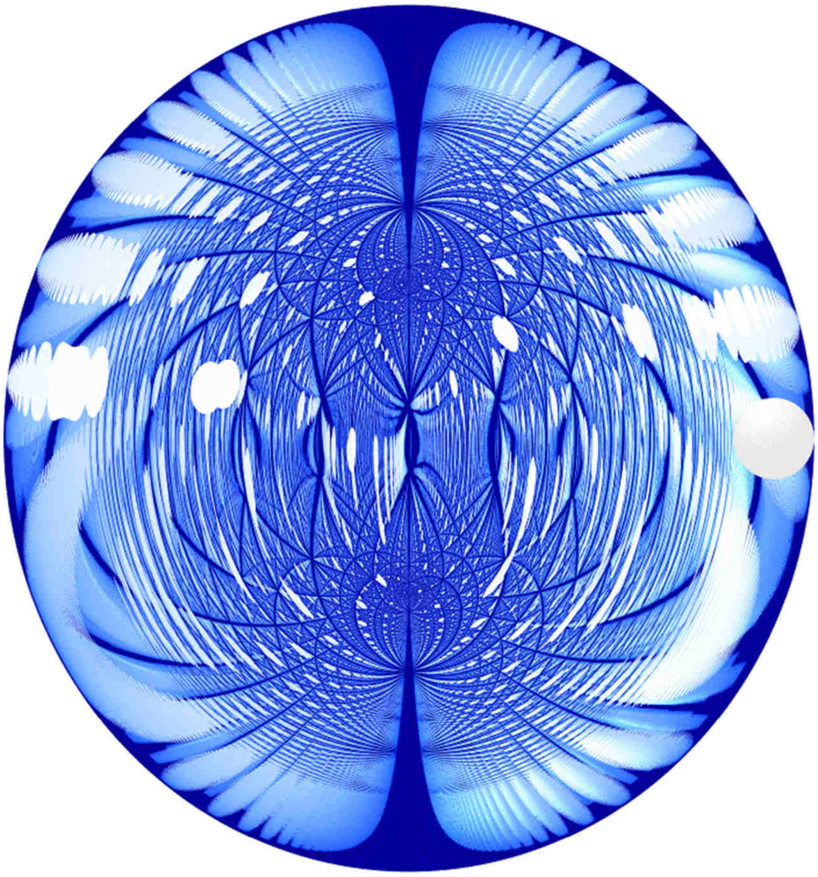
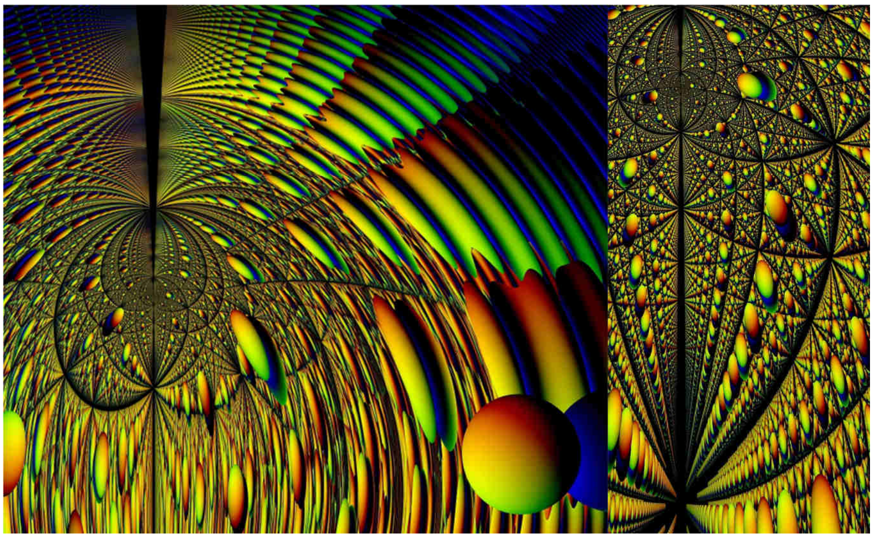
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 271-272 – Agosto-Settembre 2021 – Anno XXIII





1. Resistenza **3**

2. Problemi [271] **10**

2.1 Saluti dal Giappone 10
2.2 Saluti dalla Francia 10

3. Problemi [272] **11**

3.1 La soluzione è facile... 11
3.2 Tanto tempo fa, su un asse immaginario lontano lontano... 11

4. Bungee Jumpers **12**

5. Soluzioni e Note **12**

5.1 [269] 12
5.1.1 Un problema tutto italiano 12
5.1.2 Veleno Praticamente Omeopatico 13
5.2 [270] 16
5.2.1 Ritorna il Giardino! 16
5.2.2 Dato un ottagono, non necessariamente con otto lati... 23

6. Quick & Dirty **28**

7. Zugzwang! **28**

7.1 Oxxo 28

8. Pagina 46 ..... **29**

9. Paraphernalia Mathematica **32**

9.1 [271] Un sistema molto preciso 32
9.2 [272] Più pizza per tutti! - [1] – Una cosa veloce 36

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM267 ha diffuso 3'325 copie e il 08/09/2021 per Google eravamo in 22'000 pagine.

Se prendete un'ellisse e lo fate ruotare lungo l'asse maggiore, ottenete un ellissoide di rotazione, o sferoide. Se adesso ne rendete la parte interna riflettente e mettete dentro una sfera, quello che dovreste vedere è circa quello presente nella prima immagine. Se la sfera è colorata, dei risultati (parziali) sono visibili nelle altre due immagini. I più anziani viaggiatori della rete, ormai un po' rimbecilliti dall'età, concionano talvolta di un'immagine di questo tipo prodotta da ***John Valentine*** (*Endless Reflection*) in altissima definizione (16384×16384). Ma i loro link sono persi ormai, come lacrime nella pioggia...

1. Resistenza

"Io non posso ascoltare troppo Wagner, lo sai: già sento l'impulso ad occupare la Polonia"

(Larry Lipton, alias Woody Allen, in "*Misterioso omicidio a Manhattan*")

È soprattutto durante le grandi manifestazioni sportive che si sentono suonare e cantare gli inni nazionali: per quanto siano in realtà eseguiti anche in moltissime celebrazioni ufficiali di natura tutt'altro che sportiva, il grande pubblico li sente soprattutto durante le trasmissioni televisive, in genere mentre la telecamera inquadra i volti fieri degli atleti chiamati a difendere i colori della patria. Le Olimpiadi, poi, sono una vera e propria esaltazione musicale delle identità nazionali, vista la pletora di medaglie d'oro che vengono assegnate, ognuna delle quali è formalmente accompagnata dalla colonna sonora di un inno nazionale.

1 *"Fratelli d'Italia"*

Forse proprio a causa della marcatissima connotazione patriottica è quasi inevitabile che ogni cittadino conosca, almeno in qualche grado, il proprio inno nazionale, mentre – quasi per contrappasso ideologico – sa ben poco degli inni nazionali altrui. Solo così può spiegarsi come sia poco noto lo scambio di favori, quasi una sorta di inconsapevole gemellaggio, tra gli inni nazionali di due grandi nazioni europee.

L'inno nazionale italiano dovrebbe essere ben noto a tutti i cittadini della Repubblica, anche se la sua carriera di inno nazionale è stata abbastanza tormentata. Chiamato confidenzialmente "*Fratelli d'Italia*" in ragione del suo verso d'apertura, un po' più formalmente "*Inno di Mameli*" in onore al giovane[1] poeta patriota che ne compose il testo e lo intitolò "*Il Canto degli Italiani*", l'inno nazionale italiano è diventato tale quasi[2] esattamente un secolo dopo la sua composizione, nel 1946. Per tutta la durata del Regno d'Italia, l'inno nazionale dello stato italiano è stata infatti la "*Marcia Reale*" di casa Savoia; è solo con l'avvento della Repubblica che "*Fratelli d'Italia*" assurge a simbolo patrio. Insomma, gli italiani ci hanno messo un bel po' di tempo per ufficializzare la cosa: il titolo di "inno nazionale" è rimasto "provvisorio" per la bellezza di 71 anni, fino al 2017, quando la sua "provvisorietà" è terminata con la legge numero 181 del 4 dicembre: quindi, dal punto di vista strettamente burocratico e formale, quello di Mameli è davvero un inno nazionale solo da una manciata di anni.

Nonostante una gavetta così lunga – temiamo possa essere un record mondiale – esistono diverse caratteristiche dell'Inno di Mameli che probabilmente non sono conosciute dalla maggioranza degli italiani. Questo dipende in gran parte anche dalle norme ufficiali che ne regolamentano l'esecuzione: il testo di Goffredo Mameli è composto dalla bellezza di sei strofe, ma il cerimoniale prevede che vengano suonate solo le prime due; e, a dirla tutta, a memoria ci pare di ricordare che negli eventi sportivi e un po' meno formali l'inno venga eseguito cantando solo la prima strofa (da "*Fratelli d'Italia…*" fino a "*…Iddio la creò*")

[1] Goffredo Mameli non può non essere considerato altro che "giovane", essendo morto appena ventunenne, nel 1849, combattendo per la Repubblica Romana. Quando compose l'inno non aveva ancora compiuto vent'anni.

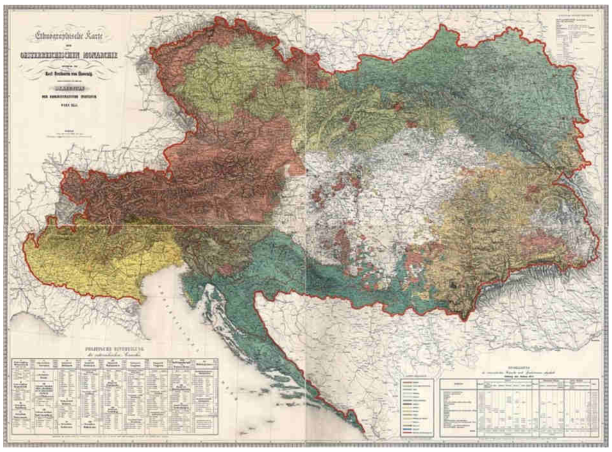
[2] Il testo è stato composto l'8 settembre 1847; la musica, composta da Michele Novaro su richiesta diretta dello stesso Mameli, è stata abbozzata già a partire dal 10 novembre dello stesso anno. La nomina a inno nazionale (seppur provvisorio) è dell'ottobre 1946, quando il testo aveva da poco compiuto 99 anni, e alla musica mancavano pochi giorni per raggiungere il medesimo compleanno.

seguita dal ritornello ("*Stringiamci a coorte, siam pronti alla morte* [bis]*, Italia chiamò*")[3]. Quasi sempre, e soprattutto prima delle manifestazioni sportive, viene patriotticamente gridato anche il "*Sì!*" finale che però non è contenuto nel testo di Mameli, ma aggiunto entusiasticamente dall'autore della musica, Michele Novaro.

Ci sono diverse ragioni per cui è opportuno che l'inno non venga cantato per intero: la prima, e certamente più importante e pratica, è limitare il tempo di esecuzione; civili in piedi, militari sull'attenti o addirittura in posizione di presentatarm, autorità non più giovanissime irrigidite in rigoroso e compunto silenzio, sono tutte cose di cui bisogna tenere conto, e nelle quali la differenza tra uno e dieci minuti è cruciale. Ma, oltre a ciò, per lo meno nel caso specifico italiano, ci sono anche altri elementi più squisitamente diplomatici di cui tener conto. Al pari del Quinto Postulato di Euclide, anche la Quinta Strofa del Canto degli Italiani è in grado di mettere in imbarazzo alcuni ascoltatori:

Son giunchi che piegano
le spade vendute:
già l'aquila d'Austria
le penne ha perdute;
il sangue d'Italia
il sangue polacco,
bevé, col Cosacco:
ma il cuor le bruciò.

Quando Mameli la scrive, la situazione politica europea è ben diversa da quella attuale: basti pensare che l'Italia stessa, protagonista assoluta della composizione, era ancora relegata ad essere formalmente solo "*l'espressione geografica*" evocata da Metternich. Ma è soprattutto l'Austria del 1847 ad essere ben diversa dall'Austria odierna: in quel periodo l'impero asburgico è uno dei giganti d'Europa ed è particolarmente potente e invadente, dopo che la Francia napoleonica è stata ricondotta nei suoi esagonali "confini naturali". Se gli studenti contemporanei trovano talvolta difficoltoso distinguere il concetto di "stato" da quello di "nazione", i contemporanei di Mameli avevano meno difficoltà nel farlo: il loro è il tempo dei grandi imperi multinazionali: anche se quello francese (ma sarebbe meglio chiamarlo direttamente napoleonico) ha da poco tirato le cuoia, l'Europa della Restaurazione e della Santa Alleanza è quasi interamente suddivisa in quattro grandi imperi multinazionali: quello d'Austria, quello dello zar di Russia, il britannico e l'ottomano. Tre di questi spariranno nel giro di settant'anni, uccisi dal colpo di pistola sparato a Sarajevo da Gavrilo Princip, ma durante la sua brevissima vita il giovane Mameli ha tutto il tempo a disposizione per avercela con l'Austria, che possiede di fatto quasi tutta l'Italia.



2 *L'Austria nel 1855*

[3] La nostra fonte di riferimento è come al solito la benemerita Wikipedia. Nella voce sull'Inno di Mameli, l'enciclopedia distingue bene tra "strofe" e ritornello; ciò nonostante, afferma che "*In base al cerimoniale, in occasione di eventi ufficiali, devono essere eseguite solamente le prime due strofe senza l'introduzione*" ma riteniamo che con l'espressione "le prime due strofe" si intenda in realtà la prima strofa e il ritornello. La seconda strofa ("*Noi siamo da secoli calpesti, derisi…*") non ci ricordiamo da averla mai sentita cantare. È comunque anche possibile che il cerimoniale venga costantemente disatteso: ad esempio, sono più di cinquant'anni che è prevista l'esecuzione, subito dopo l'inno nazionale, anche dell'inno europeo; regola che, in realtà, è solo assai raramente rispettata.

Lo spirito antiaustriaco è del tutto palesato nella quinta strofa: l'autore afferma che Vienna è ormai sul punto di perdere la sua forza ("*già l'aquila d'Austria le penne ha perdute*"), visto che si affida a truppe mercenarie ("*le spade vendute*") e queste, proprio in quanto tali, non sono certo armi proprie di temibili soldati animati da spirito patriottico ("*son giunchi che piegano*"), e quindi è tempo per l'Italia di ribellarsi al dominio straniero. E, tutto sommato, è tempo non soltanto per l'Italia, ma per tutte le nazioni, per tutti i popoli soggiogati da domini stranieri: per questo chiama sul banco degli imputati anche altri imperi, come quello russo che congiurò insieme a Vienna (e alla Prussia, anche se Mameli non la cita) nella spartizione della Polonia ("*il sangue d'Italia, il sangue polacco, bevé, col Cosacco: ma il cuor le bruciò*").

3 *Le spartizioni della Polonia del 1772, 1793 e 1795.*

Così, anche se la Quinta Strofa è in grado di causare un certo imbarazzo agli ambasciatori italiani in Austria e Russia, qualora esponenti dei paesi ospitanti avessero la ventura di sentirla e capirla[4], quantomeno lancia un grido di amore fraterno ad un'altra nazione europea.

Abbastanza curiosamente, l'inno nazionale polacco ricambia – forse inconsapevolmente – l'omaggio ricevuto da Goffredo Mameli, e lo fa direttamente nel titolo. Il brano simbolo della nazione polacca è infatti noto come "Mazurka di Dąbrowski" (*Mazurek Dąbrowskiego*), ma il titolo completo e ufficiale è in realtà "Canto delle legioni polacche in Italia" (*Pieśń Legionów Polskich we Włoszech*). L'inno è di mezzo secolo esatto più vecchio di quello di Mameli, essendo stato composto nel 1797; l'autore, Józef Wybicki, era un giovane ufficiale appartenente all'armata polacca del generale Jan Dabrowski, il quale aveva raccolto un gruppo di connazionali per schierarsi con Napoleone Bonaparte durante la prima Campagna d'Italia del corso.

È curioso notare alcune coincidenze significative: l'inno polacco è stato scritto proprio in Italia, e per la precisione a Reggio Emilia, la città che ha un posto speciale nel nostro Risorgimento per essere stata la prima in cui ha sventolato il patrio tricolore. Al pari di quello italiano, è sostanzialmente un inno rivoluzionario[5], che incita alla rivolta contro potenze occupanti; e, in ultima analisi, sia quello italiano che quello polacco nascono dai movimenti rivoluzionari suscitati inizialmente dalla Rivoluzione Francese e dalla ribellione allo status quo dell'*Ancien Régime*.

La Storia è così densa di avvenimenti che è fin troppo facile trovare parallelismi: ciò non di meno, è curioso vedere come Italia e Polonia siano affratellate nel loro percorso per diventare nazioni indipendenti: entrambe sono state il centro geografico e politico di grandi imperi del passato – quello Romano che ha marcato quasi tutta la storia antica mediterranea ed europea e la Confederazione Polacco-Lituana, che agli inizi del Seicento era il maggior stato europeo – ed entrambe, dopo il loro apogeo e la loro decadenza, hanno faticato molto per diventare stati-nazione. Entrambe sono state prede ambite di vicini più

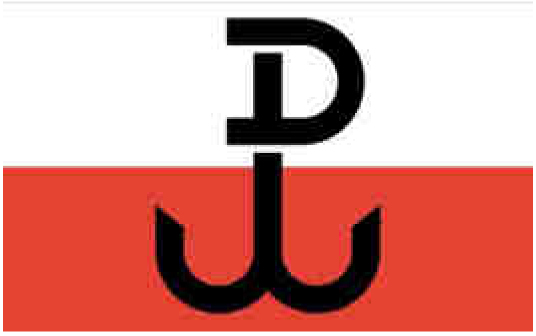
[4] Non è soltanto un modo di dire: "*Il Canto degli Italiani*" non era inno nazionale durante il Regno dei Savoia, ma la quinta strofa venne comunque censurata dai governi sabaudi perché troppo aggressiva e connotata politicamente.

[5] Nella stessa categoria rientra anche il maggiore dei canti rivoluzionari diventati inni nazionali: il "*Canto di guerra per l'Armata del Reno*", decisamente più noto con il soprannome di Marsigliese. Al pari di quello polacco, anche l'inno francese è originariamente un canto di battaglia di un'armata di un esercito di volontari.

potenti e intraprendenti, e hanno avuto una vita travagliata e un ruolo tutto sommato secondario negli ultimi due secoli.

Le differenze, peraltro, non sono da meno: ed è indiscutibile che la Polonia abbia avuto vita più difficile di quella, comunque complicata, dell'Italia. La spartizione del territorio polacco del 1795, che all'autore dell'inno composto a Reggio Emilia doveva sembrare un delitto recente e sperabilmente di rapida risoluzione, dura invece fino alla fine della Prima Guerra Mondiale; priva di confini naturali (di cui l'Italia è, invece, perfettamente dotata) la nazione polacca si ritrova soggetta a una complicatissima relazione con il proprio territorio anche nel 1918, quando la "Seconda Repubblica di Polonia" torna ad essere disegnata sugli atlanti geografici. Del resto, la nascita del primo stato polacco dopo 123 anni di spartizioni straniere nasce soprattutto per la volontà delle potenze vincitrici della Grande Guerra di instaurare uno stato cuscinetto tra la Germania appena sconfitta e gigante russo, che proprio in quei tempi stava completando la sua rivoluzionaria trasformazione da Impero Zarista a Unione delle Repubbliche Socialiste Sovietiche. In un certo senso, la pace di Versailles ufficializza la natura tragica dello stato polacco, sempre compresso tra due stati che per secoli lo hanno visto solo come territorio di conquista[6].

Tra le differenze più significative, ce n'è un'altra particolarmente feroce: nonostante l'Italia possa elencare un numero spropositato di invasioni e dominazioni straniere (fino al punto di poter essere definita – con evidente disprezzo, ma non del tutto senza ragione – niente più che "un'espressione geografica" dal Principe di Metternich) non ci sembra che abbia mai subito, almeno su scala nazionale, dei tentativi di totale cancellazione della cultura e dei caratteri italici. La stessa cosa non può dirsi per la Polonia: in seguito alle spartizioni e al carattere fortemente invasivo dei suoi potenti vicini, i polacchi hanno subito dei grandiosi tentativi sia di "germanizzazione" che di "russificazione". Questo ha condotto, per reazione, alla creazione di organismi segreti volti essenzialmente alla salvaguardia dei caratteri polacchi: il più famoso è verosimilmente lo "Stato Sotterraneo Polacco", sviluppatosi soprattutto in reazione alle invasioni congiunte sovietiche e tedesche che seguirono il Patto Molotov-Ribbentrop del 1939, e che negli ultimi anni della Seconda Guerra Mondiale aveva come compito principale quello di organizzare la resistenza contro i nazisti che avevano portato la devastazione e la germanizzazione del territorio fino alle più crudeli conseguenze. Ciò nondimeno, non si trattava solo di una organizzazione politica e militare: possedeva anche sezioni che miravano a coltivare il concetto di "resistenza" inteso come tentativo di conservazione e salvaguardia dei valori culturali polacchi. Si manifestava su diversi fronti, non ultima la cosiddetta "Università Sotterranea"; del resto i patrioti della Polonia erano abituati a lottare contro le manovre degli invasori fin dai tempi della spartizione del 1795: gli atenei erano già stati focolai di resistenza contro la Russia zarista, quando persino l'Università di Varsavia era stata costretta a cambiare nome e assumere quello di "Università dello Zar", e nelle sue aule si teneva in gran conto la padronanza della lingua russa.



4 *Bandiera dello "Stato Sotterraneo Polacco", 1944-1945.*

[6] Come al solito, è bene rifuggire dalle generalizzazioni. Sia Polonia che Italia sono state, nei secoli, più terre conquistate che armate conquistatrici, ma così come l'Italia non è certo immune da aggressioni, anche la Polonia ha annoverato nella sua storia un gran bel numero di guerre, e non possiamo giurare che fossero tutte di pura difesa patriottica.

"*Eravamo obbligati a frequentare un corso annuale di lingua russa, e tutti gli studenti facevano come punto d'onore quello di avere i loro peggiori risultati in quella materia. Io non risposi a nessuna domanda, e ebbi naturalmente un voto insufficiente. Superai bene tutti gli altri esami, e il professore mi consigliò di ripetere l'esame di russo, altrimenti non avrei potuto ottenere il titolo di "Candidato in Scienze Matematiche". Rifiutai l'offerta, dicendo che così il mio sarebbe stato il primo caso nella storia dell'Università in cui uno studente con ottimi voti in tutte le materie, con tesi approvata e premiata con medaglia d'oro, non avrebbe ottenuto il titolo di "Candidato in Scienze Matematiche" ma solo il grado di laurea inferiore (che curiosamente si chiamava "Vero Studente") per colpa di una insufficienza in russo.*"

5 *Wacław Sierpiński*

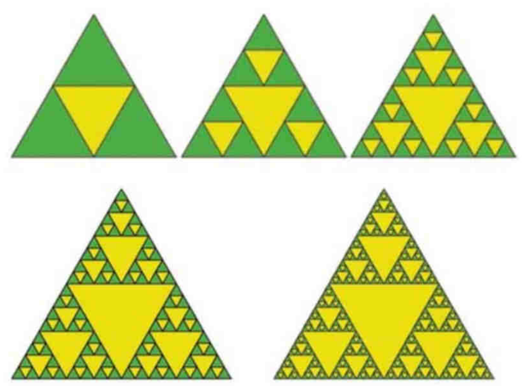
Sono le parole di quello che, per gran parte della sua vita, è stato il maggiore matematico della Polonia, e indubbiamente uno dei più grandi in assoluto del ventesimo secolo.

Wacław Sierpiński nasce a Varsavia il 14 Marzo 1882[7], quando quella che oggi consideriamo la capitale polacca non è altro che una città dell'Impero Russo. Ha la fortuna di nascere in una famiglia relativamente benestante, specialmente se commisurata con gli standard polacchi dell'epoca: suo padre era un medico, e teneva nel giusto conto l'importanza dell'educazione scolastica; solo per questo Wacław riesce ad avere una buona istruzione e a palesare il suo eccezionale talento nella matematica. I russi, per quanto possibile, scoraggiavano l'istruzione dei polacchi. In che modo brillasse durante i suoi anni universitari si capisce dal breve resoconto riportato in corsivo: si può aggiungere comunque che nel 1903 – quindi a soli ventun anni – vinse un concorso lanciato dal dipartimento di Matematica e Fisica sulla Teoria dei Numeri. Anche su questa sua dissertazione aleggia un forte senso di patriottismo: avrebbe dovuto essere pubblicata in russo sulla rivista "*Izvestia*" dell'università, e Sierpiński riesce a procrastinare per anni la pubblicazione, finché non riesce a farla pubblicare in inglese quattro anni dopo.

Nel 1904 ottiene la sospirata laurea (e la ottiene senza demeriti: il professore di russo alzò i suoi voti senza fargli ripetere l'esame, meritandosi a posteriori il giudizio di "*brav'uomo*" da parte del matematico), e comincia ad insegnare in una scuola femminile. In breve decide però che è meglio proseguire ulteriormente gli studi e si trasferisce a

[7] I lettori più affezionati sanno bene – ma la cosa è talmente notoria che potrebbero saperlo anche i lettori occasionali – che il pezzo di apertura della Prestigiosa Rivista si apre con un "compleanno", articolo dedicato alla celebrazione di un personaggio notevole della matematica, *che sia nato nel mese corrispondente a quello di uscita del numero* di RM in questione. I menzionati lettori potrebbero di conseguenza stupirsi un po' di vedere celebrato un matematico nato a Marzo in questo RM271, che è numero esplicitamente agostano. La ragione per la quale la Redazione di RM fosse convinta che Sierpiński fosse nato il 20 Agosto anziché il 14 Marzo è, in tutta verità, ancora totalmente oscura alla Redazione stessa. Di certo è che si tratta di un errore vecchio di più di due decenni, visto che i Calendari di RM perpetuano l'errore fin dalla prima edizione. In conclusione, non possiamo che cospargerci il capo della proverbiale cenere, chiedere scusa a Sierpiński, ai lettori dei compleanni e ai collezionisti di calendari, e naturalmente impetrare il perdono per la l'asincronia del presente compleanno: la stesura era troppo avanzata e il ritardo accumulato decisamente troppo, per poter correre degnamente ai ripari. Possiamo solo sperare che anche chi legge sia un vivido assertore della relatività del tempo, come insegnò Albert Einstein (il quale, peraltro, è nato proprio il 14 Marzo, come Sierpiński: che ci abbia giocato un tiro birbone?).

Cracovia per ottenere un dottorato. Il fatto è che il giovane Wacław ha ancora troppi interessi da coltivare, ed evidentemente non si sente ancora pronto per insegnare: il dottorato infine lo ottiene a Leopoli, nel 1908, e nel frattempo riesce a conoscere alcuni degli aspetti più intriganti e complessi della matematica contemporanea. Alla Teoria degli Insiemi arriva quando, sorpreso da un teorema che asseriva che i punti del piano potevano essere descritti da un'unica coordinata, scrive a Tadeus Banachiewicz (coetaneo e collega, che era appena arrivato a Göttingen per studiare con i mostri sacri della matematica tedesca dell'epoca, e che diventerà anch'egli matematico di grande levatura) come fosse possibile una cosa del genere. Il connazionale era verosimilmente un tipo di poche parole, visto che gli rispose scrivendogli una lettera composta da una sola parola: "*Cantor*".



6 *I primi cinque passi della costruzione del Triangolo di Sierpiński*

Teoria dei Numeri e Teoria degli Insiemi, ad inizio Novecento, sono una miscela abbastanza esplosiva, se finiscono tra le mani di uno dei matematici più prolifici del secolo, e Wacław Sierpiński è il tipo che lavora indefessamente e produce con continuità: a fine carriera saranno più di 700 gli articoli e oltre 50 i libri partoriti dalla sua penna. Così, è proprio negli anni passati a Leopoli preparando il dottorato che comincerà a creare oggetti strani e sorprendenti, in grado di illustrare in maniera splendidamente efficace i confini e le astrusità della matematica d'avanguardia: come la sua curva[8] che occupa tutti i punti del piano, o la sua creazione più celebre, il "Triangolo di Sierpiński", un oggetto frattale che sembra diventare sempre più vuoto e fragile, ma che inevitabilmente permane chiaramente in vita senza mai scomparire del tutto, quasi fosse un simbolo matematico della resistenza alle cattive temperie della Storia.

Quando scoppia la Grande Guerra, nel 1914, Wacław Sierpiński si ritrova, quasi per uno scherzo del destino, in terra russa. È una situazione estremamente complicata, perché la situazione internazionale, assai complicata nelle cancellerie dei ministeri, con la discesa in campo degli eserciti arriva improvvisamente ad essere un pericolo anche per la vita degli individui. L'Austria non si era mai fatta troppi problemi nello spartirsi fette di Polonia d'intesa con gli zar – come ricorda Goffredo Mameli nel nostro inno – ma in quest'anno cruciale l'Impero Russo e la duplice monarchia Austroungarica si guardano in cagnesco dalle trincee, e ogni argomento, diplomatico politico o militare che fosse, assume un peso particolare. La "questione polacca" è rovente, e usata da entrambe le parti come mezzo per mettere in imbarazzo il nemico: e in questo marasma, Sierpiński finisce internato a Vjatka, la città russa che oggi chiamiamo Kirov.

Se dalle cancellerie è improbabile, quasi impossibile, che in tempo di guerra ci si possa preoccupare dei singoli, non è lo stesso per la comunità dei matematici, e forse per ogni comunità ragionevolmente ristretta, nelle quali, prima che alla nazionalità, si guardano negli occhi le persone. Dimitri Erogov e Nikolai Luzin[9] sono tra i maggiori matematici russi, e conoscono il valore di Wacław Sierpiński: fanno in modo da farlo trasferire a Mosca e di trovargli un alloggio decente, e Sierpiński lavorerà, facendo matematica, con Luzin fino alla fine della guerra.

---

[8] Lo stesso Wacław probabilmente ci perdonerebbe se potessimo rivelargli, con tutto il rispetto, che alla sua (peraltro bellissima) curva noi continuiamo a preferire quella di Peano, che ha il medesimo vizio di riempire il piano.

[9] Di lui parliamo a lungo nel compleanno dedicato a Nina Bari, "*Radici*", RM214, Novembre 2016. E non solo in quello…

Ma le guerre non finiscono mai, in un secolo sanguinario come il Novecento. Il periodo tra la Prima e la Seconda Guerra Mondiale è certo un periodo denso di risultati e soddisfazioni accademiche: la collaborazione con Luzin continua e dà molti frutti; nella Polonia finalmente tornata indipendente (pur fra mille difficoltà militari e politiche) Sierpiński lavora per far crescere la matematica nazionale: viene eletto all'Accademia delle Scienze, diventa Preside di Facoltà all'Università di Varsavia, e soprattutto fonda un periodico di matematica polacco, i *Fundamenta Mathematicae*. Ma i manuali di storia lo riportano fedelmente: il 1° Settembre 1939 è una data cruciale, quella che dà l'inizio ufficiale al più grande massacro mai visto dall'umanità; e il suo teatro iniziale è proprio il territorio polacco.

7 *Una classe della TON, l'organizzazione segreta polacca per l'istruzione.*

Durante la guerra, Sierpiński darà un contributo fondamentale alla citata "Università Sotterranea Polacca"[10], tenendo in vita la matematica polacca e circondandosi di studenti anche in quegli anni impossibili. Tra gli infiniti disastri che quella guerra provocò, Wacław Sierpiński ricordò sempre, e con dolore, anche la decimazione spietata di un'intera generazione di matematici polacchi che aveva grandemente contribuito a formare.

Nel 1945, Sierpiński è ormai quasi vecchio: non tanto per i 63 anni che gli ricorda l'anagrafe, ma anche e soprattutto per i tanti, tantissimi colpi del destino che si sono abbattuti su di lui e sulla sua nazione. Ma Wacław è fatto di scorza dura, ed è abituato a resistere: continua a lavorare, continua a scrivere, continua a curare la redazione dei *Fundamenta* fino al 1960, quando finalmente deciderà di andare in pensione. E anche dopo il ritiro, comunque, non resterà fermo: parenti e colleghi lo ricordano sempre chino sulle carte, sempre attivo, fino al 21 Ottobre 1969, quando si spegne nella sua Varsavia.

Una vita lunga, tutta dedicata alla matematica. E alla resistenza.

[10] La T.O.N. (Tajna Organizacja Nauczycielska) era l'organizzazione segreta per l'insegnamento: si concentrava prevalentemente nell'educazione primaria, e si ritiene che abbia garantita l'istruzione elementare ad almeno un milione di bambini polacchi. Appena possibile, allargarono l'orizzonte all'istruzione superiore.

2. Problemi [271]

2.1 Saluti dal Giappone

...In realtà, siamo in salotto, ma una volta tanto Rudy è in ritardo (non solo sui suoi tempi, una volta tanto), quindi facciamo come se fosse in Giappone. E quindi vi beccate un *sangaku*[11] riciclabile. Nel senso che, e non vi piace come architettura di giardino, potete sempre usarlo come logo per la vostra prossima startup; e se qualcuno fa domande, potete dire che quel "coso sulla destra" è il corno dell'unicorno.

Come al solito, Rudy sta tra le altre cose cercando di perfezionare le sue capacità descrittive, quindi, anche se per precauzione vi diamo il disegno, siete pregati di fare le pulci alla sua descrizione (prendetela come un'espansione): è possibile "sbagliare"? E, nel caso, viene "qualche altro problema", nel senso di "è risolubile, anche con risultati diversi, nel modo sbagliato"?

Avete un quadrato $A_1A_2A_3A_4$, di lato 25 (oh, finalmente un quadrato non unitario!). Con centro in A_1, tracciate il quadrante di cerchio A_2A_4; indi, tracciate il semicerchio A_2A_3.

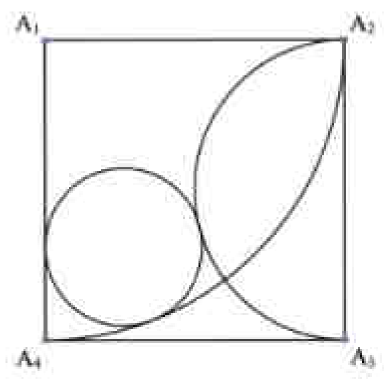
A questo punto, essendovi noto che per tre punti passa una circonferenza, tracciate il cerchio (completo) tangente al quadrante di cerchio, al semicerchio e al lato A_1A_4.

E adesso trovate il raggio di questo cerchio.

A questo punto, come promesso, vi diamo il disegno, ma vi poniamo anche qualche altra domanda (no, non sappiamo le risposte).

Ammetterete che, anche noto il raggio, continua a non essere facilissimo tracciare 'sto cerchio; le coordinate del centro sono ricavabili facilmente, una volta che abbiate il raggio (eh? Sì, è una domanda... trovatele), ma ci piacerebbe un modo di tracciamento più *more geometrico*: come possiamo, con un paio di ellenici riga e compasso, attraverso i metodi della geometria elementare, disegnare il cerchio?

Oh, stavamo per dimenticarci il disegno.... Eccolo.



8 *Non guardate qui.*

2.2 Saluti dalla Francia

No, continuiamo a essere in salotto. Ma dato che talvolta la Francia (continentale: evidentemente, non si tiene conto delle colonie) è detta "*L'Héxagone*", indovinate di cosa andiamo a parlare. E, probabilmente, "ci sta bene" anche come decorazione del giardino (sul serio, una volta tanto).

Partite da un esagono regolare: dato il punto medio di tutti i lati, tracciate i segmenti (due per ogni punto medio) che uniscono il punto medio ai due vertici immediatamente precedenti o successivi *non appartenenti al lato in oggetto*. Per capirci, se avete l'esagono ABCDEF, dal punto medio di CD andate in B e in E: se fate il tracciamento di tutti questi segmenti (a matita, che poi dovete cancellarli), dovreste ottenere un simpatico dodecagono all'interno del nostro esagono.

L'idea è di riempire il dodecagono con un tipo di fiori, e il resto dell'esagono con un altro tipo... Quindi, per comprare "il giusto", qual è il rapporto tra l'area del dodecagono e l'area dell'esagono?

Come estensione, potreste generalizzare ad altri poligoni...

[11] ...e se non vi ricordate cos'è un *sangaku*, andate a rivedere cosa ne ha scritto Rudy. E cosa ne ha scritto Rudy. Nel senso che il PM sui Sangaku e il compleanno di Aida sono, secondo lui, cultura generale.

3. Problemi [272]

3.1 La soluzione è facile...

...ma il problema mica tanto. Sapete che Rudy sta cercando (con risultati non esattamente strabilianti) di imparare a descrivere i problemi senza figure; lui si rifiuta di confessare se questo obiettivo nasca dalla sua assoluta incapacità nel disegno o dalla sue forte simpatia per Lagrange[12], ma da un po' di tempo, alla domanda "Mi fai un disegno?", la risposta è "No". Qui in Redazione tendiamo ad ignorarlo e a lasciarlo parlare ma, forte di questo, sovente si lancia in descrizioni che fanno rivoltare nella tomba l'intera comunità dei deceduti matematici. Segue un esempio, che poi sarebbe anche il problema. O forse la soluzione, nel senso che a quanto pare a Rudy non importa nulla della risposta, ma vorrebbe riuscire formularlo senza disegno *[Non è proprio vero... preferirei una soluzione senza disegni. Ma forse è chiedere troppo, rischia di diventare "da tre pipe". RdA].*

Comunque, il problema nasce dal fatto che a breve i due terzi più chiacchieroni della Redazione dovranno parlare di "Tondi e Quadrati": il disegno che non facciamo sembra un bel logo per la conferenza (in realtà non c'entra nulla, e per questo ci piace molto).

Avete un cerchio di raggio unitario e un quadrato con due vertici (contigui) sulla circonferenza; il lato tra gli altri due vertici è su una tangente al cerchio. Quanto vale l'area del quadrato? Noi abbiamo trovato tre modi diversi per risolverlo, il che fa pensare non sia particolarmente difficile, e quindi dovreste metterci piuttosto poco. Però, come al solito, a Rudy viene un dubbio: questa costruzione "due vertici contigui sul cerchio e il lato opposto su una tangente", è possibile anche per altri poligoni regolari? E, in quel caso, qual è l'area del poligono? Niente disegno. E se ci siamo spiegati male, avete due problemi al prezzo di uno.

3.2 Tanto tempo fa, su un asse immaginario lontano lontano...

No, non c'entrano i numeri complessi. Ma tempo fa, altrove, avevamo inventato un problema che spiegava, in modo totalmente immaginario, la nascita del sodalizio tra i nostri tre allonimi. Il problema in oggetto trattava di una serie di armadietti (tre dei quali appartenevano appunto alle nostre componenti immaginarie).

"...e allora?" Beh, ci è capitato di porre, "di là", un problema che non era mai comparso da questa parte della realtà: se, più che il problema, volete analizzare il lato oscuro della nostra psiche, potreste indagare sulle motivazioni per cui anche questo parla di armadietti.

Il problema ci sembra piuttosto interessante, soprattutto perché ha l'aria di essere risolubile solo per tentativi: come al solito, la cosa non è vera, altrimenti non lo metteremmo qui. Ma veniamo al problema.

Avete appena cambiato la combinazione del vostro armadietto e l'avete scritta su un pezzo di carta sul quale (Murphy docet) avete appena versato il caffè. Tutto quanto resta leggibile è una cosa del tipo: ***584**********, insomma, il numero ha sedici cifre, le prime tre e le ultime dieci sono illeggibili, quelle che restano vi sono note e sono scritte qui sopra. Ricordate però che il numero era costruito in un modo piuttosto speciale: tanto per cominciare, tutte le cifre la 1 a 8 comparivano due e due sole volte; inoltre, vi ricordate che i due 8 erano separati da 8 cifre, i due 7 da 7 cifre, eccetera eccetera sino ai due 1 che erano separati da una cifra. Data quest'ultima condizioni, le domande del tipo "estremi inclusi?" comporteranno dolorose punizioni per il proponente, ma il problema resta: sotto queste condizioni, quante (e quali) sono le combinazioni dei due armadietti?

No, il problema non ci pare estendibile, ma se a voi viene in mente qualcosa, non esitate a segnalarcelo (risolto, evidentemente...).

[12] "...questo libro di geometria non ha nessuna figura...". Come ampiamente citato nell'Opera Prima di Doc su queste pagine (che andrete a cercarvi, *fainéants*!)

4. Bungee Jumpers

[271] Se i p_i (i=1, 2, …, k+1, k≥2) sono numeri naturali primi tra loro, verificate se esistono, tra i numeri naturali, soluzioni all'equazione:

$$x_1^{p_1}+x_2^{p_2}+\ldots+x_k^{p_k}=x_{k+1}^{p_{k+1}}\ .$$

[272] La circonferenza di un cerchio C è divisa in $3k$ archi: k di lunghezza 1, k di lunghezza 2 e k di lunghezza 3. Provate che, qualunque sia l'ordine degli archi lungo C, esistono due punti terminali di archi diametralmente opposti.

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Soluzioni e Note

Agosto? Settembre? Tutti e due!

Non certi di aver pubblicato tutte le soluzioni, riprendiamo prima i problemi del 269.

5.1 [269]

5.1.1 Un problema tutto italiano

Vediamo il testo del problema:

> *Appena un dipendente dell'Ufficio del Personale (UdP, nel seguito) vede un impiegato, la prima cosa che fa è cercare di licenziarlo; in questa operazione è trattenuto solo dal fatto che, subito dopo averlo licenziato, perde temporaneamente suoi poteri di UdP e, se è in compagnia di un altro UdP, viene da quest'ultimo immediatamente licenziato (con la successiva e temporanea „perdita di poteri" da parte del secondo UdP). Essendo perfettamente logici, quindi, se due UdP sono assieme nessuno dei due licenzierà un impiegato, per paura che l'altro UdP lo licenzi subito dopo. Un giorno, dieci UdP incrociano in corridoio un impiegato: che cosa succede?*

Le soluzioni pubblicate sul RM270 erano di ***.mau.*** e ***Valter***, ci eravamo persi il commento di ***Bluemonday***:

> Ho il dubbio di non aver ben capito il problema perché mi sembra molto facile, per come l'ho capito io nel caso di un numero pari di udp allora nessuno licenzia l'impiegato, mentre nel caso dispari, uno qualunque (ad esempio il primo che ci riesce?) licenzia l'impiegato. La cosa si può dimostrare per induzione: il caso base di 2 udp l'avete spiegato voi. Dato poi un numero dispari di odp, se uno qualsiasi licenzia l'impiegato, lo può fare impunemente dato che subito dopo nessuno dei rimanenti odp in numero pari oserà licenziarlo per induzione. Mentre se viene dato un numero pari di odp (maggiore di 2), se uno qualsiasi degli odp osasse licenziare l'impiegato, subito dopo saprebbe che verrebbe licenziato da uno qualsiasi dei rimanenti odp in numero dispari per induzione.

E quello di ***Stefano***:

> Allora…
>
> 2. se ci sono 2 UdP e un impiegato, nessuno dei due UdP licenzia l'impiegato, pena essere licenziato lui un attimo dopo…
>
> 3. se ci sono 3 UdP e il solito disgraziato impiegato, il più veloce dei tre UdP licenzia l'impiegato, mette gli altri due nella situazione del punto precedente e deve solo badare a che i due non si separino finché non finisce la sua temporanea perdita di poteri
>
> 4. se ce ne sono 4, nessuno si muove, pena ritrovarsi nei panni dell'impiegato nella situazione del punto 3.
>
> 5. Generalizzando, se gli UdP sono dispari il più veloce licenzia l'impiegato e impedisce agli altri di separarsi (se non a coppie), se gli UdP sono pari tutti stanno fermi
>
> Sembra troppo facile…

Sì, sì, siete tutti d'accordo. Andiamo avanti.

5.1.2 Veleno Praticamente Omeopatico

Come scoprire dov'è il veleno? Il problema era questo:

> *Avete mille bottiglie di vino e organizzate una festa per utilizzarle tutte. Una delle bottiglie, però, è interamente composta da un veleno di cui una sola molecola è letale. Avete a disposizione dieci cavie dovete pianificare una serie di test per verificare quale sia la bottiglia avvelenata, sapendo che il veleno fa effetto sempre dopo un'ora (a qualsiasi dose) e dovete avere il risultato al più presto possibile. Come fate?*

In RM270 abbiamo pubblicato la soluzione di ***Luigi***, ***Camillo***, ***Salvatore***, ***Valter*** e ***Franco57***. Aggiungiamo qui le considerazioni di ***Bluemonday***:

> In un parola la risposta è: *binary encoding*. Cercando di spiegare meglio, ordiniamo le 10 cavie. Nello stesso momento daremo un miscuglio di molecole di vino provenienti dalle 1000 bottiglie a ciascuno delle 10 cavie secondo lo schema seguente. Il primo avrà un cicchetto contenente 500 molecole, ciascuna molecola proveniente da 500 bottiglie che selezioniamo a caso a cui immaginiamo di dare l'etichetta '1'. Alla seconda cavia, daremo un cicchetto contenente anch'esso di 500 molecole, questa volta formato da 250 molecole di 250 bottiglie scelte a caso tra le 500 bottiglie con etichetta '1' più altre 250 prese dalle 500 restanti bottiglie senza etichetta '1', e diamo a le bottiglie scelte per la seconda cavia l'etichetta '2'. Proseguiamo nel modo similare, formando un cicchetto di 500 molecole per l'i-esima cavia prendendo metà molecole (o l'intero più vicino) da altrettante bottiglie da ciascuno degli $2^{(i-1)}$ gruppi di bottiglie identificati dall'avere la stessa sequenza di etichette (qua sarebbe molto più semplice allegare un disegno dello schema ma spero si capisca) e dare loro l'etichetta 'i'. Dopo aver aspettato un ora, constatiamo se l'i esima cavia è morta o no. Chiamando $m\_i := 1$ se l'i esima cavia è morta e 0 altrimenti, il numero in binario con le cifre $m\_1m\_2...m\_10$ ci permette di risalire precisamente alla bottiglia avvelenata: deve essere infatti quella avente esattamente l'etichetta 'i' per ogni m_i uguale a 1. La cosa funziona perché $1000<2^{10}$, quindi in mille suddivisioni ce la facciamo. Inoltre, dato che il veleno ci mette almeno un ora a fare effetto e la soluzione individua la bottiglia esattamente in un'ora, questa è la soluzione ottimale. Divertente notare come il dispendio totale di molecole è solamente di 500*10=5000 molecole in totale delle mille bottiglie, così che gli amici potranno sicuramente bere in abbondanza, mentre il valore atteso di morti tra le cavie è di 5, che ci sembra ragionevole dato che non eravamo nemmeno troppo interessati a preservare la loro vita :)

Mah, nel numero precedente io provavo a salvare le cavie, ma capisco anche questo punto di vista, anche considerando l'*incipit* del problema originale. Ciononostante ***Luigi*** ha capito la mia angoscia per le cavie:

> Se vogliamo privilegiare la salute delle cavie ed abbiamo a disposizione diciamo 4 ore allora abbiamo un'ulteriore procedura che riesce a salvare ben 9 cavie su 10. Abbiamo bisogno di un cronometro e di un paio di ipotesi. Le ipotesi sono
>
> 1. che il veleno faccia effetto esattamente un'ora (3600 secondi) dopo averlo ingerito
> 2. che l'effetto sia praticamente istantaneo
>
> Si sceglie una cavia (la più sfortunata senza dubbio).
>
> Si fa partire il cronometro e, dopo 10 secondi, si inizia a far bere alla cavia una goccia da ogni bottiglia a distanza di 10 secondi una dall'altra.
>
> Le bottiglie sono numerate e vengono fatte bere in ordine crescente di numerazione
>
> Si aspetta il momento dell'inevitabile dipartita (ciò può succedere a partire da un'ora e 10 secondi dopo la bevuta della prima goccia).
>
> Si ferma il cronometro e si calcola:

> (Tempo trascorso – 3600 secondi) / 10 = Numero della bottiglia avvelenata
>
> Nove cavie si salveranno e una cavia morirà felicemente ubriaca!

… che ci sembra un bel modo di morire per una cavia. ***Tommaso*** a sua volta ci scrive:

> il ragionamento per la soluzione del problema di giugno potrebbe essere il seguente:
>
> il numero di possibili configurazioni delle 10 cavie morte e sopravvissute è pari a 2^10=1024. Il numero della bottiglia (da 0 a 999) codificato in binario va fatto corrispondere con una delle configurazioni.
>
> Esempio:
>
> la bottiglia 0 non viene fatta bere a nessuna cavia. Se contiene il veleno, nessuna cavia morirà, configurazione 0000000000.
>
> La bottiglia 1 viene fatta bere alla prima cavia. Se contiene il veleno, la cavia morirà, configurazione 000000001.
>
> La bottiglia 2 alla seconda cavia. Se contiene veleno, configurazione 0000000010
>
> La bottiglia 3 sia alla prima che alla seconda cavia: in caso di veleno, 0000000011
>
> e così via.
>
> Ricapitolando:
>
> alla prima cavia viene somministrato una miscela di tutte le bottiglie dispari
>
> alla seconda cavia, una miscela delle bottiglie 2, 3, 6, 7, 10, 11...
>
> Cioè ad ogni cavia *k* viene somministrata una miscela che contiene liquido della bottiglia n se e solo se la codifica binaria di *n* attiva il *k*-esimo bit.
>
> In questo modo tutto si risolve con un'unica somministrazione, ed un'ora di attesa. Il consumo è minimale: dalla bottiglia più consumata, la 511, si prelevano in tutto 9 molecole di liquido.
>
> Alla fine ci sarebbe spazio anche per altre 24 bottiglie....se invece le bottiglie fossero di più di 1024, sarebbe necessario procedere nel solito modo (numerando le bottiglie da 1 e non da 0). Se le prime 1023 non sortiscono effetto sulle 10 cavie, vuol dire che il veleno è altrove, e si procederà con un secondo giro (e la perdita di un'altra ora) sulle successive 1023. E così via.
>
> Se ci si accorge che il tempo non basta, trovare un'altra cavia, che dimezza il tempo necessario.

Direi che sono tutti d'accordo. Della stessa opinione era ***Stefano***, che aggiunge:

> Visto che le sfide di questo mese erano meno impegnative, butto io giù un'espansione:
>
> > vi state accingendo a preparare i cocktails di cui sopra quando venite fermati dai funzionari della ACCA (Autorità per la Conservazione delle Cavie Alcolizzate); dopo una lunga negoziazione, che si conclude con l'inclusione dei funzionari stessi alla bevuta, vi vengono concesse N cavie.
>
> Ora, fermo restando che il problema è determinare con esattezza la bottiglia avvelenata, abbiamo appena visto che per N = 10 basta un tentativo, mentre, se N = 1, non si può fare altro che testare una bottiglia alla volta, e quindi, nel peggiore dei casi, la certezza arriva solo dopo 999 tentativi.
>
> Ma quale è la strategia più veloce per gli N intermedi, da 2 a 9?
>
> Per N =2, l'idea è di comporre due cocktail che contengono 1 assaggio comune e ciascuno X assaggi esclusivi
>
> - Se muoiono tutte e due le cavie la bottiglia era quella comune
> - Se ne muore una, tutte le altre bottiglie sono ok e si usa la cavia superstite per testare una alla volta quelle del lotto che ha ucciso la poveretta

- Se sopravvivono tutte e due, i due lotti sono ok e si preparano altri due cocktail, composti anche essi da una bottiglia comune e da X–1 assaggi esclusivi

Per capire quale è l'X ottimale bisogna partire dal fondo:

- Con un solo tentativo due cavie permettono di distinguere tra quattro bottiglie: una che bevono tutte e due, una per ciascuna in esclusiva e una che non viene testata; cioè 2^2, il che è ovvio, visto che con 10 cavie potevamo distinguere tra 2^{10}
- Con due tentativi se ne possono distinguere 9: lasciandone 4 per dopo, al primo (= penultimo) tentativo i cocktail contengono ciascuno l'assaggio comune e due (due perché potrò individuare quella avvelenata nel tentativo rimanente con la cavia superstite) in esclusiva, per un totale di 5;
- Con 3 tentativi se ne possono distinguere 16: le 9 di cui sopra più 7 (1 comune e tre esclusive ciascuno)
- ecc., ecc., …
- andando indietro, vedo che mi servono **31** tentativi e sempre **31** è il numero iniziale di assaggi esclusivi (l'**X** che cercavamo**)**; anche in questo caso avremmo potuto avere più di mille bottiglie (sempre 1.024)

tentativo	2 cavie		
1	1+2*1	4	4
2	1+2*2	5	9
3	1+2*3	7	16
4	1+2*4	9	25
5	1+2*5	11	36
6	1+2*6	13	49
7	1+2*7	15	64
8	1+2*8	17	81
9	1+2*9	19	100
10	1+2*10	21	121
11	1+2*11	23	144
12	1+2*12	25	169
13	1+2*13	27	196
14	1+2*14	29	225
15	1+2*15	31	256
16	1+2*16	33	289
17	1+2*17	35	324
18	1+2*18	37	361
19	1+2*19	39	400
20	1+2*20	41	441
21	1+2*21	43	484
22	1+2*22	45	529
23	1+2*23	47	576
24	1+2*24	49	625
25	1+2*25	51	676
26	1+2*26	53	729
27	1+2*27	55	784
28	1+2*28	57	841
29	1+2*29	59	900
30	1+2*30	61	961
31	1+2*31	63	1024

Per N = 3 comincio a preparare 3 cocktail, usando

- 1 bottiglia che metto in tutti e tre i cocktail
- 3 bottiglie che metto ciascuna in due dei tre
- X bottiglie "esclusive" di ciascun cocktail; X deve essere la quantità che potrò esaminare con le due cavie superstiti se mi muore la cavia che beve uno specifico cocktail

Anche in questo caso devo partire dal fondo:

- Se arrivo in fondo con tre cavie posso distinguere tra $2^3 = 8$ bottiglie
- Al penultimo tentativo posso esaminare 16 bottiglie: le 4 che metto in comune a due o tutti e tre i cocktail (vedi sopra) e 3 x 4 (perché 4 sono

quelle che poi potrò esaminare con un tentativo usando le due cavie superstiti) esclusive; contando le 8 ho un totale di 24

- Ecc., ecc.,
- Andando indietro, vedo che mi servono 10 tentativi, e che avrei potuto avere fino a 1.196 bottiglie

Per N più grandi la logica è la stessa: preparo i cocktail per tutte le cavie, con un numero crescente di assaggi condivisi e la quantità di assaggi esclusivi che potrò esaminare con N–1 cavie; se tutte le cavie sopravvivono le bottiglie esaminate sono tutte buone e preparo 3 nuovi cocktail, se mi muoiono 2 o più cavie ho risolto il problema, se me ne muore una "scalo" sullo schema con una cavia in meno, e così via.

La tabella qui sotto mostra i tentativi necessari e quante bottiglie posso gestire

tentativo	3 cavie			4 cavie			5 cavie			6 cavie			7 cavie			8 cavie				9 cavie	
1	4+3*1	8	8	11+4*1	16	16	26+5*1	32	32	57+6*1	64	64	120+7*1	128	128	247+8*1	256	256	502+9*1	512	512
2	4+3*4	16	24	11+4*8	43	59	26+5*16	106	138	57+6*32	249	313	120+7*64	568	696	247+8*128	1271	1527	502+9*256	2806	3318
3	4+3*9	31	55	11+4*24	107	166	26+5*59	321	459	57+6*138	885	1198	120+7*313	2311	3007						
4	4+3*16	52	107	11+4*55	231	397	26+5*166	856	1315												
5	4+3*25	79	186	11+4*107	439	836															
6	4+3*36	112	298	11+4*186	755	1591															
7	4+3*49	151	449																		
8	4+3*64	196	645																		
9	4+3*81	247	892																		
10	4+3*100	304	1196																		

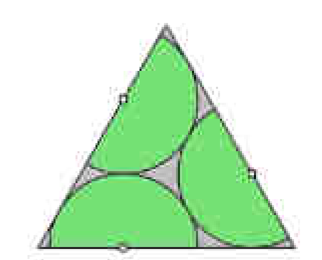
Bene, c'è stato spazio per un'estensione. Procediamo.

5.2 [270]

5.2.1 Ritorna il Giardino!

Un bel problema tutto geometrico, con figura e veloce da raccontare:

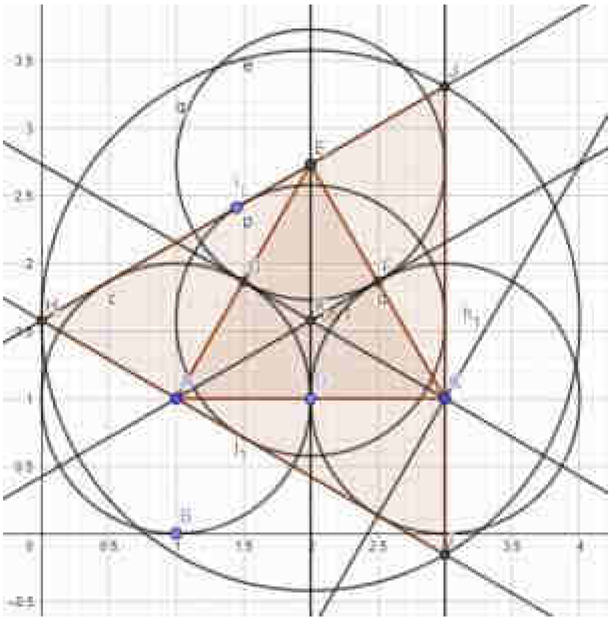
Il problema è sintetizzabile nell'immagine di fianco: l'aiuola contiene tre subaiuole definite da semicerchi di raggio unitario. Qual è il lato del vostro appezzamento?



9 *Il giardino!*

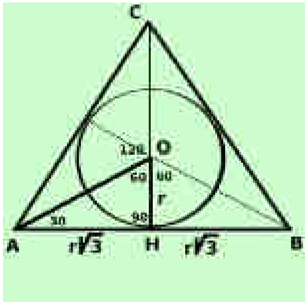
Bene, partiamo subito con le soluzioni, il primo è stato ***Luigi***:

Il valore del lato dell'aiuola è $2r\sqrt{3}$ ed essendo il raggio unitario rimane $2\sqrt{3}$.



Partiamo dall'aiuola HJI si può notare che il lato è costituito dal cateto HA del triangolo HEA e dall'ipotenusa AI del triangolo ACI. I due triangoli sono uguali ed hanno angoli di 30° 60° e 90°, sono cioè metà di un triangolo equilatero. Il cateto maggiore AC, che rappresenterebbe l'altezza di tale triangolo eq. vale $2r$ cioè 2 poiché sia AD che DC sono raggi dei semicerchi dell'aiuola. Quindi l'ipotenusa AI che è pari al lato del triangolo eq. varrà $2h/\sqrt{3}$ ovvero $4r/\sqrt{3}$, mentre il cateto HA che vale la metà del lato del triangolo eq. varrà $2r/\sqrt{3}$. Il lato dell'aiuola varrà quindi $6r/\sqrt{3}$ e razionalizzando $2r\sqrt{3}$ ovvero $2\sqrt{3}$.

Un altro metodo più diretto riguarda il cerchio circoscritto o il cerchio iscritto ad un triangolo equilatero.



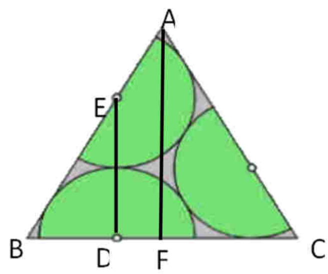
Per il cerchio iscritto ad esempio abbiamo che il lato è pari a $2r\sqrt{3}$. (vedi figura) Notiamo che il cerchio iscritto con centro nel punto K è uguale ai tre cerchi che formano i tre semicerchi interni all'aiuola quindi ha come loro raggio 1 e quindi il calcolo del lato sarà di nuovo $2\sqrt{3}$.

E questo è un approccio. ***Bluemonday*** ci scrive:

Ho capito che qua volevate un po' di fantasia, ma credo che gli altri solutori sapranno stupire di più. Io propongo la soluzione che forse voi chiamate diretta: noto che i centri delle due sub aiuole "a sinistra" si trovano su una stessa retta in quanto i raggi sono perpendicolari alla retta di tangenza e questa è perpendicolare al lato "inferiore" del triangolo. Questi due punti formano quindi col vertice di sinistra del triangolo un triangolo rettangolo "30 60 90". Chiamando x il cateto minore, l'ipotenusa sarà allora $2x$ mentre il cateto maggiore è pari a 2 in quanto formato dai due raggi. Per Pitagora: $x^2+2^2 = 4x^2$ e quindi $3x^2=4$ da cui $x = 2\sqrt{3}/3$. Per ragioni di simmetria e facile vedere che il lato del triangolo deve essere la somma dei cateti, ossia $3x = 2\sqrt{3}$. Detto questo, per discolparmi della mancanza di fantasia, devo dire che questo problema sa di "*hexagonal circle packing*" e probabilmente ciò che abbiamo dimostrato è equivalente al fatto che uno schema esagonale è il modo migliore per impacchettare dei cerchi, in quanto credo si possa usare il triangolo come "tassello" per tassellare il piano e dovrebbe uscire un qualcosa che a che fare con gli esagoni, molto vago lo so :D

Guardare un triangolo e vedere degli esagoni è già bello. Vediamo la versione di ***Stefano***:

Stiamo cercando il lato L del triangolo equilatero



Considero il triangolo (rettangolo) BDE. La sua area è data dal semiprodotto dei cateti oppure dal semiprodotto dell'ipotenusa per l'altezza, che è uguale al raggio del semicerchio.

Quindi ED · BD/2 = BE · 1/2, ma ED = 2 e BE = L – BD, da cui BD = **1/3 L.**

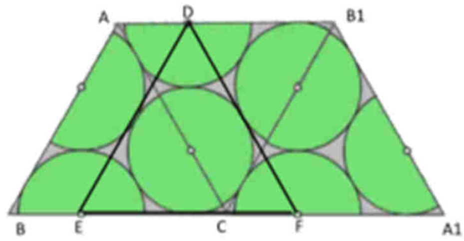
A questo punto posso ricavare L in vari modi; ad esempio facendo la proporzione tra basi ed altezze dei triangoli BED e BAF dove AF è l'altezza H del nostro triangolo equilatero e quindi è uguale a L · $\sqrt{3}/2$

BD : BF = ED : AF e cioè 1/3 L : 1/2 L= 2 : L · $\sqrt{3}/2$ da cui **L = 2$\sqrt{3}$**

Oppure…

Prendo il mio triangolo e lo duplico secondo l'asse di simmetria AC, e poi duplico ancora il triangolo duplicato secondo l'asse di simmetria CB1; considero il triangolo

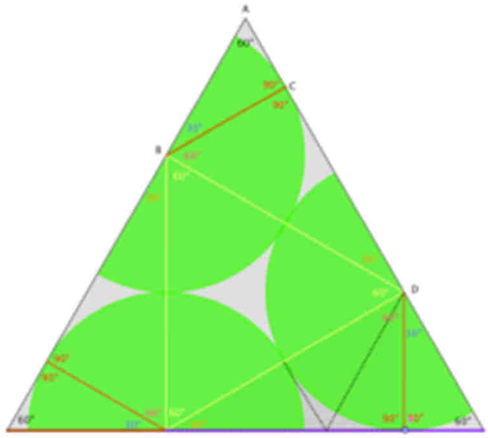
DEF ottenuto congiungendo i centri dei semicerchi: è uguale (disposizione delle aiuole a parte) a quello originale perché AB è parallela a DE e AC è parallela a DF.



Quindi i semicerchi hanno lo stesso raggio del cerchio iscritto nel triangolo equilatero e questo è pari all'apotema del triangolo che misura $R = L\cdot \sqrt{3}/6$; ma sappiamo che il raggio è unitario e quindi $\mathbf{L = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}}$.

Bella anche la seconda modalità! Vediamo ora le versioni di ***Valter***, sperando di averle catturate tutte:

Mi aiuto con un'immagine:



BD è un segmento di lunghezza due essendo formato dal raggio di due semicerchi unitari. Non è una spezzata perché i raggi si uniscono nel punto di contatto di tangente comune. Data la simmetria della figura, il triangolo interno giallo è equilatero con altezza √3. Ciò giustifica i tre 60° in giallo, in figura; i tre neri sono del triangolo equilatero. Nei due triangoli ABC, BCD gli angoli in C sono 90°, essendo il raggio tangente al lato. Nel triangolo ABC l'angolo in B è 30° poiché, il restante angolo in A, come detto è 60°. Il cateto BC di BCD è doppio dell'ipotenusa BD, quindi gli angoli in B D sono 30° e 60°.

<u>Metodo 1:</u>

I triangoli ABC BCD e ABD sono simili e si può confrontare il rapporto fra i loro lati. Ho quindi:

- CD=√3 essendo uguale all'altezza del triangolo equilatero giallo
- √3:2=1:AB → AB=2/√3
- √3:1=1:AC → AC=1/√3

Sommando i segmenti CD, AB e AC si ricava, quindi, il valore del lato: √3+2/√3+1/√3=2√3.

<u>Metodo 2:</u>

Usando il teorema dei seni sui triangoli ABC/ABD, poiché BC=raggio semicerchio unitario:

- AB=1/sin(***π***/3)
- AD=1/(sin(***π***/3)*sin(***π***/6), … avendo appena prima già calcolato AB.

Si ottiene il valore del lato dalla loro somma:

(1/sin(***π***/3))+(1/(sin(***π***/3)*sin(***π***/6)))=2√3.

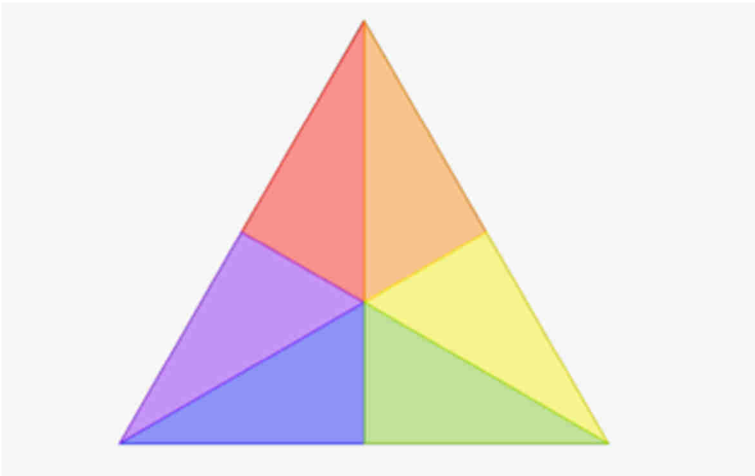
<u>Metodo 3:</u>

L'aiuola è composta di:
- un triangolo giallo
- tre triangoli BCD ciascuno dei quali hanno area ½ del precedente
- tre triangoli ABC con area complessiva uguale a quella di un BCD (come si nota analizzando le linee nere tratteggiate nel disegno).

L'area totale della figura è tre volte quella del triangolo giallo. Il lato richiesto si ottiene da quello giallo, per radice tre: $2\sqrt{3}$ (vedi le formule sui fattori di scala di figure geometriche simili).

<u>Metodo 4:</u>

Discorso analogo al precedente mostrando che la figura è formata da sei triangoli BCD:



<u>Metodo 5:</u>

Da quanto detto in precedenza e guardando il disegno si nota che il lato dell'aiuola è AD+AB. Dagli angoli del triangolo ABD si ricava che la lunghezza del lato AD è due volte AB. Sfruttando, quindi, Pitagora e sapendo che BD=2 ho

$(2AB)^2 - AB^2 = 2^2 \rightarrow 3AB^2 = 4 \rightarrow AB = 2/\sqrt{3}$.

Per cui:

$AD+AB \rightarrow 2AB+AB \rightarrow 2(2/\sqrt{3})+2/\sqrt{3} \rightarrow 4/\sqrt{3}+2/\sqrt{3} \rightarrow 6/\sqrt{3} \rightarrow (2\sqrt{3}\sqrt{3})/\sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}$.

<u>Metodo 6:</u>

Provo che l'area dell'aiuola è tripla del triangolo giallo e, quindi, vale quanto già detto. Nel triangolo giallo vi sono tre settori circolari verdi che sommati formano un semicerchio. L'aiuola ha tre semicerchi; ora basta mostrare che, anche la superficie grigia, è il triplo. Accostando due pezzi sui lati dell'aiuola si ottiene uno uguale a quello centrale in figura.

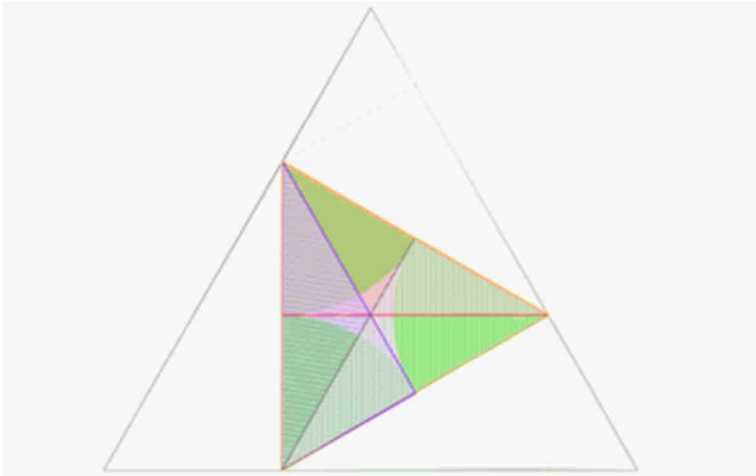
I tre pezzi grigi ai vertici dell'aiuola, uniti, ne formano uno uguale ai tre sui suoi lati. Si può verificarlo notando come, le linee tratteggiate nere ne dividono uno dei tre ai lati. In totale unendo si hanno tre figure uguali a quella grigia, al centro del triangolo giallo.

<u>Metodo 7:</u>

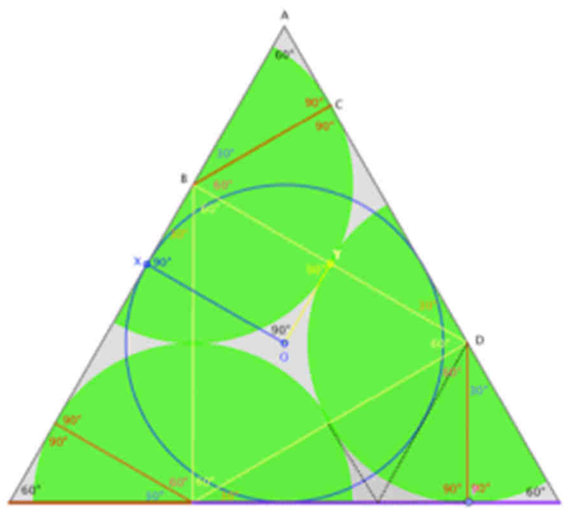
Mostro, come già detto, che l'area dell'aiuola è tripla di quella del triangolo giallo. Lo faccio in un modo leggermente diverso; non sto a ripetere il resto del ragionamento. L'area del triangolo BCD, è tripla di quella di ABC, ed è la metà del triangolo giallo. Il triangolo giallo è quindi composto di sei triangoli ABC mentre l'aiuola di diciotto. Si può mostrare sfruttando il disegno iniziale per fare una specie di origami:
- taglio tre segmenti rossi BC, sono i cateti minori di BCD
- piego sul lato del triangolo giallo i tre BCD all'interno
- il triangolo giallo è completamente ricoperto dai tre BCD

- i tre BCD si sovrappongono solo parzialmente, a due a due
- le tre superfici in comune formano triangoli uguali a ABC
- il triangolo giallo, è in parte coperto una seconda volta
- per completare, si spostano dentro opportunamente gli ABC.

La superfice esterna dell'aiuola ricopre, quindi, due volte quella del triangolo giallo.
In totale l'area dell'aiuola è il triplo del triangolo giallo; un disegno per spiegarmi:



<u>Metodo 8:</u>
Ho arricchito l'immagine per aiutarmi nell'esposizione:



X è il punto medio del lato dell'aiuola; Y lo è del lato del triangolo giallo interno.
Il quadrilatero OXBY è un rettangolo avendo i quattro angoli ai vertici, tutti di 90°:
- in B per quanto già detto
- in X per costruzione
- in Y essendo YO tangente ai semicerchi
- in O dovendo dare somma 360°.

O è l'ortocentro dell'aiuola che, essendo un triangolo equilatero, è pure l'incentro.
Provo che l'intersezione di YO con XO è proprio l'incentro O:
- i tre YO sui lati del triangolo giallo si uniscono nel suo incentro
- per ragioni di simmetria delle subaiuole esso lo è pure dell'aiuola
- non vi sono, infatti, ragioni che possa essere più vicino a un lato
- …forse è un po' forzato ma penso che sia un ragionamento plausibile.

Da questo si ricava che l'incerchio ha, anche lui, il raggio unitario.
Lato di un triangolo equilatero dal raggio r cerchio inscritto $\rightarrow 2r\sqrt{3}$:
- triangolo lati a b c, $s = (a+b+c)/2$, $r=\sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)/s]}$

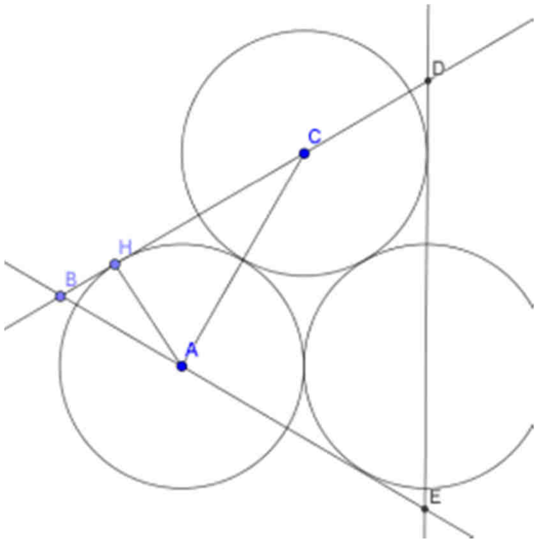
- in un triangolo equilatero a=b=c perciò → r=a√3/6
- lato a=6r/√3, moltiplico per √3/√3 e ho → a=2r√3.

Metodo 9:

Calcolo il lato come somma di 3 tangenti sapendo che: tan(60°)/tan(30°) = √3/(1/√3) = 3.

Lato = CD + AB + AC = tan(60°) + 2*tan(30°) + tan(30°) = 3*√3 + 2*√3 + √3 = 6/√3 = 2/√3.

Così tanti metodi! E non siamo che a metà strada, tantissime soluzioni e tutte creative. ***Alberto R.*** scrive:



Per simmetria il triangolo BDE è equilatero e l'angolo in B è di 60 gradi, per cui l'angolo HAB è di 30 gradi. Nel triangolo rettangolo AHC l'ipotenusa AC è doppia del cateto AH. Ne consegue che l'angolo HAC è di 60 gradi.

60+30=90 per cui CA è perpendicolare a BA.

Nel triangolo rettangolo BAC l'altezza AH è metà dell'altezza AC, quindi le relative basi sono una doppia dell'altra: BC = 2AB

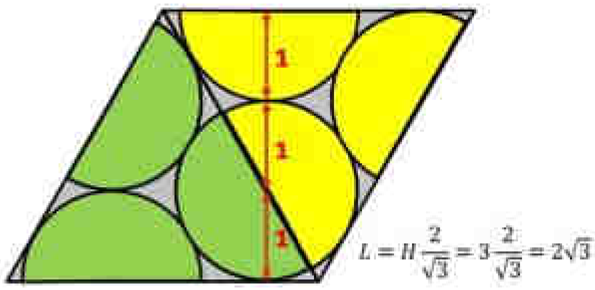
Per Pitagora: $BC^2 – AB^2 = AC^2 = 4$

Da queste due equazioni si ottiene AB = 2/rad(3) e BC = 4/rad(3)

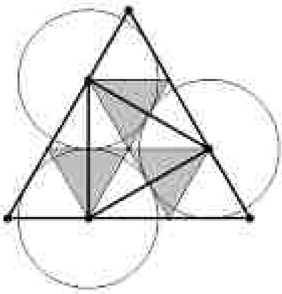
Infine, essendo (per simmetria) AB = CD, si ricava che il lato del triangolo equilatero BDE è 6/rad(3)

Se, come dicono gli autori, ci sono molte strade per arrivare al risultato, io concorro per il premio che spetta a chi ha trovato la più lunga.

No, non è la più lunga di certo, ma proseguiamo. La più corta è quella di ***BR1***, che manda solo un'immagine:



Poi viene la soluzione di ***trentatre***, che ne presenta in realtà due:



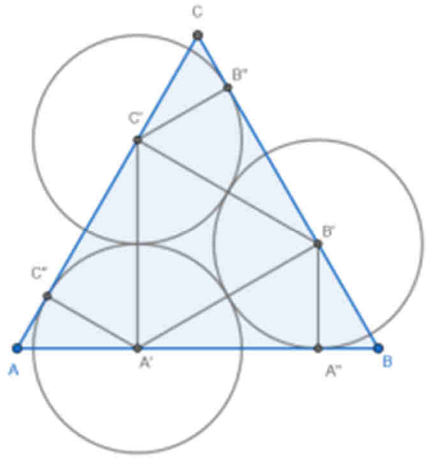
Il giardino è diviso dalle parallele ai lati passanti per i centri in 9 triangoli uguali, mentre il triangolo costruito sui centri comprende 3 di questi triangoli (divisi in 6 metà); il rapporto delle aree è $3:1$ e quello dei perimetri (i triangoli sono simili) è $\sqrt{3}:1$; poiché il perimetro del triangolo piccolo vale 6 (ogni lato due raggi) quello del giardino è $6\sqrt{3}$.

Era forse più semplice osservare che il giardino è un triangolo equilatero di altezza 3 e seguire Pitagora, ma un risultato senza algebra mi sembra più carino, e del resto avevo già fatto il disegno.

Giustamente, aver fatto il disegno non è da poco e se ne trovano parecchie versioni in queste pagine. Ma vediamo ancora la soluzione di ***Franco57***:

Soluzione 1

A', B', C'sono i centri dei tre cerchi e A", B", *C*" sono i punti di tangenza tra questi e i lati del triangolo equilatero. C'B"C e C'B"B' sono quindi angoli retti.



(C'B"C) perciò è la metà un triangolo equilatero quando viene diviso lungo l'altezza.

Lo stesso si può affermare di (C'B"B') perché C'B", che è il raggio *r*, è la metà di C'B', che vale 2*r*). Quindi anche il triangolo (CC'B') è la metà un triangolo equilatero diviso per l'altezza (CC'B' risulta retto per somma) e di conseguenza CC' è la metà CB.

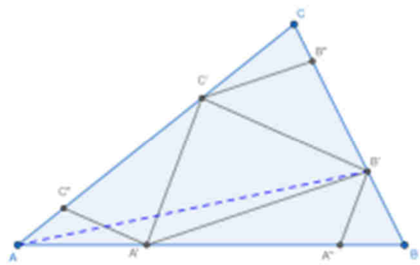
Poiché per simmetria CC'=BB', allora CB' è 2/3 del lato *l*. Abbiamo quindi C'B' = √3/2 CB' cioè

$$2\cdot r=\frac{\sqrt{(3)}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot l=\frac{l}{\sqrt{(3)}}$$

da cui, per un raggio unitario, $l = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3}$.

Soluzione 2 (messa come scusa per mostrare la simpatica proprietà sotto riportata)

Prendiamo un triangolo qualsiasi (ABC) e stacchiamo 1/3, o in generale una percentuale λ, di segmento da ogni lato, A in direzione B, B in direzione C, C in direzione A, che chiamiamo rispettivamente A',B',C'. Quindi $AA'=\lambda\cdot AB; BB'=\lambda\cdot BC; CC'=\lambda\cdot CA$.



Abbiamo questa simpatica proprietà: il triangolo (A'B'C') ha 1/3 dell'area di (ABC), o in generale $\lambda^3+(1-\lambda)^3$ della sua area.

Lo si vede per differenza, perché ad esempio consideriamo il triangolo (B'CA): poiché $B'C=(1-\lambda)\cdot a$ allora l'area di (B'CA) risulta 1 – λ l'area di (ABC). E a sua volta l'area di (CC'B') vale una percentuale λ dell'area di (CAB') perché questo è il rapporto tra le basi CC' e CA. Dunque l'area (CC'B') vale λ (1 – λ) l'area di (ABC). Lo stesso si può quindi dire di (AA'C) e di (BB'A). Per differenza quindi l'area di (A'B'C') risulta essere una percentuale $1-3\cdot\lambda\cdot(1-\lambda)=\lambda^3+(1-\lambda)^3$ dell'intera area (ABC), che per λ = 1/3 vale 1/3.

Nel caso che (ABC) sia un triangolo equilatero e λ = 1/3 abbiamo che CC' che è 1/3 del lato è la metà di CB' che ne è i 2/3 e quindi essendo l'angolo in C π/3 il triangolo CC'B' è metà di un triangolo equilatero di lato CB', quindi C'B' vale i 2/3 dell'altezza del triangolo equilatero. Posto B" il piede di C' su BC si ha che anche (CB"C') è metà di un triangolo equilatero di lato CC' e altezza C'B", che chiaramente vale 1/3 dell'altezza di (ABC). Insomma B'C' è perpendicolare a AC; C'B" è perpendicolare a CB (per definizione); C'B" è la metà C'B'. Perciò, considerando la simmetria di rotazione di π/3, possiamo costruire le tre circonferenze tangenti tra loro e ai lati di (ABC) come nella illustrazione del quesito pubblicato. Posto C'B', che è il raggio, al valore unitario, il lato l del triangolo equilatero vale $\sqrt{3}/2 \cdot l/3 = 1$ da cui $l = 2\sqrt{3}$.

Adesso basta, passiamo al secondo problema.

5.2.2 Dato un ottagono, non necessariamente con otto lati...

Altro problema geometrico? Che il Capo stia diventando più simpatico? Il testo:

> *Prendiamo un ottagono, per semplicità regolare, e marchiamo i vertici e i punti medi di ogni lato. Formiamo il poligono interno, ottenuto percorrendo l'ottagono in senso orario e selezionando „qualche punto" di quelli marcati, facendo in modo che ogni lato dell'ottagono originale contenga esattamente un punto di quelli selezionati. Quanti poligoni potete disegnare nell'ottagono?*

Siete pronti? La richiesta era di generalizzare all'*n*-agono, vediamo quanti ci hanno provato, e cominciamo con ***Bluemonday***, che questa volta ha risolto tutti i problemi:

> Innanzitutto faccio la premessa che conterò i poligoni con i vertici "numerati" e cioè considero distinti due poligoni interni se sono formati da vertici numerati diversi, pur avendo la stessa forma geometrica. Ammetto che per studiare la questione ho prima usato un programma python per generare i poligoni, se volete allego. Il risultato che ottengo è che dato n, il numero dei lati del poligono regolare di partenza, il numero di poligoni interni e L(n), l'ennesimo numero di Lucas. Abbiamo cioè L(3)=4, L(4)=7 e in generale vale la ricorsione L(n)=L(n–1)+L(n–2). La mia dimostrazione di questo fatto è la seguente: innanzitutto noto che posso rappresentare ogni poligono interno a un poligono di N lati come una stringa di N lettere dove ogni lettera è o "L" (LEFT), "C" (CENTER), "R" (RIGHT). Quindi ad esempio la stringa "CRL" indica il poligono interno (in questo caso un poligono degenere, lo so che ho violato le vostre condizioni! :D) ottenuto selezionando il punto medio per il primo lato, poi il vertice destro del secondo lato (usando il verso orario di percorrenza) e infine il vertice sinistro per l'ultimo. Ora la condizione di essere un poligono interno si può tradurre con le seguenti regole per le stringhe:
>
> - Se ho la lettera R, la seguente (o la prima della stringa se la R era l'ultima) DEVE essere una L
> - Se ho la lettera L, la precedente (o l'ultima della stringa se la L era la prima) DEVE essere una R
> - Se ho una lettera C, la precedente (o l'ultima della stringa se la C era la prima) NON DEVE essere una R e la seguente (o la prima della stringa se la C era l'ultima) NON DEVE essere una L
>
> Per dimostrare che L(n) = L(n–1) + L(n–2) è sufficiente trovare un biezione dall'insieme delle stringhe grammaticali di lunghezza N all'insieme unione della stringhe grammaticali di lunghezza N–1 o N–2. Definiamo una tale funzione f in questo modo: data una stringa di N lettere valida, osserviamo l'ultima lettera. Ci sono tre casi:

1. La stringa finisce in R. Allora deve essere che la prima e una L, ossia la stringa e del tipo "L......R". In questo caso la nostra funzione f restituisce la stringa contenuta tra la prima e ultima lettera (esempio: "LCCRLR" -> "CCRL"). È facile dimostrare che questa è una stringa valida di N–2 lettere. Inoltre è facile anche vedere che questa stringa non può essere del tipo 'L...R' perché se non fosse così la stringa iniziale sarebbe del tipo 'LL...RR', ma questa non è valida.
2. La stringa finisce in C. in questo caso la nostra funzione f restituisce la stringa prima della lettera C, e questa è una stringa valida di lunghezza N–1 (esempio: "CRLCC" -> "CRLC"). Inoltre è anche facile vedere che questa stringa non può essere del tipo 'L....R', perché altrimenti la stringa iniziale sarebbe del tipo 'L....RC', non valida.
3. La stringa finisce in L. Allora deve essere che la penultima e una R, ossia la stringa e del tipo "......RL". Qua abbiamo due possibili sotto casi:
    a. La prima lettera e una C: in questo caso la f ci da la stringa ottenuta togliendo la C iniziale e muovendo poi l'ultima L all'inizio (esempio: "CCCRLRL" -> "LCCRLR").Questa e sempre una stringa valida di N–1 lettere del tipo 'L....R'.
    b. La prima lettera è una R. Allora la seconda sarà una L, e la funzione *f* ci da la stringa ottenuta eliminando la L e R iniziali e muovendo poi l'ultima L all'inizio (esempio: "RLRLCRL" -> "LRLCR". Questa è una stringa valida di N–2 lettere di tipo 'L...R'

Resta solo da dimostrare che la *f* così definita è bigettiva ma questo è abbastanza evidente se notiamo che tutte le operazioni descritte sopra sono chiaramente invertibili e definiscono perciò delle bigezioni tra i seguenti insiemi:

1. Insieme di stringhe valide di lunghezza N di tipo 'L...R' <=> Insieme di stringhe valide di lunghezza N–2 di tipo diverso da 'L...R'
2. Insieme di stringhe valide di lunghezza N di tipo '.....C' <=> Insieme di stringhe valide di lunghezza N–1 di tipo diverso da 'L...R'
3. Insieme di stringhe valide di lunghezza N di tipo '.....RL' <=> Insieme di stringhe valide di lunghezza N–1 o N–2 di tipo 'L..R'

Dato che gli insiemi a sinistra formano una partizione delle stringhe valide di lunghezza N e quelli a destra una partizione di quelli di lunghezza N–1 o N–2 ne consegue che la *f* è una biezione di questi insieme e quindi: $L(n) = L(n-1)+L(n-2)$ che dimostra la relazione ricorsiva che cercavamo.

Speriamo di non aver pasticciato l'impaginazione. La prossima versione è di ***Stefano***:

Certo l'indizio era forte: perché maggiore o uguale a 5? Perché non considerare anche 3 (triangolo) e 4 (quadrato, rimanendo sul poligono regolare)?

Comunque, usando l'ottagono come caso di studio:

- È sempre possibile tracciare uno (e uno solo) ottagono interno usando tutti e soli i punti di mezzo
- Ogni vertice usato "conta per due" e riduce di 1 il numero di lati dei poligoni iscritti; quindi usare 1 vertice e 6 punti di mezzo ci fa disegnare degli eptagoni, due vertici e 4 punti di mezzo degli esagoni, ecc.
- Ogni vertice usato inibisce l'uso di quello che lo precede e di quello che lo segue
- Se uso un solo vertice ne posso sceglierne uno qualsiasi e quindi posso disegnare 8 eptagoni
- Se ne uso 2, deciso il primo posso scegliere il secondo tra altri 5 (perché come detto due sono inibiti); quindi le possibilità (e cioè gli esagoni) sono 5 * 8 /2 = 20, e cioè esattamente il numero delle diagonali

- Se ne uso 3, scelto il primo ho 6 possibilità di scegliere gli altri due; quindi le possibilità (pentagoni) sono 6* 8/3 = 16
- Se ne uso 4 ho due possibilità: o uso quelli pari o uso quelli dispari, e quindi posso disegnare 2 quadrati
- Più di 4 vertici non ne posso usare, altrimenti qualche lato avrebbe più di un punto
- In totale = 1 + 8 +20 +16 + 2 = 47

Con poligoni diversi all'ottagono le considerazioni sono le stesse, con una sola differenza significativa: se il poligono di base ha un numero dispari di lati (es., eptagono), il caso di massimo utilizzo di vertici lascia comunque 1 punto di mezzo in uso, che posso scegliere tra tutti; i casi sono dunque tanti quanti i lati del poligono (7 per l'eptagono) e non 2 come nei casi di poligoni con numero pari di lati.

Facendo i conti vedo che la successione, dal pentagono in poi, è la seguente: 11, 18, 29, 47, 76, 123, .., e che un elemento è la somma dei due precedenti (ho anche cercato in internet se questa successione ha un significato particolare, ma al massimo ho trovato che è stata usata in un quiz per l'assunzione di 250 vigili del fuoco, e che l'80% ha risposto correttamente).

Ma c'è di più, come si vede da questa tabella:

		N-agoni	N-1agoni	N-2agoni	N-3agoni	N-4agoni	N-5agoni	N-6agoni	N-7agoni	
	Numero --> di vertici usati	0	1	2	3	4	5	6	7	Totale
N-agono	3	1	0							1
	4	1	4							5
	5	1	5	5						11
	6	1	6	9	2					18
	7	1	7	14	7					29
	8	1	8	20	16	2				47
	9	1	9	27	30	9	0			76
	10	1	10	35	50	25	2	0		123
	11	1	11	44	77	55	11	0	0	199
	12	1	12	54	112	105	36	2	0	322
	13	1	13	65	156	182	91	13	0	521
	14	1	14	77	210	294	196	49	2	843
	15	1	15	90	275	450	378	140	15	1364

Il totale di una riga è pari alla somma di quelli delle due righe precedenti, perché ciascun elemento di una riga è pari alla somma di un elemento della riga precedente e di uno di due righe sopra: il valore immediatamente sopra, e quello di due righe sopra ma nella colonna precedente (tranne il valore della prima colonna, che è sempre 1); ho evidenziato due casi per essere più chiaro.

Quindi, oltre a sapere il numero totale di poligoni, è facile sapere anche quanti sono quelli di ciascun tipo.

Questo fa rientrare nella generalizzazione anche triangolo e quadrato, come radici per la generazione dei numeri di pentagono ed esagono.

Vediamo ora che cosa ci ha scritto ***Valter***:

Voi scrivete "se non abbiamo sbagliato la formulazione"; io invece "se ho compreso il problema". Viste le mie ultime "performance", è sicuramente, parafrasando Quelo: "la seconda che ho detto".

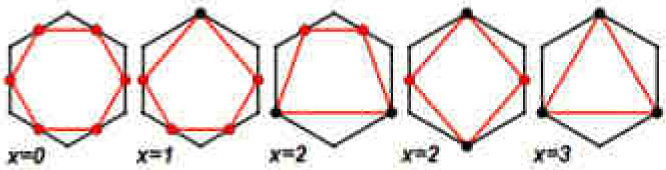
Interpreto: "quanti poligoni potete disegnare …" considerando quelli con diverso numero di lati. Per cercare di farmi capire: se posso a formare più di un quadrilatero, conteggio solamente uno. Mi pare che, con n numero dei lati, debba essere i modi di ottenere n, come somma di soli 1 e 2.

Ad esempio 8=: 2+2+2+2, 2+2+2+1+1, 2+2+1+1+1+1, 2+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1; in tutto 5 modi.

I poligoni che si possono disegnare sono, quindi, quelli dal quadrilatero all'ottagono compresi.

Partendo da n=5 a seguire i poligoni disegnabili sono: 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6…; in formula chiusa $\lfloor n/2 \rfloor+1$.

Malgrado spesso una soluzione del nostro ***Valter*** arrivi in una serie di mail infinite, almeno non restiamo mai senza. Passiamo ora all'esperto ***trentatre***

> Indico con P e Q i poligoni esterno ed interno, di lati N e K. I vertici di Q sono di due tipi $\boldsymbol{x}$ (vertici di P) e $\boldsymbol{y}$ (punti di mezzo dei lati di P) con le proprietà
>
> - ogni $\boldsymbol{x}$ impegna due lati, ogni $\boldsymbol{y}$ un solo lato
>
> - ogni lato è impegnato da uno e solo uno dei punti
>
> - il numero di punti è $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=K,\ 2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=N$
>
> - bastano i valori $(N,\boldsymbol{x})$ per avere gli altri da $\boldsymbol{y}=N-2\boldsymbol{x}, \quad K=N-\boldsymbol{x}$
>
> - gli $\boldsymbol{x}$ non possono essere vertici vicini di P, e il loro numero può essere $\boldsymbol{x}=0,1,2,\ldots\lfloor N/2\rfloor$
>
> - dato N il numero di coppie $(N,\boldsymbol{x})$ è quindi $\lfloor 1+N/2\rfloor$ ma ad ogni coppia possono corrispondere più poligoni di forma diversa
>
> - in figura il caso $N=6$ (punti $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ in nero e rosso) dove compaiono due Q con $\boldsymbol{x}=2$; il numero di Q diversi è quindi 5.
>
> 
>
>
> Il numero q_N di Q diversi per ogni N è
>
> [1] $\qquad q_{N\,(N\geq 5)}=3,5,5,8,9,13,15,22,25,35,\mathrm{K}$
>
> Per ogni coppia $(N,\boldsymbol{x})$ gli $\boldsymbol{x}$ dividono gli N lati di P in parti distinte, ognuna delle quali comprende almeno 2 lati; due Q sono diversi se queste parti non coincidono per rotazioni o riflessioni; questo significa che esiste un Q diverso per ogni <u>partizione del numero N in parti ognuna maggiore o uguale a 2</u>
>
> - nel caso N=6 si hanno le 4 partizioni $(6)(2+4)(3+3)(2+2+2)$ che corrispondono, salvo il primo $\boldsymbol{x}=0$, ai Q in figura, e questo conferma $q_6=5$
>
> - inversamente date le partizioni di N si possono posizionare i punti $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e disegnare i poligoni
>
> - ripetendo il calcolo per i primi N si ha l'inizio della [1], sufficiente per trovare sul sito ***OEIS*** la sequenza ***A232697*** (togliendo 1 ad ogni termine si ha la *A002865*, che corrisponde alla definizione data sopra).
>
> Le partizioni degli interi non si possono in generale ottenere con formule dirette o per iterazione, ma si trattano con funzioni generatrici; per la [1] vale la
>
> $$\sum_{n=0} q_n\cdot t^n=t/(1-t)+1/(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)\ldots$$
>
> - i valori si possono ricavare con un programma di calcolo simbolico, ma i primi 1000 termini sono già tabulati in *OEIS*.

Sempre molto preciso, così come il grande ***Franco57***:

> Chiamo i vertici di un poligono a n lati scorsi in senso antiorario[13] $V_1, V_2, \ldots, V_n$ e i punti in mezzo ai lati $M_1, M_2, \ldots, M_n$ dove M_i è tra V_i e V_{i+1}.
>
> Se devo calcolare quanti sono gli Y_n *percorsi ammissibili*, intendendo quelli che disegnano il *poligono interno* con le caratteristiche richieste, che partono da un

[13] mannaggia, mi sono accorto, solo adesso che ho già preparato le figure, che il testo del quesito dice "*percorrendo l'ottagono in senso orario*", beh pensando tutto in senso antiorario sicuramente il risultato è lo stesso!

fissato vertice, poniamo V_1, lo posso fare in modo ricorsivo considerando il primo punto in senso antiorario da collegare a V_1, che può essere solo M_2 oppure a V_3.

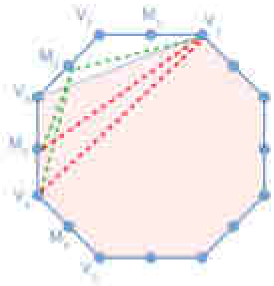


Figura 1

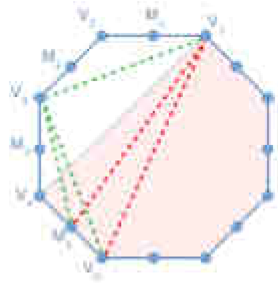


Figura 2

Nel primo caso (collegamento V_1M_2), illustrato in figura 1, si proseguirà poi a collegare M_2 a M_3 o V_4, con le linee verdi, esattamente come inizia un percorso ammissibile da V_1 all'interno del poligono rosso (di vertici V_1, V_3, V_4, …, V_n) che ha n – 1 lati, tracciato con le linee rosse sempre nella figura 1. Dopo i due percorsi proseguono con le stesse regole fino a tornare a V_1. Quindi in totale contiamo in questo primo caso Y_{n-1} percorsi ammissibili. Da notare che nel poligono rosso poco importa che sia definito anche un punto medio tra V_1 e V_3, tanto non sarebbe usato in un percorso ammissibile da V_1.

Nel secondo caso (collegamento V_1 V_3), illustrato in figura 2, si proseguirà poi a collegare V_3 a M_4 o V_5, esattamente come inizia un percorso ammissibile da V_1 all'interno del poligono rosso che questa volta ha $n - 2$ lati. Quindi per questo secondo caso contiamo Y_{n-2} percorsi ammissibili.

Insomma possiamo concludere che $Y_n = Y_{n-1} + Y_{n-2}$.

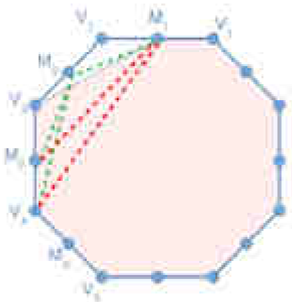


Figura 3

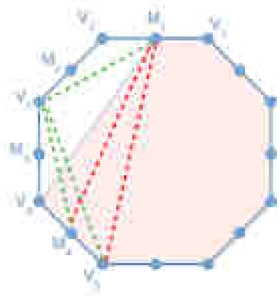


Figura 4

Con ragionamento analogo, illustrato nelle figure 3 e 4, possiamo calcolare quanti sono gli Z_n percorsi ammissibili che partono da un fissato punto medio, poniamo M_1. Esso può essere collegato inizialmente solo a M_2 oppure a V_3 e questa volta i poligoni rossi corrispondenti hanno rispettivamente n e $n - 1$ lati, quindi otteniamo $Z_n = Y_n + Y_{n-1}$. Da questa è quasi immediato ricavare che anche Z_n rispetta una definizione ricorsiva alla Fibonacci, cioè $Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-2}$.

Per calcolare quanto richiesto dal quesito e cioè tutti gli X_n percorsi ammissibili in un poligono a n lati, fissiamone un lato e osserviamo che uno e uno solo tra i due vertici alle sue estremità e il punto medio è coinvolto in un percorso ammissibile, dunque $X_n = Y_n + Z_n + Y_n$ e di conseguenza anche per X_n vale la formula ricorsiva $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$.

Per completare la nostra formula ricorsiva di X_n non resta che calcolarla per i primi valori. A questo proposito visto che, nonostante le apparenze, il problema non è affatto geometrico, ma combinatorio, per avere casistiche combinatorie più semplici, possiamo tranquillamente usare "poligoni" molto degeneri a 1 lato e a 2 lati, illustrati nelle figure 5 e 6, dove le linee verdi tratteggiate rappresentano i cammini ammissibili (o "poligoni interni" secondo le regole), che sono rispettivamente 1 e 3.


Figura 5


Figura 6

Quindi abbiamo X_1=1, X_2=3 e $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$, cioè **la successione di Lucas**!

Applichiamola, fino a ottenere 47 poligoni interni ammissibili per l'ottagono: X_3=4, X_4=7, X_5=11, X_6=18, X_7=29, X_8=47.

La successione di Lucas è anche esprimibile esplicitamente con la formula di Binet

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^n$$

che si dimostra agevolmente per induzione:

$$L_1=\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^1+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^1=\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}+\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$L_2=\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{(5)}}{4}+\frac{6-2\sqrt{(5)}}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$L_{n-1}+L_{n-2}=L_n\Leftrightarrow\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}=\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}+1-\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^2\right)+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}+1-\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^2\right)=0\Leftrightarrow$$

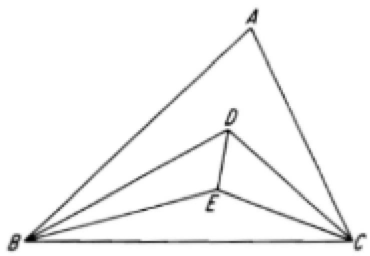
$$\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{(5)}}{2}-\frac{6+2\sqrt{(5)}}{4}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{(5)}}{2}-\frac{6-2\sqrt{(5)}}{4}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}\cdot 0+\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^{n-2}\cdot 0=0$$

Complimenti, a tutti i nostri solutori, per aver riempito la maggior parte della rivista anche nel caso di questo numero speciale e doppio. Ci scusiamo con tutti qui al fondo, se abbiamo tardato e se abbiamo fatto errori nel copiare le vostre soluzioni, ma soprattutto, se avessimo perso qualcosa, scriveteci, rispondiamo poco ma prendiamo provvedimenti quasi sempre, con i nostri tempi. Chiudiamo qui, alla prossima!

6. Quick & Dirty

Nel triangolo ABC, BD e BE sono le trisettrici dell'angolo in B, mentre CD e CE sono le trisettrici dell'angolo in C. Il punto E è, delle due intersezioni, quello più vicino al lato BC. Dimostrate che gli angoli BDE e EDC sono uguali tra loro.



Si vede che BE e CE sono le bisettrici degli angoli DBC e DCB, e quindi E è l'incentro del triangolo DBC. Quindi, DE biseca l'angolo BDC.

7. Zugzwang!

7.1 Oxxo

Abbiamo poche, incrollabili certezze nella vita: una di queste è che, nei passati quattro mesi, abbiate passato il tempo giocando una miriade del miriadesimo ordine di partite a *Quarto* (che vi avevamo spiegato sul numero 268), analizzandone acutamente le tattiche e le strategie ma, per uno strano scherzo del fato, l'*opus magnus* in ventiquattro volumi che avevate congiuntamente composto su questo argomento è andato perso.

Per risollevarvi dallo scoramento, abbiamo trovato un gioco che gli somiglia ma, nelle parole del suo creatore (che, come capita raramente su queste pagine, è un italiano:

Francesco Rotta), "mantiene i pregi ed elimina i difetti di *Quarto*". Il gioco ha avuto un ragionevole successo, raggiungendo la Nomination al Premio Archimede e, in una sua versione, risultando allegato alla rivista Focus, sotto il nome di "Forma o Colore"[14].

Anche qui, avete a disposizione un tavoliere 4x4 con dei "buchi" dove potrete mettere le pedine; siccome siamo italici, poveri e fantasiosi, anziché una cosa costosissima e pesantissima in plexiglass progettata da un designer palesemente sotto *bad trip*, ci accontentiamo di una economicissima plastica stampata, presumibilmente riciclata (e qui, se proprio vogliamo fare una critica, il colore è orribile: un giallino piuttosto scuro tendente all'ocra...), il che ci mette anche in pace con l'ambiente.

Comunque, oltre alla scacchiera avete anche dei pezzi, sedici in tutto: di questi:

- 8 sono *bianchi*, con una *croce blu* su un lato e un *cerchio rosso* sull'altro.
- 8 sono *gialli*, con una *croce rossa* su un lato e un *cerchio blu* sull'altro.

Coerentemente, quelli bianchi vanno al Bianco e quelli gialli al Giallo (no, la scelta dei colori non la commentiamo: già in Italia si progettano pochi giochi, non vorremmo scoraggiare questo manipolo di eroi). Comincia a giocare il Bianco, posando uno dei propri pezzi sul tavoliere, poi si passa al Giallo che fa la stessa cosa con i propri pezzi... e poi cambia tutto.

Nel senso che, dalla seconda mossa in avanti, le azioni possibili sono due:

1. Posare un pezzo del proprio colore in una delle caselle libere, oppure
2. Capovolgere un proprio pezzo già posato sulla scacchiera.

Se, per un qualche motivo (per esempio perché siete arrivati all'ottava mossa), avete finito i pezzi, allora siete obbligati a fare la mossa del secondo tipo. Il gioco è non violento, quindi non si mangiano i pezzi dell'avversario.

"E quando si vince?" Ecco, questa è la parte che ci piace di più: i modi di vincere sono uno per giocatore (più uno per perdere, ma ce lo teniamo per l'ultima frase): il *Bianco* ha lo scopo di allineare (orizzontale, verticale o diagonale) quattro pezzi della stessa *Forma* (cerchio o croce), mentre il *Giallo* deve allineare (idem) quattro pezzi dello stesso *Colore* (rosso o blu).

"Rudy, ci pare di intravvedere un'interessante soluzione di patta", certo, e infatti qui arriva la cattivissima regola di cui vi dicevamo sopra: *se un giocatore, con una mossa, causa la vittoria di entrambi nello stesso tempo, quel giocatore perde*.

Fateci sapere, ci pare un po' più semplice da giocare di quella roba dell'altra volta. E non dovrebbe neanche costare uno sproposito...

8. Pagina 46

[271]

Mostreremo che l'equazione ha infinite soluzioni nella forma $x_i = k^{\alpha_i}$ per opportuni naturali α_i (i=1, 2, …, k+1).

Si supponga gli α_i siano interi positivi tali che $\alpha_i\, p_i = \lambda$ per un dato numero (non definito) λ. In questo caso, definendo $x_i = k^{\alpha_i}$, la nostra equazione si riduce a:

$$k \cdot k^{\lambda} = k^{p_{k+1}\alpha_{k+1}}$$

e quindi

$$1+\lambda = p_{k+1}\,\alpha_{k+1}$$

ossia:

$$1 = p_{k+1}\,\alpha_{k+1} - \lambda$$

[14] Che a noi pare più interessante e più legato al gioco. Se qualcuno conosce l'Autore, potrebbe essere interessante scoprire il motivo del cambio di nome. Problemi di copyright?

Essendo λ un multiplo di numeri primi tra loro p_1, p_2, …, p_k, deve essere anche un multiplo del loro prodotto $P = p_1\ p_2 \dots\ p_k$. Sia $\lambda = Pq$ per un qualche intero positivo q. Sostituendo questo nell'ultima equazione, si ha:

$$1 = p_{k+1}\alpha_{k+1} - Pq$$

Questa è un'equazione diofantea nelle incognite α_{k+1} e q, mentre i coefficienti p_{k+1} e P sono primi tra loro. Inoltre è un'Equazione di Pell della forma $1 = ax - by$ che, se a e b sono primi tra loro, ammette infinite soluzioni tra i naturali: se x_0, y_0 sono soluzioni di $1 = ax - by$, allora tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione sono nella forma:

$$x = x_0 + bt \qquad y = y_0 + at$$

dove t è un intero tale che $t > max\left(-\frac{x_0}{b}, -\frac{y_0}{a}\right)$.

Quindi, l'equazione $1 = p_{k+1}\ \alpha_{k+1} - Pq$ ha infinite soluzioni nella forma:

$$\alpha_{k+1} = (\alpha_{k+1})_0 + Pt \qquad q = q_0 + p_{k+1}t$$

dove $(\alpha_{k+1})_0$, q_0 è una coppia di soluzioni dell'equazione e t è un intero per cui vale la $t > max\left(-\frac{(\alpha_{k+1})_0}{P}, -\frac{q_0}{P_{k+1}}\right)$.

Essendo $\lambda = Pq = \alpha_i\ p_i$ e $q = q_0 + p_{k+1}\ t$, segue che:

$$\alpha_i = \frac{P(q_0 + p_{k+1}t)}{p_i} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Quindi, l'equazione data ha infinite soluzioni della forma:

$$x_i = k^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k+1.$$

[272]

Siano i $3k$ punti terminali colorati in bianco, e siano colorati in nero i punti medi degli archi di lunghezza 2 e i due punti trisecanti (in parti uguali) gli archi di lunghezza 3. In questo modo, i punti bianchi e neri dividono in $6k$ parti uguali la circonferenza e definiscono i vertici di un $6k$-agono inscritto in C.

Essendo $6k$ un numero pari, ogni vertice è diametralmente opposto ad un altro e, essendo $3k$ punti bianchi, i restanti $3k$ punti devono essere neri. Il nostro scopo è provare che una qualche coppia di punti diametralmente opposti è bianca: procedendo per assurdo, supponiamo che ogni coppia consista di un punto bianco e uno nero.

I punti terminali di un arco AB originariamente di lunghezza 1 devono essere per costruzione entrambi bianchi, quindi devono avere come opposti due punti consecutivi C e D entrambi neri: questo si può avere solo se questi sono i punti di trisezione di un arco (sia esso PQ) originariamente di lunghezza 3.

Riduciamo ora gli archi AB e CD a (doppi) punti: questo porta la lunghezza totale degli archi a $6k$–2; supponiamo i nostri archi siano flessibili e portiamoli in ordine su un cerchio C' di circonferenza $6k$–2.

Essendo i due archi DA (o CB) e AD (o BC) ciascuno metà della nuova circonferenza, i punti (doppi) continuano ad essere diametralmente opposti. Sia il punto CD ancora colorato in nero e il punto AB ancora colorato bianco.

Quindi su C', ogni punto è ancora opposto al punto cui era opposto su C; quindi, il passaggio da C a C' mantiene la differenza dei colori dei punti opposti.

In questo processo, abbiamo annullato un arco AB di lunghezza 1 e portato a lunghezza 2 l'arco CD di lunghezza originale 3; quindi al momento su C' sono presenti k–1 archi di lunghezza 1, k+2 archi di lunghezza 2 e k–1 archi di lunghezza 3.

Ripetendo questo processo sino ad esaurimento degli archi originariamente di lunghezza 1 e 3 sui cerchi C', C'', …, C^k sino ad esaurimento degli archi di questi tipi (*il numero dei punti continua ad essere pari, quindi ogni punto ha un opposto e, applicando la medesima ipotesi di coloriture diverse, potremo sempre effettuare questa operazione*), arriveremo ad un momento nel quale abbiamo esaurito gli archi di queste lunghezze e il nostro cerchio è composto unicamente di $2k$ archi di lunghezza 2, contenente quindi $2k$ punti bianchi equispaziati (*e $2k$ punti neri anch'essi equispaziati, ma ignoreremo questo fatto*).

Quindi questi $2k$ punti bianchi sono i vertici di un $2k$-agono inscritto in C^k e, essendo $2k$ pari, questi punti bianchi sono diametralmente opposti a coppie.

Ma, avendo questi punti la stessa colorazione che avevano inizialmente, la differenza di colori non è conservata in C^k, quindi la nostra ipotesi deve essere falsa.

Il che completa la dimostrazione.

9. Paraphernalia Mathematica

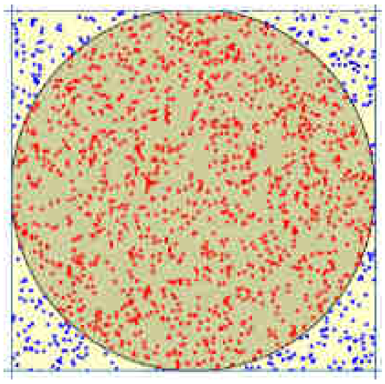
Va bene, se prendiamo un argomento a caso?

9.1 [271] Un sistema molto preciso

I numeri casuali sono troppo importanti per affidare la loro scelta semplicemente al caso.
Robert COVEYOU

Siamo abituati a sentirci dire che la matematica è la ricerca delle strutture, e il parlare della matematica di un qualcosa che, per definizione, richiede di essere senza struttura, lascia piuttosto perplessi. Non solo, ma l'abituale definizione di sequenza casuale come "sequenza che è più semplice elencare che descrivere come la si è ottenuta" a noi non è mai piaciuta.

No, non esistono definizioni migliori: il che è seccante, anche perché almeno due di noi sguazzano nei numeri casuali sin dalla più tenera età (nel senso che sono talmente vecchi da considerare gli anni universitari "tenera età"), attraverso il ***Metodo Montecarlo***.



10 *Pigreco a Montecarlo (quasi).*

Il Metodo Montecarlo permette di simulare un esperimento troppo complicato da risolvere esattamente. Qui di fianco vedete l'esempio classico, nel quale vogliamo valutare pigreco: generiamo coppie[15] di numeri casuali (tra zero e uno) e li usiamo come coordinate: alla fine, contiamo quanti punti sono dentro il cerchio e quanti sono fuori: il loro rapporto diventa il rapporto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato, e quindi potete ottenere il valore di pigreco.

Perfetto, se avete una scorta infinita di numeri casuali. A parte la vecchia battuta "Hai un generatore perfetto [1, 6] di interi casuali, che ha appena generato 1, 2, 3, 4, 5'; qual è il prossimo?", appunto per l'insufficienza di definizione di "numero casuale", anche se scrivete "casualmente" una sequenza di zero e uno, una "regola" sotto c'è, e si trovano simpatici programmini in rete in grado di predire, dopo qualche digitazione, il vostro prossimo "valore casuale" generato[16].

Esistono, sempre in rete, dei generatori di numeri casuali "ottimi", basati sul decadimento di materiali radioattivi, ma capite anche voi che se ogni volta che vi serve un numero casuale dovete andare a visitare il *core* di una pila atomica, forse è meglio fare i calcoli in modo deterministico. Ma allora, come si fa?

Risposta cattiva: non si generano dei numeri casuali, si generano dei numeri (pseudo)random (abbreviato in "random", che d'ora in poi utilizzeremo in questa accezione). Ossia dei numeri che "sembrano" casuali, limitatamente all'applicazione che intendete utilizzare: il nostro generatore perfetto [1, 6] visto sopra è, probabilmente, ottimo per generare due o tre random, ma se ce ne servono sei milioni non ci serve a nulla.

Il primo abbastanza folle da prendere sul serio il problema è stato (potevamo dubitarne?) ***John von Neumann***: e il modo è simpatico.

Supponiamo di voler creare una sequenza casuale di numeri di otto cifre:

1. partiamo da un ***seme*** generato da noi, ad esempio 35385906.
2. Eleviamolo al quadrato: risulta 1252162343440846.
3. Prendiamo le ***otto cifre centrali***: questo è il nostro ***secondo*** numero casuale.
4. Usiamo questo come nuovo seme.

[15] Teniamo il concetto in nota: meglio se i due generatori sono *indipendenti*, per evitare problemi.

[16] Una battuta un po' meno vecchia della precedente recita: "Il programma impara attraverso una rete neurale, migliore della tua".

Carino, vero? Avete tre secondi per trovare un valore che lo manda in palla.

Certo che, anche se non fate i cattivi, potreste avere qualche brutta sorpresa senza accorgervene: ad esempio, il numero 31360000 genera delle sequenze sempre uguali di periodo 99; nulla da eccepire se vi servono meno di cento numeri, ma il dubbio resta sempre.

Il dubbio può essere quello che la funzione sia troppo "semplice": complicandola, forse, si potrebbe ottenere qualcosa di sensato. A questo punto, lasciamo la parola a ***Donald Knuth***, che nell'immortale "The Art of Computer Programming" si esibisce nella costruzione di un generatore (a due cifre) piuttosto complesso:

1. scegliete un seme, sia esso $e = d_0d_1$
2. formate $r = 10 - [(d_1+d_0)\mathrm{mod}10]$
3. formate il numero di tre cifre $s = d_1rd_0$ (posizionale, non prodotto)
4. sia $t = \sin(e^s)$, formate il nuovo numero e_1e_0 dove e_i è la d_i-esima cifra decimale di t
5. se e_0 è maggiore di 5, sostituitelo con $10 - e_0$
6. Adesso, calcolate l'arcotangente di $\frac{e_1+1}{e_0-1}$: il nostro nuovo random (e il nuovo seme) è dato dalle prime due cifre decimali di questo calcolo.

...è abbastanza complesso? Bene, con *quasi tutti i numeri*, questo mostro produce il ciclo 91, 96, 46, 01, 64, 73, 72 e poi ricomincia. Capite che come generatore, anche se sembra abbastanza folle da sembrare randomico, non funziona molto bene.

Quello che nessuno si aspettava era che in realtà la risposta migliore fosse la più semplice: senza andare a scomodare quadrati o arcotangenti, una semplice *relazione lineare* permette di trovare, sotto determinate condizioni, un generatore con un periodo (finito) qualsiasi. Infatti, ***Lehmer*** ha dimostrato che il generatore:

$$x_{n+1}=(a\,x_n+c)\bmod m$$

Sotto alcune condizioni, è un generatore ottimo di periodo m: le condizioni sono, semplicemente, se definiamo $b = a - 1$:

1. c è primo rispetto m.
2. b è un multiplo di ogni primo che divide m.
3. b è un multiplo di 4 se m è un multiplo di 4.

A questo punto, se selezionate un opportuno m, potete generare delle sequenze "casualmente ragionevoli": se il vostro tritanumeri lavora su n bit, una buona scelta è utilizzare per m il massimo primo minore di 2^n (il primo che dice "Mersenne", vince un caffè).

Appare abbastanza evidente che le condizioni qui sopra enunciate sono ***necessarie*** ma non sufficienti: il caso a=c=1, che soddisfa le condizioni del problema, dovrebbe convincervi facilmente; dobbiamo, quindi, aggiungere qualche altra condizione.

Per quantificare questa, dobbiamo introdurre una nuova quantità, detta ***potenza*** della sequenza[17]; la potenza, nel nostro caso, è *il più piccolo intero s per cui* $b^s = 0 \bmod m$.

Per capire come funziona questo oggetto, consideriamo una sequenza rispondente alle caratteristiche viste sopra e avente quindi periodo m: considerato che "tanto prima o poi lo incontreremo", per semplicità possiamo iniziare con . Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
X_1&=(aX_0+c)\bmod m=c\\
X_2&=(ac+c)\bmod m\\
X_3&=(a^2c+ac+c)\bmod m\\
X_n&=(a^{n-1}c+\ldots+ac+c)\bmod m=\frac{(a^n-1)c}{b}\bmod m
\end{aligned}$$

Espandendo poi $a^n - 1 = (b+1)^n - 1$, abbiamo:

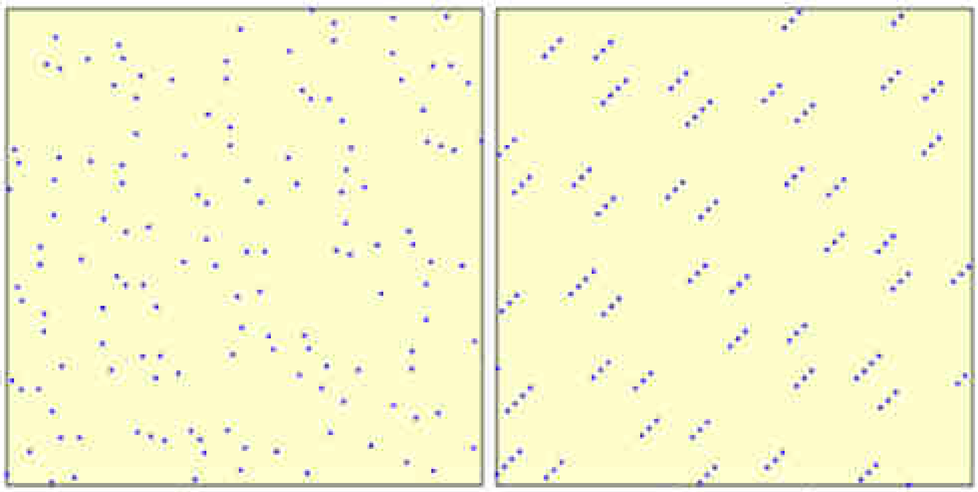
[17] Attenzione che in inglese si chiama *potency*: anche se c'entrano, è una cosa diversa dalle "power"

$$X_n = c\left(n + \binom{n}{2} + \ldots + b\binom{n}{s} b^{s-1}\right) (\text{mod } m)$$

Se la potenza vale 1, abbiamo $X_n = (cn) \bmod m$, che non è random.

Se la potenza vale 2, abbiamo $X_{n+1} - X_n = (c+cbn) \bmod m$: la differenza tra due termini successivi è facilmente predicibile, quindi non la definiamo random.

Qui, entra in ballo la parte insoddisfacente: "qualcuno" ha deciso che solo per una potenza almeno pari a 5 possiamo definire la successione come random: qui di seguito trovate i primi risultati di due generatori lineari: il primo ha potenza 5, mentre il secondo ha potenza 2.



$m=3^5 \cdot 5 \cdot 7 \quad b=3 \cdot 5 \cdot 7$ $\qquad$ $m=3^5 \cdot 5 \cdot 7 \quad b=3^3 \cdot 5 \cdot 7$

Il fenomeno che vedete nella seconda immagine è noto come ***Effetto Marsaglia***: ulteriori notizie tra breve.

Anche se abbastanza semplice, la nostra funzione lineare congruente genera (se facciamo attenzione ai parametri) dei numeri "ragionevolmente random", qualsiasi cosa questo significhi; questo però non ha impedito di provare a cercarne altre che dessero maggiori garanzie di "randomicità": ad esempio, bassando la successione su una congruenza ***quadratica***, come ha fatto ***Robert Coveyou*** (sì, proprio quello della citazione all'inizio), con la sequenza:

$$X_{n+1} = X_n (X_n + 1) \bmod 2^e$$

o, seguendo ***Gerard Mitchell*** e ***Donald Moore***, potete usare una *sequenza ritardata di Fibonacci*:

$$X_{n+1} = (X_{n-24} + X_{n-55}) \bmod m$$

Se vi state chiedendo da dove vengono i primi 55 termini, sono una lineare congruente "classica". Le nostre fonti si limitano a dire che "24 e 55 sono stati scelti dopo un attento studio, garantendo un periodo per la sequenza ragionevolmente lungo", senza ulteriori dettagli.

Esistono, comunque, alcuni test piuttosto semplici (anche se non pienamente soddisfacenti) per stimare la randomicità dei numeri generati.

Il ***test di frequenza*** si aspetta che tutti i numeri contenuti nel periodo del generatore siano generati approssimativamente con la stessa frequenza: notate che 0, 1, 2, … passa in modo perfetto il test di frequenza, quindi di solito si preferisce lavorare su *tutte le possibili coppie* di numeri generabili e verificare che le coppie di numeri successivamente generate siano suppergiù equifrequenti.

Il ***test di permutazione*** prevede di dividere la nostra sequenza in (piccoli) blocchi di lunghezza t; supponendo i numeri in ognuno dei blocchi siano tutti diversi tra loro, compariranno *t!* possibili schemi di ordinamento: ci aspettiamo che ognuno di questi sia equamente rappresentato.

Il ***test di monotonicità*** prevede di contare quanto sono lunghi i gruppi monotòni (crescenti o decrescenti): anche qui, ci sia spetta una equifrequenza dei valori.

Il ***test del poker*** è il più divertente, ma probabilmente anche il più inutile: dividendo la vostra sequenza a gruppi di cinque e considerandole delle "mani di poker", contate come sono distribuite le coppie, le doppie coppie, i tris, i poker, i 5 di un tipo, e i "tutti diversi"; vi aspettate l'opportuna probabilità per ognuna di queste combinazioni, in funzione della base nella quale state generando i numeri.

Il ***test del compleanno*** è uno degli ultimi inventati ed è attribuito ***George Marsaglia*** (già, proprio lui): dopo aver ordinato i numeri generati in ordine non decrescente, considerate la differenza tra due termini successivi; contando il numero di volte che una data differenza compare, ci aspettiamo sia distribuita uniformemente.

Un test dal nome piuttosto complesso ma ragionevolmente semplice è il cosiddetto ***test spettrale***: se generate, come nelle due immagini precedenti, delle sequenze $(x, f(x))$ e *esaurite il periodo*, vedete che i vostri punti generati si distribuiscono su delle linee equispaziate (la cosa è particolarmente evidente nella seconda immagine, ma se avete pazienza le linee compaiono anche nella prima); questo, come dicevamo, è detto ***Effetto Marsaglia*** e nasce dal fatto che il vostro generatore è *lineare*, quindi esaurendolo ottenete delle linee.

Queste linee saranno separate tra di loro e sia la massima distanza tra due linee contigue d; si definisce ***accuratezza*** del nostro generatore l'inverso di questa distanza. Con il senno di poi, si è verificato che tutti i generatori notoriamente cattivi hanno un'accuratezza molto bassa.

Non pensate comunque che questi calcoli si possano fare con carta e matita; nel 1997, ***Makoto Matsumoto*** e ***Takuji Nakamura*** hanno inventato il ***Mersenne Twister***, che ha un periodo pari a $2^{19937} - 1$. A quanto pare, è abbastanza efficiente da soddisfare i bisogni di un mucchio di gente. Non quelli dei crittografi, evidentemente, ma questa è un'altra storia...

Non sappiamo quali saranno le temperature nelle quali vi ritroverete a leggere questo pezzo; noi, per evitare la sublimazione, ci siamo rifugiati nel *Luogo del Divano Quantistico*: è quasi il tramonto e si comincia a pensare che un maglioncino potrebbe servire. Tutto questo per dirvi che sono ammesse ardite generalizzazioni estese ai meloni e alle angurie, purché freddi e interi.

9.2 [272] Più pizza per tutti! - [1] – Una cosa veloce

Alice e Bob ce ne hanno combinata un'altra. Non contenti di far venire il mal di testa ai crittografi, adesso ci provano con la teoria dei giochi. Cominciare con lo statuire il problema, poi cominceremo rigirarci intorno.

Alice e Bob sono davanti a una pizza tagliata in un certo numero di fette (radiali) disuguali, e si sono accordati per mangiare una fetta a testa: Alice sceglierà la prima, poi toccherà a Bob, poi di nuovo ad Alice, e avanti in questo modo. L'unica regola da seguire nella scelta della fetta è che si possono scegliere (dopo la prima) solo fette "a un bordo libero", ossia adiacenti ad una delle fette scelte precedentemente. Come fa Alice a massimizzare la propria dose di pizza?

Per non perdere in generalità (serviranno in un paio di dimostrazioni), ammettiamo i pezzi di dimensione zero (o, se preferite, quasi zero).

Se volete provare a dimostrare il Primo Teorema della Pizza, non leggete il prossimo paragrafo: infatti, dimostreremo che *con un numero pari di fette, Alice può mangiare sempre almeno metà pizza*.

La cosa è ragionevolmente semplice: Alice, di fronte alla pizza, colora (mentalmente, altrimenti Bob si insospettisce) le fette alternativamente di verde e di rosso (sono pari, quindi è sempre possibile); uno dei due colori coprirà una superficie di almeno metà pizza (o superiore), sia ad esempio il rosso; se Alice inizia con una qualsiasi fetta rossa, costringe Bob a prendere una fetta verde (da una qualsiasi delle due parti), liberando per lei una fetta rossa; in questo modo, Alice mangia tutte le fette rosse, che rappresentano un'area pari almeno a metà pizza. Q.E.D.

Quello che ci diverte, di questa dimostrazione, è che Bob sembra avere *molta più scelta* di Alice: ha sempre due fette tra le quali scegliere. Nonostante questo, e nonostante il fatto che Alice possa prendere come prima fetta "qualsiasi fetta del suo tipo", ineluttabilmente vincerà il gioco.

A questo punto, risulta ovvio che con un numero di fette dispari, visto che Alice si mangia una fetta in più, questa sia ulteriormente avvantaggiata, e quindi non ci sia storia. Prima però di chiudere tutto, chiedete a Doc qualche delucidazione sul concetto di "ovvio".

Definiamo come ***intervallo*** (di pizza) un qualsiasi numero di fette contigue, limitate da due tagli C_1 e C_2; se la pizza ha un numero dispari di fette, due tagli qualsiasi C_1 e C_2 definiranno due intervalli[18], uno pari e uno dispari, che indichiamo con $[C_1,C_2]_{Pari}$ e con $[C_1,C_2]_{Dispari}$; definiamo inoltre ***coloratura canonica*** quella per cui $[C_1,C_2]_{Pari}$ e $[C_1,C_2]_{Dispari}$ sono colorati alternativamente di rosso e verde *partendo dal colore rosso per la fetta delimitata da* C_1: questo farà sì che ci siano due fette rosse vicine (separate da $\mathbf{C_1}$), ma questo non ci preoccupa: dobbiamo però fare attenzione che *l'ordine dei tagli è cruciale, per gli intervalli pari*: infatti, la coloratura canonica di $[C_1,C_2]_{Pari}$ è *l'inverso* della coloratura canonica di $[C_2,C_1]_{Pari}$! Definiamo comunque, per un dato intervallo colorato canonicamente, i quattro insiemi: $R([C_1,C_2]_P)$, $R([C_1,C_2]_D)$, $V([C_1,C_2]_P)$, $V([C_1,C_2]_D)$ come, rispettivamente, gli insiemi delle fette rosse dell'intervallo pari, rosse dell'intervallo dispari, verdi dell'intervallo pari e verdi dell'intervallo dispari (per comodità, abbiamo limitato i pedici ad un carattere singolo).

Se la pizza ha un numero dispari di pezzi, può essere vista come un intervallo dispari anch'essa; partendo da un dato taglio C, potete sempre avere una suddivisione $[C,C]_D$, nella quale C è un singolo taglio. Il punto chiave da comprendere è che *Alice può sempre*

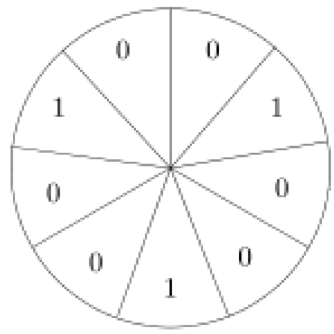
[18] Nel caso non fosse chiaro: la somma dei due intervalli è l'intera pizza: partendo da un taglio, per uno andate in senso orario, per l'altro in senso antiorario sino a trovare l'altro taglio.

portare il gioco in una situazione nella quale i pezzi siano rispettivamente $R([C,C]_D)$ *e* $V([C,C]_D)$: questo è possibile attraverso la ***SB-Strategia***: Alice "colora" i pezzi, ne sceglie uno, lascia giocare Bob e poi prende il pezzo appena lasciato libero da Bob (quello di cui è stato appena scoperto un lato): "SB" sta per "Segui Bob" appunto per questo motivo.

Possiamo ora fare un'affermazione scarsamente soddisfacente (per Alice): *Alice può mangiare almeno* 1/3 *di pizza con un numero dispari di tagli.*

Infatti, scegliamo un taglio C tale che $R([C,C]_D)$ sia minimo[19]. Con una SB-Strategia, Alice mangia almeno questa quantità di pizza, e supponiamo quindi $R([C,C]_D)<1/3$: questo implica che $V([C,C]_D)>2/3$. Sia allora *p* un pezzo tale che, in entrambi i sensi, la dimensione dei pezzi verdi da *p* (incluso) a C sia *almeno* $1/2(V([C,C]_D))$. Se Alice inizia a giocare da *p* utilizzando una SB-Strategia, allora Alice mangerà tutti i pezzi *verdi* in almeno una direzione e quindi mangerà *almeno* (1/2)(2/3)=1/3 di pizza.

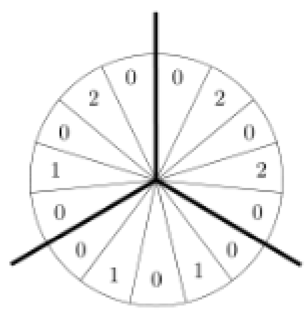
Nella figura a fianco vedete un caso nel quale, *se applicate rigorosamente la SB-Strategia*, Alice può mangiare un terzo di pizza: attenzione che, anche se le fette nel disegno sono tutte uguali, la loro dimensione effettiva è quella indicata dal numero al loro interno: se non vi piacciono le fette a dimensione zero, potete mettere un epsilon comunque piccolo. Con gli opportuni "cambi di lato" da parte di Bob, se Alice segue la SB-Strategia, Bob riesce a mangiare al più 2/3 di pizza.



11 *Un caso (piuttosto) limite .*

Si vede facilmente che Alice, con questa specifica pizza, ha delle strategie migliori, potendo ribaltare completamente il risultato. Ma se segue la SB-Strategia, il risultato (minimo) è quello dato.

Il dato sinora è abbastanza deludente (per Alice), ma se supponiamo siano entrambi intelligenti, forse si riesce ad arrivare a dei risultati migliori. Consideriamo la pizza qui a fianco[20], dove compaiono anche delle fette di dimensione 2: basandoci su questa, affermiamo che *esistono delle pizze di cui Bob può mangiarne i* 5/9.



12 *Qui sembra andare meglio.*

Infatti, supponiamo Alice prenda una fetta a dimensione zero; la parte restante ha dimensione nove e un numero pari di pezzi, quindi Bob può utilizzare (come "nuovo primo giocatore") il metodo della colorazione e mangiare almeno la parte intera di 9/2 di pizza, ossia 5.

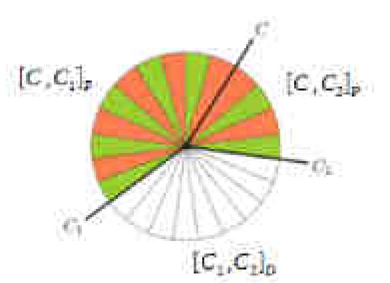
Per esaminare gli altri casi, consideriamo la tripartizione della pizza indicata dalle linee spesse: se Alice prende un pezzo non-zero, Bob prende *il pezzo zero adiacente ad una linea spessa* (si noti che esiste sempre: la pizza è fatta apposta!). Successivamente, Bob prende sempre il pezzo scoperto da Alice (come nella SB-Strategia, solo che qui "segue Alice"), *a meno che questo appartenga ad un intervallo intonso* (di quelli definiti dalle linee spesse); in questo caso, pesca "dall'altra parte". Se entrambi i pezzi appartengono a un nuovo intervallo, prende il pezzo di confine dall'intervallo di misura minore. Con qualche tentativo, si vede che con questa strategia Bob riesce ad accaparrarsi sempre almeno 5 parti.

Se, a questo punto, vi state chiedendo perché questo pezzo si intitoli "una cosa veloce", sappiate che il motivo è che da qui in avanti le cose si complicano.

[19] Stiamo parlando se ci permettete il gioco di parole, di pizze "naturali"; estendere ad altri domini questa teoria potrebbe costringervi a considerare il valore assoluto di questa grandezza.

[20] Questa pizza è dovuta a Peter Winkler; sono possibili pizze di questo tipo con fette solo di tipo {0, 1}, ma richiedono almeno ventun pezzi; pare che questa sia la forma con il minimo numero di pezzi.

Sinora, abbiamo definito la pizza come per un qualsiasi taglio *C*, l'intervallo dispari $[C,C]_D$ colorato canonicamente: se Alice applica una SB-Strategia, il risultato sarà $R([C,C]_D)$, $V([C,C]_D)$, dove ciascuno i mangia le fette del proprio colore.



13 *SB-Generalizzazione.*

Possiamo generalizzare questo concetto, considerando un momento del gioco nel quale sia il turno di Bob nel quale siano stati già mangiati i pezzi nell'intervallo $[C_1,C_2]_D$: diciamo che *Alice segue Bob dopo* $[C_1,C_2]_D$ se per ogni mossa successiva Alice prende il pezzo appena esposto da Bob. Di conseguenza, i pezzi *rimanenti* $[C_1,C_2]_P$ verranno distribuiti tra Alice e Bob come indicato nella figura.

A questo punto, deve esserci un taglio C per cui $[C_1,C_2]_P$ viene diviso in due parti in modo tale che Alice riceva $R([C,C_1]_P) \cup R([C,C_2]_P)$ e Bob, rispettivamente, $V([C,C_1]_P) \cup V([C,C_2]_P)$. In questa espansione, una SB-Strategia con fetta iniziale *p* si definisce come "Alice segue Bob da quando $\{p\}= [C_1,C_2]_D$ è stato mangiato". Per un dato taglio C esistono svariate strategie per Bob, ma tutte portano comunque allo stesso risultato, essendo le due suddivisioni pari: in questo caso, a noi non interessa *come* arrivino ad un determinato risultato, ma quale sia il risultato finale, e questo è dato dalla coloratura canonica.

A questo punto, ci pare di aver messo abbastanza ~~carne al fuoco~~ pizza in forno da nutrire le vostre menti: la prossima volta, parleremo di Verdi Pesanti.

L'abbiamo già pubblicata sul Calendario, ma ci pare qui ci stia bene:

"La pizza, te la taglio in sei o otto fette?"

"Sei, grazie. Non riuscirei mai a mangiarne otto".

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms