Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 266 – Marzo 2021 – Anno Ventitreesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM263 ha diffuso 3'310 copie e il 04/03/2021 per Google eravamo in 32'600 pagine.

Di ***Basil D Soufi*** non sappiamo davvero nulla, a parte che è l'autore di questa immagine. Supponiamo che sia anche il proprietario della Mazda 3 raffigurata nella foto, e che sia un tipo che non aspetta il 14 Marzo per parlare di Pi Greco, vista la pazienza dimostrata per tutta la larghezza del cofano posteriore. Ora attendiamo con ansia la risposta italiana alla provocazione californiana (e se il modello della vostra auto non ha un "3", sbizzarritevi pure con altri trascendenti…).

1. Chiave di volta

"Тварь я дрожащая или право имею?"[1]

("Delitto e Castigo", Fëdor Dostoevskij).

Ghiaccio, neve e fango. Ghiaccio, neve e fango. Ghiaccio, neve e fango.

Una parte della sua mente lo ripeteva ritmicamente per mantenere l'andatura, con gli occhi fissi sulle scarpe ormai del tutto consumate eppure ben decise a mantenere la direzione. Erano settimane, mesi che ripeteva il percorso; non aveva più bisogno di guardarsi intorno per riconoscere le strade. Ghiaccio, neve e fango è quanto calpestava il suo piede destro; ghiaccio neve e fango è quanto trovava subito anche il sinistro, una frazione di secondo dopo, accompagnato dal ritmo familiare e quasi dolcemente cullante della cantilena nella testa. Era una sorta di appiglio, un pilota automatico: bastava una percentuale minima della sua mente a tener vivo il ritornello, ed era una percentuale ben spesa, perché aiutava a dimenticare la fatica, a scordare la fame, il buio, e persino il freddo. Non era però sufficiente a mantenere del tutto viva la cognizione, la consapevolezza del percorso: i passi si ripetevano, il suo corpo procedeva dritto e sicuro nella giusta direzione, ma l'oscurità semipermanente dell'inverno russo ogni tanto le faceva perdere, se non la direzione, il verso, nel significato più vettoriale del termine. Stava andando o tornando da Pëtr? Stava andando o tornando da Leonid, Andrei e Sergej?

1 *Kazan.*

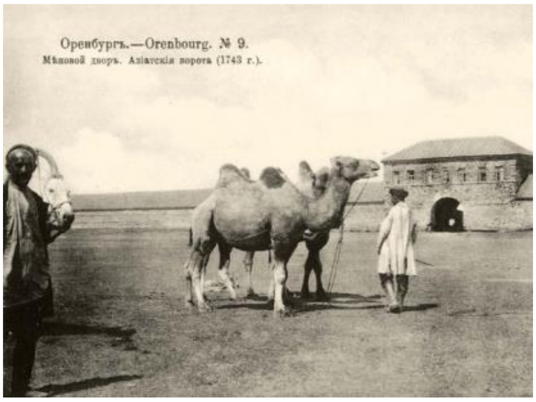
In quei momenti di smarrimento doveva per forza fermarsi, interrompere gli automatismi, tacitare il ritmo amichevole e ossessivo di ghiaccio-neve-fango, e guardarsi intorno. Doveva alzare gli occhi dalla strada, cercare nella penombra (serale o mattutina?) qualche punto di riferimento: di solito la Torre Spasskaya, verticale e prismatica, grazie alla quale si poteva ricostruire, anche nell'oscurità, la mappa essenziale della città; se lì è il Cremlino, allora laggiù c'è l'ansa grande del Volga; così la bussola mentale si riposizionava, restituiva pienamente direzione e verso, ricollocava il suo corpo alla sua destinazione. *È là che vado, verso l'ospedale, da mio marito, è ancora mattino.* Oppure, invece: *il freddo è già quello che anticipa la notte, e allora sto tornando al dormitorio, dai miei figli.* E lentamente, con fatica, ripartiva, rimettendo in moto il triplice ritornello ghiaccio-neve-fango, ma con lentezza, piano piano, perché il ritmo interrotto fa sempre fatica a ripartire, dopo che l'ipnotica cantilena è stata interrotta.

Il resto del cervello, quello che non ripeteva ossessivamente la colonna sonora dei suoi passi, era fin troppo libero di vagare tra le disperazioni che giocavano con la sua vita. Era il peggiore inverno che avesse mai vissuto, e quasi non poteva lamentarsene: era l'inverno peggiore per quasi tutto il mondo, certo il peggiore per la sua ancor giovane patria, l'Unione Sovietica. Di conseguenza, l'inverno peggiore per quasi tutte le persone che

[1] "Sono una creatura tremante o ho il diritto?"

incrociava, anche loro perse con lo sguardo fisso a terra, sul ghiaccio, sulla neve e sul fango.

Non c'era nessuna via di fuga, nessun artificio possibile disposto a proteggerla. L'orientamento perso e subito riacquisito poteva forse indurla a giocare con la geografia e i punti cardinali, ad esempio: ma era davvero consolatorio? Era così lontana, così più ad est delle terre che considerava familiari, che forse poteva indugiare un po' sull'orientale stranezza degli edifici, sugli accenti tatari che sentiva e che aveva imparato a riconoscere, perfino su quello strano condominio di religioni tripartito tra i monasteri ortodossi, le moschee musulmane e l'ateismo sovietico: era a Kazan, dove Oriente e Occidente cominciano davvero a confondersi. Anni passati sul Baltico, ancora di più quelli passati a Mosca, e adesso a est, sempre più a est, in fuga verso l'oriente rassicurante, mentre l'occidente brucia. Era mai stata così ad est, nella sua vita?



2 *Orenburg.*

Le scappa perfino un sorriso, mentre si rende conto di quanto sia sciocca quella domanda. Anche se la sua memoria non l'aiutava, perché i suoi ricordi più vecchi le proiettavano nel cervello immagini di Riga, Leningrado, perfino qualche immagine (annebbiatissima, in verità) di Helsinki, la sua ragione stancamente le ricordava che più ad est di Kazan lei c'era stata di sicuro, perché vi era addirittura nata. Aveva pochi mesi, forse solo poche settimane quando con i genitori arrivava sul Golfo di Finlandia, ma i suoi certificati di nascita e i documenti di identità glielo ricordavano quasi quotidianamente: aveva visto la luce a Orenburg, dove finiscono gli Urali, dove finisce il fiume Ural, e dove finisce perfino la Russia, per far in modo che il Kazakhistan possa cominciare. Era successo quasi trentotto anni prima, il 12 marzo 1904, e mancava ormai poco più di un mese a un suo triste compleanno; un compleanno più faticoso, più affamato, più povero: un compleanno pieno di ghiaccio, neve e fango. Ma di quell'oriente natio più lontano e più caldo non ricordava niente, mentre questo era fin troppo presente: ogni volta che passava vicino alla stazione vedeva la duplice tragedia coniugata dalla direttrice est-ovest della Transiberiana; i treni che venivano da occidente scaricavano le masserizie degli evacuati, polverosi sacchi di iuta e panno pieni di tutto e di niente, passati dagli sportelli e dai finestrini, seguiti dagli occhi disorientati e spaventati di quelli che a Leningrado, a Mosca, a Gor'kij avevano lasciato le case e gran parte delle loro vite. Ancora più cupe erano però le facce che facevano una piccola sosta scendendo dai treni che da oriente arrivavano e che verso occidente erano diretti: facce giovani e arrossate dal freddo di reclute che accorrevano dalle sterminate regioni della Siberia, molti con gli occhi stretti e i lineamenti induriti che ricordavano i ritratti di Gengis Khan, intabarrati con colbacchi e pastrani a coprire le divise di panno, e il moschetto in spalla. Andavano al fronte, sulla linea immaginaria e rigata di sangue che i nazisti spingevano sempre più a est e più a nord, facendole toccare già i quartieri più esterni di Leningrado; facendola giungere quasi ai sobborghi di Mosca; e cucendola già stretta, annodata e contorta, in ogni strada e vicolo di Stalingrado.

In confronto a quei movimenti ciclopici, il suo quotidiano oscillare tra ospedale e dormitorio era ben poca cosa. Ma era comunque un'eco individuale e precisa della stessa disperazione: e, comunque, di quel più grosso moto e respiro nazionale era stata parte anche lei, poco tempo prima. Anche lei era scesa da quel treno che rigurgitava le famiglie evacuate dalla Russia d'Europa, anche lei seguiva con gli occhi i pochi bagagli che la accompagnavano, ma solo per quanto le era concesso dal suo ruolo di madre: doveva innanzitutto tenere vicino Leonid, che mostrava lo stupore preoccupato dei decenni, troppo piccoli per capire tutto, ma abbastanza grandi da comprendere che l'arrivo in quella stazione era un momento spaventoso della vita della famiglia; doveva tenere ben stretta la mano di Andrei, che dall'alto dei suoi sei anni non poteva far altro che lasciarsi trascinare come un piccolo automa; e doveva tenere in braccio Sergej, almeno un po', almeno all'inizio, perché il treenne preferiva nascondere il volto nell'incavo del collo materno, per quanto possibile.

Buffo come possa apparire consolatorio anche un presente gonfio di disperazione, quando il passato prossimo è stato ancora più devastante. Persino il pendolare quotidiano tra la minuscola stanza del dormitorio e l'ospedale sembra migliore di quell'arrivo alla stazione. Allora non aveva ancora notizie di Pëtr, non aveva più nessuno a cui ancorarsi, nessun punto di riferimento: vedeva gli altri disperati ammucchiarsi come stracci – come lei e i suoi figli – e comunque le apparivano assai più fortunati, perché erano famiglie ancora quasi intere e unite, e soprattutto perché erano trattati da evacuati, da russi in Russia, da sovietici in Unione Sovietica. Lei e i suoi figli, invece, erano stati messi tra i rifugiati, quasi fossero stranieri, ospiti in una nazione diversa dalla loro patria. Erano finiti compressi in pochi metri quadri del pavimento della palestra d'una scuola, loro – una donna e tre figli piccoli – e sembrava valer poco ricordare che erano russi, e bisognosi di tutto, soprattutto di Pëtr. Un mese così, reietta e quasi senza speranza: con la fatica di mantenere vivo il corpo suo e dei suoi bambini con la razione quotidiana di tre etti di pane nero e duro, e un cucchiaino raso di zucchero. E non aveva senso lamentarsi: a Leningrado erano già morti a centinaia di migliaia, e quasi tutti proprio di fame.

3 *Rifugiati. Di qualche guerra, di qualche posto.*

E quando finalmente Pëtr riesce ad arrivare la consolazione, per quanto grandissima, è infettata dalla notizia che è molto malato, bisognoso di interventi chirurgici, e quindi di medici e medicine, di infermieri, e soprattutto di un letto d'ospedale. Ma è quasi bastato il ritrovarlo: Pëtr è malato, ma viene curato, e per fortuna l'operazione è andata bene; i medici non hanno più la faccia tetra e pessimista dei primi giorni; Andrei e Sergej hanno rivisto il papà, Leonid ha riabbracciato il patrigno, anzi no, anche per Leonid Pëtr è il papà, perché sono davvero, in tutto e per tutto, una famiglia. E dalla palestra li hanno infine spostati nel dormitorio studentesco e hanno riservato per loro una stanzetta, sempre piccola, sempre fredda, ma pur sempre un rifugio: ed è quasi buffo notare come basti un piccolo rifugio per sentirsi meno rifugiati.

E adesso torna più facile e spedito il ritmo ghiaccio-neve-fango, nonostante il freddo e il buio di quest'inverno spietato che salda insieme i sanguinari anni 1941 e 1942. Nonostante il capezzale di Pëtr disti dal dormitorio dieci chilometri, e sono venti al giorno da fare a piedi, almeno; e nonostante le scarpe che sono vecchie, e il giorno corto, cortissimo, come quello di Mosca, perché Mosca e Kazan sembrano quasi averlo fatto apposta a mettersi esattamente sullo stesso parallelo; e nonostante il Volga che non ghiaccia certo meno bene di quanto sappia fare la Moscova, e altrettanto bene – anzi meglio, meglio – sa distribuire nell'aria il suo carico di umidità, di nebbia, che poi si sposa indissolubilmente con la neve e con la terra compatta di questa città-porta aperta verso l'Asia, per trasformarlo nel triplice amalgama che anche oggi, ancora adesso, l'accompagna: ghiaccio, neve e fango; ghiaccio, neve e fango. Ma alla fine dei dieci chilometri, almeno, ritrova un'altra trinità, quella delle tre voci dei bambini che insieme urlano "*Mama!*"; o, forse ancora più dolce perché creduto perduto per sempre, il leggero e flebile saluto di Pëtr, talvolta mormorato solo dagli occhi: "*Lyudmila!*".

4 *Lyudmila Keldysh.*

Se Lyudmila Vsevolodovna nasce a Orenburg, la causa è nel lavoro del padre, Vsevolod Michailovič Keldysh. È figlio di un medico militare, e non un militare qualunque: suo padre era generale, e sotto lo Zar non si può essere generali senza essere nobili; da parte sua, Vselovod è un militare egli stesso, e soprattutto è anche un ingegnere laureato al Politecnico di Riga, specializzato in grandi costruzioni: e nella Russia zarista d'inizio Novecento le sue competenze sono rare e preziose. Gira continuamente il paese ad insegnare il mestiere agli studenti e ai professori degli Istituti Tecnici, quando non è chiamato a dare direttamente il suo contributo a grandi progetti come quello della metropolitana di Mosca o quello dello scavo del grande canale che deve unire la Moscova al Volga.

Se Lyudmila fa fatica a fraternizzare con gli altri evacuati, se i commissari politici la guardano ancora con un po' di sospetto, la causa è anche quella che non si può essere figlia di un nobile lettone senza essere vista come un'antica nemica del popolo. E, a dirla tutta, Lyudmila nobile lo sarebbe davvero, se la Russia non avesse prodotto tre rivoluzioni nei primi tredici anni della sua vita proprio allo scopo di cancellare le differenze tra popolo e aristocrazia: sua madre, Mariya Aleksandrovna Skvortsova, vanta quarti di nobiltà ancora maggiori di suo marito, nella sua natia Lettonia; proviene da un'antica schiatta di aristocratici generali d'artiglieria. Così, i genitori di Lyudmila sono indubbiamente dei privilegiati benestanti, anche se Vsevolod non fa altro che spostarsi da una città all'altra, mentre Mariya rinuncerà a qualsiasi lusinga mondana per crescere i sette figli che darà alla luce; anzi, è lei che si occupa direttamente della loro educazione, insegnando a tutti il francese e il tedesco, e instillando loro consapevolmente l'amore per la musica: avrà particolare successo con Yuri, che diventerà un musicologo di fama mondiale.

5 *Mstislav Keldysh a nove anni (Lyudmila è già una signorina sedicenne).*

Lyudmila è la prima dei sette, e resterà per sempre una sorta di madre supplente, un faro guida per i fratelli e le sorelle minori. Lo dimostra bene il rapporto con Mstislav, di sette anni più giovane; schivo e orgoglioso delle proprie origini nobili, faceva fatica a trovare la carriera più adatta al suo temperamento. Papà Vsevolod, naturalmente, insisteva nel volerlo indirizzare al Politecnico per fargli seguire le proprie orme e diventare ingegnere, ma Lyudmila lo conosceva meglio del padre. È lei a convincerlo che deve dedicarsi alla matematica, e Mstislav segue il consiglio della sorella maggiore: si iscrive all'Università Statale di Mosca, facoltà di Matematica e Fisica. Si laurea nel 1931, si dedica poi con passione agli studi di aerodinamica. I suoi insegnanti lo raccomandano vantandone la brillantezza, e finisce così all'Istituto Centrale Zhukovsky di Aero-

Idrodinamica. Resta un matematico, e i suoi studi teorici e relative pubblicazioni fanno fare passi da gigante alla tecnologia sovietica, e fanno di lui uno dei maggiori esperti mondiali di aerodinamica. Lascerà l'Istituto Zhukovsky solo nel 1946, per diventare il capo del dipartimento della ricerca missilistica sovietica. Durante tutta la "corsa allo spazio", gli ingegneri impegnati nella realizzazione dei grandi successi dei cosmonauti russi, dallo Sputnik al volo di Gagarin e oltre, continueranno a chiamare Sergej Pavlovič Korolëv[2] il "Capo Progettista", ma sapevano bene che il grande ingegnere che aveva realizzato la supremazia spaziale sovietica era affiancato dal "Capo Teorico", che altri non era se non Mstislav Keldysh, fratellino minore di Lyudmila. Fratellino che coprirà la carica di Presidente dell'Accademia Sovietica delle Scienze nel 1962, riceverà più onorificenze e riconoscimenti di quanto sia opportuno elencare, fino ad essere chiamato a far parte del Comitato Centrale del Partito Comunista dell'URSS.

Ma questo avviene quando la famiglia Keldysh è già a Mosca; per Lyudmila, a differenza dei suoi fratelli più giovani, Mosca è già la quinta città di residenza. Da Orenburg ad Helsinki, da Helsinki a Leningrado, da Leningrado a Riga, dove il padre tiene lezioni al Politecnico. Infine, da Riga a Mosca, e per una volta non si può imputare a papà Vsevolod la colpa del lungo trasferimento; è già il 1915, e i tedeschi – non ancora nazisti, ma già dotati di una macchina bellica preponderante – occupano Riga e la Lettonia nella loro avanzata verso il fronte orientale della Grande Guerra. È un trasferimento duro: certo l'undicenne Lyudmila non può immaginare che un quarto di secolo dopo ne vivrà uno ancora più drammatico e violento, sempre sotto la pressione di truppe germaniche che da ovest la spingono a est, ma anche questo è tutt'altro che piacevole. Per quanto benestanti, d'origini nobili e intellettualmente solidi, i Keldysh a Mosca non hanno amici né appigli. Finiscono in un appartamentino del sobborgo di Losinoostrovskaya, distante dal centro della capitale, e cominciano a sentire i morsi della miseria, e talvolta anche quelli della fame. Mamma Mariya fa comunque il possibile, e spesso li costringe a lunghe passeggiate per arrivare ai teatri del centro, per assistere ai concerti. Chissà, forse sono state un buon allenamento per questa infinita spola tra l'ospedale e il dormitorio di Kazan.

E non è finita, naturalmente: ancora un trasferimento, stavolta di nuovo per seguire il lavoro paterno, nella piccola Ivanovo-Voznesenk (ancora più a nord, come sempre più a est), dove il Politecnico di Riga ha aperto una sorta di filiale. Ma questo forse non è trasferimento così sfortunato, perché è qui che Lyudmila finisce le scuole superiori, qui che segue la conferenza del grande Luzin[3], qui che decide che vuole diventare una matematica. Nel 1923 la famiglia ritorna a Mosca, e Lyudmila non perde tempo: ha l'età giusta, diciannove anni, e si iscrive al corso di laurea di Fisica e Matematica, si aggrega alla squadra di Luzin e – in qualche modo che non è dato conoscere se non confidando nella sua eccezionale capacità di aggregatrice e organizzatrice – riesce a trasformare l'appartamento dei Keldysh in una sorta di ritrovo di giovani matematici. Lo frequentano, tra gli altri, nomi destinati a lasciare una traccia solida nella storia della matematica come Pavel Aleksandrov, Andrei Kolmogorov[4], I.V. Arnol'd[5], che si ritrovavano lì a parlare certo per parlare di matematica, ma anche per scherzare e giocare, come dei nerd ante-litteram; e anche per parlare di musica, perché in quella casa incontravano gli amici

---

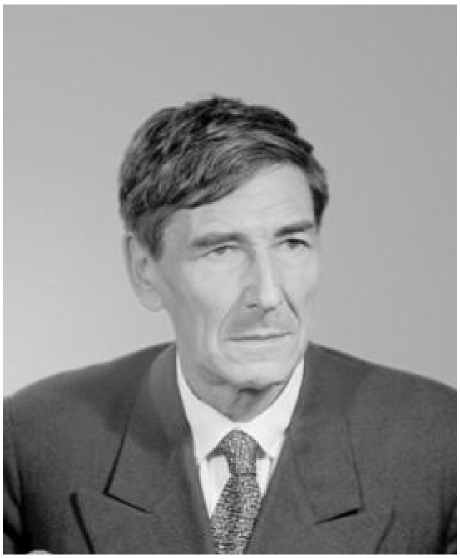
[2] Korolëv è unanimemente riconosciuto come il padre della cosmonautica sovietica, al punto che molti ritengono che la sconfitta russa nella "corsa alla Luna" sia dovuta in gran parte alla prematura scomparsa di Korolëv a neanche sessant'anni di età, nel 1966.

[3] A Nikolai Nikolaevič Luzin – fondatore di una delle più straordinarie "scuole" di matematica del ventesimo secolo, che da lui prese il nome di "Luzitania" – non abbiamo ancora, colpevolmente, dedicato un compleanno; ne parliamo comunque un po' in "*Radici*", RM214, Novembre 2016, in occasione del compleanno dedicato a Nina Bari.

[4] Di Aleksandrov e Kolmogorov parliamo in "*Collegio Matematico numero 18",* RM159, Aprile 2012.

[5] Non lasciatevi ingannare da iniziali e cognome (come è quasi successo a noi…): non si tratta di Vladimir Igorevič Arnol'd, al quale abbiamo dedicato il compleanno "*Gatti, tartarughe e altri animali*", RM221, Giugno 2017: questo è Igor Vladimirovič Arnol'd. Se pensate che l'identico cognome e l'inquietante inversione di nomi e patronimici potrebbe non essere casuale, avete ragione: Igor, compagno di studi di Lyudmila, è il papà del più noto Vladimir (ma anch'egli matematico, *ça va sans dire*).

di Yuri, il fratello musicista. Ed è naturalmente in questo periodo che l'influenza di Lyudmila sulle scelte future di Mstislav prende maggior vigore.


6 *Pëtr Sergeevič Novikov.*

Tra coloro che frequentano il movimentato appartamento dei Keldysh, oltre che la "Luzitania" di Luzin, c'è anche Pëtr Sergeevič Novikov. Anche se è di tre anni più vecchio di Lyudmila, essendo nato a Mosca il 15 agosto 1901, i due si laureeranno nello stesso anno, il 1925: Pëtr ha infatti interrotto gli studi, perché durante i difficili anni in cui l'Armata Rossa e l'Armata Bianca combattevano sul suolo russo per decidere il destino della nazione, Pëtr si è arruolato e ha combattuto nelle fila dell'Armata Rossa di Trotskij. Solo nel 1922 rientra a Mosca, e riprende gli studi interrotti. Sono studi che, in un certo senso, non termineranno mai: diventerà ricercatore, entrerà (e in molti sensi contribuirà a fondare) nel prestigioso Istituto Steklov[6] già al momento della sua fondazione. Prenderà il dottorato nel 1935[7], avrà l'iniziativa di fondare un nuovo dipartimento dell'Istituto, quello di Logica Matematica, e ne assumerà la direzione nel 1957; ma resterà solo uno dei due suoi posti di lavoro, perché continuerà ad insegnare anche all'Istituto di Stato per la Formazione degli Insegnanti di Mosca, e manterrà i due incarichi fino alla pensione. Tutto, però, senza dimenticare la ricerca più viva e diretta: inizialmente si dedica alla fisica matematica, poi passa alla teoria degli algoritmi e alla logica matematica; sarà lui a mostrare per primo che il "*Problema della parola per i gruppi*" non è in generale decidibile[8]. Sa far crescere i suoi studenti, tant'è vero che non esita a mettere il giovane Sergej Adian al lavoro sul perfezionamento del "problema della parola", nonostante sia solo uno studente del terzo anno: alcune varietà di gruppi resistevano ai "metodi di Novikov", e Pëtr decide che la giovane promessa armena può provare ad esercitarsi con quelli. Adian è armeno, ha solo ventitré anni e a Mosca è ancora un po' come un pesce fuor d'acqua, ma il risultato finale è comunque sorprendente: il suo lavoro è insuperato – e virtualmente neanche minimamente emendato – ancora oggi, e fu premiato sia dall'Unione Matematica Sovietica, sia dall'Accademia delle Scienze moscovita.


7 *Sergej Ivanovič Adian.*

Nonostante la differenza di età, Adian e Novikov continueranno a lavorare insieme a lungo, fino alla risoluzione del "*Problema di Burnside*", con quello che oggi è noto come il Teorema di Adian-Rabin. Sergej Adian racconterà poi più volte, e con evidente riconoscenza, che la sua più grande

[6] L'Istituto Matematico Steklov viene fondato nel 1934 su decisione dell'Accademia delle Scienze dell'URSS: destinato all'alta ricerca matematica, è tuttora uno dei più prestigiosi centri di ricerca. Prende il nome da Vladimir Andreevič Steklov, matematico russo.

[7] È evidente, dalle fonti, che Novikov si laurea nel 1925 e prende il dottorato nel 1935; è però anche abbastanza chiaro che nel 1929 si guadagna un altro titolo accademico, che non siamo riusciti a capire se sia una ulteriore laurea o un altro titolo intermedio prima del dottorato.

[8] …ed è la prima volta che l'indecidibilità compare non nel campo della Logica o degli Algoritmi, ma direttamente nel regno dell'Algebra.

fortuna è stata quella di finire sotto le ali protettrici di Pëtr e Lyudmila; era un giovanotto che era partito da Yerevan per iscriversi all'Università di Stato di Mosca, ma non era riuscito ad accedervi per problemi burocratici e linguistici; mai fallimento fu più prolifico, a sentire il protagonista, perché è grazie a quello che Lyudmila lo viene a conoscere, lo presenta a Pëtr, e continuerà a pungolarlo per quasi tutta la sua carriera scientifica.

8 *Leonid Veniaminovič Keldysh.*

Già, perché nel frattempo Lyudmila e Pëtr si sono sposati, nel 1934. Inutile cercare di capire se si sia trattato di un colpo di fulmine, sciocco pensare che possa parlarsi di un romantico "primo amore": entrambi hanno già passato la trentina, e Lyudmila è già al secondo matrimonio. Possiamo dedurre il nome del suo primo marito dal patronimico di Leonid, il bambino che da quel matrimonio nacque, Veniaminovič; e concludere così che in italiano suonerebbe più o meno come Beniamino. Nulla invece per quanto riguarda il cognome, visto che Leonid ha sempre portato il cognome materno, Keldysh, e l'ha reso famoso in tutto il mondo della fisica dello stato solido. Il maggiore dei tre bimbi che aspettavano il ritorno della madre nel gelo della stanzetta del dormitorio di Kazan, del resto, non conosce altro padre che Pëtr: ha a malapena tre anni quando si celebrano le seconde nozze di Lyudmila, e probabilmente la sua memoria non conserva altre figure paterne se non quella di Pëtr Novikov. Quel che è certo è che Leonid Keldysh diventa uno dei fisici teorici più influenti della seconda metà del Novecento, e tutto il mondo della fisica lo ha pianto quando si è spento nel Novembre 2016. Ha qualcosa in comune sia con Einstein che con Feynman: con Einstein, il fatto di aver avuto un "*annus mirabilis*", il 1964, perché le sue due maggiori scoperte avvengono a brevissima distanza l'una dall'altra. Una è la teoria della ionizzazione dell'interazione forte negli atomi; l'altra è il "Formalismo di Keldysh", una formulazione diagrammatica (cosa che fa a pensare a Feynman) della teoria delle funzioni di Green in condizioni di non-equilibrio: una metodologia particolarmente efficace e potente.

Ricordare la celebrazione di un matrimonio che si rivelerà duraturo e felice induce a raccontarlo come un momento di festa, preconizzatore di vita serena: e, tutto sommato, è davvero probabile che quello delle nozze sia stato un giorno pieno di gioia e allegria. È però difficile isolarlo dal momento storico, e dimenticare quale fosse il clima politico di quegli anni: quando Lyudmila e Pëtr si sposano corre un anno particolarmente critico negli annali della storia. In Germania, Hitler è da poco salito al potere; in Unione Sovietica, le purghe di Stalin attraversano forse il loro momento più drammatico, e vengono dirette anche verso tutte le personalità che possono rappresentare una minaccia per il dittatore sovietico. Il ramo materno della famiglia di Lyudmila sarà duramente colpito, forse anche a causa dei suoi antichi quarti di nobiltà: perde uno zio e un cugino, e soprattutto rischia di perdere entrambi i genitori, perché anche sua madre Mariya viene arrestata, e anche suo padre Vsevolod viene indagato e interrogato dalla polizia politica. Per Lyudmila e Pëtr inizia il periodo più difficile della loro vita, e ci vorrà un abbondante decennio prima di vederne la fine.

9 *Sergej Pëtrovič Novikov.*

Eppure, la vita continua: nello stesso anno 1935, quando la NKVD e la GUGB[9] imperversano con gli arresti, Pëtr ottiene il dottorato e una cattedra, e la famiglia comincia a crescere. Nasce Andrei, che seguirà la tradizione familiare diventando un matematico di vaglia, dedicandosi alla Teoria Algebrica dei Numeri, e che morirà purtroppo troppo presto per dare compiutamente tutti i suoi contributi alla matematica. Tre anni più tardi, il 20 marzo 1938[10], arriverà anche Sergej, il più piccolo dei tre bambini che aspettavano la madre nel dormitorio di Kazan. Come il fratello diventerà matematico, e a differenza di Andrei vivrà abbastanza da mostrare tutte le potenzialità della predisposizione matematica della sua famiglia.

Arriverà a vincere la più prestigiosa onorificenza matematica, la Medaglia Fields: il Congresso Internazionale dei Matematici (ICM) gliela assegna durante il grande convegno che, ogni quattro anni, è forse l'evento più importante della comunità matematica. Nel 1970 si tiene a Nizza, e in quell'occasione Sergej presenta la celebre "*Congettura Novikov*"[11] sull'invarianza omotopica di polinomi delle classi di Pontryagin, che è il lavoro per il quale sarà premiato. Abbastanza ironicamente, le autorità sovietiche gli consentono di tenere la sua *lectio magistralis* a Nizza, ma gli proibiscono di partecipare alla cerimonia di premiazione, perché aveva pubblicamente parlato in favore di alcuni studenti che erano stati mandati in cura psichiatrica per aver protestato contro il regime sovietico. Ma la medaglia Fields è solo uno dei moltissimi riconoscimenti che il piccolo Sergej raccoglie nella sua vita: un premio quasi altrettanto prestigioso della Fields è il Premio Wolf, che a Sergej Pëtrovič Novikov viene assegnato nel 2005; viene eletto all'Accademia delle Scienze nel 1981, e sarà proprio quest'Accademia a conferirgli il Premio Lobačevskij. Ha una collezione di dottorati ad honorem, ed è membro corrispondente di molte Accademie, tra cui quella degli Stati Uniti, la Pontificia, e l'Associazione Matematica di Londra. L'elenco delle onorificenze è solo un sintomo – e a dire il vero neppure il più significativo – dei suoi contributi alla matematica contemporanea.

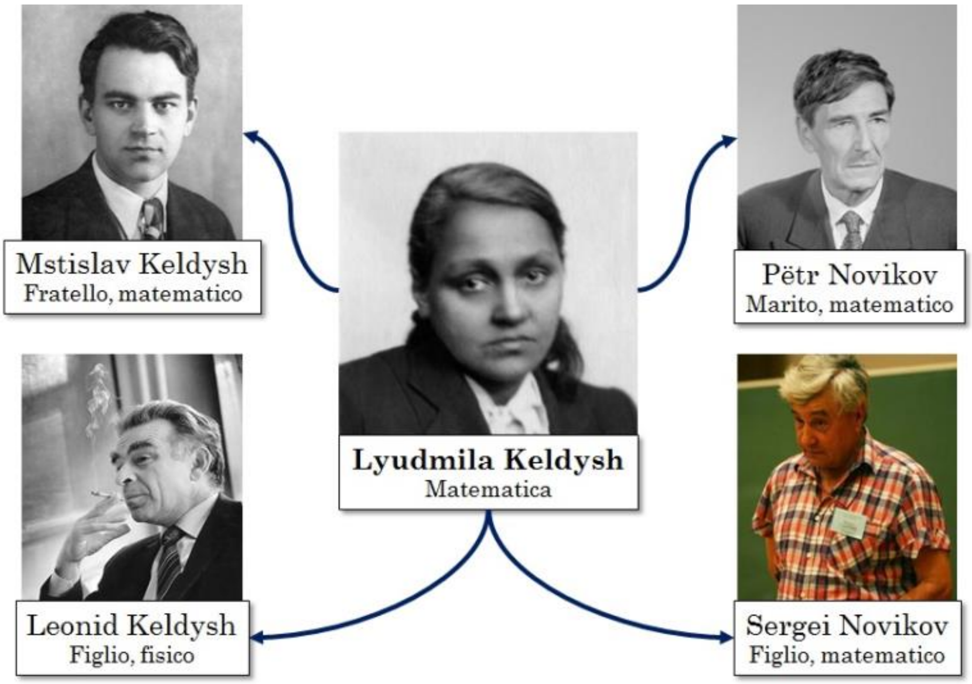
E così si può tornare a Lyudmila, e all'inverno tra il 1941 e 1942; e si potrebbe provare a tirare già un bilancio, perché appare già incommensurabile l'importanza della sua figura, ed è assai forte la tentazione di indulgere al gioco di immaginare come sarebbe stato il mondo se Lyudmila non fosse stata Lyudmila. È un gioco che ha poco senso, dicono gli storici, e anche le persone dotate solo di un po' di senso comune; ma è una tentazione a cui è difficile resistere, quando tutti i fatti si convogliano, come se fossero stati scritti da uno sceneggiatore troppo audace, verso un unico centro, verso la stessa persona, quasi fosse la chiave di volta di tutto l'edificio narrativo. Come sarebbe stata la storia della

[9] La NKVD (Narodnyj Komissariat Vnutrennich Del) e la GUGB (Glavnoe Upravlenie Gosudarstvennoj Bezopasnosti), polizie segrete dell'epoca staliniana.

[10] Il che significa che compirà 83 anni fra pochissimi giorni. Se qualcuno ne avesse la possibilità, gli porti i nostri migliori auguri e la nostra sconfinata ammirazione per tutta la sua famiglia.

[11] Congettura che non va confusa con il "*Principio di autoconsistenza di Novikov*" che ha raccolto molta attenzione mediatica da quando è stato proposto nei libri di Igor Dmitriyevič Novikov nel 1975 e 1983, e che tratta di una ipotesi di impossibilità di cambiare il passato anche qualora fossero possibili viaggi nel tempo. Il lavoro di Sergej Pëtrovič è puramente matematico, il "principio di consistenza" di Igor Dmitriyevič è pienamente fisico; soprattutto, non ci risulta (ma potremmo sbagliare, viste le numerose relazioni di parentela scoperte durante la stesura di quest'articolo) che, nonostante l'omonimia, Igor Dmitriyevič sia apparentato con la famiglia di Lyudmila e Pëtr.

matematica russa, senza di lei? O addirittura, come la storia della scienza mondiale, senza di lei?



Come sarebbe stata la matematica contemporanea senza suo figlio Sergej? Come la fisica dello stato solido senza suo figlio Leonid? Come avrebbe portato avanti la sua carriera suo marito Pëtr? Sarebbe sopravvissuto senza le sue cure, avrebbe contribuito alla creazione del maggiore istituto di ricerca matematica russo, avrebbe avuto la pazienza e la voglia di crescere studenti come Adian? Come racconteremmo la corsa allo spazio che è stato l'evento centrale – non solo scientifico – di tutti gli Anni Sessanta se suo fratello Mstislav avesse seguito i desideri paterni rinunciando alla matematica privando la cosmonautica sovietica del suo "Capo Teorico"?

È un gioco sciocco, certo. Lo sanno bene anche gli scienziati, non solo gli storici, semplicemente perché le variabili in gioco sono troppe, quasi infinite, e altrettante sono le possibilità alternative che andrebbero analizzate; abbastanza da privare di senso qualunque conclusione. Alla fin fine, ognuno di noi potrebbe aver salvato il mondo anche oggi, per quel che ne sappiamo: non è difficile immaginare una sequenza di fatti irrisori che, con una opportuna sequenza di causa ed effetto, potrebbe portare alla distruzione del pianeta o alla maggiore scoperta della storia dell'umanità. Ma rivendichiamo il diritto di rimanere stupefatti dalla concentrazione di eventi che, implacabilmente, conducono verso Lyudmila.

Solo che, più ancora che sciocco, il gioco è ingiusto. Ingiusto perché non rende sufficiente merito a Lyudmila Vsevolodovna Keldysh, perché la racconta solo come sorella, moglie, madre, maestra, organizzatrice, stimolatrice. Tutte cose che Lyudmila è stata, ma che fanno dimenticare che lei stessa era matematica, e matematica di gran vaglia. Quando si aggrega alla squadra di Luzin, prima ancora di essere laureata, già ottiene importanti risultati sugli insiemi di Borel che saranno pubblicati anni dopo, in fascicoli che riassumono il corso di Luzin sugli insiemi analitici e che non portano il suo nome tra gli autori. Una volta ottenuta la laurea insegna all'Istituto dell'Aviazione di Mosca, e nel contempo entra anche lei all'Istituto Steklov; prima ancora di sposare Pëtr pubblica una memoria sugli omomorfismi di elementi canonici di terza classe e una sulla struttura delle funzioni misurabili. Nel 1941, poco prima di finire tra i rifugiati di Kazan, difende la sua tesi di dottorato, che sarà integralmente pubblicata nel 1945. Quando rientra a Mosca dopo l'esilio di Kazan, nel 1942, la sua vita riprende e cambia al tempo stesso: a far compagnia a Leonid, Andrei e Sergej arrivano Nina ed Elena, e così adesso sono cinque i figli da crescere. Anziché cercare di limitare gli impegni, Lyudmila in qualche modo li moltiplica, visto che decide di cambiare campo di ricerca: abbandona la Teoria degli Insiemi per dedicarsi esplicitamente alla Topologia, ritorna a concentrarsi sugli insiemi di Borel nello spazio dei numeri irrazionali, e infine pubblica una memoria fondamentale in cui riassume e mette in comunicazione i suoi studi sugli insiemi e sulla topologia[12]. Il tutto mentre è ordinaria all'Università Statale di Mosca e docente all'Istituto Steklov.

Quando rallenta con la pura ricerca, si dedica alla formazione: organizza seminari di topologia geometrica che faranno scuola, formando intere generazioni di grandi topologi russi; scrive libri di testo, rende accessibile l'alta ricerca matematica dello Steklov, e crea un'intera scuola di giovani matematici che si riconoscono orgogliosamente suoi studenti. Continuerà così, alternando ricerca e didattica, fino al compimento dei settant'anni: nel frattempo, è già stata insignita dell'Ordine della Bandiera Rossa del Lavoro, dell'Ordine della Gioia Materna e del Premio del Presidium del Soviet Supremo.

Nel 1974 lascia l'Istituto Steklov, e lo fa essenzialmente per protesta: al pari del figlio Sergej, che quattro anni prima ha pagato la sua solidarietà con degli studenti ingiustamente puniti per la loro opposizione al regime, anche Lyudmila e Pëtr protestano per l'espulsione di uno studente dell'Istituto. Si dimettono, e indubbiamente Pëtr lo fa anche per ragioni di salute: è ormai molto malato, e muore il 9 Gennaio 1975. Lyudmila era in condizioni di salute migliori, ma non abbastanza da sopportare facilmente la scomparsa del suo compagno di vita: gli sopravvive a malapena due anni, per poi raggiungerlo in una della coppia di tombe poste una vicina all'altra, sulle pietre delle quali compaiono solo i loro nomi e cognomi – senza neanche le date di nascita e morte – accompagnati dalla dicitura "matematico" e "matematica".


10 *Sergej, ci sembra.*

Nell'agosto 2004, la conferenza "*Topologia Geometrica, Geometria Discreta e Teoria degli Insiemi*" si è tenuta a Mosca proprio per ricordare il centenario della nascita Lyudmila Vsevolodovna Keldysh, e tutta la conferenza è stata dedicata alla sua memoria. L'Istituto Steklov ha pubblicato in rete molte pagine relative all'evento, e anche una ricca galleria fotografica dei partecipanti. Tra il centinaio di foto pubblicate – tutte prive di didascalia – ci ha colpito una in cui ci sembra di riconoscere Sergej Pëtrovič Novikov mentre tiene in mano un fiore che sembra voler posare su una tomba. Non siamo del tutto sicuri che la foto sia scattata proprio nei pressi delle tombe di Lyudmila e Pëtr, e neppure che ritragga davvero il piccolo Sergej, il bimbo che aspettava che la mamma tornasse finalmente dall'ospedale al dormitorio della palestra di Kazan dopo aver calpestato così tanto ghiaccio, neve e fango in quel lontano inverno: ma lo sospettiamo fortemente, e ci fa piacere pensarlo.

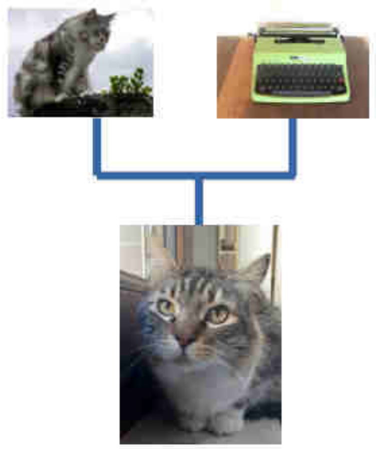
[12] "*Topological imbeddings into Euclidean space*", che sarà seguita da "*Topological embeddings into Euclidean space*"; lasciamo i titoli in inglese perché ci sembra che suonino meglio, e per non avventurarci in traduzioni avventate.

2. Problemi

2.1 Cyborg!

Vi abbiamo raccontato, l'altra volta, che Rudy stava leggendo "Manifesto Cyborg", di Donna Haraway; anche se il resto lo ha lasciato piuttosto tiepido, ha trovato il pezzo che dà il titolo al libro molto interessante, e quindi tende ad avere spesso presente i concetti generali. Soprattutto adesso che *Casa d'Alembert* ha un nuovo manager che, avendo replicato alle insinuazioni del veterinario con un "Non sono grasso[13], ho le ossa grosse!", risponde (quando ne ha voglia) al nome di Obelix.

Quando ha visto la foto, Doc, ailurofilo[14] notorio, si è esibito in un "...ha qualcosa del Maine Coon", cui Rudy ha risposto con una citazione di suo suocero: "...incrociato con una Lettera 32". Da cui il titolo del problema.



11 *Obelix e la sua genealogia.*

Ah, volete anche il problema? OK, arriva.

In realtà, come potete facilmente presumere, Obelix non è esattamente 50-50 come genealogia; secondo le accurate stime del quasiveterinario di casa (basate su oscure sequenze genetiche e numeri di serie ritrovati qua e là), pare sia 56% *Maine Coon* e 44% *Lettera* 32. Ora, supponendo di voler riprodurre la stessa *mixture*[15], quale dovrebbe essere la "fornitura iniziale" di rappresentanti puri di entrambe le specie, se vogliamo evitare problemi genetici dati da incroci parentali? Oh, nelle soluzioni, inserite l'albero genealogico completo, mi raccomando. E fateci sapere come li avreste chiamati. Sono ben accette divagazioni su come vengono dati i nomi ai (cavalli ma non solo) purosangue.

Estensione immediata: e se fossimo interessati ad altre proporzioni? Esiste un metodo generale per "fare i conti", possibilmente non ricorsivo e che non vada per tentativi? E quale sarebbe il "tipo" più pregiato, nel senso del più difficile/lungo da ottenere?

Poi, è noto che i maschi ce l'hanno piccolo (il corredo cromosomico). Nel senso che il cromosoma Y ha un qualcosa come cento milioni di basi in meno rispetto al cromosoma X, e quindi, sulle (suppergiù) cinque miliardi di basi del patrimonio genetico, la femmina (XX) ne porta di più (alla faccia del maschilismo). Facendo il conto sulle "basi della mamma" e le "basi del papà" per avere le percentuali, come andrebbero modificati gli alberi genealogici?

A margine, ci è tornato in mente un vecchio problema di Martin Gardner: definendo la composizione genetica di una persona come "un terzo caucasico, un terzo africano, un terzo asiatico", è possibile definire un "albero genealogico minimo"?

2.2 "Puzza di Ramsey"

Se ricordate, abbiamo pubblicato alcuni problemi che tirano in ballo la Teoria di Ramsey.

E abbiamo "ciccato" la presentazione di tutti quanti. Quindi, ci riproviamo. Qui, è solo un vago sentore, ma possiamo promettervi che ce la metteremo tutta a sbagliarlo.

---

[13] Quasi dieci chili di gatto, e a breve avrà due anni. Un rapido calcolo ci fa supporre sia di quella tipologia che in torinese si chiama "*Gat 'd San Giôan*" (Gatti di San Giovanni, nati in un intorno del 24 giugno), noti per essere piccoli rispetto agli standard. Non facciamo ipotesi sul papà, ma a questo punto la mamma potrebbe essere, più che un'Olivetti, una Marinoni *["...forse non tutti sanno che...": Auguste Hippolyte Marinoni è accreditato essere l'inventore della rotativa moderna*].

[14] Questo problema è stato scritto solo per poter usare questa parola.

[15] La domanda è: il termine, nell'ottica di Haraway, è politicamente corretto, parlando di "cyborgatti"?

Parliamo di epoca pre-CoViD. Avete presente quelle riunioni (di solito internazionali) dove a metà del pasto l'anfitrione fa partire l'icebreaker nel quale chiede a tutti di cambiare il proprio posto? Ecco, proprio quelle: Rudy chiama questi giochini con un nome che finisce sempre per "breaker", ma non comincia con "ice". E, di solito, i suoi colleghi sono d'accordo. Soprattutto perché essendo tutti dei chiacchieroni e costretti a parlare in un inglese piuttosto approssimativo, ci mettevano un mucchio di tempo a dirsi le cose, e l'arrivo di uno scalmanato che partiva con "Ciangedepleis! Changedepleis!" non aiutava la conversazione.

Tempo fa, Rudy e quattro colleghi hanno deciso di giocare un tiro sporco al "box-breaker": in cinque, si sono seduti ad un tavolo circolare da dieci (in modo del tutto casuale); all'arrivo del rompiscatole, si sono alzati tutti e si sono spostati in senso orario tutti dello stesso numero di posti, per poi risedersi. Il frantumatore, intanto, verificato che si stava comunque verificando uno spostamento, se ne è andato a sfasciare altri tavoli, mentre Rudy (e i suoi compari) hanno ripreso le rispettive conversazioni, visto che le posizioni relative erano sempre le stesse, con la ragionevole certezza di non essere più interrotti.

Rudy però si è accorto di una cosa: delle cinque sedie attualmente occupate, tre erano occupate precedentemente da qualche altro membro del gruppo, e ha cominciato a chiedersi se, per qualsiasi posizione iniziale, fosse possibile trovare almeno un movimento "sincrono" (nel senso che ci si sposta tutti dello stesso numero di sedie in senso orario) che portasse a sedersi su tre sedie precedentemente occupate da altri. "Numero", logicamente, deve essere maggiore di zero e minore di dieci, altrimenti il rompighiaccio (ha circa la stessa delicatezza e levità) vi becca e vi sorveglia.

Data l'attuale contingenza, le posizioni di cinque persone a un tavolo da dieci sono un tantinello forzate, ma abbiamo detto che stiamo parlando di tanto tempo fa: quindi, se volete fare degli esperimenti, il consiglio è di usare qualche pedone della dama. O uno di quei tavoli rotondi con il centro che gira del ristorante cinese ("Ah, era un ristorante cinese?" "No, ma mentre scrivo queste righe comincia l'anno del bue. Buon anno!").

3. Bungee Jumpers

Siano P_1, P_2, …,P_7 sette poligoni aventi ciascuno area unitaria e contenuti in un quadrato di lato 2. Dimostrare che esistono almeno due poligoni che hanno un'area di intersezione maggiore di 1/7.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Marzo!

Tante soluzioni e tanti contributi, andiamo subito a cominciare.

4.1 [262]

4.1.1 Questo non è un problema

Riprendiamo brevemente questo non-problema, visto che è arrivato un nuovo commento:

> *Avete disposizione una quantità di semisfere cave e raggi tutti diversi tra loro; decidete di impilarle, e partite dalla più larga, a "buco in giù", mettendone sopra un'altra: quest'ultima, avendo un diametro minore, resterà in contatto lungo il suo cerchio massimo con quella più grande, fornendo un incremento dell'altezza della pila. E avanti così, esiste un'altezza massima della pila? Se ne abbiamo un numero finito, quale successione dei raggi ci permette di raggiungere l'altezza massima?*

In RM263 compaiono le soluzioni di ***Valter***, ***Andrea***, ***Franco57*** e ***Br1***. Ci ha recentemente scritto ***Franco57*** per commentare:

> nel numero 263 della Prestigiosa Rivista avete pubblicato insieme alle soluzioni di Valter, Andrea e Br1 anche la mia soluzione – e vi ringrazio – al problema "Questo

> non è un problema" pubblicato nel numero precedente e relativo alla pila di semisfere impilate più alta.
>
> Quando ho visto che le soluzioni degli altri tre contributors erano tutte e tre concordi nell'indicare che un limite esiste e che il limite è $R(1+\sqrt{2})$ dove R è il raggio della semisfera alla base, mentre la mia soluzione dice invece che un limite non esiste (e che l'ottimizzazione si ottiene quando il contributo di tutte le semisfere, quindi l'altezza dalla circonferenza di base alla circonferenza di base della semisfera successiva, è identico per tutte le semisfere) ho pensato di avere preso un abbaglio: 75% vs 25%.
>
> Ma riguardando vedo che la mia soluzione pare corretta e che l'errore che tutti e tre hanno commesso è quello di ottimizzare correttamente l'altezza per due semisfere e poi ingenuamente riapplicare ricorsivamente lo stesso meccanismo per aggiungere una terza più piccola, senza tenere conto che si riparte non dalla cima della piramide parziale formata dalle prime due, ma semmai dalla base della seconda piramide.
>
> Mantenendo lo stile della rivista (da me molto apprezzato) difficilmente si scriverà che una soluzione è giusta e una sbagliata. Quindi io vi ho scritto e in particolare ho scritto a Rudy visto che a quanto pare il problema stava "tormentando Rudy da un po' di tempo", anche adesso ho il dubbio che sia solo l'ambientazione del problema.

Beh, come potete facilmente immaginare (e come già Franco intuisce) il Capo era già contento di aver ricevuto le soluzioni e di averle confrontate, e noi non intendiamo commentare la correttezza di alcun approccio, ma ci sembra importante riportare questo commento per dare agli altri la possibilità di ripensarci. Andiamo avanti.

4.2 [263]

4.2.1 Prima o poi arriva aprile

Continuano ad arrivare commenti al problema/scherzo di dicembre, di cui il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***trentatre***:

> *Dati due punti materiali, il punto B fermo tra il punto A e il muro, e entrambi su una linea priva d'attrito; il punto A ha massa* 100^n*, mentre B ha massa* 1*. A viene spinto verso B e contiamo gli urti.*
>
> *Se* n=0*, A urta B e si ferma; B urta il muro e torna indietro; indi, B urta A e si ferma, mentre A si perde nell'infinito. Totale,* 3 *collisioni.*
>
> *Se* n=1*, totale* 31 *collisioni.*
>
> *Se* n=5*, totale* 314159 *collisioni.*
>
> *Qual è la regola generale?*

Ci ha scritto ***Pietro***:

> Mi era sfuggito il problema "aprile" del 263.
>
> Mi sembra impossibile che non conosciate 3Blue1Brown! Ha discusso quel problema due anni fa in un video, https://youtu.be/HEfHFsfGXjs, a cui ha poi fatto seguire la soluzione che, come sempre nel suo caso, è ingegnosa e brillante.

Grazie ***Pietro***.

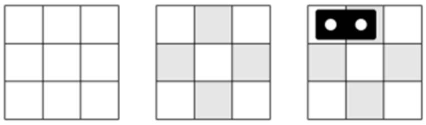
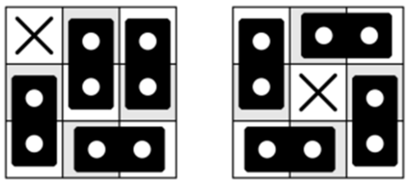
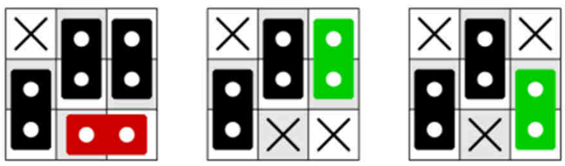
4.3 [264]

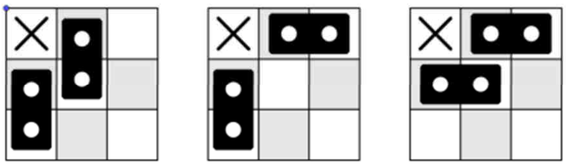
4.3.1 ...e adesso, rimettete tutto in ordine!

Riprendiamo un problema di gennaio:

> *Dato un quadrato tre per tre, dove in ogni casella ci sono tre monetine, Rudy prende due monetine per volta, una da un mucchietto e una da un mucchietto di una casella adiacente. Esiste una strategia per minimizzare il numero delle monete rimaste, e qual è questo minimo?*

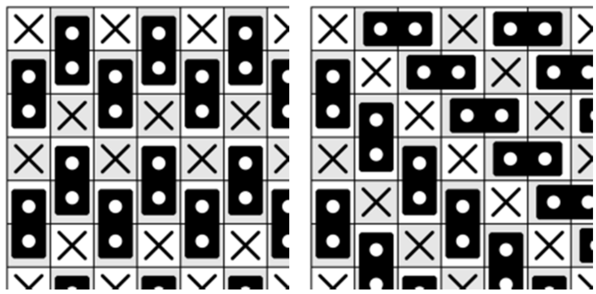
Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***.mau.***, ***Valter***, ***Alberto R.***, ***Franco57***, ma ci è ancora arrivata la soluzione del ***Panurgo***, dal titolo “Un pezzo... dominato”, vedrete subito perché:

> Se in un quadrato 3×3 diviso in caselle alcune di queste vengono colorate, il quadrato diventa… una scacchiera
>
> 
>
> mentre il prelievo di due monete da due caselle contigue può essere rappresentato dal posizionamento di un domino: abbiamo dunque un problema di tassellatura (domino tiling).
>
> Come è noto, un domino ricopre due caselle di colore diverso: poiché nella nostra scacchiera vi sono cinque caselle bianche e solo quattro caselle nere, tasselliamo pure come vogliamo e lasceremo sempre una casella bianca scoperta. Ovvero, nel nostro problema, togliamo le monete a coppie come vogliamo e lasceremo sempre una moneta su una casella corrispondente ad una casella bianca della scacchiera: un vertice o il centro.
>
> 
>
> Ci sono tre monete su ogni casella? Alle fine, sul quadrato resteranno tre monete.
>
> Questo risultato ha evidentemente validità generale: considerato un quadrato $n \times n$ su ciascuna delle caselle del quale siano state poste m monete, se n è dispari, alla fine dei giochi rimarranno indietro almeno m monete; viceversa, se n è pari nella scacchiera corrispondente vi sono le caselle bianche e le nere sono in egual numero, la tassellatura è completa e dal quadrato potranno essere tolte tutte le monete.
>
> Per trovare il numero massimo di monete che è possibile lasciare sul quadrato in modo che non siano possibili altre mosse le cose sono un po’ più complicate.
>
> Osserviamo innanzitutto che, per produrre nuovi buchi nella tassellatura è necessario rimuovere dei domini e spostare gli altri in modo da impedire le mosse che abbiamo scartato: per esempio
>
> 
>
> Incidentalmente, il fatto che i nuovi buchi si aprano sempre in coppie di colori diversi fa si che, per n dispari, ci sia sempre un buco bianco in più, il che conferma l’impossibilità di rimuovere le ultime m monete anche utilizzando tassellature parziali.
>
> Dato che dobbiamo aumentare il numero di buchi, e che i buchi non possono essere contigui, vediamo i tre modi in cui i buchi stessi possono essere confinati, partendo dall’angolo in alto a sinistra.



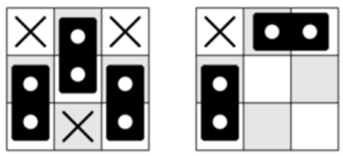
Osserviamo che il primo e il terzo sono equivalenti per simmetria.

Consideriamo ora la scacchiera generata dalle semirette intere del quarto quadrante (così continuiamo a partire in alto a sinistra). Il primo confinamento da luogo ad una tassellatura a "mossa del cavallo" mentre il secondo da luogo a una tassellatura "in diagonale"

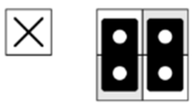


Entrambe le tassellature hanno una densità di buchi pari ad un terzo: infatti, la prima è la ripetizione di una cella formata da due domini e due buchi; la seconda invece ha una diagonale di buchi ogni tre.

La differenza tra le due è che la "mossa del cavallo" ha approssimativamente la stessa simmetria della scacchiera mentre la "diagonale" no: questo ha il suo peso quando la scacchiera è finita per quelli che potremmo definire "effetti di bordo" che si vedono in modo eclatante nella scacchiera 3×3

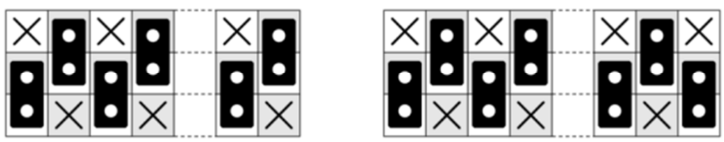


La "mossa del cavallo" la tassella completamente mentre l'altra lascia fin dall'inizio uno spazio 2×2 che può contenere solo domini (vedi le scacchiere 1×1 e 2×2 nella figura seguente)



Qualunque altra tassellatura è un misto delle due, necessariamente meno compatto della "mossa del cavallo" (almeno sui bordi).

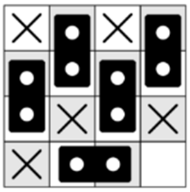
Consideriamo adesso una striscia $n \times 3$, con n pari e con n dispari



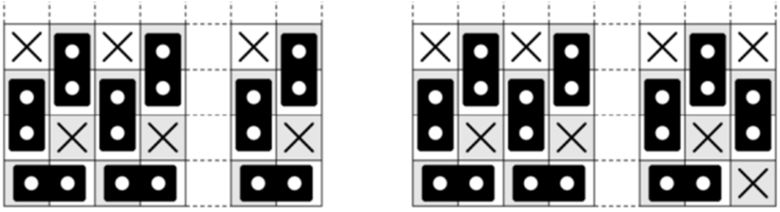
Come si vede, la "mossa del cavallo" la tassella completamente in entrambi i casi: questo è vero per ogni scacchiera $n \times 3k$ e, in particolare, per le scacchiere quadrate con $n = 3k$.

Dobbiamo dunque distinguere gli "effetti di bordo" in funzione del resto modulo tre di n.

Prendiamo ad esempio $n = 4[\equiv 1(\bmod 3)]$

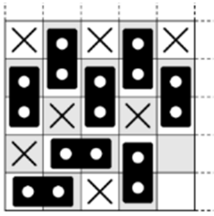


Dopo aver tassellato a "mossa del cavallo" le prime tre righe, se cominiciamo con un buco dobbiamo confinarlo con un domino orizzontale: il domino coprirà due caselle di colore diverso e il buco rimanente sarà adiacente ad un buco della riga superiore. Poichè nella riga superiore i buchi si alternano ad un domino verticale, cadono sempre sullo stesso colore e (per altri valori di n) l'aggiunta di nuovi domini orizzontali farà si che il nuovo buco sia sempre adiacente ad un buco della riga superiore: dobbiamo perciò cominciare con un domino orizzontale, cosa che produce una riga completamente tassellata per n pari e una riga con un buco per n dispari.



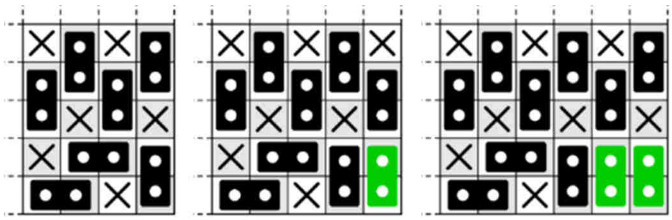
In totale avremo dunque $n(n-1)/3 + n \bmod 2$ buchi per $n \equiv 1(\bmod 3)$.

Se $n \equiv 2(\bmod 3)$ possiamo tassellare la fascia $n \times 2$ che avanza con una "mossa del cavallo" messa in orizzontale

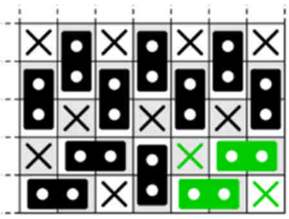


Anche qui, nella prima riga, il domino orizzontale lascia scoperto un buco in alto ma, contrariamente a quanto succedeva per la riga singola, qui è possibile usare un domino verticale per confinarlo.

Il numero di "mosse del cavallo rinforzate" sarà pari al quoziente di $n \div 4$



tranne quando il resto della divisione per quattro è tre: in questo caso è possibile inserire un'ulteriore "mossa del cavallo".



Possiamo riassumere quanto detto in una semplice funzione che conti il numero di buchi:

$$h(n) = n\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor + [(n \bmod 3)(n \bmod 2)] \bmod 2 + 2\left\lfloor\frac{n \bmod 3}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n \bmod 4}{3}\right\rfloor\right)$$

dove $\lfloor x \rfloor$ è la funzione floor che resituisce il più grande intero minore o uguale a x.

Il primo termine conta i buche delle "mosse del cavallo" verticali, che sono n per ogni striscia $n \times 3$ (c'è un buco per ogni colonna)

$$n\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor = \begin{cases} \dfrac{n \cdot n}{3} & n \equiv 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{3} & n \equiv 1 \pmod 3 \\ \dfrac{n(n-2)}{3} & n \equiv 2 \end{cases}$$

Il secondo aggiunge 1 quando $n \equiv 1 \pmod 3$ ed è dispari, ovvero per $n = 6k + 1$

$$[(n \bmod 3)(n \bmod 2)] \bmod 2 = \begin{cases} 1 & n = 6k + 1 \\ 0 & n \neq 6k + 1 \end{cases}$$

Il terzo conta le "mosse del cavallo" orizzontali (ognuna delle quali contiene due buchi) che si hanno quando $n \equiv 2 \pmod 3$; il fattore che "accende" e "spegne" il termine è

$$2\left\lfloor\frac{n \bmod 3}{2}\right\rfloor = \begin{cases} 2 & n \equiv 2 \\ 0 & n \not\equiv 2 \end{cases} \pmod 3$$

mentre il conteggio è dato da

$$\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n \bmod 4}{3}\right\rfloor = \begin{cases} \dfrac{n}{4} & n \equiv 0 \\ \dfrac{n-1}{4} & n \equiv 1 \\ \dfrac{n-2}{4} & n \equiv 2 \\ \dfrac{n-3}{4} + 1 & n \equiv 3 \end{cases} \pmod 4$$

La tabella seguente raccoglie, assieme ad altre informazioni, i primi valori di $h(n)$:

n	$h(n)$	$n \bmod 2$	$n \bmod 3$	$n \bmod 4$	$n(k)$	$h(n)$	$h(k)$
0	0	0	0	0	$12k+0$	$\frac{n \cdot n}{3}$	$48k^2+0k+0$
1	1	1	1	1	$12k+1$	$\frac{n(n-1)}{3}+1$	$48k^2+4k+1$
2	0	0	2	2	$12k+2$	$\frac{n(n-2)}{3}+\frac{n-2}{2}$	$48k^2+14k+0$
3	3	1	0	3	$12k+3$	$\frac{n \cdot n}{3}$	$48k^2+24k+3$
4	4	0	1	0	$12k+4$	$\frac{n(n-1)}{3}$	$48k^2+28k+4$
5	7	1	2	1	$12k+5$	$\frac{n(n-2)}{3}+\frac{n-1}{2}$	$48k^2+38k+7$
6	12	0	0	2	$12k+6$	$\frac{n \cdot n}{3}$	$48k^2+48k+12$
7	15	1	1	3	$12k+7$	$\frac{n(n-1)}{3}+1$	$48k^2+52k+15$
8	20	0	2	0	$12k+8$	$\frac{n(n-2)}{3}+\frac{n}{2}$	$48k^2+62k+20$
9	27	1	0	1	$12k+9$	$\frac{n \cdot n}{3}$	$48k^2+72k+27$
10	30	0	1	2	$12k+10$	$\frac{n(n-1)}{3}$	$48k^2+76k+30$
11	39	1	2	3	$12k+11$	$\frac{n(n-2)}{3}+\frac{n-3}{2}+2$	$48k^2+86k+39$
12	48	0	0	0	$12k+0$	$\frac{n \cdot n}{3}$	$48k^2+0k+0$

La dipendenza da $n \bmod 3$ ed $n \bmod 4$ fa si che la forma dei numeri si ripeta ogni dodici.

E con questo il Capo è ancora una volta sistemato, e le monetine inutilizzate sono archiviate. Procediamo finalmente con i problemi del mese scorso.

4.4 [265]

4.4.1 Avanzi di Natale

Per quelli che ancora non sanno che non conviene mai giocare contro il Capo, ecco un problema per scommettitori:

Il banco sceglie due numeri casuali diversi tra loro, li mette uno per mano e quindi vi mostra le due mani chiuse: voi dovete sceglierne una. A questo punto, il banco apre la mano che avete scelto e vi mostra il numero: voi potete "tenere il numero" o "cambiare mano". Il vostro scopo è quello di trovare il numero più grande: se è quello che avete scelto avete vinto. Se giocate molte partite di seguito, riuscite a trovare una strategia che vi dia una probabilità di vittoria maggiore del 50%*?*

Se il banco sceglie numeri compresi tra zero e dieci, come modificate la vostra strategia? E se sono inclusi in un altro intervallo fisso ma ignoto, come cambia la situazione?

Se ogni volta che vincete il banco paga un euro, ma ogni volta che perdete voi pagate un euro e un centesimo, conviene?

Cominciamo subito con ***Valter***:

Numeri reali casuali:

- se il primo numero è negativo, "cambio mano"

- se il primo numero è positivo, "lo tengo".

Indico con: ++ se entrambi sono positivi, -- negativi, +- positivo/negativo, -+ negativo/positivo.

Ciascuno dei quattro eventi ha probabilità 25% di presentarsi; le mie possibilità di vincere sono:

- "++" la metà delle volte, quindi il 12.5% sul totale

- "--" idem

- "-+" sempre, cioè il 25% delle giocate

- "+-" come sopra.

La mia probabilità di vittoria è del 75%; anche con il centesimo in più di handicap, mi conviene.

Numeri compresi tra zero e dieci:

- se il primo numero è inferiore a 5, "cambio mano"

- se il primo numero è superiore a 5, "lo tengo"

- se uguale a 5, "cambio" o "tengo" casualmente.

Calcolo le mie possibilità di vincere su 110 giocate, vale a dire mediamente dieci per numero:

- 0 → 10 su 10

- 1 → 9 su 10

- 2 → 8 su 10

- 3 → 7 su 10

- 4 → 6 su 10

- … .

Su 110 mani, in media 85 volte vinco; ho il 77.…% di probabilità, mi conviene pure con handicap.

Variazione della prima espansione:

- memorizzo di volta in volta il numero minimo e massimo tra quelli che mi sono stati mostrati
- alla prima giocata registro entrambi con il numero che mi è mostrato
- calcolo la media aritmetica dei due ogni qualvolta varia uno di essi
- applico lo stesso processo decisionale precedente di intervallo 0-10
- il numero medio, che può trovarsi fra due interi, ha il ruolo del 5.

Man mano che gioco, la mia probabilità di vittoria si approssima sempre più al caso precedente.

Sembra che abbia trovato un metodo per vincere…

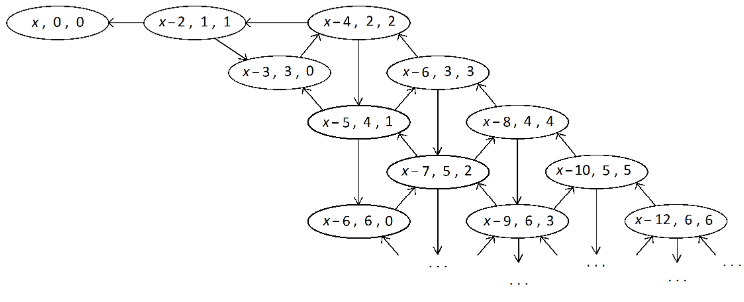
4.4.2 "Famolo strano"

Ebbene sì, il titolo allude ad accoppiamenti, ma poi li rende veramente difficili, e i poveri camaleonti non si sa se sopravvivranno:

> *I nostri camaleonti sono in grado di assumere tre colori (uno per volta e sempre gli stessi tre); se due camaleonti sono dello stesso colore, non si accoppiano; se sono di colori diversi, devono incontrarsi moltissime volte prima di procedere alla riproduzione. Durante questi incontri non fruttiferi, due camaleonti di colore diverso assumeranno istantaneamente entrambi il terzo colore. Ogni camaleonte cambia colore solo in queste occasioni e mantiene il colore assunto sino al prossimo incontro. Inoltre, se i camaleonti sono dello stesso colore, si ignorano, e gli incontri sono possibili solo due alla volta. A seconda del numero iniziale di camaleonti dei diversi colori, la specie sopravvivrà o si estinguerà, diventando monocolore?*

Prima di partire, sembra che il nostro ***.mau.*** abbia già pubblicato questo problema in uno dei suoi libri. Siccome il Capo i problemi li trova in giro e non li inventa, si è subito schermito (lo ha preso da qualche altra parte questa volta), ma noi ne approfittiamo per fare pubblicità alla serie di "*Matematica in relax*" di ***Maurizio Codogno***, così come i suoi blog e i suoi altri libri ed e-book, da cui di certo il Capo qualche problema l'ha rubato o ha tratto ispirazione. Detto questo, la soluzione di ***Lorenzo*** arriva a spron battuto:

> Se ho ben compreso le condizioni presentate, possiamo supporre che i camaleonti siano immortali, si incontrino finché ve ne siano almeno due di colore diverso, ma non si riproducano mai. Pertanto, ci chiediamo quali siano le condizioni affinché i camaleonti possano diventare tutti dello stesso colore, supponiamo Colore_1 senza perdita di generalità. Indichiamo con $(x, 0, 0)$ lo stato in cui x camaleonti sono di Colore_1 e nessuno degli altri due colori. Se $x \geq 2$ l'unico stato precedente è $(x-2, 1, 1)$, e se $x \geq 4$ l'unico stato ancora precedente è $(x-4, 2, 2)$. Procedendo a ritroso, e supponendo (di nuovo senza perdita di generalità) che i camaleonti di Colore_2 siano almeno tanti quanti quelli di Colore_3, possiamo costruire il grafo delle transizioni, una parte del quale è mostrata in figura (ammesso che sia $x \geq 12$).



> Continuando, si constata che se i camaleonti di Colore_3 sono n, allora quelli di Colore_2 sono $n + 3k$ per un qualche k naturale. Come si vede, il grafo è ciclico, per cui non è detto che si arrivi prima o poi allo stato $(x, 0, 0)$. Pertanto, modulo permutazioni di colore, la condizione necessaria per giungere nello stato in cui tutti

i camaleonti sono di Colore_1 è partire da uno stato (m, $n + 3k$, n), per qualche m, n, k naturali. Un cammino privo di cicli che porta allo stato finale si può così descrivere:

- finché vi sono camaleonti di Colore_3, questi si incontrano con camaleonti di Colore_2, sicché si arriva allo stato ($m + 2n$, $3k$, 0);

- finché vi è almeno un camaleonte di Colore_2 e anche uno di Colore_1, avviene un incontro tra Colore_1 e Colore_2 seguito da due incontri tra Colore_2 e Colore_3;

- infine, lo stato sarà ($m + 2n + 3k$, 0, 0).

Dei quattro casi proposti, soltanto il secondo e il quarto possono portare allo stato monocolore:

(8, 5, 14) → (7, 4, 16) → … → (3, 0, 24) → (2, 2, 23) → (1, 1, 25) → (0, 0, 27);

(9, 10, 16) → (11, 9, 15) → … → (29, 0, 6) → (28, 2, 5) → (30, 1, 4) → (32, 0, 3) → (31, 2, 2) → (33, 1, 1) → (35, 0, 0).

Come vedete ***Lorenzo*** ha trovato una soluzione generale, ed ha deciso che camaleonti tanto difficili devono per forza estinguersi. Vediamo che cosa ne pensa ***Valter***:

La congruenza modulo tre del loro numero iniziale è un'invariante; dopo gli incontri non cambia.

Si deve, quindi, verificare il numero iniziale dei tre gruppi, di diverso colore, di camaleonti:

- nessuno ha stessa congruenza degli altri

- almeno due hanno la stessa congruenza.

Poiché si estinguono se tutti hanno lo stesso colore, questo può solo capitare nel secondo caso.

Mostro in tale situazione, la sequenza d'incontri, che portano all'estinzione della loro specie:

- considero una coppia con stessa congruenza; la differenza del loro numero è un multiplo di tre

- ipotizzo incontri che, man mano, avvicini tale coppia, ad avere lo stesso numero di camaleonti

- faccio incontrare la coppia sino a che non si esaurisco i camaleonti aventi questi due colori.

Per quanto detto la specie sopravvive, poiché non diventa monocolore, nei casi: 17-15-13,7-6-50.

Documento una sequenza di incontri, che portano all'estinzione, negli altri due casi propostici:

- 14-8-5, 16-7-4, 18-6-3, 17-8-2, 19-7-1, 21-6-0, 20-5-2, 22-4-1, 24-3-0, 23-2-2, 25-1-1, 27-0-0

- 16-10-9, 18-9-8, 17-11-7, 16-13-6, 15-15-5, …, 0-0-35.

Direi che i risultati convergono… ma controlliamo meglio con Alberto R.:

R camaleonti rossi, V verdi e G gialli.

Se ci sono due numeri uguali, ad esempio R=V, la specie si può estinguere, diventando monocromatica gialla, in conseguenza di ripetuti incontri infecondi di un rosso e di un verde non intramezzati da incontri con gialli.

Se invece R, V, G sono numeri tutti diversi ciò non può accadere.

Dimostrazione:

Consideriamo la coppia di colori rosso/verde (ma il discorso vale anche per le altre due coppie). Sono possibili due casi:

1°caso: R e V (diversi) sono entrambi maggiori di 0

Sono possibili le seguenti trasformazioni:

1.1) Casto incontro tra un rosso e un verde. R e V diminuiscono entrambi di una unità, ma essendo diversi non possono annullarsi entrambi.

1.2) Uno dei due, un rosso ad esempio, incontra un giallo. R diminuisce di 1 ma V aumenta di 2, quindi R e V non possono annullarsi entrambi.

2°caso: R=0 ; V>0 (o viceversa)

Amichevole incontro di un verde con un giallo. V diminuisce di 1, ma R aumenta di 2. Ancora una volta V ed R non possono annullarsi entrambi.

C.V.D.

A proposito del titolo: non mi risulta che Verdone e la Gerini cambiassero colore.

A noi risulta che nel film gli incontri fossero meno casti, ma lasciamo perdere e vediamo un'altra versione, quella del ***Panurgo***:

La dinamica di popolazione dell'Isola dei Camaleonti è governata dal Numero.

La domanda che ci viene posta è: riusciranno i nostri eroi (gli eroici camaleonti) a diventare tutti dello stesso colore? Nessun cenno a quale colore (d'altronde, i colori non hanno neppure un nome): siamo perciò autorizzati a lasciar perdere l'identità dei colori considerando tra loro equivalenti situazioni come (4,2,1), (1,4,2), (2,1,4) ecc.

Per esempio, nel tracciare il processo, al posto di

$$(4,2,1) \rightarrow \begin{cases} (6,1,0) \\ (3,4,0) \\ (3,1,3) \end{cases}$$

scriveremo

$$4|2|1 \rightarrow \begin{cases} 6|1|0 \\ 4|3|0 \\ 3|3|1 \end{cases}$$

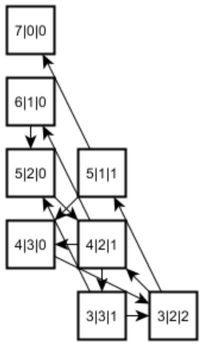
in perfetta analogia con quanto si fa quando, ignorando l'ordine nelle Composizioni di un Intero le si trasforma in Partizioni.

Ma, un attimo! Non si tratta di una mera analogia: c'è una perfetta corrispondenza tra le Partizioni di un Interno con al più tre parti e gli stati del nostro processo; continuando con il nostro esempio abbiamo $7 \rightarrow 7|0|0$, $6\ 1 \rightarrow 6|1|0$, $5\ 2 \rightarrow 5|2|0$, $5\ 1\ 1 \rightarrow 5|1|1$, $4\ 3 \rightarrow 4|3|0$, $4\ 2\ 1 \rightarrow 4|2|1$, $3\ 3\ 1 \rightarrow 3|3|1$ e $3\ 2\ 2 \rightarrow 3|2|2$.

Scriviamo gli stati ordinandoli da sinistra verso destra secondo il colore con il minor numero di camaleonti e dall'alto al basso, in ordine decrescente, secondo il colore con il maggior numero di camaleonti (il colore con il numero intermedio è... intermedio)

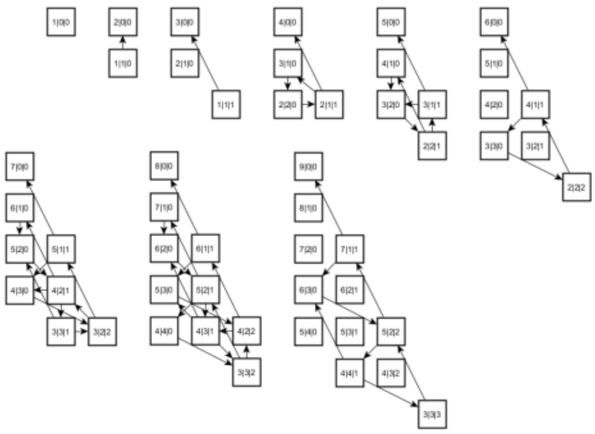
7|0|0		
6|1|0		
5|2|0	5|1|1	
4|3|0	4|2|1	
	3|3|1	3|2|2

e cominciamo il processo dallo stato più omogeneo ottenendo questo grafo

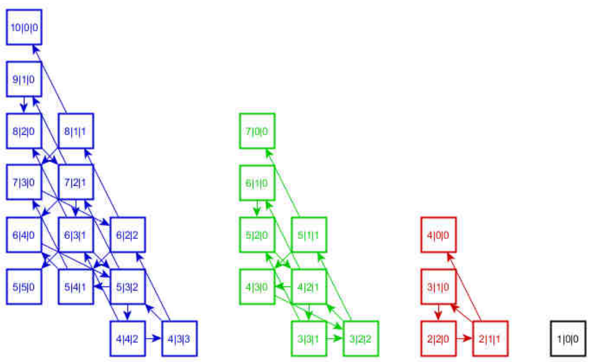


Osserviamo che tutti gli stati con sette camaleonti sono connessi tra loro (sempre che consideriamo i colori come equivalenti).

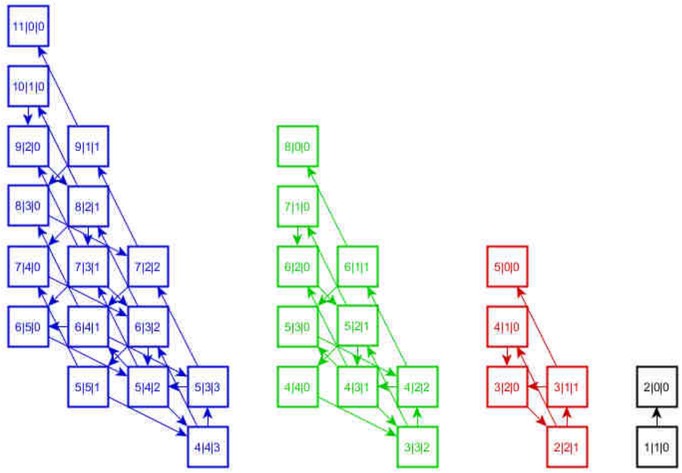
Nella figura seguente sono riportati i grafi per n da 1 a 9.



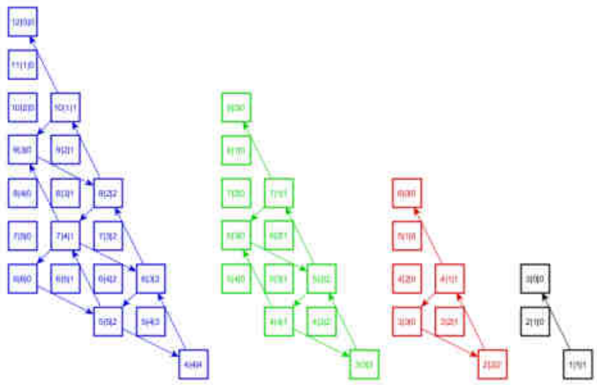
Come possiamo facilmente osservare, vi sono delle regolarità: per esempio, per $n = 3k + 1$ i grafi sono



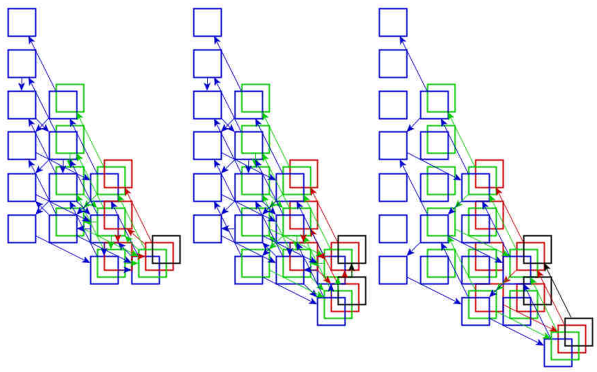
(i colori servono ad identificare l'ordine, k); per $n = 3k + 2$ abbiamo



mentre, per $n = 3k$, abbiamo

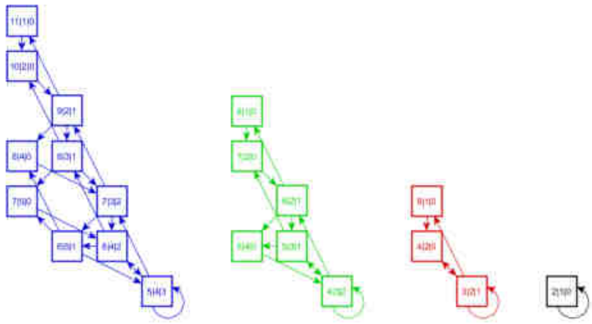


Se accostiamo i grafi secondo il resto della divisione per tre



osserviamo che si sovrappongono in modo fortemente suggestivo: ciò si può vedere più facilmente nel terzo gruppo, quello corrispondente a $n = 3k$, dove molti stati non sono connessi allo stato iniziale.

Possiamo tracciare il processo anche per gli stati "orfani", sempre cominciando dallo stato più omogeneo



Anche qui osserviamo che gli stati sono tutti interconnessi e che i grafi si sovrappongono, stato con stato e transizione con transizione.

Il grafo per $n = 3k$ è quindi diviso in due sottografi disgiunti ovvero il processo è diviso in due sottoprocessi indipendenti: uno con stato iniziale $k|k|k$ (che porta all'estinzione) e l'altro con stato iniziale $k+1|k|k-1$.

Cosa hanno in comune gli stati di ciascun sottoprocesso? Nel sottoprocesso con estinzione i tre numeri hanno, in ogni stato, lo stesso resto modulo tre mentre, nell'altro, i numeri hanno resti modulo tre tutti diversi.

Il motore del processo è la sottrazione di 1 da due gruppi e l'addizione di 2 al terzo gruppo: uno stato $0|0|0 \pmod 3$ si trasforma in uno stato $2|-1|-1 \equiv 2|2|2 \pmod 3$; uno stato $2|2|2 \pmod 3$ si trasforma in uno stato $4|1|1 \equiv 1|1|1 \pmod 3$; infine, uno stato $1|1|1 \pmod 3$ si trasforma in uno stato $3|0|0 \equiv 0|0|0 \pmod 3$. Non c'è alcun modo per cui uno di questi stati si trasformi in uno stato $2|1|0 \pmod 3$: uno stato di questo tipo ha le seguenti trasformazioni

$$2|1|0 \rightarrow \begin{cases} 4|0|-1 \equiv 1|0|2 \\ 1|3|-1 \equiv 1|0|2 \rightarrow 2|1|0 \pmod 3 \\ 1|0|2 \end{cases}$$

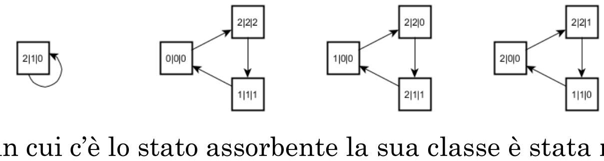
Ciò spiega perché i sottografi e i sottoprocessi siano disgiunti.

Cosa succede negli altri casi? Abbiamo in tutto dieci diversi tipi di stato modulo tre, raggruppati secondo il resto di n modulo 3

$$\begin{array}{llll} 0|0|0 & 1|1|1 & 2|2|2, 2|1|0 & n \equiv 0 \\ 1|0|0 & 2|1|1 & 2|2|0 & n \equiv 1 \pmod 3 \\ 1|1|0 & 2|0|0 & 2|2|1 & n \equiv 2 \end{array}$$

Durante il processo n non cambia quindi non è possibile passare da un gruppo all'altro.

I processi possibili sono



(nei tre processi in cui c'è lo stato assorbente la sua classe è stata messa a sinistra).

In conclusione, l'estinzione dei camaleonti può essere scongiurata solo quando la numerosità dei tre gruppi di camaleonti presenti all'inizio del processo è $2|1|0 \pmod 3$: per gli scenari proposti

$$(17,15,13) \equiv (2,0,1) \rightarrow 2|1|0 \pmod 3$$ ☺

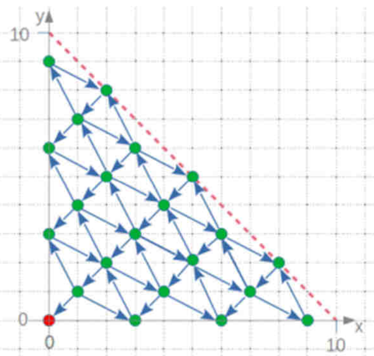
$$(8,5,14) \equiv (2,2,2) \rightarrow 2|2|2 \pmod 3$$ ☹

$$(7,6,50) \equiv (1,0,2) \rightarrow 2|1|0 \pmod 3$$ ☺

$$(9,10,15) \equiv (0,1,0) \rightarrow 1|0|0 \pmod 3$$ ☹

Interpretiamo le faccine tristi come quelle di tristi camaleonti che non si riproducono mai… che tristezza.

Concludiamo con la soluzione di ***Franco57***:

> Quando si verifica uno di questo incontri non fruttiferi tra camaleonti di colore diverso, supponiamo uno verde e uno bianco, il numero di camaleonti di ciascuno di questi due colori diminuisce di 1 unità mentre il terzo gruppo, diciamo di colore blu (così da completare la bandiera delle Galapagos) aumenta di 2 unità. Ora, poiché in aritmetica modulo 3 si ha $2\equiv-1$ abbiamo, se il numero di camaleonti verdi, bianchi e blu sono tutti diversi modulo 3, questa situazione permane dopo ogni incontro e quindi non sarà mai possibile che si arrivi a due gruppi con lo stesso numero di camaleonti e in particolare senza alcun camaleonte, la situazione cioè che determina l'estinzione della specie.
>
> Di contro, se invece almeno due gruppi hanno la stessa classe di equivalenza modulo 3, diciamo $x \equiv y$ dove i tre gruppi contano rispettivamente (x, y, z), dopo un certo numero di incontri è sempre possibile arrivare a una situazione con i primi due gruppi vuoti, che determina l'estinzione. Le strade possibili sono diverse, vediamone una basata su tre regole. Ogni volta che applichiamo una regola partiamo da una generica situazione (x, y, z) nella quale al massimo uno dei gruppi potrà essere vuoto e senza ledere la generalità dell'argomentazione possiamo anche supporre $x\leq y$:
>
> R1) se $x=y$ si incontrano due camaleonti dal primo e dal secondo si arriva a $(x–1, y–1, z+2)$ e chiaramente la regola si riapplicherà fino ad azzerare i primi due gruppi e portare ahimè la specie all'estinzione;
>
> R2) se $x<y$ e $z>0$ si incontrano due camaleonti dal secondo e dal terzo gruppo e si arriva a $(x+2, y–1, z–1)$ con il risultato che la differenza $x – y$ che è multipla di 3 si riduce di 3 unità; si riapplicherà più volte fino a che o primi due gruppi saranno uguali e applicheremo la prima regola oppure il terzo sarà vuoto e applicheremo la terza regola;
>
> R3) se $x<y$ e $z=0$ si incontrano due camaleonti dal primo e dal secondo gruppo e si arriva a $(x–1, y–1, z+2)$: si dovrà quindi in seguito applicare la seconda regola.
>
> Per avere un'idea chiarificatrice di come possono andare le cose ho preparato un grafico con gli stati rappresentati dalla coppia (x, y) e z ricavabile supponendo che $x+y+z=10$. In rosso lo stato di estinzione, in verde tutti gli altri possibili stati, le frecce rappresentano tutti i possibili cambiamenti di stato. La linea rossa tratteggiata, avendo equazione $x+y=10$ rappresenta il limite per cui $z=0$, oltre diventerebbe negativo.
>
> 
>
>
> Come si vede vi è una circolazione basata su triangoli quindi le strade per arrivare allo stato di estinzione sono molte.
>
> Un esempio di passaggio allo stato finale è la successione utilizzando le tre regole è
>
> $$(0,9,1)\,R2\rightarrow(2,8,0)\,R3\rightarrow(1,7,2)\,R2\rightarrow(3,6,1)\,R2\rightarrow(5,5,0)\,R1\rightarrow(4,4,2)\cdots R1\rightarrow(0,0,10)\;.$$

A questo punto sembrerebbe tutto chiaro: la specie non si estingue se e solo se il numero di camaleonti nei tre colori prende tutte e tre le classi di equivalenza modulo 3. Quindi potremmo concludere per gli scenari proposti:

- (17, 15, 13) ≡ (2, 0, 1) non si estingue
- (8, 5, 14) ≡ (2, 2, 2) si estingue e l'esito potrà essere tutti verdi, tutti bianchi o tutti blu
- (7, 6, 50) ≡ (1, 0, 2) non si estingue
- (9, 10, 16) ≡ (0, 1, 1) si estingue e l'esito potrà essere solo tutti verdi (cioè del primo gruppo)

Ma come garantire che effettivamente si giunga prima o poi alla estinzione, cioè a uno stato con due gruppi vuoti partendo da una situazione dove per almeno due gruppi la numerosità sia congruente modulo 3? Il fatto che in questo caso, come mostrato, esista sempre questa possibilità, non è sufficiente.

Qua va assunta anche una ipotesi ulteriore, forse implicita, ma che non riesco a ricavare dal testo del quesito: si passa da uno stato ad un altro secondo certe probabilità che dipendono solo dagli stati iniziale e finale. Ad esempio si sceglie a caso una coppia di colori diversi e si fanno incontrare due membri dei gruppi scelti, quindi per x, y, z tutti positivi la probabilità di passare a (x–1, y–1, z+2) sarebbe 1/3, oppure, altro esempio, per determinare un incontro si sceglie a caso tra tutte le coppie di camaleonti di colore diverso e in questo caso la probabilità sarebbe

$$\frac{x\cdot y}{x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z}.$$

Senza questa ipotesi, temo anzi che non ci sia questa garanzia, ad esempio se nello schema grafico presentato le probabilità di percorrere le frecce cambiassero nel tempo partendo da uno stato verde si potrebbe prima o poi giungere allo stato rosso solo con una certa probabilità.

Invece se le probabilità delle frecce non cambiano col tempo e sono ovviamente sempre positive, è molto intuitivo, addirittura quasi evidente, che si giunga prima o poi allo stato rosso. Ma bisogna dimostrarlo. Ecco, io ci ho provato, con una pseudo-dimostrazione, forse ingenua, ma mi pare siamo in un terreno minato (in questo caso capisco la idiosincrasia di Treccia per i quesiti sulle probabilità).

Partiamo da una situazione nella quale per almeno due gruppi il numero sia congruo modulo 3. Prendiamo una storia di evoluzione illimitata e supponiamo per assurdo che non si arrivi mai a uno stato finale di estinzione. Poiché il numero degli stati è finito, sicuramente ci saranno stati per i quali si transita un numero infinito di volte. Sia S_1 uno di questi. Abbiamo provato che esiste una possibile transizione di stati $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots \rightarrow S_f$ che porta S_1 ad uno stato finale di estinzione S_f. Voglio adesso provare che anche S_2 verrebbe raggiunto una infinità di volte. Infatti se non fosse mai raggiunto oppure fosse raggiunto solo un numero finito di volte, dopo l'ultima di queste, ancora la nostra storia evolutiva dovrebbe ripassare per S_1 infinite volte e poiché la probabilità del passaggio di stato $S_1 \rightarrow S_2$ è sempre la stessa, diciamo $p_{1,2}$, la probabilità che questo passaggio di stato non accada più sarebbe

$$0=\lim_{n\rightarrow+\infty}\left(1-p_{1,2}\right)^n,$$

quindi diciamo che la storia dovrebbe passare ancora una volta in più allo stato S_2. Insomma l'ipotesi che passi da S_2 solo un numero finto di volte crolla, perciò passa da S_2 infinite volte. Analogamente la storia raggiunge infinite volte S_3 e così via, fino a dedurre l'assurdo che passi infinite volte anche per S_f mentre l'assunto era che non ci saremmo mai arrivati.

> In realtà credo che occorra distinguere tra eventi impossibili ed eventi a probabilità zero. Qui si sarebbe dimostrato (o tentato di dimostrare) che, sempre nelle condizioni che per almeno due gruppi il numero sia congruo modulo 3, passare allo stato finale di estinzione ha probabilità 1.

Come vedete le conclusioni sono simili, ed il Capo può essere contento ancora una volta del numero di interpretazioni della sua richiesta. Con questo chiudiamo questo capitolo, alla prossima!

5. Quick & Dirty

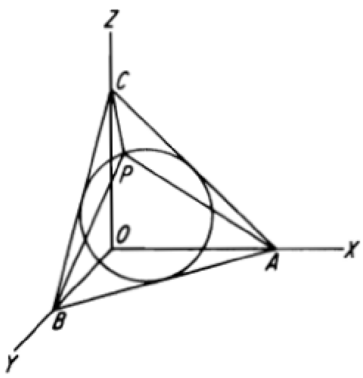
Il triangolo ABC è equilatero, e il punto P è libero di muoversi sul cerchio inscritto.

Dimostrare che la somma:

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$

è costante.

Anche se sembra degno più di un Bungee Jumpers che di un Quick & Dirty, spesso le complicazioni portano a semplificazioni, come ha dimostrato Leo Moser con questo problema. Si consideri, come in figura, il triangolo in uno spazio tridimensionale con i vertici alle coordinate:



$A(1, 0, 0)$

$B(0, 1, 0)$

$C(0, 0, 1)$.

E il punto P sia in (x, y, z).

Il cerchio inscritto è allora l'intersezione della sfera centrata nell'origine:

$$x^2+y^2+z^2=c_1$$

e del piano passante per i tre punti dati:

$$x+y+z=c_2 \,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2 &= \left[(x-1)^2+y^2+z^2\right]+\left[x^2+(y-1)^2+z^2\right]+\left[x^2+y^2+(z-1)^2\right]\\ &= 3c_1-2c_2+3\end{aligned}$$

che è costante.

6. Pagina 46

Procediamo per assurdo, negando la tesi.

Sia $A(x)$ la funzione area dell'argomento. In questo caso deve essere:

$$A\left(P_i\cap P_j\right)<\frac{1}{7} \qquad \forall\ 1\leq i<k\leq 7$$

Questo implica che:

$$A\left(P_i\cup P_j\right)=A\left(P_i\right)+A\left(P_j\right)-A\left(P_i\cap P_j\right)>1+1-\frac{1}{7}=2-\frac{1}{7}$$

Nello stesso modo,

$$
\begin{aligned}
A\left(P_i \cup P_j \cup P_k\right) &= A\left(P_i \cup P_j\right) + A\left(P_k\right) - A\left(\left(P_i \cup P_j\right) \cap P_k\right) \\
&= A\left(P_i \cup P_j\right) + A\left(P_k\right) - A\left(\left(P_i \cap P_k\right) \cup \left(P_j \cap P_k\right)\right) \\
&\geqslant A\left(P_i \cup P_j\right) + A\left(P_k\right) - \left(A\left(P_i \cap P_j\right) + A\left(P_j \cap P_k\right)\right) \\
&> \left(2 - \frac{1}{7}\right) + 1 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right) \\
&= 3 - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7}\right)
\end{aligned}
$$

Procedendo nello stesso modo nei casi restanti, si verifica che:

$$
A\left(P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 \cup P_7\right) > 7 - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \ldots \frac{6}{7}\right) = 4
$$

Il che è assurdo, visto che per ipotesi il quadrato ha area 4 e tutti i poligoni sono contenuti nel quadrato.

Quindi è assurda la nostra ipotesi di partenza, e quindi almeno due poligoni si intersecano con un'area pari almeno a 1/7.

7. Paraphernalia Mathematica

Come direbbe un inglese, incredibile come, anche solo parlando del tempo, si possa giungere agli argomenti più inaspettati...

7.1 Comincia a fare caldo...

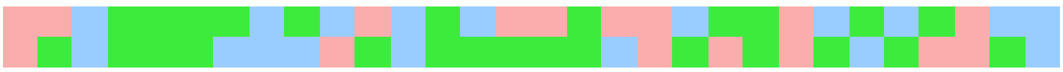
Rudy ha un ricordo (molto) lontano della sua prima infanzia, in casa di una vicina, una piccola casetta di ceramica appesa al muro, con due porte: da una parte, poteva uscire una bambina (era rosa, quindi...), mentre dall'altra poteva uscire un bambino (certo, azzurro). Alla richiesta di spiegazioni (indagatore sin da piccolo), gli fu chiarito che se la temperatura fosse aumentata sarebbe uscita la ragazzina, se fosse diminuita sarebbe uscito il ragazzino. In caso di temperatura stazionaria, entrambi sarebbero rimasti sull'uscio.

Sorvoliamo sulla precisione o chiaroveggenza dello strumento, che probabilmente era solo un termometro a molla; supponiamo sia in grado di fornire previsioni corrette almeno quanto un ufficio meteorologico; attenzione, abbiamo detto *corrette*, non *precise*: il Meteo può dirci che oggi la temperatura è 21° e domani sarà 23°, il che ci permette di sapere che non sarà 22° o 24°; i bambini, invece, non hanno questo grado di precisione, visto che la loro comunicazione della temperatura è un *codice a tre simboli*: o è fuori il ragazzino, o la ragazzina, o nessuno dei due.

Quindi, la misura dell'informazione trasmessa dipende dalla quantità di simboli a disposizione: nella misura della temperatura (facciamola semplice…) avete a disposizione un mucchio di simboli (diciamo da –90° a 57°[16]) per l'ufficio meteorologico, mentre solo tre per i bambini.

Ora, supponiamo di avere i nostri bambini ceramici in due luoghi diversi: quello che una volta chiamavamo il "Luogo da Cui" (la casa dei nonni di Rudy), e l'altro il "Luogo del Divano Quantistico" (la casa dei nonni della moglie di Rudy)[17]. Se avete seguito le nostre peripezie, sapete che il tempo nella prima è ragionevolmente mite, mentre la seconda fa concorrenza alle peggiori situazioni metereologiche mondiali.

Abbiamo due campionamenti dello stato dei bambini (rosa: fuori la bambina, azzurro: fuori il bambino, verde: indovinate un po'…); il primo è il LdDQ, il secondo il LdC:



Supponiamo di dover inviare le condizioni metereologiche dei due luoghi e, volendo risparmiare, di voler utilizzare la codifica più economica possibile. Visto che nel Luogo da Cui è più facile avere il "verde", stabiliamo per questo una codifica breve, mentre per gli altri due usiamo una codifica più lunga[18]: *Verde*=0, *Rosso*=10, *Blu*=11.

Usiamo il codice più corto per il colore più frequente, quindi il *numero medio di bit per simbolo*, facendo un po' di conti molto alla buona (...abbiamo 15 verdi, 7 rossi e 8 blu: ...facciamo 14-7-7, ossia ½, ¼, ¼, che il conto viene più semplice), risulta:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{3}{2}$$

Ossia, dal LdC "spendiamo" 3/2 di bit per ogni simbolo che trasmettiamo.

Nel LdDQ (11 verdi, 10 blu, 8 rossi… diciamo 1/3, 1/3, 1/3), invece:

$$\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{5}{3}$$

[16] Fonte: Wikipedia (en).

[17] Posto che non vi ricordiate le ragioni dei nomi, il primo deriva dalla frase "Il Luogo da Cui, con Ragionevoli Condizioni di Trasparenza Atmosferica e Lucidità Mentale, l'Intero Canavese è Rimirabile nella Sua Totalità. Il secondo (Luogo del Divano Quantistico), più semplicemente, dal fatto che ancora adesso ci chiediamo come abbia fatto un divano a passare attraverso una finestra più piccola di lui.

[18] Si chiama Codice di Fano. Ne abbiamo parlato in "Schiaccia, strizza e disidrata", RM142.

Ossia, "ci costa di più". O, se volete vederla dall'altro lato, nel LdC abbiamo una *compressione maggiore* dei dati senza perdere l'informazione.

In qualcuno di voi potrebbe nascere il sospetto che Rudy abbia barato (sì, ma non tanto): avrebbe potuto, ad esempio, scegliere una codifica più vantaggiosa per il LdDQ: i numeri sarebbero variati, ma *comunque sarebbero sempre serviti meno bit per trasmettere la sequenza del LdC*.

Rivediamo un attimo il processo. Noi:

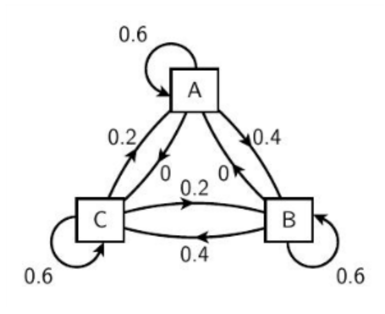
1. Raccogliamo i dati (bambino/bambina/nessuno).
2. Li codifichiamo in un qualche modo (0/10/01)
3. Li trasmettiamo su un canale (che potrebbe non essere perfetto)
4. Li decodifichiamo

In sostanza, a noi interessa avere il segnale di minima lunghezza possibile *sul punto* 3, che presumiamo costoso. Se registriamo il nostro "segnale" per un certo periodo di tempo, possiamo sviluppare una statistica per determinare quale possa essere la codifica migliore.

Va però considerato che alcune sequenze hanno maggior probabilità di presentarsi: dopo tre giorni di temperature crescenti, solo gli economisti si sentirebbero di scommettere su un trend continuativo, insomma, dipende da cosa è successo prima.

Matematicamente, situazioni di questo genere sono ***Catene di Markov***, e si applicano ad un mucchio di casi: dai nodi di cravatta alla costruzione di codici per trasmettere cose anche più serie, come possono essere lunghi testi: in modo più astratto, il sistema è in un determinato stato S, e la sua probabilità di generare un dato simbolo dipende da S.

Graficamente, la cosa è rappresentata di solito come nella figura a fianco: da un qualsiasi stato, A, B o C, avete una certa probabilità di passare ad un qualsiasi altro stato. Per alcuni cambi di stato la probabilità può essere zero, ma comunque viene considerata: l'assunzione ottimistica che sta a valle di tutto questo è che due messaggi *sufficientemente* lunghi abbiano le stesse caratteristiche statistiche[19], e quindi il nostro disegnino valga anche per processi diversi.



12 *Catena di Markov.*

Possiamo, allora, costruire una misura dell'informazione contenuta in un processo markoviano: supponiamo che al momento dato il nostro processo possa generare gli n simboli del linguaggio che stiamo utilizzando con probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$: quello che vogliamo fare[20] è trovare una funzione $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ che risponda ad alcune proprietà:

- H deve essere una funzione *continua* delle probabilità p_i.
- Siccome aggiungere simboli genera nuove scelte, ci aspettiamo che la nostra H aumenti: per fare un esempio facile, considerando un alfabeto di n simboli equiprobabili (ossia, $p_i=1/n$), ci aspettiamo che H aumenti all'aumentare di n.
- Se la scelta di un simbolo può essere spezzata in una serie di scelte successive, allora le diverse H delle scelte si sommano (opportunamente pesate).

L'ultimo punto può sembrare piuttosto balzano, ma ha una sua giustificazione: torniamo al nostro esempio meteorologico, supponiamo la temperatura possa, in prima istanza, cambiare o non cambiare equiprobabilmente. Quindi, ½ di probabilità che il tempo cambi e ½ di probabilità che non cambi. Se il tempo cambia, può, sempre equiprobabilmente, aumentare o diminuire. Il risultato finale è allora che abbiamo una probabilità ¼ che la temperatura aumenti, ¼ che diminuisca e ½ che resti uguale; passando alle H, in questo caso noi vogliamo che si comporti in questo modo:

[19] Se vi piacciono i paroloni, tutto questo si esprime dicendo che il processo deve essere ***ergodico***.

[20] O meglio, quello che voleva fare Claude Shannon: ormai, avrete capito che stiamo parlando di entropia dell'informazione.

$$H\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

dove il primo membro rappresenta la H dell'ultima riga del paragrafo precedente ("o sale, o scende, o resta uguale"), la prima H a secondo membro la prima scelta ("o cambia o non cambia") e la seconda H a secondo membro la seconda scelta ("se cambia, o sale o scende"): si noti che quest'ultima è *pesata*, appunto per il "se cambia" che introduce la nostra frase.

Comunque, le tre richieste che abbiamo visto prima ci portano a considerare H come un oggetto *moltiplicativo*: siccome nell'espressione qui sopra abbiamo invece un segno di somma, viene spontaneo pensare di utilizzare i logaritmi. Poiché gran parte del lavoro questi aggeggi lo fanno sui bit, per non sbagliare lavoriamo in base due:

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_i p_i \log_2 p_i$$

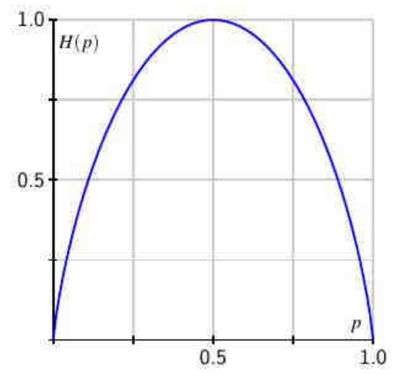
Dato che questa espressione somiglia tremendamente a quella che in termodinamica è l'entropia, Shannon ha deciso di chiamarla nello stesso modo. Se il segno meno davanti alla sommatoria vi genera dei dubbi, considerate che è sempre meglio trattare con quantità positive, e il logaritmo di una probabilità ha il pessimo difetto di essere sempre minore di zero.

Qualche esempio? Qualche esempio.

Se abbiamo una sorgente binaria, in grado di generare il simbolo 0 con probabilità p e il simbolo 1 con probabilità 1–p, la nostra entropia diventa:

$$H(p) = -\left(p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)\right)$$

che possiamo tabulare in funzione di p, come abbiamo fatto nella figura a fianco. La nostra curva ha alcune caratteristiche interessanti.



13 *Entropia.*

Tanto per cominciare, si vede che se p=0 (o se p=1), H vale zero: la cosa è abbastanza logica, visto che una sorgente che ripeta monotonamente lo stesso simbolo 11111… o 00000… non trasmette nessuna informazione: sapete con certezza quale sarà il prossimo simbolo.

Non solo, ma la funzione ha un massimo per l'equiprobabilità dei due simboli: anche questo è piuttosto logico, visto che qualsiasi catena vi sia arrivata, non siete in grado di determinare quale sia il simbolo più probabile che vi arriverà dopo.

Non sappiamo voi, ma a noi una formula con dentro un logaritmo genera sempre un po' di timore: il bello è che qui in molti casi servono a *semplificare* il ragionamento; vediamo un esempio classico (e ormai superato), attribuito appunto a Shannon.

Le vecchie telescriventi utilizza(va)no per mandare i messaggi il *codice Baudot*, formato da 32 caratteri; se li consideriamo tutti equiprobabili, abbiamo che l'entropia di una telescrivente è $\log_2 32 = 5$: e questo significa che vi servono 5 bit per trasmettere un simbolo[21]. Semplice, no?

Passiamo a qualcosa di più complesso, ad esempio le nostre previsioni del tempo. Se riprendete i calcoli (quelli approssimati) sulle frequenze di comparsa dei colori nel LdC e nel LdDQ, ottenete che:

[21] Posto che vi chiediate come mai le telescriventi a nastro perforato "facessero sette buchi", quello centrale (più piccolo) serviva a garantire l'avanzamento carta, e l'altro era un controllo di parità. Indovinate come mai il controllo di parità non viene considerato nella sorgente...

$$H_{LdC}=\frac{3}{2}=1.5$$
$$H_{LDQ}=\log_2 3\approx 1.58$$

E quindi, *un bit da LDQ trasporta più informazione di un bit da LdC* (certo, con il tempaccio che c'è sempre, spostare i bit è una cosa seria…).

Se passiamo a parlare del linguaggio umano la situazione diventa, come dicono gli inglesi, piuttosto *tricky***:** in prima approssimazione, considerando i ventisei caratteri dell'alfabeto come equiprobabili, ottenete $H = \log_2 26 \approx 4.70$, quindi vi servono più di 4 bit per simbolo di sicuro. Ma il linguaggio (italiano) *non* ha i simboli equiprobabili: ad esempio, dopo la "q", compare sempre la "u" (il primo che dice "soqquadro" lo mettiamo a soqquadro): facendo i conti su un campione "ragionevole" (non fate domande) di ricorrenze, risulta H=4.18. E quindi, dobbiamo di nuovo tirare in ballo le catene di Markov.

L'entropia di un processo markoviano si definisce considerando l'entropia pesata dei singoli stati e sommando: quindi otteniamo

$$H=\sum_i P_i H(S_i)$$

Dove P_i è la probabilità di essere nello stato S_i (in qualsiasi momento). Il ragionamento si può estendere, considerando catene di tre, quattro, cinque o più lettere. Il calcolo si complica, ma il succo è sempre quello: ogni nuovo ordine di approssimazione aumenta le restrizioni a "cosa possiamo ottenere", quindi rende sempre più semplici le ipotesi sul "prossimo simbolo", e quindi diminuisce l'entropia.

Questo ci porta a definire un ulteriore concetto, quello di ***ridondanza*** di una sorgente: man mano che diventa più semplice dedurre il prossimo simbolo, il trasmetterlo diventa sempre più inutile: sempre Shannon ha stimato che l'entropia della lingua inglese sia 2.3 bit per lettera, il che significa che, rispetto ai nostri calcoli (circa 5 bit/lettera), abbiamo una ridondanza di quasi il 50%. Nelle immortali parole di David Austin, "questa è una buona notizia per coloro che hanno letto solo metà di Moby Dick, posto che abbiano letto la giusta metà".

Se interpretiamo quindi l'entropia come la libertà che abbiamo nella creazione di un messaggio, possiamo trarre alcune interessanti deduzioni.

Tanto per cominciare, se il nostro alfabeto ha n simboli con le opportune probabilità, in un messaggio di N caratteri il carattere i-esimo apparirà (in media, all'incirca… su, non fate i pignoli) p_iN volte, e quindi la probabilità di ottenere un dato messaggio sarà, sempre approssimando,

$$p\approx\sum_{i=1}^{n} p_1^{p_1 N}$$

Notiamo che

$$\log_2 p\approx\sum_{i=1}^{n} p_i N \log_2 p_i=-NH$$

e quindi $p \approx 2^{-NH}$.

Questo significa due cose: tanto per cominciare, che la nostra probabilità di ottenere un dato messaggio è circa costante (...qualcuno ha detto "ergodico"? Bene, vuol dire che ha letto le note); inoltre, devono esserci 2^{NH} sequenze generabili, visto che un qualche messaggio comunque viene emesso e quindi la probabilità di un qualsiasi messaggio deve valere 1.

Supponiamo ora di avere una sorgente I (ad esempio un linguaggio) di entropia H; usando lo stesso alfabeto di n simboli, l'entropia massima ottenibile (attraverso una sorgente "caotica", con simboli equiprobabili) è $H_{max} = \log_2 n$, in grado di generare $n^N = 2^{NH_{max}}$ messaggi equiprobabili di lunghezza N. Tra questi messaggi, c'è un piccolo insieme di 2^{NH}

messaggi che sono quelli della nostra sorgente *I*. Quindi, se *r* è l'entropia di *I* rispetto all'entropia della sorgente caotica e *ρ* la sua ridondanza, la frazione di messaggi di *I* è:

$$\frac{2^{NH}}{n^n}=2^{N(H-H_{max})}=2^{-NH_{max}(1-r)}=\frac{1}{\left(n^N\right)^{1-r}}=\frac{1}{\left(n^N\right)^{\rho}}$$

Come detto prima, la ridondanza di un linguaggio è circa pari a ½; se prendiamo le 26 lettere dell'alfabeto e generiamo (casualmente) un messaggio di cento caratteri, la probabilità che questo abbia un significato è:

$$\frac{1}{\left(26^{100}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{26^{50}}\approx 1.8\cdot 10^{-71}$$

Adesso, se dico "scimmie" e "Amleto", dovreste poter andare avanti da soli.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms