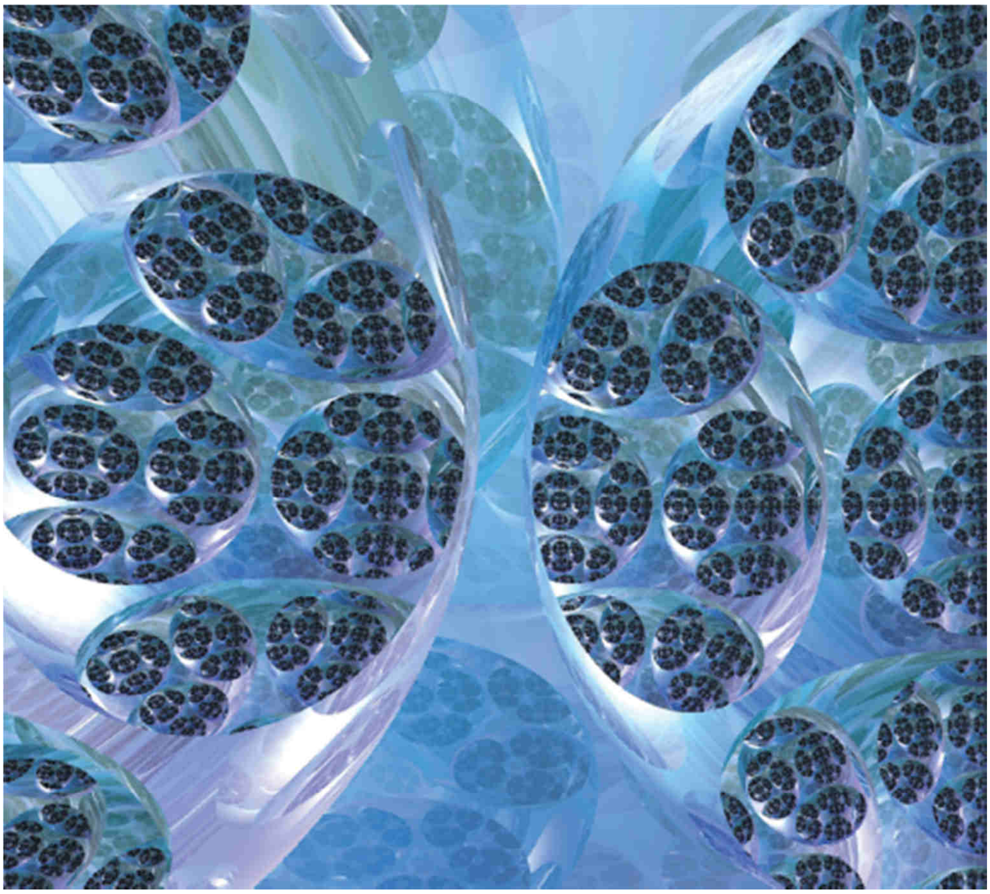
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 270 – Luglio 2021 – Anno Ventitreesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM267 ha diffuso 3'325 copie e il 24/05/2021 per Google eravamo in 216'000 pagine.

Esistono solo otto tassellature di Thurston (*Thurston Tiling*) di un tri-spazio: in particolare, quella in figura rappresenta la tassellatura cubica di uno spazio iperbolico. Tenetela presente, se volete ripiastrellare il bagno.

1. "Medaglia, medaglia!" (cit.)

Possano la gioia e i buoni intenti amichevoli regnare, così che la Torcia Olimpica possa perseguire la sua via attraverso le ere, aumentando le comprensioni amichevoli tra le nazioni, per il bene di una umanità sempre più entusiasta, più coraggiosa e più pura.
(Pierre De Coubertin)

Anche se raccontarlo qui mostrerà impietosamente che almeno due terzi della Redazione di RM è tutt'altro che giovane, confesseremo che alcuni di noi si ricordano benissimo di Muttley. Se invece voi non ve lo ricordate, aspettate un attimo prima di tirare un sospiro di sollievo, constatare che il nome non vi dice niente e che, di conseguenza, potete considerarvi ancora nel fiore della giovinezza: c'è la possibilità che non vi ricordiate il nome, ma potreste ancora ricordare il personaggio.

Muttley è un cane; meglio, è il cane di un vecchio cartone animato della Hanna & Barbera, apparso per la prima nel lontano 1968. Non si tratta neppure di un cagnone buono, di un eroe positivo: è il cane fedele del "cattivo" Dick Dastardly, ha una voce rasposa (tant'è vero che in alcuni adattamenti viene chiamato "Borbottone") e, in quanto cane, non parla. Certo, considerando il non trascurabile fatto che è un cane dell'universo dei cartoni animati, è evidente che l'equazione "Cane=Soggetto Privo di Eloquio" è tutt'altro che garantita, come mostrano Pippo, Braccobaldo e un altro centinaio di personaggi. Il caso di Muttley è comunque un po' speciale: perché di fatto è virtualmente incapace di parlare nell'edizione originale americana del cartoon, mentre in quella doppiata in italiano è fortemente caratterizzato dalla frase "*Medaglia, medaglia!*" che rivolge assiduamente al suo padrone. Vestito come un pilota della Prima Guerra Mondiale (frutto della sua prima apparizione, nell'avventura "*Dastardly e Muttley e le macchine volanti*") aiuta il perfido Dick in tutte le sue malefatte, e gioiosamente pretende in premio solo una medaglia che gli verrà appuntata direttamente sulla pelliccia.

1 *Muttley ("Medaglia, medaglia!")*

Non poteva non venirci in mente Muttley, in un periodo sportivamente strano e denso come quello attuale[1]: la pandemia ha stravolto tutto il calendario sportivo del 2020, e il 2021 fa fatica a recuperare il tempo perduto. Sarà un'estate traboccante di medaglie, e ci sarà poco tempo per godersele appieno: ma, come spesso accade, due eventi simultanei possono avere interferenza costruttiva, e probabilmente questo è proprio quanto è accaduto in questo mese.

Gli è che, per quanto riguarda la mancanza di tempo e i tentativi di "recupero del ritardo" noi siamo maestri indiscussi, e freschi di un nuovo record: siamo riusciti a mandare in giro per la Rete il numero di Giugno 2021 nel mese sbagliato, addirittura. Quindi il ritardo sta evidentemente superando la massa critica, e rischia di sfuggirci

[1] Tanto per chiarire il momento contingente: queste righe (peraltro, come si vedrà, solo introduttive, rispetto al corpo dell'articolo) vengono scritte mentre imperversa il Tour de France, la nazionale italiana di basket ha incredibilmente battuto a Belgrado la Serbia staccando un insperato ticket per le Olimpiadi di Tokyo, a Wimbledon il Campo Centrale aspetta per la prima volta in 134 anni un italiano in finale nel più prestigioso torneo tennistico del mondo e lo stadio di Wembley sta per ospitare i padroni di casa contro la nazionale azzurra di calcio mettendo in palio il titolo Europeo per nazioni. Quando leggerete queste righe saprete già com'è finita, ma probabilmente sarete già quasi pronti a vedere la Cerimonia d'Apertura dei Giochi della XXXII Olimpiade.

definitivamente di mano. D'altra parte, gli dei della matematica si sono probabilmente mossi a compassione, e ci hanno fatto trovare in mailbox una mail del tutto inaspettata di un vecchio amico, ***GaS***: che a questo punto possiamo perfino liberare dall'allonimo e rivelare che l'anagrafe lo conosce come Gabriele Carelli. Ebbene, cosa ci scrive Gabriele, dopo anni di latitanza? Queste righe qua:

> *Mi sono inoltre permesso di allegare anche un mio vecchissimo "articolo", se così si può chiamare, scritto nel 2012 per una testata online che ormai non esiste più da diversi anni (si chiamava* CometaNews*). Tratta proprio di Olimpiadi e medaglie. Il Paraphernalia me lo ha fatto tornare alla mente, non è così sviluppato come le metodologie descritte in RM (confesso che non avevo mai sentito parlare di R&R prima di oggi, purtroppo) ma il punto di partenza è proprio quello.*

Insomma, in un colpo solo ***GaS*** ha risolto un bel mucchio di problemi. Innanzitutto ha fatto felice il GC, che si lamenta sempre di non avere abbastanza feedback sui suoi Paraphernalia Mathematica (e se non avete capito cosa intende ***GaS*** quando parla di R&R, correte subito a leggere gli ultimi PM); al punto che lo stesso Rudy è sceso in campo commentando con queste immortali parole:

> *Vediamo che la gente è enormemente delusa quando diciamo che le idee per i problemi le "troviamo in giro": oltre a far sommessamente notare che se tutto quello che pubblichiamo fosse farina del nostro sacco ormai avremmo in casa tali e tanti Premi Wolf da non poterci più entrare noi, ove possibile (leggasi: "quando non potevate sbirciare la soluzione") abbiamo comunque sempre garantito, a richiesta, la disponibilità delle fonti. Resta comunque il problema: da dove vengono le idee? O siete amici di Harlan Ellison ("*Le compro al Magazzino delle Idee di Topeka*") o il dubbio dovrebbe, in un modo o nell'altro, nascervi. Nel caso vi chiediate da dove Bernard e Busse abbiano preso l'idea di calcolare il rapporto tra medaglie e PIL (PM di RM268 "*Un fisico olimpionico [5] – La cerimonia di premiazione*"), siamo in grado di rivelarvi l'arcano: l'hanno presa da* ***GaS***. *E non lo hanno neanche citato.*

In seconda battuta, ci siamo resi conto (beh, a dire il vero se ne è resa conto Alice) che ci aveva anche risolto il problema del mortale ritardo già accumulato da questo RM270: diamine, di fatto ***GaS*** ci ha scritto un compleanno! E allora, a che vale perdere altro tempo? Eccovi il pezzo di ***GaS***, eccovi questo estivo e strano RM270; noi ci godiamo un "recupero" di tempo di almeno una ventina di giorni.

Sono passati ormai una decina di giorni dalla chiusura delle Olimpiadi Londinesi e ritengo che sia il tempo di analizzare a mente fresca i risultati ottenuti dalla spedizione italiana e, in generale, dalle altre nazioni presenti. Non vogliamo parlare qui delle gioie avute dalla pedana della scherma (ad es. l'*en plein* nel fioretto femminile), dalle delusioni per i quarti posti (vedi Cagnotto e Ferrari su tutti), neanche dell'indignazione per le tante "anomalie" che spesso caratterizzano alcuni sport (vedi alla voce Cammarelle e Busnari) o dell'ammirazione per veri uomini e donne di sport per i quali il premio più bello è la partecipazione (vedi ad es. Pistorius e Idem) o delle emozioni per le tante "missioni impossibili" (le 22 medaglie olimpiche totali del cannibale Phelps, la quasi perfezione della nostra Jessica Rossi, l'imprese di Rudisha sugli 800 e via dicendo). Ci sembrava interessante analizzare il medagliere olimpico da un punto di vista un po' differente dal solito:

#	Paese	ORO	ARG	BRO	TOT
1	Stati Uniti	46	29	29	104
2	Cina	38	27	23	88
3	Gran Bretagna	29	17	19	65
4	Russia	24	26	32	82
5	Corea Del Sud	13	8	7	28
6	Germania	11	19	14	44
7	Francia	11	11	12	34
8	**Italia**	**8**	**9**	**11**	**28**

L'Italia ha ottenuto una buona ottava posizione nel medagliere che ha permesso al presidente del CONI Petrucci di dichiarare che "siamo nel G8 dello sport".

È interessante notare come tra i primi 8 paesi del medagliere olimpico siano presenti 6 dei partecipanti al G8: delle 8 potenze più industrializzate del mondo (almeno in teoria) mancano Giappone e Canada, rispettivamente undicesima e trentaseiesima, mentre si "inseriscono" Cina e Corea del Sud. In effetti è in discussione ormai da anni se abbia ancora un senso un G8 senza la Cina, l'India o il Brasile o altre nazioni che sicuramente negli ultimi anni stanno "superando", se già non lo hanno fatto, le nazioni presenti nel G8. È difficile definire con precisione quali siano le nazioni "più industrializzate" ma sicuramente un buon indicatore può essere il Prodotto Interno Lordo, il PIL: i primi 8 paesi del medagliere producono circa il 52% del PIL mondiale, quasi la stessa percentuale rappresentata dalle nazioni del G8, e sono tutti e 8 tra i 15 paesi del mondo a maggior PIL[2].

Il PIL è sicuramente un riferimento utile per valutare l'importanza di un paese all'interno dell'economia mondiale ma rappresenta, per sua natura, un riferimento assoluto che non considera alcuni fattori chiave che determinano cosa contribuisca al raggiungimento di tale risultato. Per tale motivo nelle analisi economiche viene spesso anche utilizzato il PIL Pro Capite che rappresenta il rapporto tra PIL e la popolazione del paese: in questo modo la "classifica" dei paesi mondiali subisce un ribaltamento presentando nelle prime posizioni paesi come il Lussemburgo, la Svizzera, la Norvegia ed il Qatar (fonte: Wikipedia Italia).

Per analizzare lo stato di salute dei movimenti sportivi dei diversi paesi ci è quindi sembrato interessante verificare, analogamente a quanto succede per il PIL Pro Capite, cosa succede trasformando il medagliere considerando il rapporto tra il numero di medaglie ottenute da un paese e la popolazione dello stesso: **Medaglie Pro Capite**, appunto. È infatti ovvio che con l'aumentare della popolazione aumenta il numero di praticanti di ogni sport come anche le probabilità che nascano atleti di altissimo livello: uno stato con pochi milioni di abitanti difficilmente avrà un numero di campioni paragonabili a quelli di paesi con centinaia di milioni di abitanti (per fare un esempio estremo gli atleti degli Stati Uniti presenti a Londra sono più dell'intera popolazione della Città del Vaticano).

Nella tabella seguente riportiamo quindi la classifica del medagliere olimpico considerando il numero di medaglie conquistate per ogni milione di abitanti, tra parentesi viene riportata la posizione del paese nel medagliere "reale" (per la popolazione di ogni Paese è stata utilizzata Wikipedia Italia come fonte).

#	Paese	ORO	ARG	BRO	TOT
1 (#50)	Grenada	9,57	0,00	0,00	9,57
2 (#50)	Bahamas	2,92	0,00	0,00	2,92
3 (#18)	Giamaica	1,46	1,46	1,46	4,38
4 (#15)	Nuova Zelanda	1,37	0,46	1,14	2,96
5 (#9)	Ungheria	0,80	0,40	0,50	1,70
6 (#47)	Trinidad e Tobago	0,75	0,00	2,24	2,98
7 (#25)	Croazia	0,68	0,23	0,45	1,36
8 (#34)	Lituania	0,60	0,30	0,60	1,50
9 (#42)	Slovenia	0,49	0,49	0,99	1,97
10 (#3)	Gran Bretagna	0,46	0,27	0,30	1,04

[2] Si precisa che i calcoli sono stati effettuati utilizzando i valori di PIL nominale (non quindi di PIL PPA, il PIL a parità di valore di acquisto) del 2010 forniti dal FMI. Le stime variando a seconda della fonte ma con variazioni minime e ininfluenti ai fini del presente articolo.

11 (#16)	Cuba	0,44	0,27	0,53	1,24
12 (#49)	Lettonia	0,44	0,00	0,44	0,89
13 (#12)	Kazakistan	0,44	0,06	0,31	0,81
14 (#35)	Norvegia	0,41	0,20	0,20	0,82
15 (#19)	Rep. Ceca	0,38	0,29	0,29	0,95
16 (#13)	Paesi Bassi	0,35	0,35	0,47	1,18
17 (#29)	Danimarca	0,35	0,71	0,53	1,59
18 (#10)	Australia	0,31	0,72	0,54	1,57
19 (#5)	Corea Del Sud	0,27	0,17	0,15	0,58
20 (#33)	Svizzera	0,26	0,26	0,00	0,52
21 (#39)	Georgia	0,23	0,69	0,69	1,61
22 (#41)	Irlanda	0,22	0,22	0,67	1,12
23 (#30)	Azerbaigian	0,22	0,22	0,65	1,09
24 (#26)	Bielorussia	0,21	0,52	0,52	1,25
25 (#7)	Francia	0,17	0,17	0,18	0,52
26 (#4)	Russia	0,17	0,18	0,22	0,57
27 (#20)	Corea del Nord	0,16	0,00	0,08	0,25
28 (#1)	Stati Uniti	0,15	0,09	0,09	0,33
29 (#6)	Germania	0,13	0,23	0,17	0,53
30 (#14)	Ucraina	0,13	0,11	0,20	0,44
31 (#8)	Italia	**0,13**	**0,15**	**0,18**	**0,45**
32 (#37)	Svezia	0,11	0,43	0,32	0,85
33 (#42)	Serbia	0,10	0,10	0,20	0,41
34 (#46)	Repubblica Dominicana	0,10	0,10	0,00	0,20
35 (#45)	Tunisia	0,10	0,10	0,10	0,29
36 (#27)	Romania	0,09	0,23	0,09	0,42
37 (#21)	Spagna	0,07	0,22	0,09	0,37
38 (#23)	Sudafrica	0,06	0,04	0,02	0,12
39 (#17)	Iran	0,06	0,07	0,04	0,17
40 (#30)	Polonia	0,05	0,05	0,16	0,26
41 (#11)	Giappone	0,05	0,10	0,12	0,28
42 (#28)	Kenya	0,05	0,10	0,12	0,27
43 (#47)	Uzbekistan	0,04	0,00	0,11	0,15
44 (#24)	Etiopia	0,03	0,01	0,03	0,08
45 (#50)	Venezuela	0,03	0,00	0,00	0,03
46 (#50)	Uganda	0,03	0,00	0,00	0,03
47 (#36)	Canada	0,03	0,15	0,35	0,53
48 (#32)	Turchia	0,03	0,03	0,01	0,07

49 (#50)	Algeria	0,03	0,00	0,00	0,03
50 (#2)	Cina	0,03	0,02	0,02	0,07
51 (#42)	Argentina	0,02	0,02	0,05	0,10
52 (#38)	Colombia	0,02	0,06	0,09	0,17
53 (#22)	Brasile	0,02	0,03	0,05	0,09
54 (#39)	Messico	0,01	0,03	0,03	0,06
55 (#69)	Montenegro	0,00	1,58	0,00	1,58
56 (#69)	Cipro	0,00	0,91	0,00	0,91
57 (#63)	Estonia	0,00	0,75	0,75	1,49
58 (#56)	Mongolia	0,00	0,73	1,09	1,81
59 (#69)	Gabon	0,00	0,66	0,00	0,66
60 (#69)	Botswana	0,00	0,50	0,00	0,50
61 (#63)	Cina Taipei	0,00	0,38	0,38	0,77
62 (#60)	Armenia	0,00	0,32	0,65	0,97
63 (#63)	Porto Rico	0,00	0,27	0,27	0,54
64 (#60)	Finlandia	0,00	0,19	0,37	0,56
65 (#59)	Slovacchia	0,00	0,18	0,55	0,73
66 (#63)	Bulgaria	0,00	0,13	0,13	0,27
67 (#69)	Portogallo	0,00	0,09	0,00	0,09
68 (#60)	Belgio	0,00	0,09	0,19	0,28
69 (#69)	Guatemala	0,00	0,07	0,00	0,07
70 (#63)	Malesia	0,00	0,04	0,04	0,07
71 (#57)	Thailandia	0,00	0,03	0,01	0,04
72 (#58)	Egitto	0,00	0,03	0,00	0,03
73 (#63)	Indonesia	0,00	0,004	0,004	0,01
74 (#55)	India	0,00	0,002	0,003	0,00
75 (#75)	Qatar	0,00	0,00	1,14	1,14
76 (#79)	Bahrain	0,00	0,00	0,79	0,79
77 (#75)	Moldavia	0,00	0,00	0,56	0,56
78 (#75)	Singapore	0,00	0,00	0,39	0,39
79 (#79)	Kuwait	0,00	0,00	0,37	0,37
80 (#75)	Grecia	0,00	0,00	0,18	0,18
81 (#79)	Tagikistan	0,00	0,00	0,15	0,15
82 (#79)	Hong Kong	0,00	0,00	0,14	0,14
83 (#79)	Arabia Saudita	0,00	0,00	0,04	0,04
84 (#79)	Afghanistan	0,00	0,00	0,03	0,03
85 (#79)	Marocco	0,00	0,00	0,03	0,03

In questa ideale classifica quindi l'Italia finirebbe al 31° posto preceduta da Stati uniti, Germania ed Ucraina rispettivamente al 28°, 29° e 30° posto. La Cina finirebbe addirittura al 50° posto mentre gli stati caraibici compensano le poche medaglie con una popolazione pari ad una città Italiana di media dimensioni e salgono alle primissime posizioni. Gli unici paesi che riescono a posizionarsi nella Top Ten di entrambe le classifiche sono l'Ungheria e la Gran Bretagna.

Una classifica olimpica è rappresentativa dello stato di salute dei movimenti sportivi nazionali? Non completamente: la selezione degli sport presenti alle Olimpiadi, seppur variabile di edizione in edizione, rispecchia sicuramente le preferenze dei paesi più influenti e difficilmente alcuni degli sport molto popolari in Asia o Africa ma sconosciuti al mondo occidentale saranno mai portati agli onori delle cronache

Una cosa risulta comunque chiara da ogni Olimpiade: lo sport, purtroppo, è un lusso che si possono permettere i paesi ricchi. I paesi del cosiddetto terzo mondo possono al massimo aspirare a medaglie provenienti dalla corsa, velocità o fondo che sia, che non necessitano quasi di strutture. Difficilmente i ragazzi del centro Africa, ad esempio, possono permettersi altro che non gareggiare per la sopravvivenza.

Ci rendiamo naturalmente conto che il Medagliere Pro Capite è un puro esercizio di stile che non vuole sostituire quanto fatto da ogni singolo atleta: lo sport, quello vero, è fatto e vive di emozioni, non certo di aridi numeri che non mostrano le fatiche e le gioie, ma anche le delusioni, di atleti, in alcuni casi veri e propri eroi, che mettono tutto se stessi a volte solo per poter dire: "io c'ero!". Però è carino avere una classifica mondiale che vede sul podio:

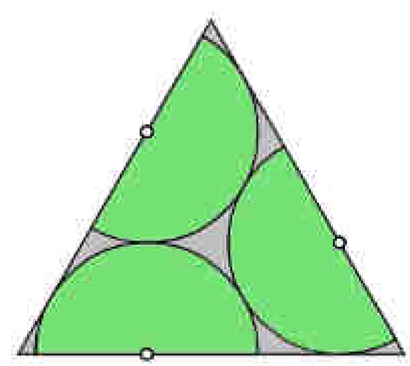
1. Grenada
2. Bahamas
3. Giamaica

No?

2. Problemi

2.1 Ritorna il Giardino!

Questa volta abbiamo un problema ragionevolmente facile, ma anche la nostra fonte ha raccolto una pletora di soluzioni "creative": le virgolette non si riferiscono alla correttezza dello svolgimento (abbiamo trovato questo problema in un posto "serio", quindi le soluzioni con risultati diversi dal previsto non sono state pubblicate), ma a diversi e inattesi approcci al medesimo; quindi, una volta trovata la soluzione in modo diretto (e quindi a conoscenza del risultato), non fermatevi, ma cercate altri modi.



1 *Il giardino!*

Il problema è sintetizzabile in una sola immagine, che trovate qui di fianco; in pratica, la vostra aiuola contiene tre subaiuole: per ciascuna delle quali avete presente quanti bulbi vi serviranno per saturarla, visto che sono semicerchi di raggio unitario. Il guaio è che adesso, mentre i vostri bulbi fanno bella mostra di sé all'interno delle tre aiuole, considerato che Obelix il gatto sta guardando concupiscente il vostro capolavoro, vi hanno appena chiesto di cintare l'intero giardino; volendo fare un lavoro ben fatto (e non volendo comprare più pali di quelli strettamente necessari), intendete misurare il perimetro del vostro appezzamento. Rifiutando però una pura, semplice e banale misurazione dei bordi (anche perché sappiamo benissimo che per n persone che misurano otterremmo $3n$ risultati diversi), decidete di "fare qualche conto", ricavando *more mathematico* il valore del lato. Quanto ottenete?

Niente espansioni, stavolta! Cercate un'altra strada per arrivare allo stesso risultato!

2.2 Dato un ottagono, non necessariamente con otto lati...

Se il titolo vi pare strano, è voluto: affrontiamo, per cominciare, il problema a otto lati, ma l'invito è a generalizzarlo per ogni n purché maggiore o uguale a 5.

Prendiamo appunto un ottagono, per semplicità regolare, e marchiamo i vertici e i punti medi di ogni lato. Formiamo il *poligono interno*, ottenuto percorrendo l'ottagono in senso orario e selezionando "qualche punto" di quelli marcati, facedo in modo che ogni lato dell'ottagono originale contenga *esattamente* un punto di quelli selezionati; *attenzione che i vertici appartiengono a due lati*, quindi fate attenzione al "lato dopo".

La domanda è: *quanti poligoni potete disegnare nell'ottagono*?

L'invito, appunto, è quello di generalizzare il calcolo: dovrebbe saltare fuori qualcosa di interessante, se non abbiamo sbagliato la formulazione...

3. Bungee Jumpers

Dimostrate che, se n è un intero dispari maggiore di 1 e x, y e z sono dei numeri naturali che formano una progressione aritmetica, la relazione $x^n + y^n = z^n$ non vale.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Ne abbiamo parlato diverse volte: più o meno ogni volta che esce questa rubrica. O, per essere un po' più precisi, ne abbiamo parlato nelle volte *pari* che esce questa rubrica. Già, perché sembra che ci sia una tendenza davvero curiosa, nel comportamento di questa paginetta di recensioni: esce assai di rado e molto (ma molto molto) saltuariamente, eppure capita spesso che, quando ricompare dopo una lunga pausa in un certo numero n di RM, esca pure nel successivo n+1. D'accordo abbiamo esagerato un po': non è vero che capiti poi così "spesso": di certo non abbastanza spesso da poterne ricavare una sorta di legge o anche solo una leggicciuola; forse non è niente di più di una (anch'essa saltuaria) curiosa coincidenza. Però capita: tant'è che il mese scorso, all'interno di RM269, EuNBeT era ricomparsa dopo lunghi mesi di assenza: adesso, del tutto inaspettata come la consorella, eccone un'altra in questo RM270. Ci sarà un motivo, forse; ma col cavolo che riusciamo a capirlo. E comunque, la ricomparsa subitanea e inattesa non viola la regola suprema: qui si recensiscono solo opere generate da amici di Rudi Mathematici, e le recensioni sono di solito tutt'altro che imparziali.

Questa volta ci corre l'obbligo di parlare di Paolo Alessandrini. Anche Paolo è un amico di RM di lunga data, come dimostra, ad esempio, il fatto che è già la terza volta che compare in questa rubrica, e che abbiamo recensito la sua penultima fatica non troppo tempo fa (sempre considerando la scala anormale del tempo di questa rubrica), su RM247 di Agosto 2019. Tra l'altro questo ci consente perfino di rinviare il lettore a quella recensione per ottenere qualche notizia sul personaggio, risparmiando così a noi la fatica di ripeterci e a voi il tedio del rileggerci.

Qualcosa, comunque, dovremo aggiungere, fosse anche solo per obbligo di aggiornamento: e quando si parla di Paolo gli "ultimi aggiornamenti" sono importanti. Tanto per cominciare, due anni fa il libro che gli abbiamo recensito ("*Matematica Rock*") è andato assai bene, e di questo siamo assai contenti. Oddio, siccome siamo gente più meschina di quanto possa apparire a prima vista, non sperate che noi non lo si sia invidiato un po', che diamine… è palese che noi siamo i migliori divulgatori di matematica del mondo, e sopportare che un Alessandrini qualunque ci surclassi nelle classifiche di vendita di libri è cosa mica semplice da mandare giù. Ma va bene, lo abbiamo detto e ripetuto: Paolo è una brava persona, è un amico, e a dimostrarlo sta anche il fatto che, ad esempio, ci abbia intervistato proprio all'inizio di quest'anno, sul suo canale YouTube. Ne è venuta fuori un'intervista lunga e assai rara, tenendo conto che si può vedere in video e sentire in voce perfino Alice, che notoriamente rifugge dai palcoscenici (oh, se siete curiosi è ancora disponibile in rete: seguite questa nota a piè di pagina e ci troverete il link[3]).

E comunque, insomma, l'Alessandrini diventa famoso anche in video; vende libri a mani basse e continua a pubblicarli. Come se non bastasse, poi, li pubblica con una casa editrice gloriosa come l'Hoepli: ce l'avete presente, Hoepli? Quella che ha dato alle stampe il "*Matematica Dilettevole e Curiosa*" di Italo Ghersi, praticamente il primo dei nostri testi sacri; o "*Il Calcolo Differenziale ed Integrale Reso Facile e Attraente*", dell'Ing. Gustavo Bessiére[4], che fa parte della stessa liturgica categoria, e svariate centinaia di testi parimenti notevoli. Oltretutto, è la casa editrice che possiede anche quella che, a nostro modesto e forestiero parere, è la più bella libreria di Milano.

Di fronte a tutto ciò, è evidente che a Paolo Alessandrini noi continuiamo a volere un gran bene, ma è altrettanto evidente che non ci restano che due possibili soluzioni: o gli stronchiamo con recensioni al vetriolo qualsiasi libro che ci arriva con la sua firma, o gli squarciamo tutte e quattro le gomme della macchina.

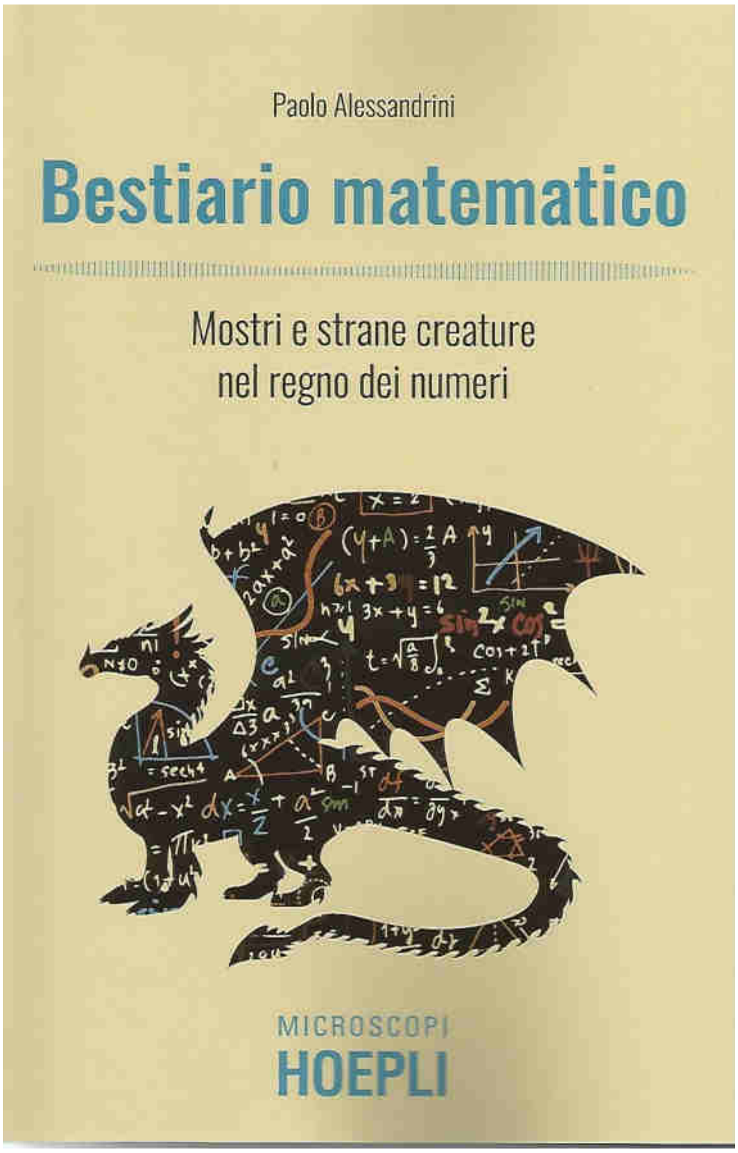
[3] https://www.youtube.com/watch?v=3a7bHeC3ywI

[4] Di entrambi i testi il tapino redattore che scrive queste note ha le edizioni del 1978. Quasi certamente, un altro redattore di Rudi Mathematici ha sullo scaffale edizioni perfino precedenti.

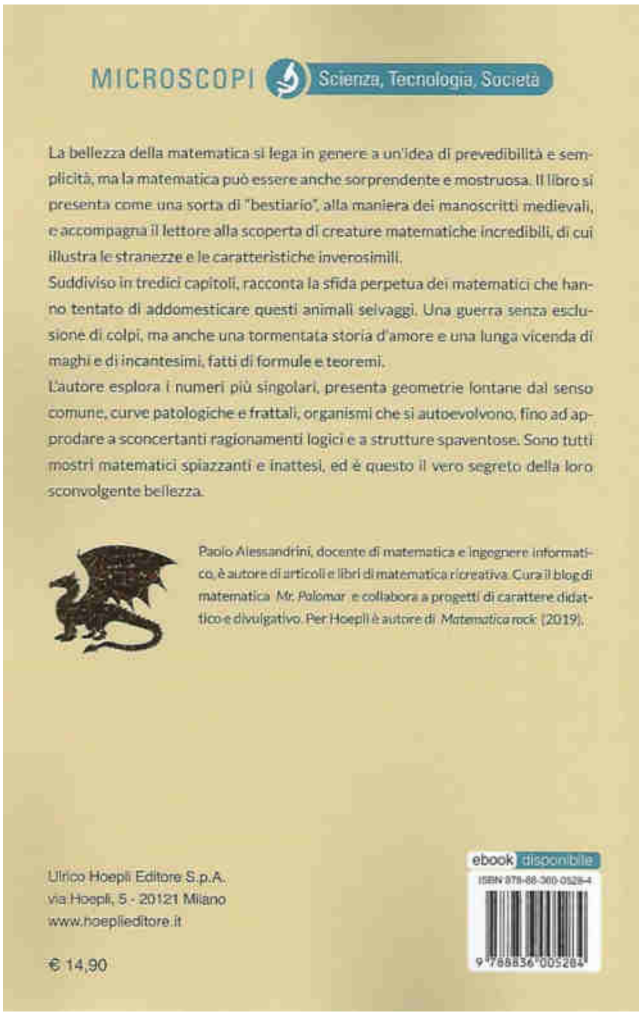
4.1 Bestiario matematico

«La matematica è anche una storia d'amore.»

La fama del commissario Salvo Montalbano è così universalmente diffusa che abbiamo n po' di paura a citarlo per avanzare una critica, per quanto tiepida, nei suoi confronti; ma prenderemo il coraggio a due mani e proveremo a farlo lo stesso. Senza nulla togliere ai molti meriti narrativi che entrambe le serie (quella romanzesca e quella televisiva) hanno, ci pare che, dal punto di vista strettamente poliziesco, ci sia un problema di fondo, in quasi tutte le avventure del commissario di Vigata. Ed è un problema abbastanza notevole: il punto è che il protagonista e i suoi collaboratori indagano, raccolgono indizi e informazioni su ogni caso che si presenta loro, finché alla fine Montalbano capisce tutto e arresta il colpevole, ma di fatto non spiega mai *davvero* da dove gli arrivi l'illuminazione. Quasi immancabilmente, quel che succede è che, di fronte alla montagna di indizi raccolti, a un bel punto "si fa persuaso" che le cose siano andate in una certa maniera, e finisce che ha sempre ragione lui. I suoi sottoposti Fazio e Augello ormai ci saranno abituati: quando Salvo Montalbano dice "Mi sono fatto persuaso che…" il caso è bell'e risolto, il cattivo ha le ore contate, e il telefilm è pronto ai titoli di cosa. Tanto, quale siano le cause che "fanno persuaso" Montalbano non si sapranno mai.



Tutta questa prolusione sui personaggi di Camilleri serve solo a dire che anche noi, come Montalbano, ci siamo "fatti persuasi" di qualcosa, ma non sappiamo giustificare bene questa persuasione. Insomma, la convinzione è che Paolo Alessandrini abbia raggiunto una consapevolezza importante, quella dell'onnipresenza della matematica, e di conseguenza decida di scrivere libri guidato da questa solida fiducia. Immaginiamo insomma che l'elemento scatenante di ogni suo libro non sia la sorpresa ("*Ehi, c'è un sacco di matematica nella musica dei Queen! Quasi quasi ci scrivo un libro sopra!*"), ma una razionale consapevolezza ("*La matematica è ovunque: adesso scelgo un argomento divertente e ne tiro fuori tutta la matematica che contiene*"). Se è davvero così, è quasi un sintomo che Alessandrini ha raggiunto una maturità divulgativa del tutto piena e solida.



In questo suo *Bestiario Matematico*, il parallelo che cavalca è quello tra alcuni oggetti della matematica e i mostri, un po' proprio come i bestiari medievali raffiguravano insieme creature misteriose e spesso spaventevoli. In realtà, si capisce subito che l'intento non è quello di suscitare orrore e paura, ma curiosità e interesse: del resto, la stessa parola "mostro", nonostante la connotazione terrorizzante che ormai veicola, nasce dal significato più specifico di "cosa che viene mostrata", cioè spiegata, e in ultima analisi compresa. Insomma, la logica di base sembra simile a quella di "*Animali fantastici e dove trovarli*" della saga di Harry Potter, non a quelli dei film horror: si viene esortati a conoscere queste strane creature, non ad averne paura.

L'artificio è stavolta insomma più generale: non più la matematica celata all'interno di un campo specifico, come la musica rock, ma quella più curiosa e diffusa, accomunata dalla stessa meraviglia che hanno i bambini quando per la prima volta sono condotti in un parco zoologico. E, come in un bioparco, sono passati in rassegna tutti i "mostri" che popolano la matematica: all'interno delle tre sezioni – Numeri, Forme, Strutture – si riesce a trovare di tutto. Dalla belva irrazionale che gettò nel panico Pitagora fino al mostruoso Moonshine di Conway.

Ma Paolo Alessandrini lo sa, e lo sappiamo anche noi, che si tratta di mostri tutt'altro che feroci. Spaventosi, magari, ma affascinanti e niente affatto pericolosi, anzi.

Titolo	Bestiario matematico
Sottotitolo	Mostri e strane creature nel regno dei numeri
Autore	Paolo Alessandrini
Editore	Hoepli
Collana	Microscopi 71-72
Data Pubblicazione	Maggio 2021
Prezzo	14,90 Euro
ISBN	978-88-360-0528-4
Pagine	212

5. Soluzioni e Note

Luglio!

5.1 [269]

5.1.1 Un problema tutto italiano

Un terribile problema di licenziamenti a catena, purtroppo problema a cui siamo tutti particolarmente sensibili:

> *Appena un dipendente dell'Ufficio del Personale (UdP, nel seguito) vede un impiegato, la prima cosa che fa è cercare di licenziarlo; in questa operazione è trattenuto solo dal fatto che, subito dopo averlo licenziato, perde temporaneamente suoi poteri di UdP e, se è in compagnia di un altro UdP, viene da quest'ultimo immediatamente licenziato (con la successiva e temporanea "perdita di poteri" da parte del secondo UdP). Essendo perfettamente logici, quindi, se due UdP sono assieme nessuno dei due licenzierà un impiegato, per paura che l'altro UdP lo licenzi subito dopo. Un giorno, dieci UdP incrociano in corridoio un impiegato: che cosa succede?*

Più veloce della luce, la soluzione di ***.mau.***, intitolata "32 giugno", chissà perché…

> Il primo problema io l'ho sempre visto con i pirati, a dire il vero. Ad ogni modo si risolve ricorsivamente. Con tre UdP, il dipendente viene licenziato dal più veloce dei tre, che sa che gli altri due restano in stallo. Con quattro UdP rimane lo stallo, perché chi licenzia sa che sarà a sua volta licenziato. Con cinque UdP il dipendente è licenziato lasciando lo stallo a 4, e in generale con $2n$ UdP il poveretto si salva ma con $2n+1$ no.

Quindi con dieci il poveretto si dovrebbe salvare, meno male. Con ***.mau.*** concorda anche ***Valter***:

> Come ci dicono i Nostri:
>
> "Essendo perfettamente logici, quindi, se due UdP sono assieme nessuno dei due licenzierà un impiegato …".
>
> Nel caso di un solo UdP, ovviamente, questi licenzierà l'impiegato non essendocene altri a licenziare lui.
>
> Nel caso di tre UdP il più svelto licenzierà l'impiegato in quanto, restandone poi due, come già sappiamo: "… nessuno dei due licenzierà un impiegato per paura che l'altro UdP lo licenzi subito dopo.".
>
> Con quattro UdP nessuno di loro licenzierà l'impiegato perché, rimandocene tre, uno di loro lo licenzierà.
>
> …
>
> Ci siamo capiti penso: se il numero di UdP è dispari uno di loro licenzia; se invece sono pari, non lo fa.

Per noi tutto è chiaro. Passiamo subitissimo al secondo problema.

5.1.2 Veleno Praticamente Omeopatico

Un problema di gozzoviglie che nasconde un tremendo inghippo:

> *Avete mille bottiglie di vino e organizzate una festa per utilizzarle tutte. Una delle bottiglie, però, è interamente composta da un veleno di cui una sola molecola è letale. Avete a disposizione dieci cavie dovete pianificare una serie di test per verificare quale sia la bottiglia avvelenata, sapendo che il veleno fa effetto sempre dopo un'ora (a qualsiasi dose) e dovete avere il risultato al più presto possibile. Come fate?*

La prima soluzione è di ***Luigi***, che comincia con "In questa splendida giornata di fine giugno vi invio la soluzione al problema 2.2", chissà perché…

> In un'ora riusciremo a scoprire la bottiglia incriminata e, fatto non secondario, riusciremo a salvare la pelle ad almeno una delle dieci cavie.
>
> Procediamo come segue:
>
> Numeriamo le bottiglie da 1 a 1000
>
> Numeriamo le 10 cavie da 1 a 10.
>
> A questo punto per ogni bottiglia scriviamo il codice binario a 10 cifre del numero della bottiglia.
>
> I codici andranno dal numero 1 = 0000000001 al numero 1000 = 1111101000
>
> Facciamo bere una goccia della bottiglia alle cavie il cui bit è 1 (numerati a partire da destra).
>
> Esempio:
>
> bottiglia: 384
>
> codice binario: 0110000000
>
> faremo bere una goccia alle cavie numero 8 e numero 9
>
> Dopo un'ora faremo, purtroppo la conta dei morti che ci darà il codice binario e quindi il numero della bottiglia avvelenata.
>
> Poiché tutti i bit ad 1 corrisponderebbe alla bottiglia 1023 (numero non compreso nel gruppo da testare) almeno una cavia si salverà!

Non so dirvi come sono contenta che si salvi almeno una cavia… forse perché so che il Capo probabilmente avrebbe usato la Redazione (tutti tranne lui) come cavie. ***Camillo*** ne salva ancora di più:

> La festa è pianificata per oggi per cui prenderà il via all'ora di cena ed io ho saputo della bottiglia avvelenata al mattino. Ho le mie 10 cavie (però ne bastano 7) geneticamente modificate a cui il veleno fa effetto dopo un'ora. Prima dell'inizio della festa ho tempo anche per preparare le coppie di beveroni da propinare alle cavie, uno letale alla povera cavia e l'altro innocuo a parte la ciucca. Devo scoprire qual è la bottiglia avvelenata tra le 1000 bottiglie da scolarsi durante la festa.
>
> Preparo 2 pozioni con una goccia di liquido da ogni bottiglia fatte con
>
> 333 bottiglie cadauna le 334 bottiglie che avanzano fanno la parte di una cavia virtuale.
>
> Si presentano due scenari: le 2 cavie dopo un'ora sono vive per cui il veleno si trova nelle 334 del terzo lotto, o una cavia muore è l'altra la metto in coda perché si riprenda dalla bevuta.
>
> Prendo il lotto dove si trova il veleno e ne faccio altri 3 lotti (111, 111 e 112 (o 111)) e così via dividendo in 3 lotti ogni volta fino a giungere a 2 sole bottiglie di cui una avvelenata. Una la do tutta ad una cavia che si strafoghi.
>
> Nel caso peggiore muoiono 7 cavie, probabilisticamente di meno.
>
> Tempo impiegato 7 ore più il tempo impiegato per preparare le 12 pozioni. Ma potrebbe essere anche di 6 ore se il veleno si trova nella bottiglia singola del sesto turno.

Bene, visto che ci siamo identificati nelle cavie questa soluzione ci sembra preferibile, include anche un certo numero di cavie ubriache. Ma vediamo la versione di ***Salvatore***:

> Propongo due soluzioni al problema "Veleno Praticamente Omeopatico" pubblicato nel numero 269 di Rudi Mathematici. I ragionamenti fatti si basano sempre sul caso peggiore. In base alla richiesta del problema, la soluzione da applicare sarebbe la seconda, che richiede meno tempo. Spero di non aver fatto errori, ma non sono sicuro se la mia soluzione sia ottima in termini di tempo e di cavie sacrificate.
>
> **Soluzione 1 (Richiede meno cavie)**

Fase 1: Si suddividono le 1000 bottiglie di vino in 10 gruppi da 100 bottiglie e si fanno bere le 100 bottiglie di vino di ciascun gruppo distinto a ognuna delle 10 cavie.

Dopo un'ora e 9 cavie rimanenti, si individua così il gruppo di 100 bottiglie dove si trova la bottiglia di vino avvelenato.

Fase 2: Con il gruppo di 100 bottiglie fra cui c'è quella avvelenata, si procede in questo modo:

11 bottiglie distinte da far bere a 8 cavie ciascuna.

Le restanti 12 bottiglie da far bere a 1 cavia.

Dopo 2 ore e 8 cavie rimanenti, nel caso peggiore, si individua il gruppo di 12 bottiglie nel quale si trova quella avvelenata.

Fase 3: Con il gruppo di 12 bottiglie fra cui c'è quella avvelenata, si procede in questo modo:

2 bottiglie distinte da far bere a 5 cavie ciascuna.

1 bottiglia da far bere a 1 cavia.

1 bottiglia da far bere a 1 cavia.

Dopo 3 ore e 7 cavie rimanenti, nel caso peggiore, si individua il gruppo di 2 bottiglie nel quale si trova quella avvelenata.

Fase 4: Con le 2 bottiglie di cui una è quella avvelenata, si procede in questo modo:

1 bottiglia da far bere a 1 cavia.

1 bottiglia da far bere a 1 cavia.

Dopo 4 ore e 6 cavie rimanenti, si individua infine la bottiglia di vino avvelenata.

Soluzione 2 (Richiede meno tempo)

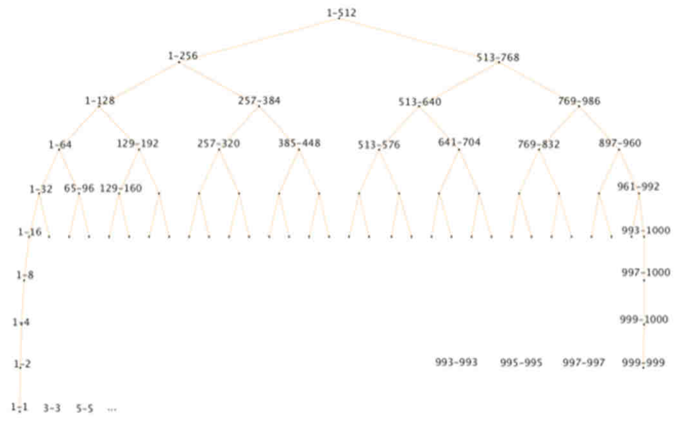
In questo caso, il principio applicato nelle varie fasi è di suddividere ancora le bottiglie di vino in gruppi, alcuni dei quali devono però essere bevuti da due cavie distinte. Nelle prime due fasi, nel caso peggiore, moriranno purtroppo due cavie. Illustro più chiaramente il processo con un diagramma nell'immagine qui in allegato.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**FASE 1**				**FASE 2**				**FASE 3**	
2	Bottiglie di vino da provare: 1000				Bottiglie di vino da provare: 50				Bottiglie di vino da provare: 6	
3	Cavie disponibili: 10				Cavie disponibili: 8 (Caso peggiore)				Cavie disponibili: 6 (Caso peggiore)	
4										
5	**Bottiglie di vino**	**Cavia**	**Cavia**		**Bottiglie di vino**	**Cavia**	**Cavia**		**Bottiglie di vino**	**Cavia**
6	50	1			6	1			1	1
7	50	1	2		6	1	2		1	2
8	50	2			6	2			1	3
9	50	2	3		6	2	3		1	4
10	50	3			6	3			1	5
11	50	3	4		6	3	4		1	6
12	50	4			6	4				
13	50	4	5		6	4	5			
14	50	5			2	5				
15	50	5	6							
16	50	6								
17	50	6	7							
18	50	7								
19	50	7	8							
20	50	8								
21	50	8	9							
22	50	9								
23	50	9	10							
24	50	10								
25	50	10	1							
26										
27	ESITO: Dopo 1 ora, è stato individuato l'insieme di 50 bottiglie in cui si trova la bottiglia di vino avvelenata, con 8 cavie rimanenti nel caso peggiore.				ESITO: Dopo 2 ore, nel caso peggiore, è stato individuato l'insieme di 6 bottiglie in cui si trova la bottiglia di vino avvelenata, con 6 cavie rimanenti nel caso peggiore.				ESITO: Dopo 3 ore e 5 cavie rimanenti, nel caso peggiore, è stata individuata la bottiglia di vino avvelenata.	
28										

Chiaramente il trucco di avere una cavia virtuale che non esiste, non beve e non muore, proposto sopra da ***Camillo*** e che ritorna in parte qui sopra, è un'altra buona idea. Vediamo la versione di ***Valter***:

Provo a mostrare che il numero minimo di test, quindi più veloce, è dieci.

Inizio col il seguente grafo ad albero binario che userò nell'esposizione:



E' da leggersi in questo modo:

- partendo dal nodo radice, faccio bere alla cavia una miscela di vini
- i numeri, associati a ogni nodo, indicano le bottiglie da utilizzare
- 1-512, ad esempio, significa che si usano quelle numerate da 1 a 512
- se la cavia muore procedo col sottoalbero sinistro altrimenti destro.

L'albero ha altezza nove; le 500 foglie sono tutte le bottiglie dispari.

Procedendo sempre sul sottoalbero sinistro muoiono esattamente 10 cavie.

Quando giungo ad una foglia se la cavia muore è la bottiglia avvelenata.

Se, al contrario, la cavia sopravvive è quella con il numero successivo.

Il livello delle foglie da 993-993 a 999-999, è 8; per tutte le altre 9.

Non ho completato con tutti i nodi perché sarebbe risultato pasticciato.

Penso si capisca il criterio con cui ho scelto i numeri delle bottiglie.

Siete convinti? A noi piacciono veramente tutte le soluzioni, e considerando che il Capo i problemi li scrive in modo che possano essere interpretati in molti modi, più risultati ed approcci arrivano, più siamo contenti. Concludiamo con ***Franco57***:

> Poiché c'è poco tempo e ogni test dura un'ora, possiamo supporre che non sia possibile sfruttare i risultati di uno o più test per decidere quali altri test effettuare. Insomma bisogna preparare una pozione diversa per ognuna delle 10 nostre povere cavie e dopo un'ora verificarne lo stato per decidere qual è la bottiglia letale. Al massimo i possibili risultati saranno dunque 2 (cavia viva o morta) elevato alla 10 (il numero di cavie), che fornisce 1024, appena un po' di più delle 1000 diverse possibilità. Ce la possiamo fare e il ragionamento stesso ci suggerisce di usare i numeri binari.
>
> Etichettiamo appunto le 1000 bottiglie con i numeri binari a 10 cifre, quindi nell'ordine:
>
> etichetta 0000000001 bottiglia 1
>
> etichetta 0000000010 bottiglia 2
>
> etichetta 0000000011 bottiglia 3
>
> etichetta 0000000100 bottiglia 4
>
> etichetta 0000000101 bottiglia 5
>
> …
>
> etichetta 1111101000 bottiglia 1000
>
> Adesso prepariamo le nostre 10 pozioni, mettendo nella i-esima pozione una goccia da ogni bottiglia con l'etichetta nella quale lo i-esimo bit vale 1 e la facciamo ingurgitare alla cavia i (numerata da 0 a 9).

Il gioco è fatto: le cavie morte un'ora dopo corrispondono ai bit a 1 dell'unica bottiglia con quella combinazione.

E come vedete il circolo si è chiuso, con l'approccio binario da dove avevamo cominciato. Ci fermiamo qui. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Purtroppo (per voi), Rudy sta di nuovo lavorando con alcune bilance.

2 *...ma mezza bilancia, è un'unilancia?*

La linea orizzontale è una barra senza peso bilanciata al fulcro F e di lunghezza infinita alla destra del fulcro. La parte visibile è lunga un metro, e all'estremità abbiamo un peso da un chilogrammo. Anche se senza peso, la barra è in grado di sopportare qualsiasi peso e, essendo bilanciata, deve esserci un peso alla destra da qualche parte. Quali sono i limiti minore e maggiore delle possibili forze verso il basso agenti in F?

> *Il limite massimo è, evidentemente, infinito, ma il limite minimo è un chilogrammo, e non due, in quanto quando la lunghezza del secondo braccio tende ad infinito il peso tende a zero. Quando, di converso, la lunghezza del braccio tende a zero, il peso deve tendere ad infinito per bilanciare il momento di un chilogrammo-metro sulla sinistra.*

7. Pagina 46

Supponiamo x, y, z siano numeri naturali che soddisfano l'equazione $x^n + y^n = z^n$ (dove n è un intero dispari maggiore di uno) formanti una progressione aritmetica.

In questo caso z e x possono essere espressi nella forma $z = y + d$ e $x = y - d$, dove d è un intero positivo minore di y. L'equazione $x^n + y^n = z^n$ può allora essere riscritta come:

$$(y-d)^n + y^n = (z+d)^n$$

o, dividendo per d^n:

$$\left(\frac{y}{d}-1\right)^n + \left(\frac{y}{d}\right)^n = \left(\frac{y}{d}+1\right)^n$$

Posto $y/d=t$, espandendo l'espressione qui sopra si ha:

$$t^n - \binom{n}{1} t^{n-1} + \binom{n}{2} t^{n-2} - \ldots - 1 + t^n = t^n + \binom{n}{1} t^{n-1} + \binom{n}{2} t^{n-2} + \ldots + 1$$

o

$$t^n - 2\binom{n}{1} t^{n-1} - 2\binom{n}{3} t^{n-3} - \ldots - 2 = 0$$

Il nostro prossimo passo è verificare che l'equazione qui sopra non ha soluzioni razionali.

Supponiamo, per iniziare, che il numero razionale $t=r/s$ soddisfi l'equazione qui sopra, con r e s primi tra loro e s>1. Allora l'equazione può essere riscritta come:

$$r^n - s\left[2\binom{n}{1} r^{n-1} + 2\binom{n}{3} s^2 r^{n-3} + \ldots + 2 s^{n-1}\right] = 0$$

Ma questo significa che r è divisibile per s, il che contraddice l'ipotesi di coprimalità.

Supponiamo allora sia $t=r$, intero, soddisfacente la nostra equazione. t non può essere dispari, in quanto, secondo l'equazione data, deve essere:

$$t^n = 2\left[\binom{n}{1}t^{n-1} + \binom{n}{3}t^{n-3} + \ldots + 1\right]$$

Nello stesso modo, t non può essere pari in quanto, ricordando che deve essere $t>1$, nella nostra equazione tutti i termini (con l'eccezione di -2) dovrebbero essere divisibili per 4.

Quindi, non essendo la nostra equazione soddisfatta per alcun valore razionale di t, ne segue che l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non è soddisfatta, per n dispari e maggiore di 1, da nessuna progressione aritmetica della forma $y-d$, y, $y+d$.

8. Paraphernalia Mathematica

Le ragioni di questo pezzo sono due: la prima è che, per motivi "fuori da qui", Rudy sta giochicchiando con Python, e gli pareva brutto non sfoggiare la cosa; la seconda è che gli è arrivato il "passo verde", che è a colori ma non ha neanche una riga di verde. E se volete anche il terzo motivo, ci permette di introdurre con nonchalance un concetto che, in un futuro neanche troppo lontano, vorremmo approfondire.

8.1 Il problema (degli amici) di Mike

Continuiamo, dopo una dovuta pausa di riflessione, la narrazione delle mirabolanti avventure del Governatore dell'Ohio Mike DeWine (Rep), quello che ha messo paura a Ciuffettone (che al momento era nella fase "il virus non esiste") con una serie di quattro tamponi solo il primo dei quali positivo[5]. Visto che come personaggio riesce ad esserci quasi simpatico, ci ricamiamo un po' sopra, almeno per quanto riguarda il titolo di questo pezzo.

A long time ago, in an RM far, far away[6] avevamo parlato di matematica delle epidemie; uno dei modelli più semplici che avevamo utilizzato era il modello ***SEIR*** (Susceptible – Exposed – Infectous – Recovered): con poche modifiche, questo modello è applicabile anche all'epidemia di CoViD-19, utilizzando gli stati:

- **S**: Non infettato ma **s**uscettibile di infezione
- **E**: infettato, ma non infettante (**e**sposto)
- **A**: infettante, ma **a**sintomatico
- **I**: **i**nfettante, sintomatico
- **R**: gua**r**ito o non infettabile (ad esempio attraverso la vaccinazione)

In realtà a quanto pare tra varianti e controvarianti c'è una leggera probabilità di reinfezione, ma siccome siamo interessati ai grandi numeri, possiamo ignorarla.

Quando si procede ad una simulazione, di norma si fa procedere la popolazione con una certa casualità in avanti attraverso tutti gli stati (tranne nel caso di vaccinazione, che vi porta immediatamente all'ultimo stato). Come vettore di infezione, terremo conto solo dell'interazione tra soggetti, ignorando condizioni ambientali quali la ventilazione o la convivenza.

Nel progettare i nostri stati, dobbiamo tenere conto di qualche ulteriore dettaglio: il grado di infettività di una persona cambia nel tempo, raggiungendo un picco qualche giorno dopo l'infezione e scendendo quindi al valore zero con la guarigione. Quindi, nella nostra simulazione, dovremo tenere conto (per quanto riguarda gli stati A e I, quantomeno) di altri parametri indicanti il *grado di infettività* del singolo, oltre chiaramente alla frequenza dei contatti. E queste sono due variabili casuali. Cominciamo con l'analizzare i contatti, che ha l'aria più semplice.

Il numero medio c dei contatti che una persona ha al giorno è una variabile casuale governata da un ***processo poissoniano*** (...soprattutto durante il lockdown, ci sentiamo di definirlo "evento raro nel tempo"), e quindi la probabilità che una persona abbia k contatti in una giornata è:

$$p_k = \frac{c^k e^{-c}}{k!}$$

Nella simulazione, trattiamo un gran numero di persone, ciascuna delle quali avrà le proprie interazioni, e quindi la "sua" distribuzione di probabilità (poissoniana).

Un generatore di numeri casuali non si rifiuta a nessuno, e praticamente ogni linguaggio ha la sua brava funzione *random*() in grado di generare numeri casuali distribuiti

---

[5] In considerazione del fatto che se non leggete i PM è molto probabile che non li abbiate letti tutti, le puntate precedenti sono state pubblicate su RM264 (gennaio 2021, "Il problema di Mike") e su RM265 (febbraio 2021, "Il problema (del medico) di Mike", trattando rispettivamente di "sequenze di tamponi" e di "carenza di test".

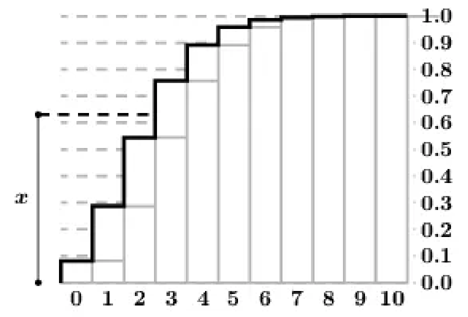
[6] PM di RM131 (dicembre 2009, "Dalli all'untore!")

uniformemente nell'intervallo [0,1) (si noti che l'intervallo è *aperto a destra*: "1" non viene mai generato, ma "0" sì); come si può trasformare questo generatore in un generatore di un processo poissoniano, ossia in grado di generarci una sequenza di interi in [0, n–1] distribuiti poissonianamente?

Il guaio, come potete intuire, è il "distribuiti poissonianamente": per fortuna, esistono un paio di metodi, il primo dei quali risale al mitico "The Art of Computer Programming" di Donald Knuth. Per prima cosa, calcoliamo la ***distribuzione cumulativa***

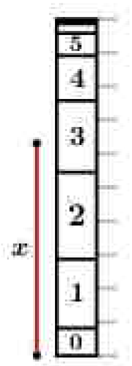
$$P(k) = \sum_{i=0}^{k} p(i)$$

ossia la probabilità che un intero j sia minore o uguale ad un dato k (che è un intero, attenzione: quindi, la tabellina è finita e, di solito, piuttosto piccola): adesso, generiamo un numero casuale x con la funzione *random*() e (riferimento alla figura) andiamo a cercarlo sull'asse delle ordinate: tiriamo quindi una riga verso sinistra e andiamo a vedere qual è *il primo valore di x che supera quel valore* (nel caso in figura, avendo generato circa 0.6, vediamo che è il 3). Ed ecco generato il nostro valore casuale per il processo poissoniano.



3 *Una distribuzione "comme il faut".*

Poco chiaro? Proviamo a vederlo da un altro punto di vista, perfettamente equivalente.



Partiamo da un rettangolo di altezza unitaria, e dividiamolo in rettangolini impilati verticalmente ciascuno dei quali di altezza p_k, ciascuno etichettato con l'opportuno k; e poi giochiamo alla "settimana" (...gioco di quando anche i più anziani tra i redattori di RM erano molto piccoli: vincevano sempre le loro mamme). Ossia, generiamo un numero casuale x e vediamo a che casella arriva, come indicato nella figura qui a fianco. Sul lungo periodo, il numero dei "tiri" che arrivano nella k-esima area sarà proporzionale a p_k, e quindi otteniamo esattamente la distribuzione che ci serve.

Ancora non convinti? OK, l'avete voluto voi.

Dal punto di vista dell'implementazione, un metodo (valido unicamente dal punto di vista didattico) può essere quello di caricare un vettore `p[i]` con la nostra distribuzione e, generato attraverso la funzione *random*() il nostro CUD (casuale uniformemente distribuito), posti `s=0` e `i=0`, entrare in un ciclo del genere:

```
while s<=x
      i+=1
      s+=p[i]
return i-1
```

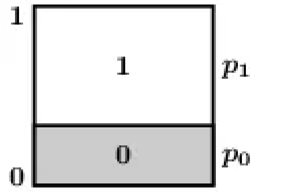
...adesso è più chiaro?

Il che è di un'inefficienza più unica che rara, visto che dovete sciropparvi, per una divisione in n segmenti, n/2 cicli.

Per fortuna, ***Alastair Walker*** ha trovato un metodo ingegnoso; talmente ingegnoso che, se ***Keith Schwartz*** non lo spiegava al mondo, nessuno se ne sarebbe accorto.

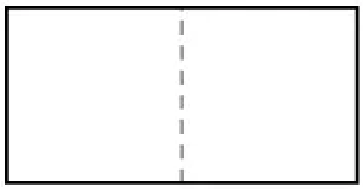
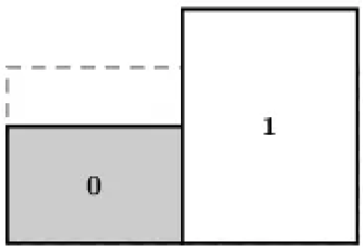
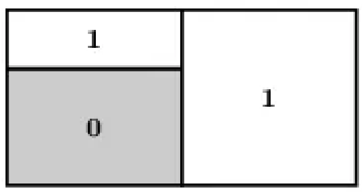
In prima istanza, il metodo è esattamente quello che abbiamo visto qui sopra: si parte da un rettangolo di un qualche tipo, lo si divide in aree proporzionali a p_k, si scelgono dei punti casuali dentro al rettangolo e si cerca un modo per assegnare, ad ogni punto nel rettangolo, un qualche valore nell'intervallo [0,1). La novità sta nel trovare un metodo *efficiente* per recuperare l'etichetta della partizione in funzione della geometria (interna) del rettangolo: non solo ma (...prima o poi finirà, 'sta epidemia...) possibilmente di fornire valori per qualsiasi distribuzione, non solo poissoniana.

Cominciamo con un caso banale (tant'è che non servirebbe neppure il metodo di Walker e Schwartz): n=2. Qui, dividiamo il nostro rettangolo in due parti, generiamo il casuale tra zero e uno e, se è minore del valore critico p_0 restituiamo zero, in caso contrario restituiamo uno. I noti che non stiamo (e qui sta il *busillis*) a guardare l'altra coordinata. Il caso è perfettamente equivalente al lancio di una moneta farlocca, con probabilità di avere testa pari a p_0 e probabilità di avere croce pari a p_1 (no, la moneta non può stare sul bordo, quindi $p_0+p_1=1$).



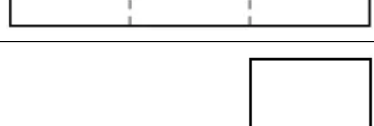
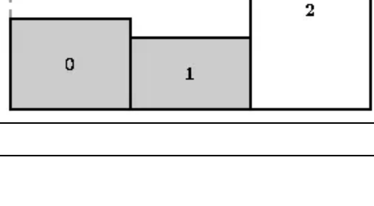
4 *Un caso banale (senza W&S).*

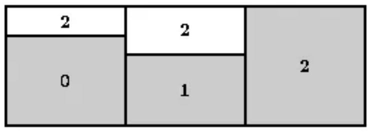
Adesso, proviamo ad affrontare il problema con il metodo di Walker: volendo stare sull'operativo, lo scriviamo in un formato un po' differente (sappiamo che Alice *adora* il Calcolo delle Probabilità, e sarà *felicissima* di litigare con questa impaginazione).

Per prima cosa, partiamo da un rettangolo 2×1 e dividiamolo in due parti, in modo tale che ogni parte sia un quadrato unitario.	
Adesso, costruiamo in ognuna delle due metà una scatola di dimensioni 1×p_i, e attribuiamo ad ognuna di queste la sua etichetta (nel nostro caso, 0 e 1). Se la moneta è farlocca, una parte "sporgerà" sopra l'altra.	
...e quindi, "tagliamo un pezzo di quella che sporge e l'aggiungiamo a quella bassa. Ricordiamoci di mettere l'opportuna etichetta (nel caso, "1"). *Attenzione* che la parte indicata "1" sopra lo "0" *appartiene alla scatola* "1".	

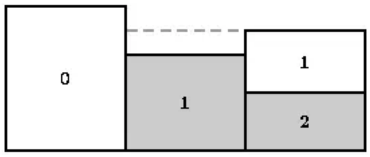
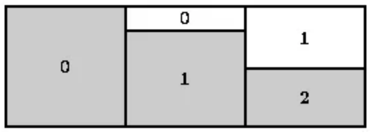
Adesso, generiamo il solito x=*random*() in [0,1), ma trattiamolo in un modo un po' diverso: definiamo $X=2x$, e sia m la parte intera di X (che varrà 0 o 1); estraiamo la parte decimale, come $y=X–m$: associamo allora a x il punto di altezza y: se $y<p_m$, allora siamo nella scatola m, altrimenti siamo nell'altra: in ogni caso, il processo sarà in grado di "scegliere" una scatola (o meglio, un m) senza noiosi cicli di calcolo.

Semplice, vero? Beh, in alcuni casi, già anche solo per n=3, può non essere immediato: vediamo prima il caso semplice, poi passeremo a quello complesso.

Partiamo, come al solito, dal nostro rettangolo, in questo caso 3×1:	
...siccome stiamo trattando il caso semplice, supponiamo una sola probabilità sia *maggiore di* 1/3: le tre aree, con altezza proporzionale a p_i diventano come qui a fianco.	

...a questo punto, possiamo equalizzare le altezze tagliando gli opportuni pezzi e ottenere le nostre scatole (che cominciano ad avere una forma un po' strana ma, come vedremo, funzionano benissimo).	

Prima però di vedere come attribuire i valori, vediamo un caso un po' particolare: quello nel quale *due* delle tre probabilità sono *maggiori di* 1/3.

Questa è la nostra situazione iniziale:	
Qui, tagliare le due regioni più grandi non aiuta: infatti, in questo modo ci ritroveremmo una colonna con *tre* aree, il che non è quello che cerchiamo. Quindi, ci limitiamo tagliare un pezzo per ora *dalla sola regione più grande*, e *portiamo la regione più piccola a* 1/3: questo farà "mancare un pezzo" alla regione grande, ma per ora non preoccupiamocene.	
Infatti, lo spazio che avanza lo riempiamo prendendolo da quella che ora è la regione più larga: se non abbiamo sbagliato i conti, dovrebbe bastare giusto giusto.	

Bene, risolto anche il caso complicato, chiediamoci come possiamo usare questo puzzle.

In entrambi i nostri casi, siamo partiti da un rettangolo 3×1, quindi per prima cosa scaliamo il nostro random da [0,1) a [0,3) attraverso la mappa X=3x. Questo ci porta ad un punto nella zona [m,m+1) (con m=0, 1, 2 nel nostro caso), e quindi focalizziamo l'attenzione sul rettangolo m, che è la parte intera del nostro X: a questo punto, avendo l'altezza del "rettangolo grigio" *m-esimo*, forniamo l'opportuna label in funzione del valore della parte decimale di x rispetto a p_m.

Semplice, chiaro... Ma l'implementazione si scontra con alcune problematiche relative all'arrotondamento (...che poi sarebbero il fatto che avete delle parentesi *tonde* a chiudere gli intervalli). Queste, fortunatamente, le ha risolte ***Michael Vose***, costruendo un programma che riesce a risolvere questi casi. Se volete il programmino, basta chiedere.

Bene, adesso facciamo gli untori. Nel senso che facciamo partire un'infezione con i nostri generatori.

La nostra infezione è infettante dal quinto giorno, e segue la tabella:

i = giorni dopo l'infezione	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10+
r_i =probabilità di infezione	0	0	0	0	0.1	0.3	0.4	0.4	0.2	0

Supponiamo inoltre che il nostro Mike abbia in media 4 contatti ogni giorno: attraverso la formula di Walker otteniamo la distribuzione casuale dei suoi contatti nelle giornate prese in esame:

i = giorni dopo l'infezione	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
c_i =numero di contatti	5	2	3	4	3	3	2	1	3	3...

Da qui, è facile calcolare le infezioni previste per giorno, sommando i prodotti del numero di contatti per l'infettività, e si ottiene, nel nostro caso, il valore 3.

Attenzione però che il valore di R_0 è completamente diverso: questo è dato dalla somma delle probabilità di infezione per il *numero medio di contatti*, e quindi risulta un robusto 5.6.

Insomma, le simulazioni servono, ma meglio non fidarsi troppo...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms