numeri sono diversi tra loro, e valori casuali positivi non ripetuti. Sapete che vi ruberanno una scatola. Avete un'altra scatola non numerata, nella quale potete mettere dentro un numero. Che numero mettete nella scatola nuova, per essere sicuri di poter ricostruire il numero che vi ruberanno?*

Il Capo suggeriva poi di provare con due o più scatole rubate. Chiaramente il primo a rispondere è stato ***Valter***:

> Furto di una sola scatola:
>
> - metto nella scatola nuova la somma S dei cento numeri
> - dopo il furto calcola la somma R dei 99 numeri rimasti
> - il valore del numero rubato si ha sottraendo R da S.

Furto di due scatole:

- metto in una scatola nuova la somma S dei cento numeri

- nell'altra scatola la somma P pesata sul numero scatola (i numeri nelle scatole moltiplicato il numero scatola)

- dopo il furto calcola la somma R dei 99 numeri rimasti

- dopo il furto calcola la somma Q dei 99 numeri pesati

- ho un sistema di due equazioni lineari in due incognite:

-- x + y = S – R (dove x è il numero presente nella scatola numerata a e y è il numero presente nella scatola numerata b)

-- ax + by = P – Q.

Generalizzazione:

- detto k il numero di scatole rubate

- calcolo k somme pesate da mettere nelle k nuove scatole

- nella prima "peso" i numeri "dentro" moltiplicati per 1

- nella seconda per i numeri "fuori" elevati a 1

- nella terza per i numeri "fuori" elevati a 2

- …

- nella k-ma per i numeri "fuori" elevati a k-1

- ho un sistema di k equazioni lineari in k incognite.

Mi è venuto il dubbio se le equazioni siano indipendenti. Sono andato quindi a documentarmi in rete a tal proposito (quello che segue, perciò, non è frutto di mie deduzioni):

- la soluzione univoca è "garantita" dai numeri "fuori"

- siccome tali numeri sono diversi si ha un'unica soluzione

- i numeri sono i coefficienti delle k equazioni lineari

- la matrice che formato ha il determinante diverso da zero (proprio perché tali coefficienti sono diversi fra loro)

- questo poi assicura che il sistema ha un'unica soluzione

- la rete dice che si tratta di una matrice di Vandermonde

- i numeri da mettere nelle scatole nuove sono "gestibili" (perché crescono in modo polinomiale, non esponenziale).

Ci scrive poi ***Martino*** dopo tanto tempo una "soluzione senza limiti di spazio". Ci fa piacere ritrovarlo, ovviamente:

Soluzione senza limiti di spazio

Chiamiamo n_1, n_{100} i numeri nelle nostre scatole e n_{101} il numero di backup che scriviamo nella nuova scatola prima che ce ne venga rubata una. Sia inoltre p_k il k-esimo numero primo.

Ignorando il requisito di scrivere il numero più piccolo possibile dentro la nuova scatola, come prima soluzione scelgo

$$n_{101} = \prod_{i=1}^{100} p_i^{n_i}$$

Questo numero è enorme, ma il vantaggio è che potrò recuperare *qualsiasi numero* di scatole rubate usando una sola scatola di backup, beffandomi dell'eccessiva generosità del ladro gentiluomo. Anzi, posso liberarmi completamente di tutte le scatole e usare un solo foglio di carta molto grande.

Basterà poi scomporre in fattori primi n_{101} e riottenere tutti i numeri grazie al teorema fondamentale dell'aritmetica.

Questo approccio è la numerazione di Gödel, usata per la dimostrazione del suo famoso teorema. A Gödel non mancavano scatole, se mai qualche rotella.

Soluzione minima

Per trovare una soluzione che abbia qualche speranza di essere "corta" rispetto al requisito sulla calligrafia, dobbiamo rifarci alla teoria dei codici. Non sono per nulla un esperto, ma con qualche breve ricerca oso suggerire un'applicazione della correzione degli errori di Reed-Solomon con codifica sistematica:

1. Interpolando, cerchiamo un polinomio P di grado 99 tale per cui $P(k) = nk$, $k = 1\ldots 100$. Questo polinomio riproduce la nostra sequenza di scatole, ed è unico (vedi interpolazione di Lagrange).
2. Scegliamo $n101 = P\ (101)$ oppure, se ci vengono rubate r scatole, mettiamo in loro i numeri $n100{+}i = P\ (100 + i)$, $i = 1\cdots r$.
3. Se ora ci vengono rubate le scatole, possiamo comunque ricostruire il polinomio, perché abbiamo ancora 100 punti attraverso cui il polinomio passa, anche se diversi da quelli originali. In questo modo ricalcoliamo i valori originali.

Il codice di Reed-Solomon può fare altre cose simpatiche: se il ladro modifica r simboli senza dirci quali, può trovare quali sono stati modificati (senza correggerli); oppure, può localizzare e correggere fino a $r/2$ dispettose modifiche, dove r è il numero di scatole extra a disposizione.

Complimenti ragazzi, la teoria dei codici è una di quelle che fa andare il Capo in brodo di giuggiole. Stiamo andando veloci al secondo problema.

4.2.2 Al voto!

Preparando le votazioni imminenti ci si trova a fare sondaggi, ma come sempre, ogni attività dei nostri Rudi non può che generare problemi:

> *Il voto è tra due candidati e voi andate porta a porta nella vostra zona. Però i votanti non vogliono farvi sapere per chi intendono votare. Come fate a ottenere dei risultati ragionevolmente corretti?*

Purtroppo una sola risposta, anche se dal nostro grande ***Valter***:

> Simulerei l'elezione che si svolgerà al seggio:
>
> - mi presento con un fac-simile della scheda elettorale
>
> - lo consegno assieme ad una copia di urna elettorale
>
> - gli chiedo di appartarsi e votare in tutta segretezza.
>
> Così il "timido" non fa sapere per chi intende votare.
>
> Per rassicurarlo ulteriormente si potrebbe, inoltre:
>
> - mettere un sigillo sul coperchio dell'urna
>
> - mostrare che dentro vi sono già altre schede..

E così le S&N finiscono qui. Aspettiamo i risultati del Fall Contest – ma forse arriveranno in primavera. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

La grande notizia di quest'anno è che si riuscirà a fare il Comitato di Redazione a Zurigo (e non solo! Ulteriori dettagli dopo l'evento)! La cosa si svolgerà secondo il protocollo ormai sviluppato negli altri incontri; almeno un paio di giorni a Zurigo e, per quanto riguarda i pasti mezzogiorno:

0. Tutti e tre hanno intenzione di strafocarsi di birra, Rösti e Bratwürst (e quindi di non ordinare altro), ma...
1. Se Alice ordina Rösti, Doc ordina Bratwürst
2. Alice o Rudy ordinano Rösti, ma mai entrambi lo stesso piatto
3. Doc e Rudy non ordinano mai entrambi Bratwürst

Chi potrebbe aver mangiato Rösti il primo giorno e Bratwürst il secondo?

> *Un modo piuttosto veloce per risolvere il problema consiste nel determinare per chi è possibile mangiare sempre la stessa cosa.*
>
> *Da [1] e [2], se Alice ordina Rösti, Doc ordina Bratwürst e Rudy ordina Bratwürst, ma questo contraddice [3], quindi è assurdo, e quindi Alice ordina sempre Bratwürst.*
>
> *Quindi, da [2], Rudy ordina sempre Rösti.*
>
> *Quindi solo Doc può aver ordinato Rösti il primo giorno e Bratwürst il secondo.*

6. Pagina 46

Prima parte: Nel costruire un'affrancatura da n euro, possiamo utilizzare 0, 1, 2, …, $[n/3]$ francobolli da 3 euro[14]. Nel primo caso, l'affrancatura sarà composta unicamente da francobolli da 1 e 2 euro, il che può essere fatto in $[n/2]+1$ modi. Nel secondo caso, formeremo il valore $n–3$ con monete da 1 e 2 euro, il che può essere fatto in $[(n–3)/2]+1$ modi. Nel terzo caso, sarà il valore $n–6$ a dover essere formato con i francobolli di valore minore, il che può essere fatto in $[(n–6)/2]+1$ modi. Nell'ultimo caso, se $n=3q+r$, dove $q=[n/3]$ e r è il resto della divisione (quindi r vale 0, 1 o 2), quando si usano q francobolli da 3 euro, il valore r dovrà essere ottenuto attraverso francobolli da 1 o 2 euro e questo può essere fatto in $[r/2]+1$ modi; sommando,

$$S = \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) + \left(\left[\frac{n-3}{2}\right] + 1\right) + \left(\left[\frac{n-6}{2}\right] + 1\right) + \cdots + \left(\left[\frac{r}{2}\right] + 1\right)$$

Che è la soluzione del problema, ma questa espressione può essere semplificata.

Notiamo che, per ogni intero m è:

$$\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4}$$

infatti, se m è pari entrambi i membri sono uguali a $m/2$ mentre, se m è dispari, entrambi i membri risultano pari a $(m\text{-}1)/2$; questo fatto può essere usato per semplificare l'espressione di S: infatti, si ha

$$S = \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{4}\right) + \left(\frac{n-3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^{n-3}}{4}\right) + \left(\frac{n-6}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^{n-6}}{4}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{r}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^r}{4}\right)$$

Essendoci $q+1$ parentesi che contengono la frazione 3/4, abbiamo:

$$S = \frac{3}{4}(q+1) + \left(\frac{(-1)^n}{4} + \frac{(-1)^{n-3}}{4} + \cdots + \frac{(-1)^r}{4}\right) + \left(\frac{n}{2} + \frac{n-3}{2} + \cdots + \frac{r}{2}\right)$$

I termini della seconda parentesi si alternano in segno, e quindi questa varrà 1/4 se n e r sono entrambi pari, –1/4 se n e r sono entrambi dispari e 0 nei restanti casi; sia questo valore[15] ε.

I termini della terza parentesi sono in progressione aritmetica; ricordando che la somma di una serie aritmetica (finita) è pari alla media del primo e dell'ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini (che, in questo caso, è $q+1$), si ha:

[14] Le parentesi quadre qui indicano, per motivi tipografici, la parte intera del valore.

[15] Si noti che, se r è pari, è $\varepsilon \geq 0$.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{3}{4}(q+1)+\epsilon+\frac{q+1}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{r}{2}\right)\\
S &= \frac{q+1}{4}(3+n+r)+\epsilon\\
S &= \frac{3q+3}{12}(n+3+r)+\epsilon\\
S &= \frac{(n+3-r)(n+3+r)}{12}+\epsilon\\
S &= \frac{(n+3)^2}{12}-\frac{r^2}{12}+\epsilon
\end{aligned}$$

Se r vale 0 o 1, si ha:

$$\left|\frac{-r^2}{12}+\epsilon\right| \leqslant \frac{1}{12}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$

mentre se r=2, ricordando che $\varepsilon \geq 0$, si ha:

$$\left|\frac{-r^2}{12}+\epsilon\right| \leqslant -\frac{1}{12}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$

Quindi S, che è un intero, differisce per un valore minore di 1/2 da $(n+3)^2/12$ e quindi, se N indica la funzione di arrotondamento all'intero più vicino, si ha:

$$S=N\left(\frac{(n+3)^2}{12}\right)$$

Che è la formula cercata.

La soluzione della ***Seconda parte*** è perfettamente analoga: sia $n=q+r$, dove $q=[n/5]$ e r pari a 0, 1, 2, 3 o 4, ossia q e r siano il quoto e il resto quando n è diviso per 5. Come sopra, se si utilizzano t francobolli da 5 euro, il numero delle soluzioni è $[(n-5t)/2]+1$, e quindi il numero totale di soluzioni è:

$$S=\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{n-5}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{n-10}{2}\right]+1\right)+\cdots+\left(\left[\frac{r}{2}\right]+1\right)$$

Utilizzando la stessa identità vista sopra, si ricava:

$$S=\frac{3}{4}(q+1)+\left(\frac{(-1)^n}{4}+\frac{(-1)^{n-5}}{4}+\cdots+\frac{(-1)^r}{4}\right)+\left(\frac{n}{2}+\frac{n-5}{2}+\cdots+\frac{r}{2}\right)$$

Anche qui i termini della seconda parentesi sono a segni alternati e, indicandola con ε, valgono le stesse regole precedentemente ricavate. Similmente, la terza parentesi può essere ridotta attraverso la media della serie, ricavando:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{3}{4}(q+1)+\epsilon+\frac{q+1}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{r}{2}\right)\\
S &= \frac{q+1}{4}(3+n+r)+\epsilon\\
S &= \frac{5q+5}{20}(3+n+r)+\epsilon\\
S &= \frac{(n-r+5)(n+r+3)}{20}+\epsilon\\
S &= \frac{(n+4)^2}{20}-\frac{(r-1)^2}{20}+\epsilon
\end{aligned}$$

e, con lo stesso ragionamento visto sopra, si arriva a:

$$S=N\left(\frac{(n+4)^2}{20}\right)$$

Che risolve la seconda parte del problema.

Per quanto riguarda l'***Ultima parte***, si consideri che i tagli da 10, 20 e 50 euro possono formare solo valori multipli di 10 euro, quindi la somma dei valori da 1, 2 e 5 euro dovrà anch'essa essere un multiplo di 10.

Supponiamo quindi che la somma dei valori da 1, 2 e 5 euro valga $10m$ euro, e quindi che la somma dei valori da 10, 20 e 50 euro valga $100–10m$ euro, dove m può variare tra 1 e 10: determineremo il numero delle soluzioni per un dato valore di m e quindi sommeremo su tutti i valori possibili per ottenere la risposta alla domanda.

Sappiamo, dalla seconda parte, che il numero di modi nel quale spezzare $10m$ euro in pezzi da 1, 2 e 5 euro è[16] $N((10m+4)^2/20)$; d'altra parte, il problema di spezzare $100–10m=10(10-m)$ euro in pezzi da 10, 20 e 50 euro è equivalente al problema di spezzare $10–m$ euro in pezzi da 1, 2 e 5 euro, visto che il tutto è semplicemente moltiplicato per 10; quindi, il numero di soluzioni è:

$$N\left(\frac{(10-m+4)^2}{20}\right)=N\left(\frac{(14-m)^2}{20}\right)$$

Ognuna di queste soluzioni deve essere combinata con ognuna delle rappresentazioni ottenute dalla divisione di $10m$ euro in pezzi da 1, 2 e 5 euro; quindi, per un dato valore di m, ci sono:

$$N\left(\frac{(10m+4)^2}{20}\right)N\left(\frac{(14-m)^2}{20}\right)$$

modi di effettuare il cambio richiesto di 100 euro.

Sommando allora sui valori di m da 1 a 10, si ottiene:

$$\begin{gathered}
N\left(\frac{16}{20}\right)N\left(\frac{196}{20}\right)+N\left(\frac{196}{20}\right)N\left(\frac{169}{20}\right)+N\left(\frac{576}{20}\right)N\left(\frac{144}{20}\right)\\
+N\left(\frac{1156}{20}\right)N\left(\frac{121}{20}\right)+N\left(\frac{1936}{20}\right)N\left(\frac{100}{20}\right)\\
+N\left(\frac{2916}{20}\right)N\left(\frac{81}{20}\right)+N\left(\frac{4096}{20}\right)N\left(\frac{64}{20}\right)\\
+N\left(\frac{5476}{20}\right)N\left(\frac{49}{20}\right)+N\left(\frac{7056}{20}\right)N\left(\frac{36}{20}\right)\\
+N\left(\frac{8836}{20}\right)N\left(\frac{25}{20}\right)+N\left(\frac{10816}{20}\right)N\left(\frac{16}{20}\right)\\
=1\cdot 10+10\cdot 8+29\cdot 7+58\cdot 6+97\cdot 5+146\cdot 4\\
+205\cdot 3+274\cdot 2+353\cdot 2+422\cdot 1+541\cdot 1\\
=10+80+203+348+485+584+615+548+706+442+541\\
=4562
\end{gathered}$$

modi per effettuarte il cambio.

[16] Anche qui, la notazione $N(x)$ indica l'arrotondamento all'*intero più vicino* a x.

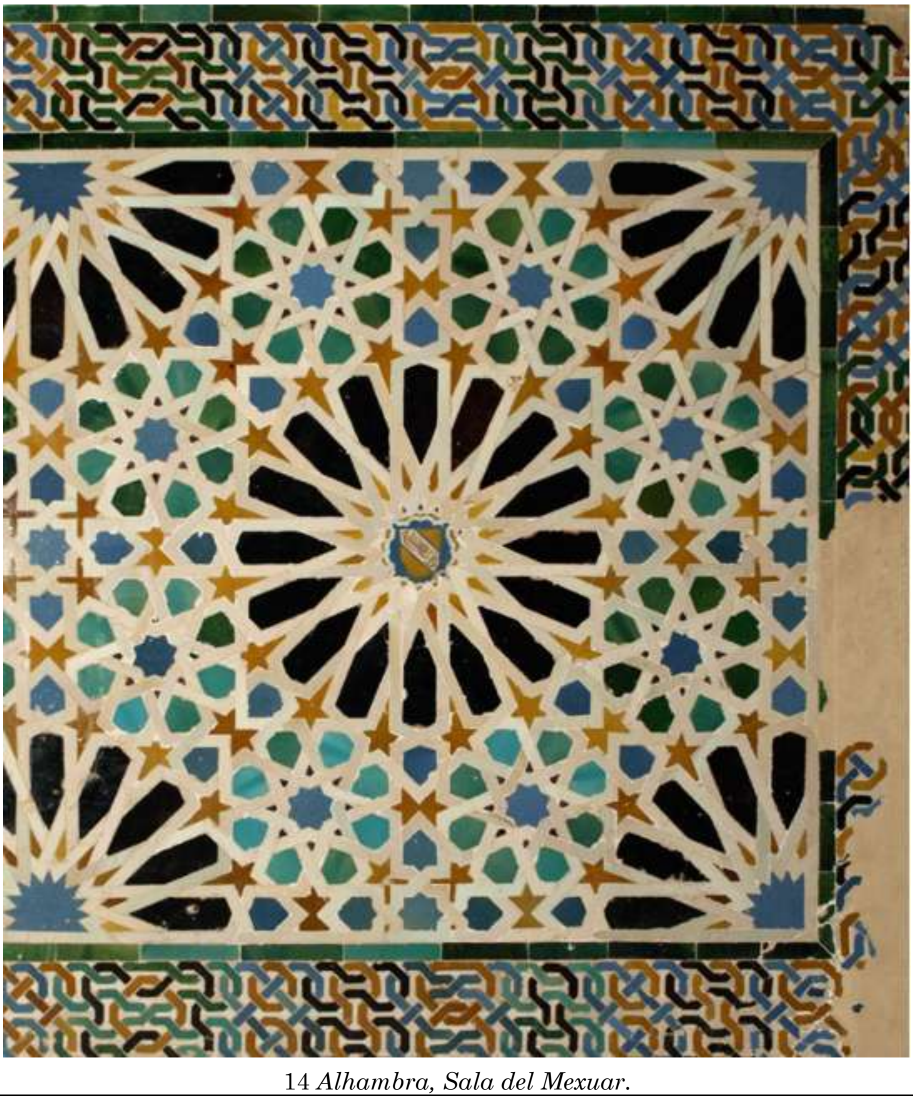
7. Paraphernalia Mathematica

Causa scampanio, avevamo interrotto la piastrellatura e, anche se potremmo addurre a giustificazione la similitudine tra i minareti e i campanili e la comunanza dei gruppi di simmetria, poteva sembrare avessimo deciso di ignorare il seguito di questo argomento; in realtà, stavamo cercando di decidere come andare avanti, visto che avevamo trovato alcune interessanti informazioni.

Per la gioia dello scrivente (ma non della nostra linotype), poco testo, questa volta. Ma un mucchio di figure "grandi", altrimenti non si capisce niente.

7.1 Le piastrelle orientali – 2 – La pratica, anzi alcune (quasi)

Come promesso, cominciamo con un disegno: per il momento piccolo, ma crescerà.



14 *Alhambra, Sala del Mexuar.*

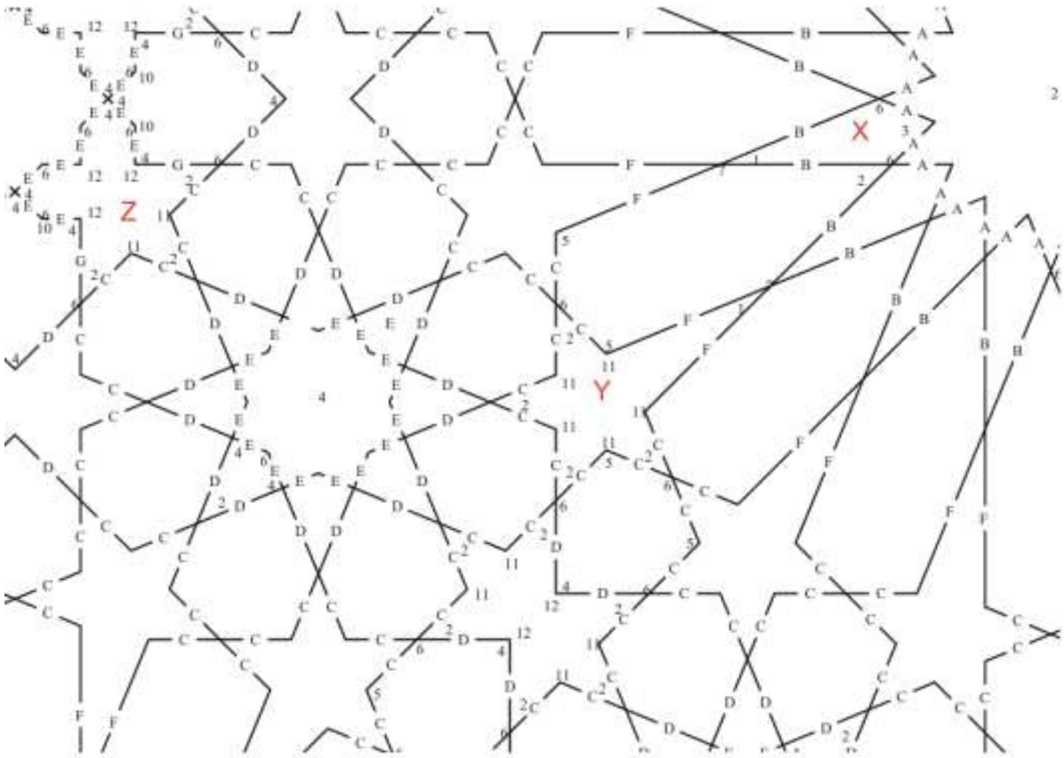
Nella figura, la decorazione (di cui ignoriamo i bordi: ne parliamo un'altra volta, va bene?) mostra una simmetria quadrata di tipo ***442** (o, se preferite, ***p4m***), che è una delle più comuni nell'arte islamica.

Come sempre quando si analizzano strutture di questo tipo, per prima cosa cerchiamo di capire la struttura delle figure e delle linee che lo formano: anche se l'occhio non è molto convinto della cosa, l'intero disegno è formato solo da linee rette: il fatto che alcune sembrino curve non deve trarre in inganno; le uniche linee curve compaiono nella decorazione della stella centrale, ma per i nostri scopi la cosa può essere tranquillamente ignorata.

La stella centrale ha 16 punte, e le altre stelle presenti ne hanno 8 (se vi ricordate, sono dei *khatem*); i petali (sono quelli neri) sono esagoni con i lati uguali a due a due e due di questi sono paralleli tra loro.

Ci sono inoltre quattro figure a sei lati appena fuori dai petali, che sembra abbiano le stesse proporzioni e dimensioni dei petali delle stelle ottagonali; tradizionalmente, i petali delle stelle dovrebbero avere i lati (ma non gli angoli) uguali tra loro; qui, i petali delle stelle ottagonali rispettano lo standard, mentre evidentemente quelli delle stelle a 16 punte no.

Quello accennato qui sopra è il punto fondamentale dal quale partire per la nostra analisi: tutti i petali con i sei lati uguali tra loro sono uguali. Adesso, ci serve il disegno grosso. Che, in realtà, è un pezzo di quello che abbiamo appena visto, con le cose "uguali tra loro" indicate nello stesso modo. Solo, ha meno colori per distrarci.



...adesso, è sicuramente tutto più chiaro.

Tanto per cominciare, cerchiamo un'unità di misura; un buon punto di partenza potrebbe essere di scegliere il lato A della stella a 16 punte; gli angoli acuti (quelli in cima ai raggi) della stella a 16 punte sono a 45°, e a questo punto possiamo definire un po' di angoli; i numeri che vedete indicati nella figura sugli angoli sono appunto la loro dimensione, indicata in multipli di 22.5° (che sarebbe metà dell'angolo a 45°); quando una figura è regolare (come ad esempio le stelle), il valore dell'angolo della punta del raggio di stella è indicato al centro stella: quella a 16 raggi ha un "2" al centro, mentre quella a 8 raggi ha un "4" (ossia, questi ultimi sono a 90°).

Si possono ricavare moltissime informazioni procedendo per triangoli e applicando ripetutamente la legge dei seni; partendo dal triangolo del *kite* indicato con X, si ha:

$$\frac{A}{sin 11.25} = \frac{B}{sin 33.75}$$

il che ci fornisce la lunghezza di B. La larghezza dei petali principali ci permette di calcolare C e, procedendo nello stesso modo, possiamo ottenere D. Il risultato finale è:

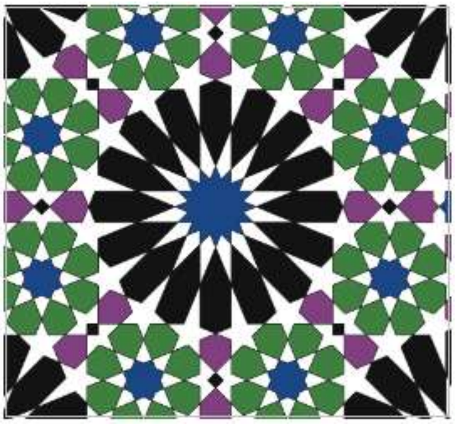
$$\begin{cases} A = 1.0 \\ B = \dfrac{A sin 33.75}{sin 11.25} \\ C = \dfrac{B sin 22.5}{cos 22.5} \\ D = \dfrac{C sin 22.5}{sin 45} \\ E = \dfrac{D sin 22.5}{cos 22.5} \end{cases}$$

Vi sarete accorti che mancano all'appello F e G:

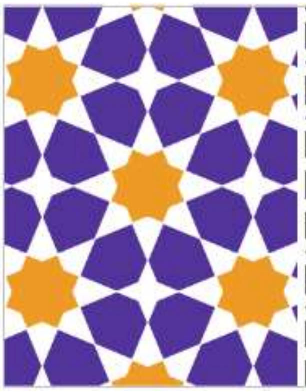
$$\begin{cases} F = \dfrac{C sin 123.75}{sin 11.25} - C - 2C sin 22.5 \\ G = -2E sin 45 + 2C sin 45 - C sin 22.5 + C cos 22.5 \end{cases}$$

Queste due ultime formule sono piuttosto complesse, ma per fortuna non è necessario calcolarle; infatti, se consideriamo il poligono marcato con Y nella figura, tutti gli angoli sono ben determinati e C è già stato calcolato, quindi F è definito; nello stesso modo, nel poligono marcato Z, sono determinati gli angoli e sono noti i lati E e C; quindi, anche qui G è univoco.

Non resta che tracciare il tutto e tirare fuori le matite colorate, per ottenere il disegno sulla sinistra; avendo a disposizione questo, se siete in vena di abbellimenti (che qui non tratteremo) potrete ottenere il disegno sulla destra. Notate che qualche dettaglio sparisce nel disegno, per ragioni puramente estetiche.




Quando la base sulla quale si lavora è, più semplicemente, un *khatem*, succedono cose piuttosto interessanti; partiamo da tre esempi (uno egiziano, uno marocchino e uno dall'Alhambra: non vi diamo gli originali perché sono piuttosto rovinati):



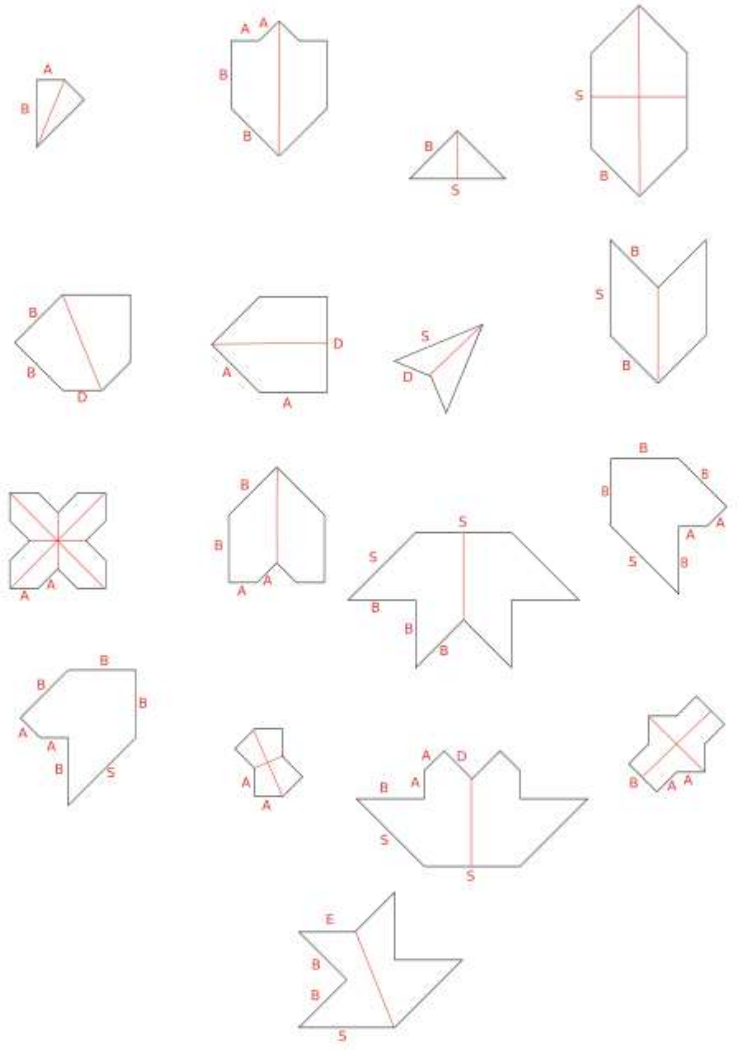
La simmetria che li descrive è la ***2222** (sempre che non preferiate ***pmm***);

Questi schemi condividono alcune interessanti proprietà:

1. Le piastrelle sono unite *bordo a bordo*: due lati di una figura a contatto tra di loro non necessariamente definiscono una linea che procede oltre questo contatto.
2. Due colori bastano per colorare lo schema
3. Tutti gli angoli delle figure sono multipli di 45°.
4. Gli incroci (se esistono) sono a due o a quattro linee

Inoltre, c'è un'altra caratteristica, anche se meno ovvia: la maggior parte dei *khatem* sono circondati da losanghe; se usiamo come unità la lunghezza del lato del *khatem*, il lato più lungo delle losanghe vicine è pari a $1+\sqrt{2}$; inoltre, nella terza decorazione, i lati più lunghi delle figure più grandi hanno lato $\sqrt{2}(1+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$, e (nel primo disegno) la lunghezza del lato nella stella a 4 punte è $\sqrt{2}$; queste lunghezze sono le uniche che vengano utilizzate nei disegni.

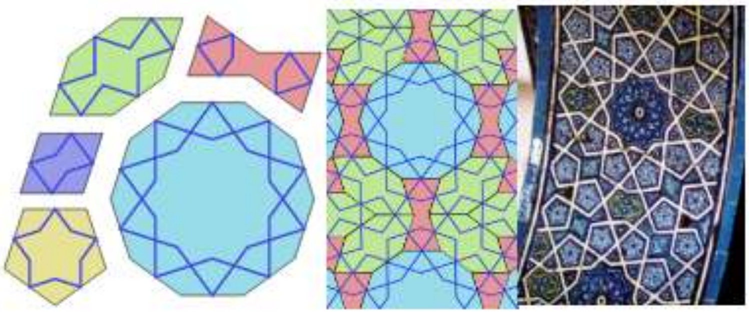
Il che permette di dare una definizione più operativa di decorazione ottagonale: devono essere soddisfatte le quattro condizioni viste prima e, inoltre, le lunghezze dei lati devono essere esprimibili come $p+\sqrt{2}q$ per valori interi di p e q e l'unico valore negativo ammesso è per p ed è pari a -1. Questo permette di vedere questi mosaici come piastrellature di un certo numero di figure ricorrenti:



dove le misure, rapportate al lato A, sono:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1+\sqrt{2} \\ D = \sqrt{2} \\ E = 2 \\ S = 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

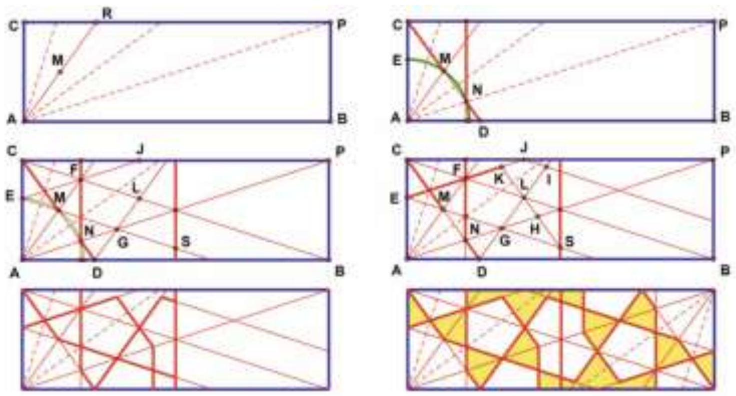
Questo fatto che "poche figure riescono a creare disegni complessi" potrebbe avervi fatto sorgere un dubbio: sì, è sensato.



15 *Dalle basi al risultato finale.*

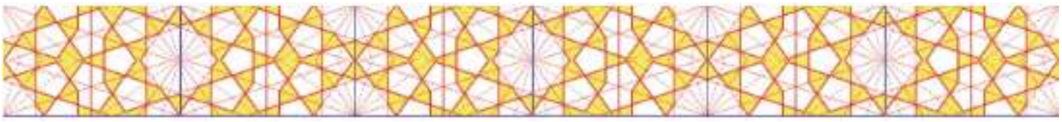
Infatti, è stato definito un insieme di piastrelle che permettono di definire molti disegni: partendo da stelle e poligoni con 5 o 10 assi di simmetria, diventa possibile costruire un insieme detto ***girih***[17] che vi "tira le linee" in modo sostanzialmente quasi automatico. Qui sopra (sempre da Wikipedia) trovate un insieme delle piastrelle e uno schema di disegno; per capire cosa poi diventi questo nella realtà, la terza immagine è un architrave della Grande Moschea di Bursa, che utilizza questo disegno.

Esistono anche "girih di secondo livello", solitamente utilizzati nei riempimenti degli architravi (in inglese, gli *spandrels*: qualcuno conosce il termine italiano?), con un'interessante caratteristica di avere due schemi, uno visibile da lontano, e un altro che appare quando ci si avvicina: data la ristrettezza dell'area e questa complicazione, il risultato finale è un'impressione di aperiodicità.



16 *Un modo per avere un bel disegno.*

Ma come si costruisce un *girih*? Beh, un esempio per trovare i punti da usare è mostrato in figura: dopo aver diviso un angolo retto (quello in basso a sinistra nella figurina in alto a sinistra) in cinque parti congruenti, scegliete un punto P arbitrario sul primo raggio e tracciate il rettangolo (quello blu); poi, tracciate l'arco di cerchio a vostro gusto e iniziate a trovare le intersezioni che costituiranno la base per definire il tracciato; la stessa costruzione, effettuata dall'angolo retto in alto a destra (il nostro punto P), vi permette di ottenere una struttura regolare e simmetrica, in grado di generare interessanti disegni.



[17] Tutto quanto segue proviene dalla pagina Wikipedia opportuna (https://en.wikipedia.org/wiki/Girih); se vi state chiedendo cosa significa la parola, in inglese si dice *strapwork*, che viene tradotto in italiano come *cuir decoupé* (vero, non stiamo scherzando): sono quelle specie di foglietti arrotolati che fanno da cartigli nelle cornici, nelle colonne, eccetera. Siamo d'accordo con voi nel dire che a prima vista non c'entrano niente.

Questa qui sopra l'abbiamo generata semplicemente prendendo l'ultima immagine dello schemino e ripetendola quattro volte (opportunamente riflessa). Siamo fieri del risultato, anche se alcuni petali pentagonali risultano un po' troppo regolari, per i nostri gusti.

I più acerbi lettori di questa rubrica probabilmente ricorderanno la trattazione relativa alle simmetrie (svolta nei numeri 275-277), dove abbiamo esaminato (in modo colpevolmente veloce) la notazione di Conway; i più vetusti, invece, avranno sicuramente ben presente la chilometrica trattazione sulle simmetrie (svolta nei numeri 071-074, con *addendum* nel numero 088), poi coagulatasi (assieme ad un buon numero di Compleanni) in *Rudi Simmetrie*[18]. Una parte della quale andiamo ancora fieri (esclusa Treccia, che ha dovuto far stare tutto nelle pagine, e non è stato semplice) era la rappresentazione dei diversi gruppi di simmetria attraverso decorazioni giapponesi; tra le diverse cose che abbiamo trovato lavorando a questo pezzo, c'è la versione araba equivalente di queste rappresentazioni. La cosa riveste interesse puramente filologico, ma se qualcuno di voi è interessato a una catalogazione comparata delle diverse immagini, ce lo faccia sapere: al momento, abbiamo un voto contrario (quello di Alice, che già si vede a impaginare il tutto...).

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[18] Che, vi ricordiamo, ci risulta essere l'unico libro scritto ad insaputa degli autori.