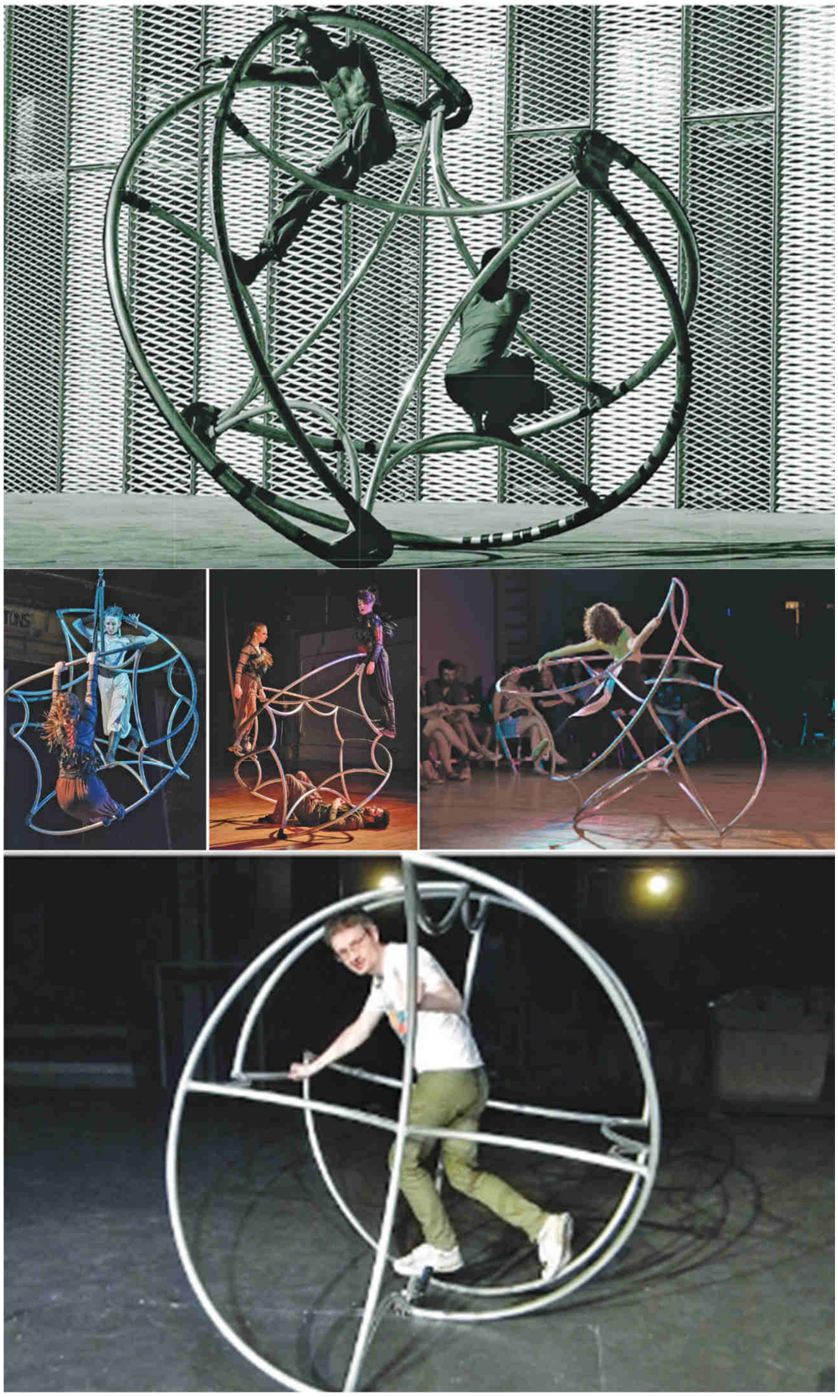
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 274 – Novembre 2021 – Anno Ventitreesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM272 ha diffuso 3'336 copie e il 03/11/2021 per Google eravamo in 8'340 pagine.

Nella foto grande, ***Tony Vighetto*** e ***Marie-Martine Robles*** se ne vanno a spasso con uno *Zigrolling* che, come energia impiegata, consuma circa il doppio della Ferrari di Leclerc (e non supera nessun limite di velocità). Nelle altre foto, varia umanità che cerca di farsi male con apparati simili. In particolare, nell'ultima foto, il signore che ha più il *phisique du rôle* di un criceto nella ruota che di un acrobata, si chiama ***Harry Segerman*** ed è un matematico (che si arrabbia se scrivete male il nome). Appena finita la pizza, vi raccontiamo ce cosa ha combinato con 'sta roba.

1. Il buio in fondo al tunnel

"Ogni buon matematico è almeno per metà filosofo, e ogni buon filosofo è almeno per metà matematico."

Venti centimetri al giorno.

1 *I "Quattro Denti"*

Il numero e l'unità di misura, presi così da soli, non servono a granché per raccontare una storia. Persino in quelle storie che hanno l'intenzione di essere raccontate all'interno di una rivista di matematica, i numeri da soli non bastano. D'altro canto, è quasi impossibile fare a meno dei numeri, anche in quelle storie che di numeri sembrano non avere nessun bisogno.

Ma è anche vero che non c'è nessuna legge che vieti almeno di provarci: soprattutto quando la sorte concede di definire il luogo della narrazione proprio tramite un numero. La "Cima dei Quattro Denti" si trova in Val di Susa, proprio sopra Chiomonte. Non è quindi distante da Exilles, celebre per quel robusto esempio di architettura militare, l'omonimo "Forte", che è tra i più antichi esempi di fortezza alpina posta a guardia del Piemonte e di tutta la Val Padana, e nella quale la leggenda vuole che sia stata imprigionata anche la "Maschera di Ferro". Leggenda, peraltro, solo fino a un certo punto: della Maschera di Ferro si interessò molto Voltaire, fino ad appurare che, nell'oscuro mélange tra mito e realtà, almeno alcuni punti erano storicamente accertati. Sotto il regno del Re Sole c'è effettivamente stato un prigioniero il cui volto era perennemente coperto da una maschera metallica; il prigioniero era certamente un personaggio importante, e per qualche ragione politica o di affetto non era opportuno limitarsi a farlo sparire uccidendolo; infine, la maschera doveva essere necessaria perché la semplice vista del volto del prigioniero sarebbe stata sufficiente a generare scandalo e pericolosi interrogativi. Voltaire, sulla base di queste poche certezze, suggerì che potesse trattarsi di un importante membro della casa reale francese: probabilmente un fratello – forse addirittura un gemello – di Luigi XIV, che lo avrebbe imprigionato e virtualmente eliminato per non dividere con lui il trono. Così si sarebbe spiegata sia la ragione dell'impossibilità della semplice messa a morte (un regicidio è troppo persino per un re), sia quella della necessità di nasconderne il volto dagli sguardi di tutti. Alexandre Dumas padre, estasiato dalla teoria di Voltaire, la inserisce nel terzo romanzo della trilogia dei Moschettieri, "*Il Visconte di Bragelonne*", perpetuandone la storia densa di mistero e dando lavoro agli sceneggiatori di almeno una dozzina di film[1].

L'ipotesi di Voltaire non è l'unica, anche se resta certo la più intrigante; altre ne sono state avanzate, in modo più o meno circostanziato: generali, ministri, valletti, monaci, perfino un fantomatico padre naturale dello stesso Re Sole sono stati di volta in volta proposti come possibili – e certo sfortunati – prigionieri dal volto coperto, rinchiusi nel Forte di Exilles e successivamente nella fortezza di Pinerolo.

[1] Il più recente dei quali (ci sembra) è intitolato proprio "La Maschera di Ferro" ("*The Man in the Iron Mask*" in originale) del 1998, per la regia di Randall Wallace e con Leonardo di Caprio chiamato ad interpretare sia Luigi XIV che il gemello ferromascherato.

2 *"La Maschera di Ferro", 1998*

Quello che però hanno in comune tutti questi personaggi è l'essere coinvolti in qualche intrigo di corte: insomma di essere autori o vittime di vicende che disturbano il massimo potere dell'epoca; insomma protagonisti di faccende che ancora oggi farebbero la gioia di giornalisti d'inchiesta o, come minimo, delle riviste che campano sui pettegolezzi. Quella che svolge invece a pochi chilometri di distanza – ma di più di un secolo più antica – nei pressi dei Quattro Denti di Chiomonte è storia profondamente popolare, quasi proletaria: certamente è una storia di lavoro, anche se condivide con quella della Maschera di Ferro, oltre ai luoghi, anche la ristrettezza degli spazi, il freddo, l'umidità, e la solidità delle pareti che negano la luce del sole.

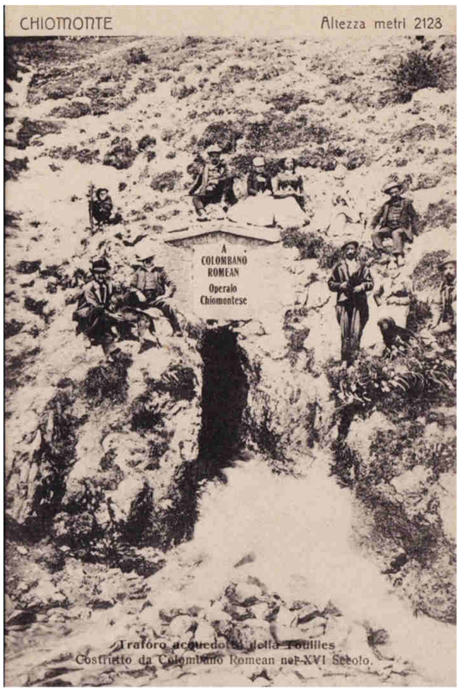
A voler continuare il tentativo di raccontarla attraverso le cifre, un buon candidato può essere proprio il numero 1526, corrispondente all'anno di grazia in cui la storia ufficialmente comincia; ma altrettanto bene può figurare il 1533, quando invece finisce. O, ancora più direttamente, il "sette" che scaturisce dalla loro differenza, a sacramentare la durata dell'evento. I Quattro Denti sono posizionati su una piccola cresta: piccola, ma sufficiente a far sì che la preziosa acqua del rio Touilles se ne resti placidamente sul versante nord, rifiutandosi di scendere nel versante sud, verso i campi di Chiomonte e di Exilles che restano così perennemente assetati. Gli abitanti dei due borghi sanno bene che lassù, dietro ai Quattro Denti, scorre quel torrentello certo piccolo, ma che sarebbe in grado di cambiare radicalmente la produttività delle loro terre: e già da tempo hanno cercato di catturarne un po' d'acqua, anche costruendo un acquedotto ligneo che dalla cresta, aggirandola, riesce a dissetare campi, abitanti e animali di quei paesini a mezzacosta. Ma una costruzione di legno ha vita difficile, nei rigidi inverni alpini: e funziona male, e abbisogna di continue, costose e faticose riparazioni e manutenzioni. Quel che ci vorrebbe, in realtà, sarebbe riuscire a scavare una galleria sotto la cresta, in modo che il torrente possa essere deviato, in tutto o in parte, verso sud. Ma come diavolo si può fare un buco attraverso una montagna?

A volerle cercare, sono davvero tante le occasioni in cui la Storia sembra voler ironizzare sulle vicende degli esseri umani: ai giorni nostri, l'espressione "galleria in Val di Susa" non può che evocare grandi opere ferroviarie, talpe meccaniche gigantesche in grado di perforare interi massicci di granito, e soprattutto le conseguenti tensioni, proteste al limite della guerriglia dei valligiani che si oppongono all'idea di fare strada a saettanti treni ad alta velocità pronti a sfrecciare dentro i lunghissimi tunnel; mezzo millennio fa, erano gli antenati di alcuni di loro che sentivano vitale l'esigenza di una galleria certo molto più piccola, ma comunque in grado di cambiare la loro esistenza.

Molto più piccola, abbiamo detto, ma con cinque secoli di tecnologia in meno a disposizione. Nessuna talpa meccanica, nessun esplosivo, nessun mezzo tecnologico troppo diverso da quelli che, grosso modo, avevano a disposizione gli antichi Romani. Martello e scalpello, nient'altro; e con molti altri numeri da ricordare, nessuno realmente favorevole all'impresa. C'è il numero duemila, ad esempio; anzi, 2128. Numero difficile, soprattutto in inverno, quando viene coniugato insieme ai metri per esprimere la quota sul livello del mare dove si pensa di scavare la galleria: sulle Alpi, negli inverni del Cinquecento, duemila metri di altitudine significano freddo, neve e ghiaccio, e poche possibilità di scaldarsi. Significano respirare un'aria non troppo ricca di ossigeno, soprattutto se si ha l'intenzione di prendere a martellate la roccia. Un altro numero, forse ancora più spietato, è superiore a quattrocento; è improbabile che a Chiomonte e a Exilles lo conoscano già in anticipo, ma col senno di poi scopriranno che il numero esatto è 433: è il numero di metri da scavare nel granito per consentire al torrente Touilles di bagnare il versante di Chiomonte.

È anche il numero che manca per generare la prima quantità nominata, quel "venti centimetri al giorno" presentato all'inizio. I 433 metri di lunghezza del tunnel perforati nei sette anni che è durata l'impresa generano proprio quei venti centimetri che marchiano la media di avanzamento all'interno della montagna. A loro volta, quei venti centimetri di profondità, associati alla larghezza e all'altezza minima indispensabile per il passaggio di un uomo – un metro per due metri – partoriscono due quinti di metro cubo di granito da frantumare a colpi di scalpello, briciola per briciola, granello per granello, per tutti i giorni di quei sette anni, domeniche escluse[2]. Due quinti di metro cubo che significano più di mezza tonnellata al giorno, considerando la densità della roccia; cinquecento, seicento, anche settecento chili che quotidianamente bisogna non solo scalpellare e frantumare, ma anche spostare, condurre fuori dalla galleria, sversare da qualche parte.

E più lungo diventa il tunnel, più difficile diventa il lavoro: cresce il buio, che è già così precoce in montagna d'inverno; diventa ancora più rarefatta l'aria, che dentro la montagna non circola, e bisogna riuscire a iniettarla con mantici, per garantire un minimo di ricambio. Impresa durissima, quasi impossibile, all'inizio del Cinquecento; ma a farla diventare davvero titanica è il numero più determinante e sconvolgente tra tutti quelli elencati finora: il numero uno. Perché il tunnel alla fine riesce ad essere completato: dopo sette anni l'ultimo foglio di granito finalmente cade, e l'acqua del Touilles può trovare davvero la sua strada verso sud. Alla fine, pochi raggi di luce orizzontali riescono davvero ad entrare da un versante e a uscire nell'altro; alla fine l'enorme stilettata nel fianco della montagna è davvero completata: e a sferrarla, dall'inizio alla fine, è stato un solo uomo. Uno solo, aiutato soltanto dal suo cane e dalla sua determinazione: Colombano Romean.



3 *Il "Pertus" di Colombano.*

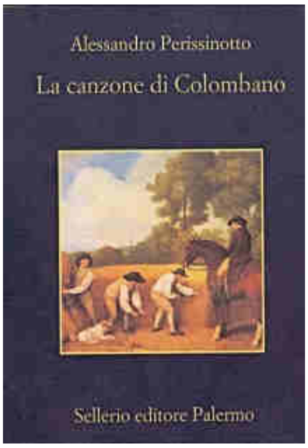
Il tunnel, lassù, c'è ancora. È chiamato "Pertus", con termine piemontese che significa "buco", non troppo dissimile dalla parola italiana "pertugio": è ormai soprattutto un'attrazione turistica, anche se continua a svolgere il lavoro per il quale è stato scavato, quello di portare l'acqua in valle. Una targa ricorda l'eccezionalità dell'opera e il nome del suo autore. Sono ancora conservati tutti gli atti notarili che sono stati stilati tra le autorità e Colombano Romean mezzo millennio fa, per ratificare gli accordi e i compensi che i valligiani avrebbero corrisposto allo scalpellino a opera conclusa.

Ancora numeri, in fondo: una "tesa", a quei tempi in quei luoghi, corrisponde a circa 1,8 metri. Per ogni tesa scavata nella montagna, i chiomontesi si impegnano a versare a Romean 5 fiorini e 12 soldi, alla fine il conto è davvero alto: circa 240 tese significano più o meno 1600 fiorini, che è più della metà del bilancio comunale di tutta la cittadina. Ma non ci sarà bisogno di pagare, perché Colombano Romean muore prima di riscuotere.

Non è chiara quale sia stata la causa della morte: l'ipotesi meno crudele, per quanto tragica, è che il minatore sia deceduto di idropisia proprio a causa delle condizioni di vita e lavoro durante i sette anni passati nel ventre della montagna; ma che chi sospetta che

[2] E si tratta, ovviamente, di una media viziata da una varianza elevatissima: saranno stati moltissimi i giorni invernali in cui l'opera restava del tutto ferma, compensati da molte ore di lavoro estivo.

Colombano sia stato semplicemente fatto fuori, per evitare di saldare un conto troppo salato: nel contratto, oltre al compenso in denaro, erano elencati anche un gran numero di beni in natura, ed è possibile che le amministrazioni cinquecentesche dei borghi abbiano optato per una soluzione più sbrigativa, per quanto criminale.



4 *Il libro su Colombano Romean di Alessandro Perissinotto.*

Ci sono ancora altre ipotesi: il giornalista e scrittore Alessandro Perissinotto ha compiuto parecchie ricerche sulla base di una canzone popolare che ancora sopravvive nella valle, e in un suo libro[3] le ha composte in una storia quasi poliziesca, con ben quattro omicidi sullo sfondo della Val di Susa del sedicesimo secolo. È certo difficile riuscire a ricostruire quanto sia effettivamente accaduto; ma in ogni caso, quella che sembra rimanere intatta anche dopo mezzo millennio è la perdurante opera – ciclopica e solitaria – di un solo essere umano; opera che ancora svolge, con l'indifferenza propria delle cose inanimate, il compito per il quale è stata progettata e realizzata.

Comunque la si voglia vedere e raccontare, la tenacia e la completa dedizione a un compito è cosa meritevole, quando lo scopo ultimo di tanta abnegazione è volto alla crescita della comune felicità e della conoscenza: e rimane tale persino quando la fatica di una vita resta incompiuta o inesatta. Persino quando l'ultimo frammento di roccia non cade o, peggio, quando una frana improvvisa e imprevista toglie senso a tutti gli sforzi precedenti. Persino così, quando in fondo al tunnel resta il buio e non trionfa la luce, l'opera resta grande e significativa; anche se il minatore che l'ha scavata per tutta la vita non potrà non sentirsi sopraffatto dalla delusione.

5 *Gottlob Frege*

Friedrich Ludwig Gottlob Frege nasce a Wismar, nel Land che oggi si chiama Meclemburgo-Pomerania Anteriore, il giorno 8 Novembre 1848. Wismar si trova quasi esattamente a mezza strada tra Lubecca e Rostock, e si affaccia sul Mar Baltico. L'anno di nascita del futuro matematico e filosofo è l'anno cruciale del XIX secolo, e lo è soprattutto per chi nasce in quella che sta per diventare la nazione germanica: e il caso di Frege è forse particolarmente significativo. Suo padre è preside di un liceo femminile tedesco, ma sua madre è (probabilmente) polacca; la sua città natale è stata a lungo in possesso della Svezia, ma la tardiva unità nazionale tedesca è ormai davvero prossima, e cresce insieme al giovane Gottlob. Questi nel 1866 perde il padre, ma proprio in quell'anno, a Sadowa, la Prussia infligge una sonora disfatta[4] all'Austria, conquistando e rivendicando così il ruolo guida degli stati tedeschi; e, appena quattro anni dopo, l'Impero Tedesco del kaiser Guglielmo I riesce a vedere la luce grazie alla vittoria di Sedan contro il secondo impero francese di Napoleone III.

Frege non prende parte alle battaglie che formano lo stato tedesco, ma contribuisce fin dall'inizio alla costruzione della nuova scienza e filosofia germanica. Studia inizialmente all'università di Jena, per passare poi nel cuore della cultura accademica tedesca, Göttingen: e lo fa proprio nel 1871, l'anno in cui nasce il Secondo Reich tedesco. La sua formazione accademica copre un'ampia gamma di discipline: matematica, fisica, chimica e

[3] "*La canzone di Colombano*", Sellerio editore, Palermo 2000.

[4] Vittoria che consente anche la felice conclusione della Terza Guerra d'Indipendenza per l'Italia, alleata della Prussia, nonostante le sonore batoste prese per mare a Lissa e per terra a Custoza.

filosofia, ma ciò non gli impedisce certo di dimostrarsi subito studente brillante e veloce; nel giro di tre anni ottiene il dottorato e l'ambito titolo di Privatdozent, che nel sistema scolastico tedesco è il primo – e fondamentale – lasciapassare per intraprendere la carriera accademica. Ottiene la sua abilitazione a Jena, e dalla sua alma mater otterrà anche la sua prima cattedra; in un certo senso sarà anche l'ultima, perché tutta la sua carriera di docente si svilupperà qui, nel cuore della Turingia.

Gottlob Frege è indubbiamente una mente eccezionale, e come molte altre (quella di Albert Einstein, ad esempio), è una mente che mal si adatta ai rapporti interpersonali e soprattutto agli obblighi didattici che la carriera universitaria richiede. Non ha grandi rapporti con i suoi studenti e nemmeno con i professori suoi colleghi: ma a questa regola fa parzialmente eccezione il rapporto che instaura con Rudolf Eucken. È quasi impossibile non notare una strana coincidenza: Eucken è un filosofo che vince il Premio Nobel per la Letteratura nel 1908, e non è certo una cosa frequente vedere il massimo riconoscimento letterario finire in mani diverse da un professionista del settore, poeta o scrittore che sia. Eppure, Gottlob Frege ha l'esistenza marchiata proprio da due filosofi che riescono entrambi ad insignirsi del Nobel della Letteratura: il citato Rudolf Cristoph Eucken e – soprattutto – il conte e duca inglese Bertrand Arthur William Russell[5], che quel premio otterrà nel 1950.

La matematica, come tutte le grandi discipline umane, ha le sue storie e narrazioni consolidate. In una delle più note, il nome di Gottlob Frege è strettamente (e si potrebbe aggiungere anche dolorosamente) legato proprio a quello di Bertrand Russell. Tutto a causa di una lettera che, pur essendo una delle missive più cortesi e gentili scritte da un accademico a un suo collega, è anche latrice e causa di una delle più nere depressioni della storia della scienza:

> «Caro collega, da un anno e mezzo sono venuto a conoscenza dei suoi *Grundgesetze der Arithmetik*, ma solo ora mi è stato possibile trovare il tempo per uno studio completo dell'opera come avevo intenzione di fare. Mi trovo completamente d'accordo con lei su tutti i punti essenziali, in modo particolare col suo rifiuto di ogni elemento psicologico nella logica e col fatto di attribuire un grande valore all'ideografia per quel che riguarda i fondamenti della matematica e della logica formale, che, per inciso, si distinguono difficilmente tra loro. Riguardo a molti problemi particolari trovo nella sua opera discussioni, distinzioni e definizioni che si cercano invano nelle opere di altri logici. Specialmente per quel che riguarda le funzioni (cap. 9 del suo *Begriffsschrift*), sono giunto per mio conto a concezioni identiche, perfino nei dettagli.
>
> C'è solo un punto in cui ho trovato una difficoltà. Lei afferma (p. 17) che anche una funzione può comportarsi come l'elemento indeterminato. Questo è ciò che io credevo prima, ma ora tale opinione mi pare dubbia a causa della seguente contraddizione. Sia ***w*** il predicato "***essere un predicato che non può predicarsi di se stesso***". ***w*** può essere predicato di se stesso? Da ciascuna risposta segue l'opposto. Quindi dobbiamo concludere che ***w*** non è un predicato. Analogamente non esiste alcuna classe (concepita come totalità) formata da quelle classi che, pensate ognuna come totalità, non appartengono a se stesse. Concludo da questo che in certe situazioni una collezione definibile non costituisce una totalità.
>
> Sto finendo un libro sui principi della matematica e in esso vorrei discutere la sua opera in tutti i dettagli. Ho già i suoi libri o li acquisterò presto, ma Le sarei molto grato se mi potesse inviare gli estratti degli articoli usciti su riviste. Nel caso non sia possibile, comunque, potrò averli da una biblioteca.
>
> La trattazione rigorosa della logica nelle questioni fondamentali, dove i simboli non sono sufficienti, è rimasta molto indietro; nella sua opera ho trovato la migliore elaborazione del nostro tempo, e mi sono quindi permesso di esprimerle il mio profondo rispetto. Sono spiacente che Lei non abbia ancora pubblicato il secondo volume dei suoi *Grundgesetze*: spero tuttavia che ciò avvenga.
>
> Molto rispettosamente suo
> Bertrand Russell
>
> (Ho scritto a Peano di questo fatto, ma non ho ancora ricevuto risposta.)»[6]

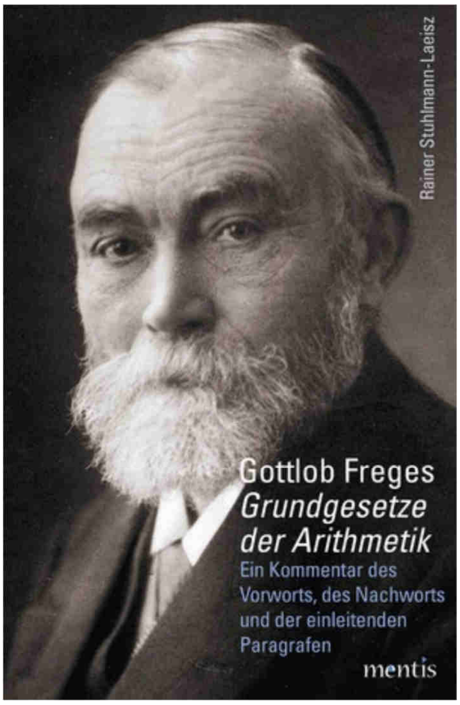
Le antinomie, insomma. O, ancora più colloquialmente, il "Paradosso di Russell"[7]: è stato raccontato e spiegato in centinaia di modi, e non c'è studente di materia scientifica che

[5] Ne abbiamo parlato in uno dei nostri primi compleanni: "*Nemesi*", RM052, Maggio 2003.

[6] Il testo della lettera è stato preso integralmente da *it.wiki*. Non ci è noto il nome del traduttore.

non lo abbia incontrato e studiato in qualche forma. Ha anche la fortuna di essere ragionevolmente semplice, perché può essere spiegato e compreso anche da chi non è iniziato alla logica formale o alla teoria degli insiemi: è sufficiente un piccolo sforzo, quel che basta a immaginare il concetto di "Insieme che contiene sé stesso come elemento" e quello opposto di "Insieme che non contiene sé stesso come elemento", e in un battibaleno si arriva a vedere l'antinomia in tutto il suo splendore. Nella letteratura divulgativa si sono usati tutti gli artifici possibili: il più diffuso è forse quello che chiama in causa il barbiere di un villaggio e questiona sulla persona deputata a radere il barbiere stesso, ma si trovano anche esempi che usano come scorciatoie logiche i cataloghi (l'insieme di tutti i cataloghi può ben essere considerato un catalogo esso stesso) e molti altri.

La via forse più diretta non richiede neanche troppa scenografia: basta chiamare "Normale" un insieme che non contiene sé stesso come elemento (ad esempio, l'insieme di tutti i leoni non è esso stesso un leone, quindi è "normale"), e "Speciale" un insieme che invece contiene sé stesso (ad esempio, il citato Catalogo dei Cataloghi). È evidente che un qualsiasi insieme non può essere altro che Normale o Speciale: *tertium non datur*, strillerebbe Aristotele e tutta la famiglia dei logici. Eppure la demoniaca antinomia appare subito, non appena si considera a quale delle due classi debba appartenere l'Insieme di tutti gli Insiemi Normali: non può essere esso stesso Normale, perché non dovrebbe contenere sé stesso, ma essendo un insieme Normale dovrebbe essere per definizione contenuto in quell'insieme di tutti i Normali. Non può neppure essere Speciale, perché se lo fosse dovrebbe contenere sé stesso, ma l'insieme di tutti i Normali non può accettare uno Speciale come membro. E il guaio è fatto: l'obiettivo di Frege è quello di ricondurre l'Aritmetica alla Logica, attraverso la Teoria degli Insiemi; ma la logica vuole che un insieme sia o Normale o Speciale, ed esistono insiemi testardi che si rifiutano di sottostare a questa disciplina.



6 *I Grundgesetze di Frege*

Frege, come si capisce anche dalla stessa lettera di Russell, era davvero a un passo dall'ultima picconata del suo lunghissimo tunnel. I suoi "Grundgesetze der Arithmetik" (*Principi dell'Aritmetica*) stanno per andare in stampa, a completamento dei precedenti "Die Grundlagen der Arithmetik" (*I Fondamenti dell'Aritmetica*): ma quella lettera datata 16 giugno 1902, scritta da un giovanotto inglese di appena trent'anni, mina profondamente tutta la costruzione, e Frege sente che tutta la montagna che sta perforando da anni e anni è crollata, rendendo del tutto inutile le sue fatiche. E la storia, al pari di quella di Colombano Romean, sembra confermare una fine tutt'altro che lieta anche dal punto di vista personale: i suoi *Grundgesetze* vedono comunque la luce nel 1903, ma ovviamente nascono con il peccato originale di aver fallito l'obiettivo primario, che era quello di ricondurre pienamente l'aritmetica alla logica. L'anno dopo, complice anche la scomparsa dell'amata moglie Margarete, Gottlob Frege inizia il suo ritiro dal mondo: in fondo ha solo cinquantasei anni, gliene restano da vivere ancora più di venti, ma sua penna – e immaginiamo anche la sua voce – resterà muta per il resto della sua vita.

La potenza narrativa del lavoro di una vita stroncato da una pacata osservazione critica a un passo dalla conclusione è così forte che è quasi inevitabile che sia tutto quanto rimane

[7] Come molti altri teoremi e scoperte scientifiche, anche il Paradosso di Russell non porta il nome del suo primo scopritore: prima del filosofo inglese, era già stato descritto da Ernst Zermelo.

nella memoria: Frege il grande sconfitto, Frege schiantato a un passo dal trionfo, Frege gran costruttore dell'Inutile. E, come si è visto, il suo richiudersi su sé stesso dimostra, in fondo, che non si tratta di una narrazione falsa.

Non falsa, ma probabilmente ingiusta, o quantomeno fuorviante: tra i logici, il nome di Gottlob Frege rimane quello di un grandissimo, quasi un nume tutelare. A differenza di Colombano Romean, che alla fin fine la sua grande opera l'ha conclusa con successo, Gottlob Frege ha fallito l'obiettivo primario che si era posto con la stesura dei *Grundgesetze*, ma l'opera ciclopica rimane, e la montagna non è crollata affatto. Soprattutto, i *Grundgesetze* non sono affatto l'unico lavoro di Frege, e certo non il più importante. L'importanza del suo "Senso e Significato" (*Über Sinn und Bedeutung*) è tutt'ora considerata un caposaldo della Logica, e considerato quasi un testo sacro dagli specialisti; specialisti che, quasi senza eccezione, ritengono Gottlob Frege importante quanto Aristotele, nella loro disciplina.

7 *La delusione di Frege prende in Rete la faccia triste di Humphrey Bogart.*

E forse, a rendere il merito migliore all'arte di Frege, resta proprio il commento di lord Bertrand Russell, colui che nella narrazione è visto come il grande demolitore dell'opera di Frege: dalla famosa lettera è già ben evidente la stima e ammirazione che portava verso il filosofo tedesco, ma più significativo ancora è quanto scrisse anni dopo. Ancorché essere fiero di aver demolito con un'osservazione geniale il lavoro di un collega, Russell si rammarica non tanto di aver fatto quel che ha fatto – del resto un logico può mai rammaricarsi di aver usato la logica? – e nemmeno del fatto, a lui certo noto, che Gottlob Frege è virtualmente scomparso dall'orizzonte scientifico dopo il 1903: no, Russell si rammarica e si indigna che il lavoro di Frege sia così poco conosciuto:

"*A dispetto dell'importanza epocale delle sue scoperte, Frege è rimasto totalmente privo di riconoscimenti finché io non ho attirato l'attenzione su di lui nel 1903*"[8].

Non sembra proprio il commento di un giocatore che sconfigge un avversario in un campo da gioco. Sembra piuttosto l'urlo indignato di un fan che si infuria verso chi non sa riconoscere il genio del proprio idolo.

[88] Bertrand Russell, in "Storia della Filosofia Occidentale",

2. Problemi

2.1 Gang Matematiche

Tre problemi al prezzo di uno. Anche perché sono facili. Caviamocela con un'ambientazione balorda.

Una piaga tristemente diffusa nelle facoltà di matematica è quella delle gang: teppisti in giubbotti decorati da formule che si aggirano per i corridoi interrogando minacciosamente sulla conoscenza di oscuri teoremi o ponendo problemi piuttosto inquietanti alle terrorizzate matricole; se rispondete esattamente siete ammessi nella banda, ricevete un giubbotto e siete autorizzati ad offrir loro una birra. Se sbagliate, venite ricoperti di pece e piume (virtuali, il che non è bene: lo vengono a sapere tutti e vi prendono in giro per l'intero anno) e chiusi nella facoltà di Lettere Moderne per l'intero week-end. Come ogni sociologo d'accatto può dimostravi in cinque minuti, un sistema del genere sviluppa diversificazione tra bande; purtroppo, i componenti di due bande diverse, a parte per le loro dichiarazioni (che non sono necessariamente vere), sono indistinguibili. Tra di loro, i membri della stessa banda condividono un codice segreto (che è evidentemente un numero: con un numero definito di cifre, quindi non fate gli spiritosi).

2.1.1 La prova di ammissione

Voi e un vostro compagno di corso siete stati bloccati dalla famigerata Gang dei Bourbakisti *[NdR: Bourbaki non c'entra niente, ma ci pareva suonasse bene]*, e sapete bene che non riuscirete a scampare un problema.

"Bene, matricole, adesso io vi dico i numeri da uno a cento, al ritmo di uno ogni due secondi. Siccome alla fine avrò sete, cercate di azzeccare la risposta. Dei numeri ne mancherà uno e alla fine dovrete dirmi qual è".

Non sembra difficile...

"...e i numeri ve li dirò *in disordine!*"

Uh-Oh. Vi ricordate cosa diceva Gauss da piccolo, ma tenere la somma di quasi cento numeri a botte di uno ogni due secondi siete praticamente certi di sbagliarvi: quasi quasi, meglio tirare a indovinare. Il vostro amico è nelle stesse condizioni, quando all'improvviso vedete un lampo di comprensione nei suoi occhi. Deve esserci un metodo... Qual è il più semplice?

2.1.2 ...adesso diventa un punto d'onore...

Il borchiomatico davanti a voi ha l'aria contenta ma non troppo.

"Ragazzi, complimenti, ce l'avete fatta, quindi niente Pece, Piume e Lettere. Ho però una cattiva notizia per uno di voi: abbiamo un solo giubbotto!"

"Quindi, adesso organizziamo una simpatica gara tra voi due: al vincitore andrà il giubbotto, il perdente dovrà accontentarsi della promessa che, per tutto quest'anno, niente altri scherzetti. Pronti?"

La prospettiva di evitare il PPL già vi sorride, ma a questo punto un sano spirito di competizione ha preso entrambi: un vago cenno di assenso fa nascere un sorriso ad un numero intero piuttosto grande di denti sulla bocca del teppista.

"BeneBeneBene. Allora, adesso dovete dire dei numeri, maggiori di zero ma minori di dieci, uno per volta: io mi occuperò di sommarli (a mente, senza dirvi nulla); il primo che raggiunge o supera il cento, niente giubbotto e anno tranquillo; per l'altro, giubbotto e una spericolata vita da Bourbakista. Comincia tu!" E viene indicato il vostro compagno.

Come ve la cavate, questa volta?

2.1.3 Qualcuno l'ha fatta grossa

Anche se il trattamento PPL viene vagamente tollerato dal corpo insegnante, esistono dei limiti: uno di questi, è che "Il figlio del Rettore non deve subire il trattamento". Indovinate un po'?

Voi, un altro studente con il giubbotto pieno di formule (che conoscete solo di vista, ma del quale non sapete la gang di appartenenza) e un professore siete stati convocati nello studio del Rettore, e state aspettando l'interrogatorio. Il giubbotto sostiene di essere della vostra stessa gang, ma non ne siete sicuri: potrebbe essere un Cauchiano *[NdR: Anche Cauchy non c'entra niente, ma ci sta antipatico]*! Inutile dire (ma lo facciamo lo stesso) che lui pensa esattamente la stessa cosa di voi, eventualmente a bande invertite, ed entrambi siete perfettamente consci di questo fatto. Rivelare il vostro codice segreto non se ne parla neanche, almeno sin quando non sarete sicuri che anche l'altro è della stessa banda.

Vi state guardando con sospetto da una decina di minuti, quando il prof (che non ha particolari motivi di malanimo nei confronti di nessuno dei due) se ne esce con una strana dichiarazione.

"Potete dirmi qualsiasi cosa o chiedermi qualsiasi cosa, e io risponderò con la verità, ma talmente piano che l'altro di voi non sentirà; inoltre, siccome sono una persona discreta, non starò a sentire le vostre conversazioni".

Voi (e l'altro giubbotto) vi fidate del prof, ma non fino al punto da dirgli quale sia la vostra banda o il codice segreto; volete però sapere se l'altro tizio è dei vostri o no: come fate?

2.2 Slow & Dirty

...nel senso che ci vuole un po' di tempo. Anche a macchina. Ma partiamo con calma e, come al solito, con qualcosa che non c'entra niente.

Rudy vorrebbe imparare a disegnare i sudoku.

È piuttosto evidente che il modo migliore sia partire dal fondo, piazzando i nove opportuni quadrati-soluzione in quadrato e poi cancellando qualche numero (più ne cancellate, più è difficile), e via andare. Il guaio è che non gli è molto chiaro come fare le verifiche: tanto per cominciare, il non aver fatto errori nel mettere i primi nove quadrati, e poi nell'essere sicuro che sta effettivamente cancellando la cifra giusta per avere una soluzione univoca... Insomma, è a zero. Fortunatamente, questo suo obiettivo non è urgentissimo, quindi potete lasciare perdere (o, se conoscete un libro che lo spieghi ragionevolmente, passategli il titolo, grazie...): non è qui il problema. O meglio, è a monte.

Infatti, il Nostro ha trovato un giochino che dovrebbe avere una parentela con il suo problema. Qui di fianco vedete un qualcosa che, in assenza di nome suo proprio, abbiamo chiamato il "Rudyrinto": voi siete nella casella in alto a sinistra, dovete seguire l'indicazione del punto cardinale indicato e muovervi di una casella in quella direzione; scopo del gioco è finire nell'ultima casella in basso a destra, seguire la su indicazione "E" e uscire vesto Est.

N	N	N	N	N	S	S	N
N	S	E	O	O	O	S	N
E	S	O	N	O	O	S	E
S	O	N	O	E	S	O	E
S	E	N	O	O	S	E	O
S	E	O	E	O	S	S	O
E	E	O	E	O	O	O	E
E	E	O	S	O	O	O	S

8 *Il Rudyrinto.*

"Rudy, guarda che l'ultima casella dice 'Sud', e la prima punta contro il muro..."

Vero. Infatti, ogni casella, quando ne uscite, indica il punto cardinale successivo in senso orario: se era N diventa E, E diventa S, S diventa O e dovreste essere abbastanza sagaci da capire cosa diventa O quando gli finite sopra.

Per quanto riguarda le caselle sul bordo, se queste puntano verso un muro quando ci entrate effettuano il cambio di direzione che dovrebbero effettuare alla vostra uscita, e potrete seguire la nuova direzione indicata ("...e se sono in una casella d'angolo e particolarmente sfortunato?" "Aspetta lì un momento che cambia di nuovo. Poi, però, basta. Troppo facile, altrimenti”); anche queste caselle, quando ne uscite, cambiano direzione, sempre secondo la stessa regola.

A Rudy non importa assolutamente niente di risolvere il rudyrinto, e si presume neanche a voi (anche se, un programmino che lo risolvesse automaticamente sarebbe probabilmente carino da leggere). A lui interessa *generarli*.

Esiste un modo per stabilire se un dato rudyrinto è risolubile, o per costruirne uno di dimensione data? Ci sono delle dimensioni proibite? ...e se fossero esagoni? O quadrati e ottagoni? No, forse meglio di no... *[NdR: da “esagoni” in poi non ne abbiamo la più pallida idea, e non intendiamo provarci]*,

Comunque, se anziché risolvere il problema preferite scrivere un racconto di fantascienza dal titolo “Il rudyrinto proibito”, ne vogliamo una copia autografata gratis.

3. Bungee Jumpers

Per n intero positivo, definiamo la funzione $P(n)$ come la somma delle cifre di n più il numero delle cifre di n: ad esempio, $P(45)=(4+5)+2=11$.

Determinate tutti i numeri n per cui $P(n)=4$ e (se esiste, giustificando la risposta) un numero n per cui $P(n)–P(n+1)>50$.

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Soluzioni e Note

Novembre!

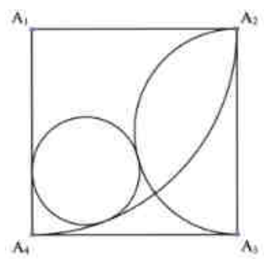
Il nostro ritardo ritorna, ma per fortuna voi non ci abbandonate.

4.1 [271]

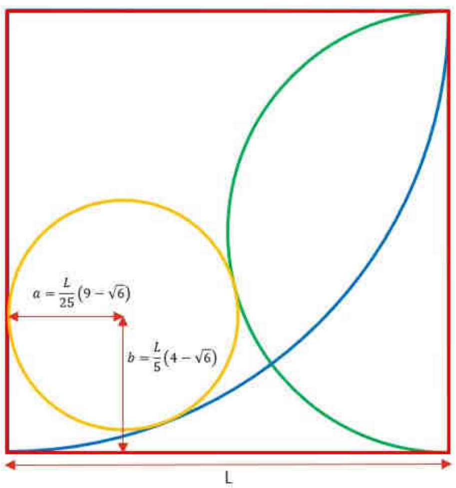
4.1.1 Saluti dal Giappone

Sì, ancora qualche parola sul Sangaku:

> *Avete un quadrato $A_1A_2A_3A_4$, di lato 25. Con centro in A_1, tracciate il quadrante di cerchio A_2A_4; indi, tracciate il semicerchio A_2A_3 e il cerchio (completo) tangente al quadrante di cerchio, al semicerchio e al lato A_1A_4. Trovate il raggio di questo cerchio.*



Il mese scorso abbiamo visto le soluzioni di ***Valter*** e ***Galluto***, ci siamo però persi quella di ***BR1***, completamente grafica:



E questo ci sembra tutto quello che ci siamo dimenticati il mese scorso. Procediamo.

4.2 [273]

4.2.1 Salutate il giardino!

Il Capo ultimamente si diletta con problemi geometrici senza dare le figure, pur sapendo di quanto riesce a confondere le idee dei nostri lettori. In questo caso il problema non aveva praticamente alcun dato:

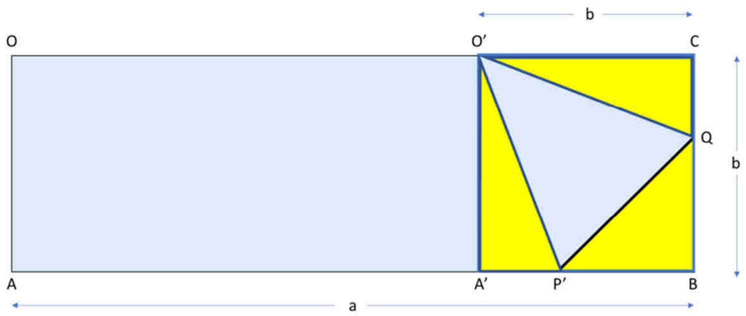
> *Sia il nostro giardino un rettangolo di vertici OABC; siano definiti i punti P su AB e Q su BC; consideriamo i triangoli APO, PBQ e QCO: vorremmo che le aree di questi tre triangoli fossero uguali, date le proporzioni AP/PB e BQ/QC.*

Ciononostante i nostri bravi solutori si sono dati da fare. Come sempre partiamo da ***Valter***:

> Senza perdita di generalità, mi pare, assumo che i lati OA/BC abbiano lunghezza 1 e AB/CO lunghezza “x”. Sistemo il rettangolo in un sistema di assi cartesiano con coordinate: O=(0,0), A=(1, 0), B(1, x) e C(0, x).
>
> Costruisco il segmento PQ parallelo alla diagonale AC del rettangolo; motivo questa mia scelta a seguire.
>
> Data una costante “c”, da definire, i punti P e Q dovranno avere, quindi, coordinate: (1, x–cx) e (1–c, x).
>
> In questo modo, comunque si scelga c, i triangoli APO/QCO hanno sempre la stessa area: 1*(x–xc) = x*(1–c).
>
> Variando in modo continuo c sposto il lato PQ di PBQ sino a che la sua area corrisponde alle altre due. Trovo, quindi, il valore di “c” risolvendo: x*(1–c) = c*(xc); delle due soluzioni quella buona è (–1+√5)/2. L’altra soluzione possibile dell’equazione quadratica in c: (–1–√5)/2, è da scartare, essendo negativa.
>
> (–1+√5)/2 è il reciproco del numero aureo; con facile calcolo si ha che la proporzione AP/PB e BQ/QC è ϕ.

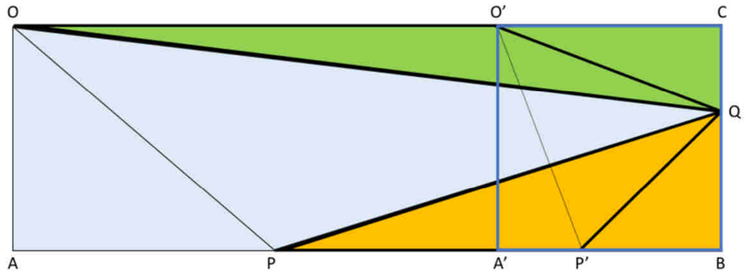
Il numero aureo! Il Capo è contentissimo. Vediamo ora la soluzione di ***Trekker***, che arriva a conclusioni simili in modo diverso:

> Provo a proporre una soluzione che non sia puramente algebrica.
>
> Prendiamo il solito rettangolo generico ABCO i cui lati misurano a e b con a maggiore di b e costruiamo sulla sinistra il quadrato A’BCO’ di lato b e risolviamo il problema prima su questo appezzamento di terreno.



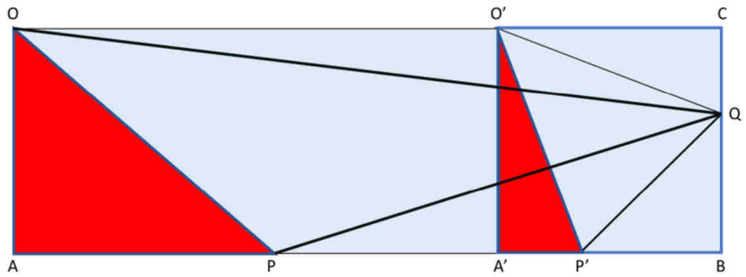
> Se vogliamo che i tre triangoli gialli abbiamo la stessa area bisogna che:
>
> - l’area del triangolo A’P’O’ sia uguale all’area del triangolo O’QC: ne deduciamo che A’P’ = CQ e P’B=BQ
> - l’area del triangolo A’P’O’ sia uguale all’area del triangolo P’BQ, cioè anche A’P’ * A’O’ = P’B * BQ. Possiamo scrivere questa uguaglianza anche come A’P’ * A’B = P’B * P’B che è equivalente alla proporzione A’B: P’B = P’B: A’P’
>
> Da quest’ultima proporzione osserviamo perciò che P’ divide in modo “**aureo**” il segmento A’B e Q divide in modo “**aureo**” il segmento BC.

Prendiamo ora il punto P che divide in modo "aureo" il segmento AB. Siccome il rapporto di proporzione fra AB e A'B è *a*/*b* lo sarà anche fra AP e A'P', PB e P'B, OC e O'C.



Osserviamo ora che i due triangoli verdi OQC e O'QC hanno la stessa altezza CQ ma lunghezza delle basi in proporzione *a*/*b*. Anche le loro aree quindi saranno nella stessa proporzione.

Un ragionamento analogo si applica ai due triangoli arancioni PBQ e P'BQ ed ai triangoli rossi APO e A'P'O'.



Quindi i "grandi" triangoli verdi, arancioni e rossi hanno tutti e tre le aree in proporzione *a*/*b* con i corrispondenti tre triangoli gialli (con cui "condividono" l'altezza) e che a loro volta hanno aree uguali. Si deduce quindi che hanno aree uguali anche i triangoli APO, OCQ e PBQ. E quindi il punto P lo abbiamo scelto bene.

In conclusione la decorazione richiesta si ottiene dividendo in modo "aureo" la base AB e l'altezza BC e posizionando i punti P e Q in modo che i segmenti più grandi delle "divisioni auree" abbiano un estremo in B.

Mentre cerchiamo di smuovere il Capo dal suo brodino di giuggiole, arriva la versione di ***Bluemonday***:

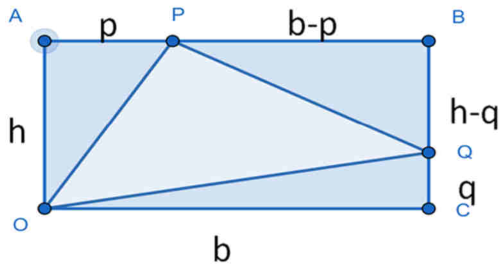
Innanzitutto poniamo la lunghezza di AO=*a* e AB=*b* e Per i rapporti richiesti abbiamo: AP/PB = 1/*phi* = (√5–1)/2 e BQ/QC=*phi*=(√5+1)/2.

In questo case tutti e tre i triangoli avranno area uguale pari a *ab*/(2**phi*^{2}). Infatti:

- 2*area(AOP) = *a* * AP = *a** (PB * 1/*phi*) = *a* *(*b*/*phi*)* 1/*phi* = *ab*/*phi*^{2}
- 2*area(OCQ) = *b* * QC = *b* * QC (*phi*)*(1/*phi*) = *b* * QC* (QC/BQ)*(*a*/BQ) = *ab*(QC^2/BQ^2) = *ab*/*phi*^{2}
- 2*area(OBP) = BQ *BP = (*a*/phi)*(*b*/phi) = *ab*/*phi*^{2}

Dove nelle catene di uguaglianze abbiamo più volte usato la proprietà circa due segmenti in proporzione aurea ("parte piccola sta alla grande come la grande sta alla somma dei lati") applicata ai lati AO e AB del rettangolo.

Piove prezzemolo matematico da tutte le parti! Il prossimo è ***Galluto***:



Chiamo b ed h la base e l'altezza del rettangolo. AP = p e PB = $b–p$, CQ = q e QB = $h–q$; chiamo inoltre $a = h/b$ il rapporto tra altezza e base del rettangolo. L'equivalenza dei triangoli APO e COQ mi comporta che: $ph = qb$ e che è anche: $a = q/p$.

L'equivalenza di PBQ e di APO mi da: $(b–p)*(h–q) = bh + pq – ph – bq = ph$.

Sostituendo in tutti i termini h e q ottengo: $ap^2 – 3apb + ab^2 = 0$.

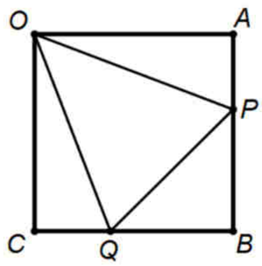
A questo punto semplifico levando tutti gli a (il che significa che il risultato non dipende dal rapporto tra i lati del rettangolo), e considerando p come l'incognita della mia equazione di secondo grado… Ottengo che $p = b * \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; delle due soluzioni quella col più non interessa (avremmo un p maggiore di b) e quindi $p = b * \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $b–p = b * \left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = b * \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ che è una vecchia conoscenza anche nota come φ!

E (a questo punto, ovviamente) $p/(b–p) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} / \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$.

Lo stesso risultato ottengo per q e $h–q$; soltanto, il fattore comune che semplificherò strada facendo non è a ma $1/a$.

Ogni volta che proponiamo un bel problemino geometrico con risultato simpatico, il numero dei solutori si moltiplica. Qui abbiamo ancora la versione di ***trentatre***:

Il problema è invariante per una dilatazione lineare, che trasforma le aree in modo uniforme. Si può quindi ridurre a <u>un quadrato di lato unitario</u>.



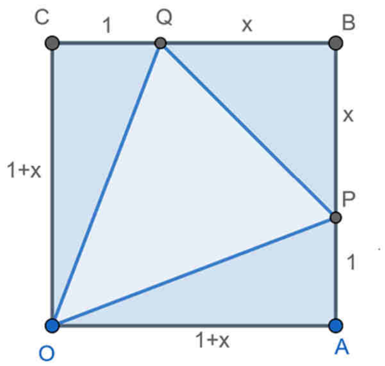
Con $x = AP$ deve essere $OA \cdot AP = (AB - AP)^2$ cioè $x = (1-x)^2$, la cui soluzione minore di 1 è

$$x = (3-\sqrt{5})/2 = 0.38196$$

- che si può scrivere $x = 1/\varphi^2$ con $\varphi = 1.61803$: la sezione aurea.

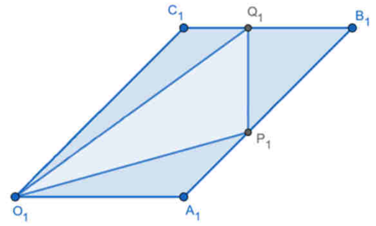
P e Q dividono i lati in due segmenti con rapporto $AP/PB = CQ/QB = x/(1-x) = 1/\varphi$. Naturalmente questo vale per qualsiasi rettangolo.

L'invariante è sempre una bella parola da piazzare in una soluzione! E non possiamo concludere senza il nostro caro ***Franco57***:



Il quesito si risolve ancor più facilmente per un quadrato (rappresentato nella figura a fianco). In questo caso chiaramente APO deve essere uguale a QCO perché sono due triangoli rettangoli di area uguale con un cateto uguale (un lato del quadrato); in particolare CQ = AP e quindi PB = QB.

Volendo ricavare il rapporto tra PB e PA, poniamo AP = 1 e PB = x. Dalla proprietà che i triangoli APO e PBQ abbiano la stessa area, ricaviamo l'equazione $(1+x)\cdot 1/2 = x^2/2$, quindi $(1 + x): x = x: 1$ che è la definizione di rapporto aureo, vale a dire $x = \varphi = (1+\sqrt{5})/2$, in altre parole P e Q devono dividere i lati dove giacciono secondo la sezione aurea.



Ora, considerando che una trasformazione affine mappa un qualsiasi quadrato in un qualsiasi parallelogramma e che mantiene i rapporti sia tra le lunghezze che tra le aree, senza troppa fatica abbiamo la prova che la stessa proprietà e valida non solo per un rettangolo ma anche più in generale per un parallelogramma (che ho rappresentato nella seconda figura con il pedici a 1) dove accade che se i triangoli APO, PBQ e QCO hanno area uguale allora P e Q dividono rispettivamente i lati BA e BC secondo la sezione aurea.

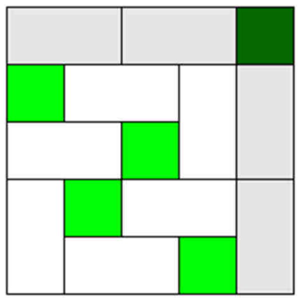
E con questo ci fermiamo, e passiamo al secondo problema.

4.2.2 Ci inventiamo le parole

Una dominazione dovuta al domino? Ebbene sì, il secondo problema era centrato sulla copertura della scacchiera con tessere da domino:

Una scacchiera N×N ha le caselle delle stesse dimensioni di mezza tessera da domino. Diciamo che la scacchiera è quasi dominata se esiste almeno una disposizione dei domino non sovrapponentesi sulla scacchiera tale che in ogni riga e in ogni colonna si abbia una e una sola casella scoperta. A che condizioni deve sottostare N per far sì che la scacchiera possa essere quasi dominata?

Il primo a scriverci è stato ***.mau.***, che ha mandato alcuni contributi, il primo:



Per il momento, alcuni risultati preliminari per il problema 2. I quadrati 2×2 e 3×3 si dimostrano facilmente impossibili; il 4×4 e 5×5 sono possibili, come da figura allegata. Questo significa che sono possibili i quadrati di lato $4n$ (si mettono in diagonale tanti quadrati 4×4 e si riempiono con tessere del domino gli altri impliciti quadrati 4×4), i quadrati di lato $5+4n$ (si parte da un quadrato di lato 5; aggiungendo quadrati 4×4 in diagonale restano sempre rettangoli con un lato pari che possono essere ricoperti da domino). Ho il sospetto che gli altri quadrati non possano essere ottenuti e ho anche il sospetto di avere letto la dimostrazione (e non vorrei averci anche fatto un quizzino...), però al momento non mi viene in mente.

Anche se ci aspettiamo un ritorno, il prossimo contributo di ***.mau.*** ci lascia sospesi:

Non mi sono perso. Solo che da tablet non mi è semplicissimo scrivere la dimostrazione che non è possibile risolvere il problema nei casi $4n+2$ e $4n+3$. Il punto di base è che in questi casi il numero di dòmini da inserire è dispari. Quindi senza perdita di generalità si può immaginare che le tessere orizzontali siano dispari e quelle verticali pari. Ma questo significa a sua volta che il numero di quadretti orizzontali per riga e quello di quadretti verticali per colonna hanno parità diversa, il che è assurdo. (Nel primo caso devono essere entrambi dispari, nel secondo entrambi pari). Poi con calma lo scrivo bene.

La calma non dev'essere arrivata, ma qui adesso arriva ***Valter***:

Provo che $N^2–N$ deve essere ≡ 0 mod4 per far sì che la scacchiera possa essere quasi dominata. Il numero totale delle tessere in orizzontale e quelle in verticale deve avere stessa parità. Giustifico questa mia affermazione nel proseguo; se vera, il numero di tutti i domino è pari.

Essendo pari, dato che ogni tessera occupa due caselle, quelle coperte dal domino è ≡ 0 mod4.

Se $N^2–N$, numero di caselle ricoperte, è ≡ 2 mod4, per esempio per N = 6 o 7, non si può fare.

$N^2–N$ può essere solo ≡ 0 o 2 mod4; vale 2 sia per N pari ≡ 2 mod4 che per N dispari ≡ 3 mod4.

Parto con N pari e $N^2–N$ ≡ 2 mod4:

- il numero totale dei domino: $(N^2–N)/2$, sulla scacchiera "quasi" dominata è, quindi, dispari

- in riga uno, essendoci "V" dispari caselle dominate, vi sono pure, dispari domino verticali

- in riga due, ereditando i "V" domino di riga uno, ve ne sono in numero pari, zero compreso

- iterando sino a riga N, si ottiene che, con N ≡ 2 mod4, i domino in verticale sono dispari

- ruotando di 90°, righe e colonne si scambiano e, quindi, lo sono, pure, quelli orizzontali.

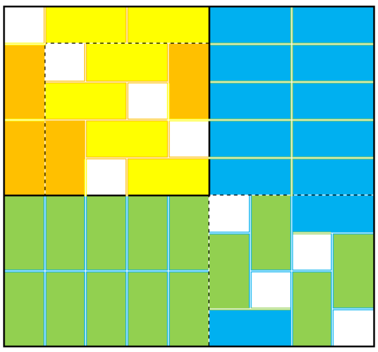
Con N dispari ≡ 3, ovvero –1, mod4:

- con un discorso simile, si ha che, i domino in verticale, dovrebbero essere in numero pari

- scambiando, poi, le righe con le colonne, lo dovrebbero essere pure quelli in orizzontale.

Mostrare che si può fare, solo con N ≡ 0 oppure 1 mod4, non vuol dire che si riesca davvero.

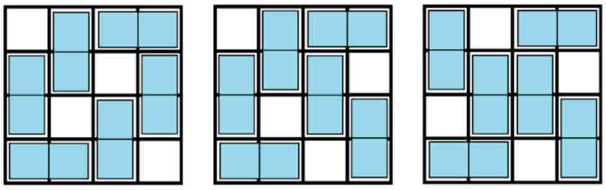
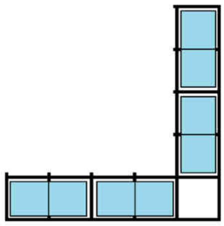
Devo fornire un metodo per costruire scacchiere quasi dominate; lo faccio usando un disegno:



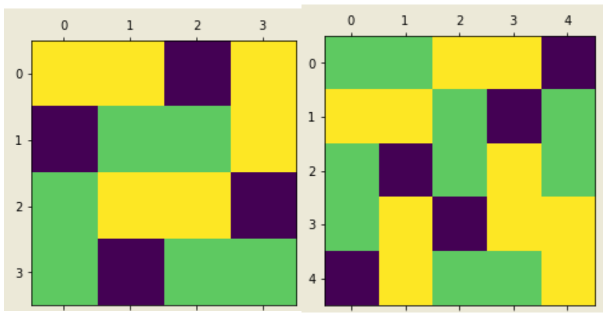
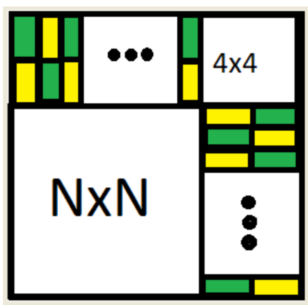
Le due scacchiere 4×4, con due lati tratteggia, mostrano come farlo nel caso di N ≡ 0 mod4. Dalla loro unione si ricava come costruirne una 8×8 e, iterando tale schema, le successive.

Discorso analogo per la scacchiera 5×5, bordata in nero, in alto a destra, e la totale 9×9.

La prossima soluzione è di ***Lorenzo***:

> Per $N < 4$ non vi sono soluzioni. Per $N = 4$ le possibili collocazioni delle caselle scoperte sono tre, modulo simmetrie (rotazione nel caso a, ribaltamento nel caso c, entrambi nel caso b).
>
> 
>
> a b c
>
> A una qualsiasi di queste configurazioni si possono aggiungere una riga e una colonna, con la casella in comune scoperta, ottenendo ancora una scacchiera 5×5 *quasi dominata*.
>
> 
>
> Pertanto, una condizione di certo *sufficiente* affinché la scacchiera sia *quasi dominata* è $N = 4k$ oppure $N = 4k + 1$, con k intero positivo: basta infatti disporre lungo la diagonale principale k blocchi 4×4 così formati, riempire i restanti $k(k - 1)$ blocchi 4×4, ciascuno con 8 tessere da domino, ed eventualmente aggiungere una riga e una colonna con la casella in comune scoperta (impiegando altre $4k$ tessere).

Tante figure e tanti colori interessanti, e dimostrazioni per figura bellissime, come quelle di ***Bluemonday***:

> Ottengo una scacchiera può essere quasi dominata se n=4k, 4k+1. Ho il fortissimo sospetto che valga anche l'implicazione inversa (ovvero che non é possibile quasi-dominare i casi 4k+2 e 4k+3) ma per ora non sono riuscito a trovare una dimostrazione. Ho allegato una soluzione per il caso 4 e il caso 5.
>
> 
>
>
> Poi allego anche una dimostrazione "per immagine" che dimostra come se abbiamo un soluzione per il caso n, lo possiamo avere anche per il caso n+4, mettendo una copia della quasi dominazione della scacchiera 4×4 nell'angolo in alto in modo tale che le due quasi-dominazioni non interagiscono.
>
> 
>

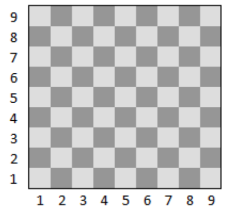
Questo che dimostra che tutti i casi 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, ... sono quasi-dominabili.

Ovviamente la parità ed il numero 4 giocano un ruolo importante in questa soluzione: si nota anche nella soluzione di ***Galluto***:

Il problema è ovviamente che una tessera di domino copre una casella bianca ed una nera; per cui, le caselle che devono rimanere scoperte devono essere N/2 bianche e N/2 nere se N è pari, e (N+1)/2 bianche e (N–1)/2 nere se N è dispari (perché le bianche devono essere una di più delle nere per N dispari? Perché ho deciso che la cella nell'angolo in basso a sinistra è bianca e che quindi, per N dispari, la scacchiera avrà una casella bianca in più delle nere).

Per esempio, su una scacchiera normale 8x8 dovrò lasciare scoperte 4 caselle bianche e 4 nere, su una scacchiera 9x9 ne dovrò lasciare scoperte 5 bianche e 4 nere; solo così le caselle coperte saranno bianche e nere nella stessa quantità e quindi ricopribili dalle tessere del domino.

Inoltre, ho deciso che anche le colonne della scacchiera sono contraddistinte da numeri (come le righe) e non da lettere:



le coordinate di una casella bianca sono ambedue dispari, o ambedue pari; **la somma delle due coordinate, quindi, è sempre pari.**

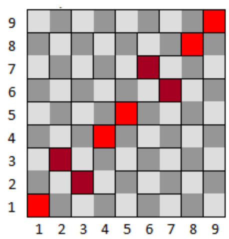
Le coordinate di una casella nera, invece, sono sempre una pari e l'altra dispari; **la somma delle due coordinate, quindi, è sempre dispari.**

Poiché le N caselle che devono rimanere scoperte devono essere una ed una sola per ogni riga ed ogni colonna, la somma delle loro ascisse deve essere $\sum_{n=1}^{N} n$ e altrettanto la somma delle loro ordinate; in tutto quindi, la somma delle due coordinate delle nostre N caselle vale $2 * \sum_{n=1}^{N} n$, che è un bel numero **pari.**

Il fatto è che non potrò mai avere un totale **pari** se avrò un numero **dispari** di addendi **dispari**; quindi la "quasi dominazione" non è possibile se int(N/2) è dispari ed è possibile se è pari, e cioè se **int(N/2) = 2*a** con **a** intero positivo.

Ad esempio, non potrò quasi dominare una scacchiera 6x6 o 7x7, perché non potrò lasciare scoperte 3 caselle nere e, rispettivamente, tre o quattro caselle bianche; potrò quasi dominare una scacchiera 8x8 o 9x9, perché le caselle nere scoperte saranno 4 (e 4 o 5 bianche).

Rimane da capire se è comunque possibile "tassellare" la superficie intorno alle caselle scoperte, ma direi che questo dipende solo da una scelta appropriata delle caselle scoperte stesse; ad esempio, lo schema qui sotto funziona con N = 4 e 5, e poi con N = 8 e 9, ed è ampliabile a scacchiere con N = 12 e 13 (e poi 16 e 17, ecc.)



La versione di ***BR1*** comincia con una bella battuta:

Vediamo qui sotto se si riesce ad evitare ai Rudi di sprecare gli *uggiosi pomeriggi invernali* in infruttuosi tentativi di *quasi-dominanza*…

La prima cosa da fare davanti ad una nuova scacchiera di ordine N è il decidere dove piazzare i *buchi*; affinché ve ne sia uno ed uno solo per riga e colonna, questi devono essere N: denominiamo con $P_{abc...k}$ una generica configurazione dei *buchi* stessi, dove *a, b, c, …, k* sono gli interi da 1 ad N che ne indicano la posizione orizzontale rispettivamente nella prima, seconda, …, Na colonna. Ad esempio, con N = 5, la configurazione P_{24351} sarà la seguente, con i buchi indicati in rosso:

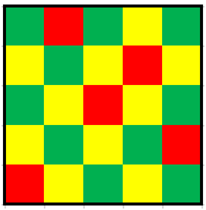


Figura 1: P_{24351}, una configurazione di *buchi* presa a caso

Dato N, le possibili configurazioni sono N x (N-1) x … x 2 x 1 = N!, e sono cioè tutte le *permutazioni* di N oggetti, dove come *oggetti* possiamo a piacimento scegliere le righe o le colonne; si intenderanno nel seguito queste ultime. Le permutazioni possono essere ordinate per pedice crescente; proseguendo con l'esempio N = 5, le prime 6 permutazioni saranno:

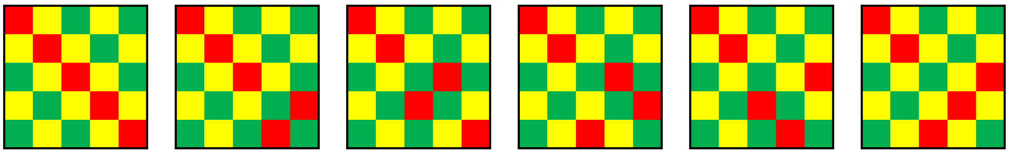


Figura 2: P_{12345}, P_{12354}, P_{12435}, P_{12453}, P_{12534} e P_{12543}

Adesso, indicando con V e G il numero residuo di caselle verdi e gialle sulla scacchiera, e con D il valore assoluto della differenza fra V e G, si può osservare che:

- P_{12345}: V = 8, G = 12, D = 4
- P_{12354}: V = 10, G = 10, D = 0; si ottiene da P_{12345} scambiando di posizione le colonne 4 e 5
- P_{12435}: V = 10, G = 10, D = 0; si ottiene da P_{12345} scambiando di posizione le colonne 3 e 4
- P_{12453}: V = 10, G = 10, D = 0; si ottiene da P_{12435} scambiando di posizione le colonne 3 e 5
- P_{12534}: V = 10, G = 10, D = 0; si ottiene da P_{12435} scambiando di posizione le colonne 4 e 5
- P_{12543}: V = 8, G = 12, D = 4; si ottiene da P_{12345} scambiando di posizione le colonne 3 e 5

In generale, con N qualsiasi, tutte le N! permutazioni sono ottenibili con uno o più scambi di colonne a partire da una delle permutazioni precedentemente generate.

Tornando all'esempio N = 5, se si tentasse di *quasi-dominare* le 6 configurazioni di **Figura 2**, occorrerebbero 10 tessere del domino; necessariamente, ciascuna delle tessere dovrebbe coprire una casella verde ed una gialla: cosa manifestamente impossibile nel primo e nel sesto caso, quando V e G differiscono fra loro. Se ne trae in generale che: **condizione necessaria per poter quasi-dominare una scacchiera di ordine N, è che sia V = B (cioè D = 0) per almeno una delle N! permutazioni.**

Ora, quando si scambiano due colonne per generare una diversa permutazione, possono verificarsi due casi:

- le colonne da scambiare distano fra loro un numero *dispari* di caselle: in questo caso entrambe le caselle che vengono scoperte sono di *colore diverso* rispetto alla configurazione di partenza, cioè:

$$\begin{cases} V_{Dopo} = V_{Prima} \pm 2 \\ G_{Dopo} = G_{Prima} \mp 2 \\ D_{Dopo} = \left|V_{Dopo} - G_{Dopo}\right| = |V_{Prima} \pm 2 - G_{Prima} \pm 2| = |D_{Prima} \pm 4| \rightarrow D_{Dopo} = D_{Prima}\ (mod\ 4) \end{cases}$$

- le colonne da scambiare distano fra loro un numero *pari* di caselle: in questo caso entrambe le caselle che vengono scoperte avranno lo *stesso colore* rispetto alla configurazione di partenza, cioè:

$$\begin{cases} V_{Dopo} = V_{Prima} \\ G_{Dopo} = G_{Prima} \\ D_{Dopo} = \left|V_{Dopo} - G_{Dopo}\right| = |V_{Prima} - G_{Prima}| = D_{Prima} \rightarrow D_{Dopo} = D_{Prima}\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Quindi, per qualsiasi N e qualsiasi scambio di colonne, la quantità *D (mod 4)* rappresenta una caratteristica costante valida per tutte le N! permutazioni: se il valore di D della prima permutazione è un multiplo di 4, si può sperare di trovare permutazioni che azzerino D e lascino aperta la possibilità di *quasi-dominare* la scacchiera, altrimenti non c'è scampo…

Osservazione: **si noti che l'avere D = 0 per una certa permutazione non garantisce che essa sia quasi-dominabile: ad esempio la seconda permutazione della Figura 2 non è tassellabile, a causa della casella isolata in basso a destra.**

Visto che il valore di D della prima permutazione è determinante per stabilire se una scacchiera di ordine N sia *quasi-dominabile*, procediamo calcolandone il valore per N generico (assumendo di disporre sempre di scacchiere con la prima casella in alto a sinistra di colore verde):

- con N *pari*:
  - prima di disporre i *buchi*, vi sono in partenza N^2 caselle, con:

$$\begin{cases} V = \dfrac{N^2}{2} \\ G = \dfrac{N^2}{2} \end{cases}$$

  - gli N *buchi* rossi della prima permutazione vanno tutti disposti lungo la diagonale verde che parte dalla prima casella in alto a sinistra ed arriva all'ultima in basso a destra; copriranno quindi N caselle tutte verdi, e si ha:

$$\begin{cases} V = \dfrac{N^2}{2} - N \\ G = \dfrac{N^2}{2} \end{cases}$$

  - di conseguenza:

$$D = |V - G| = \left|\frac{N^2}{2} - N - \frac{N^2}{2}\right| = N$$

  - sarà allora, per tutte le permutazioni delle scacchiere di lato N *pari*:

$$D(mod\ 4) = 0\ sse\ N(mod\ 4) = 0 \rightarrow N = 4, 8, 12, \ldots$$

- con N dispari:
  - prima di disporre i *buchi*, vi sono in partenza N^2 caselle, con:

$$\begin{cases} V = \dfrac{N^2 + 1}{2} \\ G = \dfrac{N^2 - 1}{2} \end{cases}$$

  - gli N *buchi* rossi della prima permutazione vanno tutti disposti lungo la diagonale verde che parte dalla prima casella in alto a sinistra ed arriva all'ultima in basso a destra; copriranno quindi N caselle tutte verdi, e si ha:

$$\begin{cases} V = \dfrac{N^2+1}{2} - N \\ G = \dfrac{N^2-1}{2} \end{cases}$$

- di conseguenza:

$$D = |V - G| = \left| \frac{N^2+1}{2} - N - \frac{N^2-1}{2} \right| = N - 1$$

- sarà allora, per tutte le permutazioni delle scacchiere di lato N *dispari*:

$$D(mod\ 4) = 0\ sse\ (N-1)(mod\ 4) = 0 \rightarrow N(mod\ 4) = 1 \rightarrow N = 1, 5, 9, \ldots$$

Riassumendo:

- Con *N (mod 4) = 0*, possono esistere permutazioni *quasi-dominabili*
- Con *N (mod 4) = 1*, possono esistere permutazioni *quasi-dominabili*
- Con *N (mod 4) = 2*, non possono esistere permutazioni *quasi-dominabili*
- Con *N (mod 4) = 3*, non possono esistere permutazioni *quasi-dominabili*

Escluse quindi le ultime due casistiche sopraelencate, per le quali non può esistere nessuna soluzione, resta da vedere se nelle prime due è sempre possibile trovare una permutazione che sia *quasi-dominabile*.

Cominciamo dal caso N = 4 (cioè appartenente alla casistica *N (mod 4) = 0*): se si escludono rotazioni e riflessioni, rimangono delle 4! = 24 permutazioni solo queste 7:

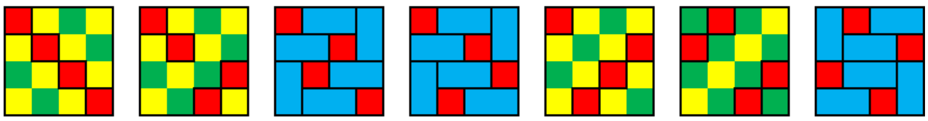


Figura 3: le 7 permutazioni significative con N = 4

Si vede che 3 di esse consentono una tassellatura *quasi-dominabile*, con le tessere del domino mostrate in azzurro (le altre, no).

Se ora prendiamo l'ultima permutazione della **Figura 3**, e la replichiamo in diagonale in basso a destra, ecco che spunta fuori una soluzione *quasi-dominabile* anche nel caso N = 8; ed il tutto può essere replicato *ad infinitum* per N = 12 eccetera:

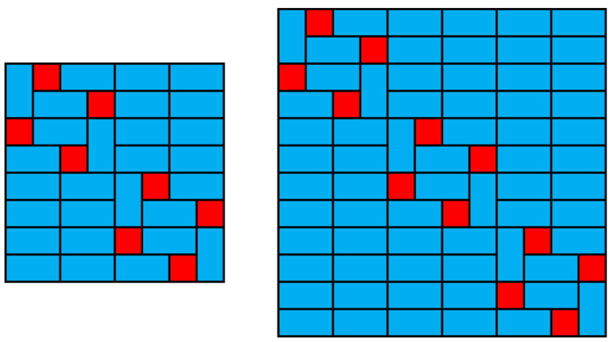


Figura 4: Soluzioni possibili per *N (mod 4) = 0*, con N=8 ed N=12

Quindi, tutte le casistiche con *N (mod 4) = 0* sono *quasi-dominabili*.

Poi, nelle casistiche *N (mod 4) = 1*, con N = 5 ed ancora escludendo rotazioni e riflessioni, le permutazioni significative sono 23, 10 delle quali *quasi-dominabili*; è sempre possibile ricavare una soluzione *quasi-dominabile* partendo dalla corrispondente soluzione per N – 1, aggiungendo una colonna a destra ed una riga in basso, come si può vedere nella **Figura 5** che segue:

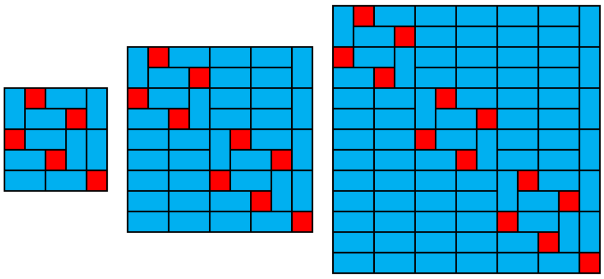


Figura 5: Soluzioni possibili per *N (mod 4) = 1*, con N = 5, N = 9 ed N = 13

Per concludere, il caso N = 1 appartiene alla casistica *N (mod 4) = 1*, ed è quindi *quasi-dominabile*; basta non avere la pretesa di inserire qualche tessera del domino…

Beh, battutacce come se piovesse, ma tutte chiamate dal Capo e dalle sue idee di dominazione del mondo alla "scienziato pazzo". Ma i nostri solutori scherzano solo sul problema, non sulla matematica. Il prossimo è ***Franco57***:, sperando di aver catturato l'ultima versione del suo lavoro

Condizione necessaria e sufficiente affinché la scacchiera possa essere quasi dominata è che N sia un multiplo di 4 oppure il suo successivo, cioè della forma N=4k oppure N=4k+1 per k intero positivo o nullo.

La parte impegnativa del quesito consiste nel dimostrare che la condizione è necessaria e comincio proprio da questa. Numerando progressivamente righe e colonne della scacchiera distinguiamo quelle pari (P) da quelle dispari (D). Anche le caselle sono classificabili in pari e dispari in base alla parità tra la somma della riga e della colonna corrispondenti. Quindi, per capirci, cominciando a numerare righe e colonne dall'angolo in basso a sinistra, le caselle nere di una scacchiera standard sono pari, le bianche dispari. Le caselle dispari (D) sono di due sottotipi: PD se sono all'incrocio tra una riga P e una colonna D; DP se all'incrocio tra una riga D e una colonna P. Analogamente caselle pari (P) si dividono nei sottotipi PP e DD (figura sotto).

Poiché una tessera di domino si può collocare solo tra due caselle contigue, quindi una P e una D, le caselle coperte P sono tante quelle D. Se N è pari, poniamo N=2h, abbiamo nella scacchiera tante caselle P quante caselle D, quindi, in una configurazione nella quale è quasi dominata, anche tra le N caselle scoperte ve ne sono tante P quante D, quindi h. Se invece N è dispari, poniamo N=2h+1, abbiamo che nella scacchiera le caselle P sono una di più delle caselle D, quindi anche per le N caselle scoperte quelle P sono una di più di quelle D, quindi queste ultime sono h.

Indicando con "#" la cardinalità, con Rx le Righe di tipo x, con la Cx le Colonne di tipo x, con Sx, Sxy le caselle Scoperte di tipo x o xy e considerando che c'è una sola casella scoperta sia per riga che per colonna, abbiamo in entrambi i casi di parità di N (osservando che il numero di righe e colonne pari vale sempre h):

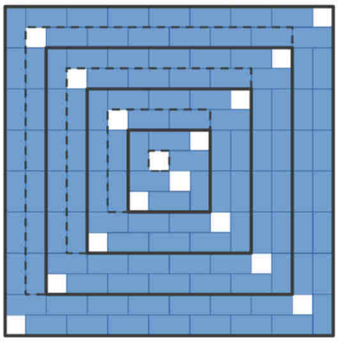
1) #SPP + #SPD = #RP = h

2) #SPP + #SDP = #CP = h

3) #SPD + #SDP = #SD = h

Dalle prime due ricaviamo che #SPD = #SDP, dalla terza che h è pari perciò che N deve essere sempre della forma N=4k oppure N=4k+1.

La parte facile del quesito è mostrare che la condizione è sufficiente, cioè che per N=4k e per N=4k+1 configurazioni di scacchiera quasi dominata si possono effettivamente creare.



Per farlo ci sono moltissimi modi. Io propongo la figura sopra che mostra come si può fare e mi pare abbastanza autoesplicativa da evitare noiose descrizioni a parole o algebriche.

Le scacchiere quadrate con lato multiplo di 4 sono evidenziate da una riga blu scuro spessa, quelle con il lato successivo a un multiplo di 4 con linea tratteggiata.

Se non l'avete notato, i risultati tendono ad essere equivalenti, ma i percorsi diversi, e per concludere vediamo la versione di ***trentatre***:

Indico con *TD*: una tessera del domino; *CS*: una "casella scoperta"; $N \times N$ una scacchiera di lato N; Q_N una scacchiera "quasi dominata" di lato N.

Le *CS* sono disposte una sola casella per riga e colonna.

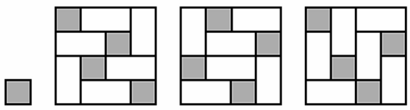
Le uniche Q_N esistenti sono

[1] $\boxed{N = 4k \text{ e } N = 4k+1,\ \ k \geq 0}$ cioè $N = 1,4,5,8,9,12,13,16,17,\ldots$

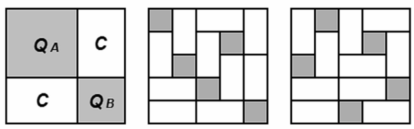
- non esistono invece per

[2] $\boxed{N = 4k+2 \text{ e } N = 4k+3,\ \ k \geq 0}$ cioè $N = 2,3,6,7,10,11,14,15,18,\ldots$

- il numero di *TD* è $N(N-1)/2$, pari in [1] e dispari in [2] .

1 

Le Q_N più semplici si ottengono per tentativi; Q_2, Q_3 non esistono; in fig. 1 la soluzione Q_1 composta da un sola *CS* e le uniche tre Q_4 esistenti (salvo rotazioni e riflessioni).

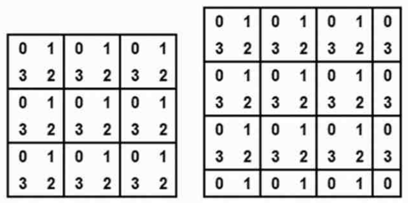
2 

Le Q_N si possono comporre come in fig. 2. Q_A, Q_B sono due soluzioni note, in C solo tessere *TD* ; si ottiene Q_{A+B} dove le *CS* sono corrette perché lo sono in Q_A, Q_B; almeno uno dei lati *A, B* è pari altrimenti il numero di caselle in C è dispari e non si può riempire di *TD* ; usando solo le Q_1, Q_4 in successione si ottengono Q_N per ognuno dei valori [1]

- per i valori pari basta Q_4, per quelli dispari si aggiunge Q_1

- le Q_N composte non sono le uniche; p.es. in fig. 2 solo la prima Q_5 è composta.

Occorre quindi dimostrare che le [2] sono impossibili.

3


In fig. 3 le caselle N×N sono numerate con righe e colonne alternate uguali, che formano gruppi di caselle 2×2 uguali.

Dato un qualsiasi insieme di caselle scelte in N×N il numero di caselle di tipo diverso si indica con un vettore di quattro termini, uno per ogni tipo.

P.es. i vettori delle scacchiere in figura, di ordine 6 e 7, sono $[9,9,9,9]$ e $[16,12,9,12]$.

Per ogni N occorre calcolare due vettori, uno per le caselle dell'intera scacchiera N×N e uno per l'insieme delle caselle *CS*. In generale i vettori sono diversi se N è pari, dove il numero di gruppi 2×2 è intero, oppure dispari dove questo non avviene.

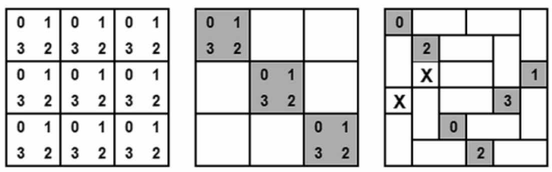
I vettori N×N si ricavano per estensione dei due in figura e sono

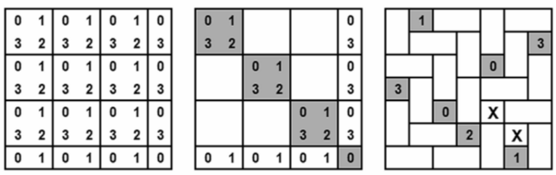
[3] N pari : $[F,F,F,F]$

- con $F = N^2/4$

[4] N dispari : $[F+N, F+E, F, F+E]$

- con $E = (N-1)/2$, $F = E^2 = (N-1)^2/4$.

4


5


I vettori *CS* si ricavano per estensione dalle figg. 4 e 5, e sono

[5] N pari : $[p,q,p,q]$ con $p+q = N/2$

[6] N dispari : $[p+1,q,p,q]$ con $p+q=(N-1)/2$

- dove p e q sono i numeri delle coppie di *CS* di tipo (0,2) e (1,3)

- infatti la proprietà "una *CS* per riga e colonna" non cambia per uno scambio di due *CS* e tutte si possono considerare raccolte nei blocchi 2×2 indicati in figura; in ogni blocco è possibile scegliere solo una delle coppie diagonali (0,2) o (1,3) e il vettore corrisponde a $p(0,2)+q(1,3)$ per un totale di N caselle; se N dispari compare una casella (0) separata.

Dai valori precedenti, sottraendo dai vettori N×N i vettori *CS*, si ricavano le caselle in cui collocare le tessere *TD*. Nel calcolo va tenuto presente che

(a) ogni *TD* può essere solo una delle coppie $(01),(03),(12),(32)$

(b) ogni casella corrisponde a una e una sola *TD*

- cioè le *TD* occupano tutte le caselle senza sovrapporsi

(c) il numero di *TD* da collocare deve essere in ogni caso $L = N(N-1)/2$.

Caso $N = 4k+2$: pari, valgono le [3] e [5]

- $p+q = N/2$: dispari quindi $p \neq q$
- assumendo $p > q$ si ha $e = p - q > 0 \rightarrow 2p = N/2 + e$
- caselle per le *TD*: $[F-p, F-q, F-p, F-q]$
- max *TD* di tipo (01) opp. (03) $= F - p$: cioè il numero di caselle (0)
- max *TD* di tipo (12) opp. (32) $= F - p$: cioè il numero di caselle (2)
- max *TD* che si possono inserire $2(F-p) = L - e < L$
- non si possono inserire tutti i *TD* e il caso $N = 4k+2$ <u>è impossibile</u>.

P.es. nell'ultima scacchiera in fig. 4, se inseriamo le *CS* in modo corretto, cioè conforme alla [5], e tentiamo di completare con le *TD*, restano sempre almeno due caselle isolate.

Caso $N = 4k+3$: dispari, valgono le [4] e [6]

- anche qui $p+q = (N-1)/2$: dispari
- salto i dettagli del calcolo, analogo al precedente e che porta allo stesso risultato: non si possono inserire tutti i *TD* e $N = 4k+3$ <u>è impossibile</u>.

Per l'ultima scacchiera in fig. 5 vale quanto detto sopra per la fig. 4.

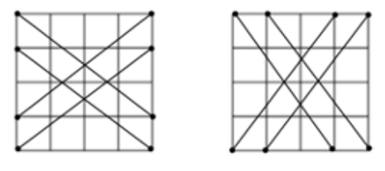
In definitiva si conferma che esistono solo le soluzioni [1].

Complimenti a tutti i solutori. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un quadrato di lato 4 è diviso in 4×4+16 quadrati di lato unitario. Quante coppie di vertici dei quadrati unitari hanno tra di loro distanza intera?

I cinque punti sulla stessa riga e i cinque punti sulla stessa colonna generano $\binom{5}{2} = 10$ *coppie a distanza intera, quindi avendo* 5 *righe e* 5 *colonne di vertici abbiamo in totale* $10(5+5) = 100$ *punti di questo tipo.*


9 *Altre linee, non immediate.*

Per quanto riguarda le coppie non sulla stessa riga e non sulla stessa colonna, deve essere valido il teorema di Pitagora con la distanza tra i due punti come ipotenusa e i cateti rispettivamente uno su una riga e uno su una colonna; inoltre, i cateti possono assumere al massimo il valore 4*. L'unica terna pitagorica con due valori minori o pari a* 4 *è* (3, 4, 5)*. Resta infine da considerare che è possibile tracciare, come da figura,* 8 *terne di questo tipo.*

Quindi, il totale è 100+8=108.

6. Pagina 46

Dividiamo in due parti la funzione $P(n)$: sia $S(n)$ la somma delle cifre di n e $N(n)$ il numero delle cifre di n, sia cioè $P(n) = S(n)+N(n)$.

Trattandosi di interi positivi, deve essere $S(n) \geq 1$ e $N(n) \geq 1$; quindi, deve essere $p(n) \geq 1+N(n)$ o, equivalentemente, $N(n) \leq P(n)-1$. Essendo richiesto $P(n) = 4$, dovrà essere $N(n) \leq 4-1 = 3$, quindi n non può avere più di tre cifre. Data l'equivalente condizione su $S(n)$, si verifica facilmente che i soli numeri che soddisfano la relazione data sono 3, 11, 20 e 100.

Nella maggior parte dei casi, i numeri n e n+1 differiscono solo per l'ultima cifra e, in questo caso, $P(n+1) = P(n)+1$ e quindi $P(n)-P(n+1) = -1$; d'altro canto, se l'ultima cifra di n è un 9 (e quindi l'ultima cifra di n+1 sarà uno zero) la differenza sarà maggiore e, all'aumentare del numero dei 9 all'estremità destra del numero, il valore di $P(n)\mathrm{P}(n+1)$ aumenterà.

Tranne nel caso nel quale n sia composto unicamente di 9, n e n+1 avranno lo stesso numero di cifre; se ammettiamo che n abbia k cifre 9 in coda, che σ sia la somma delle cifre restanti e che d sia il numero delle cifre che compongono n, allora sarà $P(n) = \sigma+9k+d$ e $P(n+1) = \sigma+1+k*0+d = \sigma+d+1$, sempre sotto la condizione che n non sia composto solo di 9: in questo ultimo caso, $P(n) = 9d+d = 10d$ e $P(n+1) = 1+(d+1) = d+2$.

Quindi, tenendo valida l'ipotesi che n non sia composto solo di 9:

$$P(n)-P(n+1) = \sigma+d+9k-(\sigma+d+1) = 9k-1.$$

Se invece n è composto unicamente di 9 otteniamo:

$$P(n)-P(n+1) = 10d-(d+2) = 9d-2.$$

Imponendo allora sulle espressioni a ultimo membro di entrambe le formule ricavate la condizione che siano maggiori di 50, si ottengono le condizioni $k > 51/9$ e $d > 52/9$ che, dovendo k e d essere interi, si trasformano nelle condizioni $k \geq 6$ e $d \geq 6$, ossia *qualsiasi numero terminante con almeno* 6 *cifre "*9*" soddisfa la condizione richiesta.*

7. Paraphernalia Mathematica

Una cosa piuttosto breve, ma analizzata nei dettagli e, ci pare, piuttosto interessante. Da assaporare con un grog in mano e dopo aver insegnato al pappagallo a dire: “Per mille spingarde!”.

7.1 La strada per altrove

Un problema standard della navigazione, almeno dopo la risoluzione del “problema delle longitudini”, è sempre stato il seguente: date le coordinate di due punti sulla superficie terrestre, calcolare quanto è lunga la strada e in che direzione si debba andare.

Se supponiamo di muoverci in aeroplano, o su uno specchio d’acqua senza ostacoli in mezzo, il problema può essere ridotto a pura geometria.

La soluzione di questo problema è possibile attraverso due metodi, noti con un mucchio di nomi: lossodromica e ortodromica, *rhumb line* e *great-circle line*, navigazione di Mercatore o di Cerchio Massimo, anche se le ultime due, di solito, si riferiscono più alla strada vera e propria da fare piuttosto che al calcolo relativo. Già, perché ci sono un mucchio di simpatici calcoli da fare. Ma partiamo dall’inizio.

Per prima cosa, ci serve una mappa.

I più attenti lettori di questa rubrica (i due correttori di bozze) ricorderanno[9] che questo è un guaio: il “Theorema Egregium” di Gauss ci impedisce di mantenere, nella trasformazione da sfera a foglio, la coerenza delle distanze e quindi delle superfici; la logica che si segue, in questo caso, è di utilizzare le trasformazioni che conservano “le cose che ci interessano”. Quando andate per mare, la cosa che vi interessa maggiormente è conservare gli angoli, che misurate di solito con una bussola (o un sestante, misurando l’altezza del Sole in quel momento).


10 *Mercatore e Tissot (da Wikipedia).*

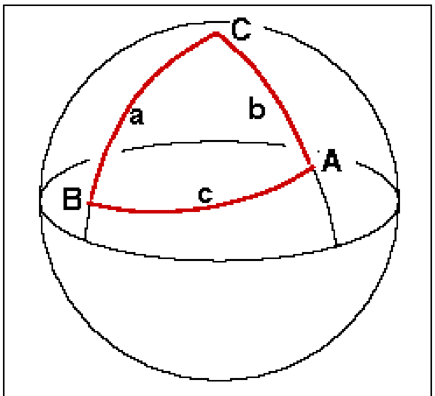
La trasformazione di Mercatore permette di conservare gli angoli rispetto a meridiani e paralleli, quindi fa perfettamente al caso nostro; in compenso, fa un disastro rispetto alle superfici. Il risultato viene di solito spiegato per via aneddotica (come ad esempio le dimensioni reali di Groenlandia e Africa), ma esiste un metodo matematicamente più espressivo e iconografico, quello delle (circonferenze) ***indicatrici di Tissot***. Nella figura a fianco, le vedete per la proiezione di Mercatore: nella “realtà” (ossia, sul globo terrestre), tutti i cerchi hanno le stesse dimensioni. Si vede, però, che *i paralleli sono linee orizzontali*, *così come i meridiani sono linee verticali*; una retta tra due punti, quindi, taglierà i meridiani sempre sotto lo stesso angolo, e quindi potrò seguire questa “retta” in barca semplicemente mantenendo lo stesso angolo di bussola[10].

Usare una rotta di questo genere o, come si dice, una *lossodromica* (in inglese è più semplice: *rhumb line*) è quindi molto semplice, visto che basta mantenere sempre lo stesso angolo con il meridiano, ma non è detto che sia la più breve “nella realtà”: infatti, anche se la linea retta è il percorso più breve tra due punti, su una sfera questo percorso è dato da un *arco di cerchio massimo*, che non coincide con la retta sulla carta. O, meglio, coincide solo se il punto di partenza e di arrivo sono entrambi sull’Equatore o sul medesimo meridiano.

[9] “Era meglio se era piatta”, PM di RM083, Dicembre 2005.

[10] Lo storico ordine “Nord 52 Ovest”, dato dal comandante del Carpathia per soccorrere i naufraghi del Titanic, significa esattamente questo: 52 gradi da Nord verso Ovest.

A questo punto, può essere interessante fare qualche calcolo: siccome siamo in mare[11], utilizzeremo le miglia nautiche, che hanno anche, nel caso del calcolo a mano, l'interessante caratteristica di essere circa[12] pari all'arco di meridiano sottendente un minuto (ossia un sessantesimo di grado) di latitudine.



11 *Da A a B, con il triangolo sferico.*

Il calcolo di una rotta di cerchio massimo tra due punti A e B è un esercizio di trigonometria sferica: unitamente a C (il Polo Nord), questi due punti formano un ***triangolo sferico***, ossia ogni lato di questo triangolo è un arco di cerchio (massimo) centrato al centro della terra e quindi, se riusciamo a misurare l'angolo al centro (della Terra) che sottende, possiamo calcolare immediatamente la distanza in miglia nautiche.

Se, *more trigonometrico*, chiamiamo a, b e c rispettivamente gli archi opposti ai vertici A, B e C, nel nostro triangolo conosciamo a, b e C: infatti, il lato a ha lunghezza (in gradi!) pari a 90° meno la latitudine del vertice B e, viceversa, b avrà lunghezza 90° meno la latitudine di A. Essendo C il Polo Nord, la sua latitudine sarà 90° (ricordate, vero, che la "latitudine zero" è l'Equatore?).

Nel seguito, trasferiamo in corsivo il problema originale da Dutton e la sua soluzione.

> *Calcolare la distanza e l'angolo di attacco sulla rotta di cerchio massimo tra il faro di Farallon Island* (37°42'N,123°04'W) *e l'ingresso della Baia di Tokio* (34°50'N,139°53'E).

> *Come visto poco sopra, si ha che* a=90°–37°42'=52°18'*,* b=90°–34°50'=55°10' *e* c=360°–123°04'–139°53'=97°03'.

La ***legge sferica dei coseni*** ci dice che:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

(attenzione che "C" è il Polo Nord).

> *Questo ci porta a* c=74°36'*, pari a* 4461 *miglia nautiche.*

Ma con che angolo dobbiamo lasciare A? La ***legge sferica dei seni*** ci dice che:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

e, sostituendo i valori noti, possiamo calcolare A=57°46'19".

Ma quanto sarà lunga la rotta se invece seguissimo il cammino lossodromico? Qui, a quanto pare, è più facile a farsi che a dirsi.

Ricordiamo i due punti cardine della proiezione di Mercatore: meridiani e paralleli diventano un reticolo ortogonale e la proiezione è conforme; perché questo secondo punto sia vero, è necessario che la deformazione sia *uguale nelle due direzioni*.

Consideriamo l'equatore: qui, la nostra deformazione è zero, quindi possiamo dire che la sua lunghezza è 360°; ma il parallelo ad una data latitudine λ avrà una lunghezza pari a 360° cos λ e quindi avrà ricevuto un fattore di deformazione pari a:

$$\frac{1}{\cos \lambda} = \sec \lambda$$

arriva il passo importante: *per essere conformi, i meridiani devono essere deformati dello stesso fattore* sec λ quando passano dalla latitudine λ; in termini più matematici, se h è l'altezza (sulla carta) del nostro punto, deve essere:

[11] …e siccome abbiamo preso il calcolo dal mitico Sutton, "*Navigation and Nautical Astronomy*"…

[12] In origine, *esattamente*; successivamente, è stato standardizzato a 1852 metri.

$$\frac{dh}{d\lambda}=\sec\lambda$$

Ritornando al nostro problema, è ora conveniente passare alle misure in radianti: quindi, abbiamo due punti, uno a latitudine 37°42'=0.658*, l'altro a latitudine* 34°50'=0.608 *e separati tra di loro da una longitudine* 97°03'=1.694.

L'altezza h sulla mappa può essere espressa in funzione di λ come:

$$h=\int_0^\lambda \sec x\,dx=\left[\ln|\sec x+\tan x|\right]_0^\lambda$$

Quindi, λ=0.658 *implica* h=0.711*, mentre* λ=0.608 *implica* h=0.649.

Questa funzione, anche se è sempre stato l'incubo del corso di Analisi1, è comunque invertibile (riscrivendo la funzione in modulo come una sola tangente e notando che è positiva su tutta la sfera); si ottiene quindi:

$$G(h)=2\arctan e^h-\frac{\pi}{2}$$

Sulla nostra carta, vista come un piano cartesiano, la linea da A (h=0.711*,* L=0*) a B (*h=0.649*,* L=1.694*) è* $t\to(0.711-0.062t,\ 1.694t)$*, con* $0\le t\le 1$. *Quindi, la lossodromica sulla sfera è:*

$$\lambda=G(0.711-0.062t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

La metrica sulla sfera è $ds^2 = d\lambda^2 + \cos^2\lambda\, dL^2$ e quindi la lunghezza della lossodromica è:

$$\int_0^1\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2+1.694^2\cos^2\lambda}\,dt$$

Se G è l'inverso di una funzione secante, allora la sua derivata sarà:

$$G'(h)=\frac{1}{\sec G(h)}=\cos G(h)$$

Quindi, il primo termine del radicale diventa, nel nostro caso, $0.062^2\cos^2 G(0.711-0.062t)$*, mentre il secondo termine diventa* $1.694^2\cos^2 G(0.711-0.062t)$. *Dopo qualche calcolo, l'integrale di lunghezza diventa:*

$$3.39\int_0^1\frac{e^{0.711-0.062t}}{1+e^{2*(0.711-0.062t)}}\,dt$$

Sostituendo con $u=e^{0.711-0.062t}$*,* $du=-0.062\,e^{0.711-0.062t}\,dt$*, si ha che la lunghezza del nostro arco vale* –54.78 (arctan $e^{0.649}$ – arctan $e^{0.711}$) = 1.366*, il che equivale a* 78°27'*, ossia* 4696 *miglia nautiche.*

Anche se calcolarne la lunghezza è piuttosto complicato, la lossodromica ha il pregio di essere molto facile da percorrere; al contrario, l'ortodromica richiede un continuo ricalcolo della rotta. Ne valeva la pena, per risparmiare il *cinque per cento* del tempo di viaggio?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms