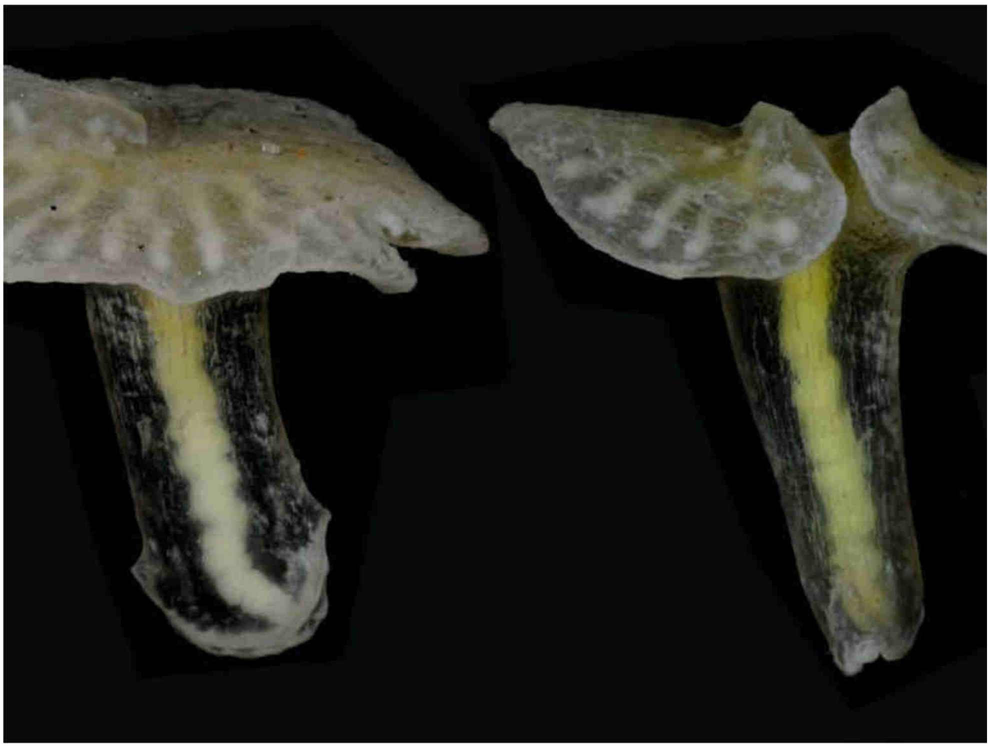
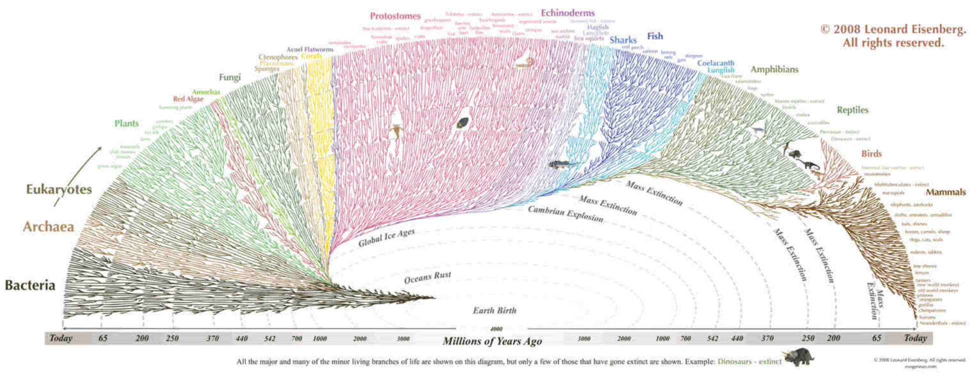
# Rudi Mathematici

*Rivista fondata nell'altro millennio*

Numero 265 – Febbraio 2021 – Anno Ventitreesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

***Rudi Mathematici***

Rivista fondata nell'altro millennio da

*Rudy d'Alembert* (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

*Piotr Rezierovic Silverbrahms* (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

*Alice Riddle* (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM263 ha diffuso 3'310 copie e il 26/01/2021 per Google eravamo in 34'200 pagine.



Il ***dendrogramma*** è un grafo ad albero, in copertina ne vedete un bellissimo esempio per l'evoluzione delle specie. Forse però non tutti sanno che è anche una specie solo recentemente classificata di rari e altrettanto meravigliosi invertebrati.

# 1. Quattro corde

*"La differenza tra una viola e un violino è che la viola brucia più a lungo."*
(Victor Borge).

È forse il brano musicale più suonato al mondo.

O forse no; l'affermazione è certamente troppo ardita, e non soltanto per le ovvie ragioni numeriche che impediscono di stabilire con ragionevole certezza quale possa essere il brano più eseguito, ma anche per ragioni essenzialmente semantiche, di pura definizione; quello a cui ci stiamo riferendo non può, oggettivamente, chiamarsi "brano musicale". Non ha sempre la stessa durata, né un tempo musicale definito, e – cosa davvero insolita per l'ambiente della musica colta – non è mai stato riportato su pentagramma e non è riconducibile a nessun autore. Soprattutto, non è mai composto dalle stesse note, che partono ribelli e indisciplinate, saltellano, si accavallano una sopra l'altra per un po', finché una (sempre la stessa), coglie un istante di silenzio e allora si alza nitida e solinga per poi crescere, crescere, fino ad essere trionfalmente condivisa da tutti gli strumenti dell'orchestra.

1 *Orchestra sinfonica*[1].

Non è un brano musicale, no; ma è indubbiamente musica. Ed è, in fondo, il vero inizio di ogni concerto o sinfonia, e non c'è spettatore che abbia avuto la ventura di assistere a qualche esibizione d'orchestra che non lo riconosca e lo accolga come un segnale speciale: un segnale d'inizio. Parliamo dei pochi secondi in cui i musicisti, dopo aver preso posto sul palco, controllano i loro strumenti suonando poche note; ognuno lo fa per conto suo, ma tutti contemporaneamente, nel breve intervallo di tempo prima dell'inizio dello spettacolo. Una serie di preparazioni singole e contemporanee, che diventano però subito un'accordatura corale, organizzata, quando dall'oboe parte finalmente il "la" di riferimento: su quella nota che si stacca nel silenzio tutti gli strumenti si uniscono, si aggregano e ricompongono, per poi tacere di colpo di fronte al comando del direttore sul podio.

È anche un atto rituale, elemento della ritualità connessa alle esibizioni delle orchestre sinfoniche: una successione formale di azioni che, come in ogni rito, ha lo scopo di mostrare al pubblico l'appartenenza dello spettacolo a una tradizione consolidata. Un'azione insomma canonicamente formalizzata, che però allo stesso tempo mantiene una valenza oggettiva, non di sola forma; al pari dell'ingresso delle luci che si abbassano nel foyer per invitare il pubblico a prendere posto, degli abiti eleganti dei professori d'orchestra, dell'ingresso del direttore e della stretta di mano tra questi e il primo violino.

[1] Wikipedia, alla voce "Orchestra Sinfonica", dice correttamente che è "*composta normalmente da più di 40 strumentisti e può a volte superare il centinaio di elementi*", quindi nella scelta di questa fotografia per rappresentare il concetto abbiamo esagerato un po'. Si tratta comunque di una significativa foto storica, scattata nel 1916 quando Leopold Stokowski (per intenderci: lo stesso direttore d'orchestra che si vede dialogare con Topolino in "*Fantasia*") riuscì a mettere insieme abbastanza musicisti per eseguire, per la prima volta in America, la Sinfonia numero 8 di Mahler. Si tratta di una partitura colossale che richiede un numero straordinariamente alto di strumentisti, tanto di essere stata soprannominata "*Sinfonia dei Mille*", anche se nelle prime esecuzioni in Europa il numero complessivo dei musicisti era ben lontano dal migliaio: un po' come quando chiamiamo "millepiedi" l'animaletto dotato di tante zampette. In quella première americana, però, l'esagerazione implicita nel soprannome scomparve del tutto, perché Stokowski riuscì ad allargare la sua Philadelphia Orchestra fino a coinvolgere la bellezza di 1050 professionisti.

Perché l'ordine degli ingressi sul palcoscenico rispetta e ricorda la rigida gerarchia dei protagonisti dello spettacolo, tant'è che nelle sinfonie l'ultimo a presentarsi al pubblico è il direttore d'orchestra, ma nei concerti propriamente detti[2] è il direttore – che ha già raccolto l'applauso di benvenuto del pubblico – a invitare il concertista a presentarsi sul centro della scena. Perché la stretta di mano tra il direttore d'orchestra e il primo violino (detto anche "la spalla") è ancora più significativa: se il direttore d'orchestra è indubbiamente il regista dello spettacolo, colui che decide in tutto e per tutto come debba essere interpretato lo spartito che sta per essere suonato e le cui istruzioni devono essere integralmente rispettate, il primo violino rappresenta tutta l'orchestra, che resta in fondo un'entità collettiva diversa dal direttore. La rituale stretta di mano sancisce e rinnova l'alleanza tra direttore e orchestra, ed è un'alleanza cruciale.

2 *Una disposizione standard dell'orchestra sinfonica.*

Il punto è che, per quanto possa sembrare strano a prima vista, il direttore resta un elemento estraneo all'orchestra; certo, ormai è d'uso che un teatro stabile conferisca a un direttore l'incarico di dirigere la sua orchestra per diversi anni, e di conseguenza la precisazione perde un po' di significato, ma in linea di principio il direttore ha il compito essenziale di interpretare lo spartito e decidere – con un lavoro certosino e continuo di ricerca, strumento per strumento, battuta per battuta – come questo debba essere eseguito; e finalmente istruire in merito ogni componente dell'orchestra. Quel che fa poi effettivamente sul palco, nel paio d'ore in cui agita la bacchetta, è solo la chiusura finale di un lavoro che richiede mesi di preparazione e anni di esperienza, un po' come i dieci secondi del centometrista alla finale delle olimpiadi; un battito di ciglia che per essere ben eseguito richiede una vita di allenamenti specifici.

Per contro, l'orchestra è composta da un centinaio di professionisti che, per poter eseguire a dovere il loro compito, passano un uguale numero di anni in esercizio, preparazione e faticoso studio continuo, perfezionando la loro tecnica, pur sapendo che ben pochi di essi riusciranno a diventare individualmente famosi. La gerarchia all'interno dell'orchestra è assai rigida, e normalmente riprodotta anche nella disposizione dei musicisti stessi, con i più esperti e affidabili più vicini al centro del palco, prossimi al podio del direttore, e i più giovani e meno esperti nelle file dietro[3]. A differenza del direttore, un'orchestra è un'entità collettiva, e come tutte le entità collettive sa benissimo che la caratteristica

[2] Una sinfonia non vede strumenti protagonisti e, anche se spesso contiene diversi "assoli", resta un'esecuzione corale di tutta l'orchestra; a parte qualche rara eccezione, è composta da quattro parti, dette "movimenti". Il "concerto" propriamente detto, invece (anche se il termine ha da tempo assunto anche il significato più ampio e generico di "spettacolo musicale") è composto da soli tre movimenti, e soprattutto prevede la presenza di uno strumento protagonista, suonato da un virtuoso che "dialoga" musicalmente con tutta l'orchestra.

[3] Per ogni gruppo di strumenti identici esiste un "primo musicista": primo violoncello, prima tromba, e così via; e naturalmente esistono anche gli ordinali successivi. Quando lo spartito richiede l'assolo di uno strumento è sempre il "primo" ad eseguirlo.

essenziale (e più importante) è proprio l'unità e la compattezza dell'insieme nel suo complesso. Gli archi sono gli strumenti più numerosi, e tra gli archi il ruolo maggiore è quello riservato ai violini: è quindi in un certo senso naturale che il ruolo di "rappresentante" dell'orchestra intera sia riservato al violinista più capace ed esperto, appunto il "primo violino".

Di fatto, il primo violino è il capo dell'orchestra; questo non significa che sia più importante del direttore, tutt'altro: ma è vero che in certi spettacoli tradizionali e ripetuti spesso dall'orchestra – e magari rappresentati sovente con la direzione di direttori d'orchestra "ospiti" che solo occasionalmente si trovano su quel podio – l'orchestra si può ritrovare più facilmente disposta a seguire i movimenti consolidati del primo violino che i comandi espliciti del direttore[4], o quantomeno a procedere serenamente nell'esecuzione anche in sua assenza. Il ruolo del primo violino è quindi davvero cruciale, e lo diventa ancor di più qualora sorgessero dei disaccordi tra l'orchestra e il direttore. Non è cosa che accada frequentemente, ma è significativo che sia prevista: l'orchestra, qualora giudicasse il direttore inadatto al compito prefissato, ha la possibilità di mettere in atto la "*protesta del maestro*", ovvero una sorta di ammutinamento istituzionalizzato tramite il quale ne chiede ufficialmente la sostituzione; e naturalmente di tale azione clamorosa dovrebbe farsi carico il primo violino.

3 *La "Madonna degli Aranci" di Gaudenzio Ferrari (1530), dove per la prima volta è rappresentato un violino (Vercelli, chiesa di San Silvestro).*

Nella stretta di mano tra direttore e primo violino c'è quindi una sorta di rinnovo del patto, ed è proprio in quest'atto che viene ritualizzato anche una sorta di salto di livello; quello in cui l'orchestra, formata da decine di strumenti e strumentisti, si trasforma in qualcosa di diverso: una sorta di "strumento unico" disposto a "lasciarsi suonare" dal direttore d'orchestra. Da punto di vista strettamente musicale, la stessa promessa viene ripetuta proprio da quel rincorrersi compulsivo delle note di accordatura iniziale: ogni musicista accorda il suo strumento, ma ad un cenno preciso del primo violino l'oboe[5] lancia il "la", e tutta l'orchestra lo segue. È il momento in cui i singoli strumenti cessano di esistere individualmente e si procede ad accordare il grande meta-strumento, l'orchestra intera.

Chi fosse alla ricerca di buone ragioni di orgoglio nazionalistico potrebbe facilmente trovare argomenti, frugando nella storia della musica. L'Italia vanta compositori grandissimi; certo, in quanto patria quasi assoluta del melodramma, i suoi maggiori compositori hanno frequentato più l'opera lirica che le forme puramente strumentali della

[4] L'esempio più famoso è il "Concerto di Capodanno" di Vienna, in cui il programma si ripete pressoché immutato ogni volta, e viene spesso diretto da celebri direttori invitati solo per l'occasione: voci di corridoio assicurano che, in occasioni come questa, l'eventuale assenza del direttore non sarebbe quasi notata, dal punto di vista dell'esecuzione. A proposito, le suddette "voci di corridoio" e buona parte delle informazioni sulla natura delle orchestre sinfoniche le abbiamo rubate a "*L'Undici*": http://www.lundici.it/2014/04/11-musicisti-dellorchestra/.

[5] La ragione per cui è proprio l'oboe a dare il "la" è che il suono dell'oboe è giudicato il più stabile, meno soggetto a oscillazioni: inoltre, conta anche la posizione – solitamente assai centrale rispetto al corpo dell'orchestra – in cui si trova, essendo per ciò ben udibile da tutti. Nel caso di concerti per pianoforte o altro strumento a tastiera, però, la nota di accordatura viene usualmente presa dal "la" dell'ottava centrale dello strumento solista stesso (e quasi sempre è il primo violino a suonarlo in favore d'orchestra). Sulla ragione per cui sia proprio il "la" la nota di riferimento, e sulle molte variazioni della frequenza giusta del "la" stesso (440, 442, 432, 420 Hertz, o altri valori ancora), il margine di questa nota a piè di pagina è decisamente troppo piccolo per contenerla a dovere.

sinfonia e del concerto, ma a ben vedere ci sono anche altre creazioni fondamentali, oltre alla pura composizione, delle quali occorrerebbe tener conto: e una di questa è, in fondo, l'orchestra stessa. Si tratta certo di un'iperbole, ma solo fino a un certo punto; lo strumento più caratteristico dell'orchestra è il violino, insieme agli strumenti confratelli della famiglia degli archi, e se è vero che primi strumenti che si possono in qualche modo considerare antenati del violino sono comparsi nella notte dei tempi, è innegabile che i primi violini, le prime viole e i primi violoncelli propriamente detti vedono la luce in Italia, e in Italia diventano la colonna vertebrale delle prime orchestre.

Così, non stupisce che l'italiano resti ancora la "lingua ufficiale" della musica: gli spartiti traboccano di una simbologia particolare e specifica fatta di pentagrammi, crome e semiminime, ma le poche parole di senso compiuto che vi trovano posto sono italiane anche nei fogli autografi di Mozart e Beethoven: "andante con moto", "presto", "adagio" e "allegro non troppo" sono termini che solo in Italia non hanno bisogno di traduzione. E il sogno di ogni violinista, quando pensa allo strumento perfetto, è coniugato attraverso cognomi italiani, quasi sempre originari di quella zona lombarda compresa tra Brescia e Cremona: Amati, Stradivari, Guarneri del Gesù, Gasparo da Salò, e altri ancora.


4 *Locandina de "Il Concerto", film del 2009 di Radu Mihăileanu.*

C'è una buona maniera per avvicinarsi alla musica sinfonica e allo straordinario potere del violino, per coloro che se ne sono tenuti sempre lontani: guardare il film "*Il Concerto*" di Radi Mihăileanu. È un buon modo perché il film è divertente e pienamente fruibile come pura commedia, e quindi molto godibile anche da una ipotetica persona allergica alle note musicali che decidesse di tapparsi le orecchie ogni volta che sullo schermo si vede uno strumento suonare. Per di più, è una commedia anche in grado di commuovere, come sono spesso le pellicole di Mihăileanu[6], e sono abbastanza rari i film in cui i due aspetti – comico e drammatico – sono ben coniugati insieme. Non vale la pena di accennare alla trama, anche perché è assai più divertente vederla svilupparsi sullo schermo senza indizi sullo sviluppo; se ne parliamo è perché il film ruota attorno all'esecuzione del Concerto per Violino e Orchestra in re maggiore (op. 35) di Pëtr Il'ič Čajkovskij[7]. Nel film, tra una risata e l'altra, si può capire bene l'importanza del dialogo tra l'orchestra e lo strumento solista, e – anche se certo in maniera assai romanzata e surreale – il ruolo del direttore d'orchestra. Soprattutto, si riesce ad ascoltare praticamente per intero il primo movimento del concerto ("andante con moto – moderato assai"), che è un buon test per confrontarsi con il potere struggente dei violini, sia come ossatura dell'orchestra che come strumento solista; è verosimile che se quel pezzo vi lascia indifferenti, il violino non faccia per voi. Per qualcun altro, invece, il violino voleva dire quasi tutto, visto che ne aveva fatto una professione; ma la vita è davvero strana e imprevedibile, al pari dei film di

[6] Il suo film più famoso è il premiatissimo (giustamente) "*Train de vie – Un treno per vivere*" del 1998, che riesce a divertire spudoratamente pur parlando di uno degli eventi più tragici della storia del Novecento. "*Il Concerto*" è palesemente realizzato con la stessa capacità di mescolare, con un tocco surreale, commedia e dramma.

[7] È un brano che sembra avere un certo appeal cinematografico: oltre ad essere il centro musicale de "*Il Concerto*", è anche protagonista di "*Un'adorabile infedele*" (1984) di Howard Zieff, con Dudley Moore e Nastassja Kinsky, nonché di "*Together*", film del 2002 di Chen Kaige.

Mihăileanu, e può capitare perfino che un violinista affermato e ormai non più giovanissimo decida improvvisamente di dedicarsi alla matematica.


5 *Alexandre-Théophile Vandermonde.*

Alexandre-Théophile Vandermonde nasce il 28 Febbraio 1735 a Parigi. È figlio di Jacques-François, un ottimo chirurgo di origini fiamminghe al servizio della Compagnia delle Indie francese, che per ragioni professionali visse per molti anni oltremare, tant'è vero che il suo primogenito, Charles, nasce a Macao nel 1727. La madre di Alexandre-Théophile è Jeanne Dailly, sposata dal nostro chirurgo esploratore nel 1733, dopo che questi, rimasto vedovo della sua prima moglie, fa ritorno in Francia. L'ambiente in cui cresce il piccolo Alexandre è di conseguenza tutt'altro che povero, sia di beni materiali che di spunti intellettuali: il fratellastro Charles segue le orme paterne diventando anch'egli dottore in medicina, e più tardi anche editore di prestigiose riviste scientifiche di medicina. Alexandre-Théophile invece segue gli studi di diritto, e si laurea in giurisprudenza nel 1757.

Sarebbe però eccessivo affermare che la carriera di avvocato sia vista da Alexandre-Théophile come il sogno della sua vita: non si hanno ricordi di sue attività connesse alla giurisprudenza, e la cosa è vieppiù strana se si considera che se c'è una cosa per cui il giovane Vandermonde dovrebbe essere ricordato è proprio la multiformità dei suoi interessi. A cercare di interpretare le sue scarse note biografiche, l'impressione che se ne ricava è quella di un giovanotto che, privo di pressanti bisogni materiali e dotato di una generica curiosità ad ampio spettro, trova piacere nell'interessarsi di argomenti diversi, dimostrandosi anche capace di introdurre novità originali in ogni campo, ma tutt'altro che ben disposto a limitare la variegata pletora dei suoi interessi.

Inizia come musicista: violinista – appunto – e con abbastanza successo da riuscirne a fare una professione. Si dedica al violino fin da giovane, e la famiglia asseconda volentieri l'interesse del piccolo di casa (tanto più, pensiamo, visto che comunque non ne risentivano i suoi studi universitari); si tratta comunque di una situazione familiare complessa, visto che il padre Jacques-François muore cinquantaquattrenne nel 1746, quando Alexandre-Théophile ha appena undici anni. È immaginabile che il ruolo di *pater familias* venga a quel punto preso dal fratellastro Charles che, seppur solo diciannovenne, ottiene il titolo di dottore in medicina appena due anni dopo il lutto, nel 1748. Se la scomparsa del padre può ragionevolmente definirsi precoce, a maggior ragione è tale proprio quella di Charles, che muore improvvisamente proprio alla vigilia delle sue nozze, nel 1762, ad appena 35 anni.

Non è facile immaginare come debba essere stato, per Alexandre-Théophile, ritrovarsi ancor giovane (appena ventisettenne) senza le due figure maschili di riferimento: non ha mai avuto intenzione di seguire le orme del padre e del fratello nella medicina, e quindi non sfrutterà il patrimonio culturale della famiglia; non ha mai avuto intenzione di mettere a frutto gli studi giuridici, e così continua la sua carriera da violinista, che però non è così brillante da soddisfare le sue ambizioni. Per fortuna, il patrimonio paterno, ora che è integralmente nelle sue mani, è così vasto e solido da evitare a lui e a sua madre qualsiasi preoccupazione finanziaria, e l'ultimo dei Vandermonde è libero di dare sfogo alle sue molteplici curiosità. È attratto da quasi ogni aspetto del mondo, e stringe amicizia con i maggiori esponenti del vivace mondo culturale parigino: tra i suoi migliori amici spiccano Diderot e D'Alembert, gli Enciclopedisti. Più in generale, Alexandre è proprio colto dal fervore illuministico e dall'incombente movimento che da lì a poco accenderà le micce della Rivoluzione Francese. Fervore che, peraltro, non ha mai avuto nei confronti della matematica; non abbiamo idea di come abbia vissuto, da adolescente, le lezioni di aritmetica e geometria che certo avrà dovuto studiare come ogni fanciullo delle famiglie abbienti, ma non c'è traccia di nessun interesse particolare verso la disciplina d'Euclide nella prima parte della sua vita; finché, nel 1770 – alla non più verde età di 35 anni – tra gli amici intellettuali che frequenta non incontra Fontaine des Bertins[8]. Comincia forse in questo frangente a manifestarsi la caratteristica più sorprendente di Alexandre-Théophile Vandermonde: la capacità fulminea di appassionarsi ad una disciplina, unita a una indubbia acutezza mentale che gli consente di coglierne in fretta gli aspetti fondamentali. Nello stesso anno, il fatidico 1770, Vandermonde inizia una sorta di corso serrato di formazione matematica tenutogli da Fontaine des Bertins, e prima che l'anno finisca è in grado di dare lettura al suo primo articolo per l'Accademia delle Scienze, la "*Mémoire sur la résolution des équations",* che riceve tanto successo tra gli accademici da consentirgli l'ingresso diretto all'*Académie Royale des Sciences*.


MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.* Par M. VANDERMONDE.

MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION*. Par M. VANDERMONDE.

REMARQUES SUR LES PROBLÈMES DE SITUATION. Par M. VANDERMONDE.

MÉMOIRE SUR DES IRRATIONNELLES DE DIFFÉRENS ORDRES AVEC UNE APPLICATION AU CERCLE. Par M. VANDERMONDE.

6 *Le quattro "corde" matematiche di Vandermonde.*

Nel giro di pochi mesi, alla prima memoria ne seguiranno altre tre, quasi a voler ribadire la somiglianza con le quattro corde del violino: la "*Mémoire sur l'élimination*", del gennaio 1771; la "*Remarques sur les problèmes de situation*", del maggio dello stesso anno; quindi la "*Mémoire sur les irrationnelles des différents ordres avec une application au cercle*" nel 1772. Nel dicembre del 1773 annuncerà all'Accademia una quinta memoria, su un sistema di equazioni alle differenze finite di più variabili, ma è una promessa che resterà non mantenuta. La carriera matematica di Alexandre-Théophile Vandermonde, iniziata nel 1770, non va oltre il 1772. La cosa forse più sorprendente – oltre al fatto che sia riuscito a padroneggiare matematica di levatura accademica in così poco tempo – è che ognuna delle quattro memorie apre, in qualche modo, nuovi orizzonti alle conoscenze del tempo: nella prima (oltre alla notevole introduzione di un simbolo apposito per il fattoriale, seppur diverso da quello usato attualmente) sviluppa un approccio all'algebra da far dire a Kronecker[9], più di un secolo dopo, che è con questo studio di Vandermonde che inizia davvero l'algebra moderna. Il secondo articolo potrebbe sembrare più adatto ad una rivista di matematica ricreativa che agli atti di una Accademia delle Scienze, visto che analizza i percorsi sulla scacchiera delle mosse del cavallo; eppure, anche in questo caso, l'approccio di Vandermonde è originale, e introduce concetti che in seguito saranno propri della topologia, come il concetto di nodo e di circuito. Con la terza, dedicata agli irrazionali, analizza principi di combinatoria e introduce principi di ricorrenza, oltre ad una formula che ancora oggi porta il suo nome.

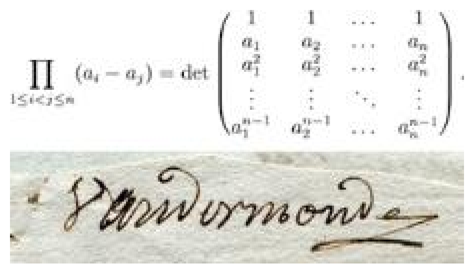
La quarta e ultima memoria è quella per cui è più ricordato, visto che eleva il concetto di determinante ad un livello mai considerato prima, di fatto introducendo una branca della matematica del tutto nuova, la teoria dei determinanti, che prima di lui erano utilizzati praticamente solo come strumenti di notazione grafica. Ciò non di meno è abbastanza curioso che il suo nome sia indissolubilmente legato ad un ben preciso tipo di determinante – il Determinante di Vandermonde, appunto, che ha oggi una pletora di applicazioni – che in realtà non compare mai esplicitamente nei suoi scritti. Sembra

[8] Alexis Fontaine des Bertins (1704-1771), matematico francese, membro dell'Accademia delle Scienze francese dal 1733.

[9] A Leopold Kronecker abbiamo dedicato il compleanno "Aramis", in RM239, Dicembre 2018.

verosimile l'ipotesi avanzata da Lebesgue[10], che l'errata attribuzione possa dipendere da un'errata interpretazione della notazione usata da Vandermonde nei suoi scritti. Certo è che, con l'impulso che ha dato alla teoria dei determinanti, l'errore di attribuzione sembra quasi una sorta di risarcimento da parte del destino.

Il fatto che non si sia più esplicitamente dedicato alla matematica non deve far pensare che Alexandre-Théophile abbia messo di studiare, di appassionarsi: tutt'altro. Sembra proprio che non riuscisse a restare troppo a lungo su una singola disciplina, su una sola attività. L'accademico Vandermonde trascura la matematica, ma per un po' sembra quasi voler tornare alla musica, proponendo nientemeno che una nuova teoria della musica, che comprendeva tutto un "nuovo sistema di armonie"; una teoria sorprendente, soprattutto perché, proprio nel periodo in cui si discuteva molto su come andasse matematicamente "temperata" la scala musicale, il matematico Vandermonde sostiene invece che i virtuosi debbano affidarsi essenzialmente solo al loro orecchio.




7 *Le due firme di Vandermonde: il Determinante e il suo autografo.*

Ma anche la musica non basta, e Alexandre passa alla meccanica e alla fisica, lavorando insieme a Berthollet e scrivendo memorie sulla lavorazione dell'acciaio; analizza gli studi sui problemi dell'innalzamento delle acque della Senna, e la meccanica dei mulini a vento. E poi ancora, si dedica anima e corpo alla rivoluzione, e nel 1793 diventa il Commissario dei Pesi e Misure, seppur quando la Commissione era ancora nella forma solo temporanea. Diventa amico di Gaspard Monge, e partecipa a molte missioni per la Convenzione, stendendo rapporti sulle fabbriche e il commercio di Lione, per non parlare dei suoi contributi alla fondazione dell'École Normale.

Soprattutto, studi recenti hanno rivelato un'intera serie di scritti di natura economica e finanziaria di Vandermonde che sono anticipatori delle moderne teorie economiche[11], al punto che sempre più spesso si vede la qualifica di "economista" attribuita ad Alexandre-Théophile, e che lascia sempre più attoniti i suoi biografi, che da una parte si stupiscono per l'incredibile capacità creativa in così tanti campi diversi, e dall'altra quasi si rammaricano che egli non abbia avuto la perseveranza di approfondire pienamente nessuno dei molteplici interessi. A noi, tutto sommato, Vandermonde risulta simpatico anche per questa sua poliedricità: e ci viene quasi in mente che, al pari di altri, sembra avere il destino degnato nel nome. Sappiamo bene che "*van der monde*" non significa nulla né in francese né in fiammingo, ma è innegabile che venga la tentazione di mescolare le lingue delle due nazioni per ottenere una sorta di significato bilingue, che potrebbe suonare come "del mondo". E se Alexandre-Théophile deve essere considerato davvero un "figlio del mondo", non poteva essere diverso da come è stato: anche i proverbi ricordano vigorosamente che la bellezza del mondo sta tutta nella sua varietà.

[10] Di Henri Léon Lebesgue parliamo in "Peccati originali", RM173, Giugno 2013.

[11] Si veda per esempio l'articolo di Jacqueline Hecht "*Un exemple de multidisciplinarité: Alexandre Vandermonde (1735-1796)*" (https://journals.openedition.org/sabix/2498) pubblicato nel numero 63/2019 del "Bulletin de la SABIX", che naturalmente abbiamo saccheggiato nella stesura di queste righe.

# 2. Problemi

## 2.1 Avanzi di Natale

Nel senso che "A Natale siamo tutti più buoni", e qui, anche se sembra un gioco piuttosto stupido, non c'è l'intenzione di vincere da parte del banco, tant'è che le sue operazioni sono assolutamente casuali.

Il banco sceglie due numeri casuali diversi tra loro (positivi, negativi, decimali... l'importante è che siano dei reali, sì, va bene anche pigreco), li mette uno per mano e quindi vi mostra le due mani chiuse: voi dovete sceglierne una.

A questo punto, il banco apre la mano che avete scelto e vi mostra il numero: voi potete "tenere il numero" o "cambiare mano". Il vostro scopo è quello di trovare *il numero più grande*: se è quello che avete scelto alla fine, il banco vi dice "Bravo", avete vinto e si passa al prossimo giro; altrimenti non vi dice niente e si passa al prossimo giro.

Ormai preda del demone del gioco, giocate *molte* partite di seguito; data la completa casualità dei due numeri, però, fare statistiche è assolutamente inutile: riuscite a trovare una strategia che vi dia una probabilità di vittoria maggiore del 50%?

Espansioni? Espansioni. Supponiamo abbiate trovato una strategia.

Se il banco vi promette solennemente che i numeri saranno compresi tra zero e dieci, come modificate la vostra strategia?

Ad un certo punto il banco, seccato dal fatto che vinciate un po' troppo spesso, vi propone di giocare a soldi. Lui sceglie due numeri, e si va avanti nello stesso modo: ogni volta che vincete il banco paga un euro, ma ogni volta che perdete voi pagate un euro *e un centesimo*. Cosa ne dite? Ricordatevi che avete trovato una strategia, quindi quel centesimo in più servirebbe a compensare il banco del fatto che vincete troppe volte.

Un'interessante variazione della prima espansione: il banco (cui è passata la seccatura e torna ad essere "neutrale") vi promette che i numeri saranno in un certo intervallo, ma *non vi dice l'intervallo*: sapete solo che sarà sempre lo stesso. Come la mettete, stavolta?

## 2.2 "Famolo strano"

Oltre ad una bellissima maglietta (con scritto "42"), Rudy per Natale ha ricevuto anche *Manifesto Cyborg*, di Donna Haraway; per sintetizzare trecento pagine in una riga, vengono contestate le dicotomie uomo/donna, colonialista/schiavo e umano/macchina, sostenendo che tra questi estremi esistono delle *nuances* (pun intended: vedi dopo). Il che, in seconda istanza[12], gli hanno ricordato un vecchio e simpatico problema.

Tanto per cominciare, vi servono dei camaleonti, di un tipo un po' speciale, visto che sono in grado di assumere *tre* colori (uno per volta e sempre gli stessi tre) e un'isola "tipo Galapagos", senza nessun mangiatore di camaleonti che venga a rovinarvi il problema.

Questi camaleonti hanno strane caratteristiche: tanto per cominciare, se due camaleonti sono dello stesso colore, non si accoppiano; se sono di colori diversi, essendo molto timidi, devono incontrarsi moltissime volte prima di procedere alla riproduzione. Durante questi incontri non fruttiferi, due camaleonti di colore diverso assumeranno istantaneamente entrambi il terzo colore (che ci sembra un modo molto gentile e immediato per dire "oggi no, ho mal di testa..."). Ogni camaleonte cambia colore solo in queste occasioni e mantiene il colore assunto sino al prossimo incontro. Inoltre, se i camaleonti sono dello stesso colore, si ignorano, e gli incontri sono possibili solo due alla volta.

Quello che ci chiediamo è se la specie sopravvivrà o se è condannata ad estinguersi, diventando monocolore.

[12] In prima istanza, quel polveroso anarchico di Rudy si è chiesto come mai non venisse sviluppata in questo senso anche la dicotomia padrone/operaio, riferita all'alienazione (in senso marxista) del lavoro. Ma questo non c'entra con il problema.

Abbiamo alcuni interessanti scenari da analizzare; non vorremmo togliervi la gioia di definire i colori a vostro completo arbitrio, quindi li chiamiamo Colore_1, Colore_2 e Colore_3:

| Colore_1 | Colore_2 | Colore_3 |
|---|---|---|
| 17 | 15 | 13 |
| 8 | 5 | 14 |
| 7 | 6 | 50 |
| 9 | 10 | 16 |

Oh, se vi stufate prima di farli tutti, potreste cercare una legge generale (che noi non abbiamo trovato)...

Seguirà dibattito su che colore assumano i figli alla nascita. Che ci pare la versione locale del "Vuoi più bene al papà o alla mamma?"…

## 3. Bungee Jumpers

I vertici di un tetraedro $T$ sono numerati come 1, 2, 3, 4; $T$ viene diviso in un numero (finito) di tetraedri $T_i$ più piccoli tali che due qualsiasi dei tetraedri più piccoli hanno:

una sola faccia in comune, o

un solo spigolo in comune, o

un solo vertice in comune, o

nessun punto in comune

("o" è inteso come "or *esclusivo*").

I vertici dei tetraedri $T_i$ vengono numerati come 1, 2, 3, 4 in modo arbitrario ma sotto le restrizioni:

- i vertici di un $T_i$ che appartengono ad una faccia $f$ di $T$ possono essere etichettati solo con i numeri ai vertici di $f$,
- i vertici di un $T_i$ che appartengono ad uno spigolo $e$ di $T$ possono essere etichettati solo con i numeri agli estremi di $e$.

Dimostrate che esiste almeno un tetraedro $T_i$ i cui vertici sono numerati 1, 2, 3, 4.

*La soluzione, a "Pagina 46"*

## 4. Soluzioni e Note

Febbraio!

Presto che è tardi.

### 4.1 [263]

#### 4.1.1 Prima o poi arriva aprile

Il mese scorso nessuna elaborazione di questo presunto pesce d'aprile, se non una breve risposta di ***Valter***:

> *Dati due punti materiali, il punto B fermo tra il punto A e il muro, e entrambi su una linea priva d'attrito; il punto A ha massa* $100^n$*, mentre B ha massa* 1*. A viene spinto verso B e contiamo gli urti.*
>
> *Se n*=0*, A urta B e si ferma; B urta il muro e torna indietro; indi, B urta A e si ferma, mentre A si perde nell'infinito. Totale,* 3 *collisioni.*
>
> *Se n*=1*, totale* 31 *collisioni.*
>
> *Se n*=5*, totale* 314159 *collisioni.*
>
> *Qual è la regola generale?*

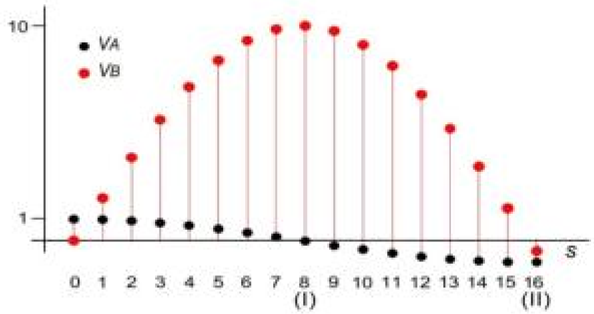
È per fortuna arrivato un chiarimento di ***trentatre***:

> Nel caso $n$, con $A$, $B$ di masse $m_A = 100^n$, $m_B = 1$, il numero di urti $k$ dipende da π.

Il problema sembra uno degli esercizi presenti nei trattati di meccanica. Ho provato a verificarlo con il caso più semplice – linea illimitata che parte da un muro, urti elastici, senza attriti o forze esterne.

Gli urti fra $A$ e $B$ sono numerati con $k = 2s - 1,\ s = 1, 2, 3, \ldots$, con $s = 0$ si intende lo stato iniziale; $k = 2s$ indica gli urti di $B$ con il muro.

Il diagramma riporta, al variare di $s$, le velocità $v_A, v_B$ (positive se dirette verso i muro) dopo ogni urto fra $A$ e $B$ nel caso $n = 1, m_A = 100$.




Sono indicati i punti

(I) $s = 8, k = 15$ dove $v_A$ diventa negativa

- da qui $A$ si allontana dal muro verso l'infinito
- dopo (I) $B$ continua a rimbalzare verso $A$ perché più veloce

(II) $s = 16, k = 31$ dove diventa negativa anche $v_B$

- da qui sia $A$ che $B$ vanno all'infinito, senza altri urti perché $B$ va più piano di $A$.

Applicando la teoria degli urti elastici ho trovato i valori di $s$

(I) $s = \left\lceil (\pi / 4)\sqrt{m_A} \right\rceil$ da cui per $m_A = 100^n$, $k = 2s - 1$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 1 | 15 | 157 | 1571 | 15707 | 157079 |

(II) $s = \left\lceil (\pi / 2)\sqrt{m_A} \right\rceil$ da cui

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 3 | 31 | 315 | 3141 | 3145 | 314159 |

- che sono i valori corretti (doppi dei precedenti).

Per mandare $A$ all'infinito basta arrivare a (I), ma invece è stato scelto (II) al termine di tutti gli urti.

Con $m_A, m_B$ : masse di $A$, $B$ ; $M = m_A + m_B$ : massa totale ; $v_A, v_B$ : velocità di $A$, $B$ (positive se dirette verso il muro)

- dopo un urto elastico fra $A$ e $B$ e il successivo di $B$ contro il muro, le nuove velocità sono

1) $v_A' = ((m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B) / M$ .
   $v_B' = (2m_A v_A + (m_B - m_A)v_B) / M$
2) $v_B' = -v_B$

Indico $m_A$ , che dipende dal caso $n$, con la variabile $F$ e scrivo

$(m_A, m_B) = (F, 1), M = F + 1$.

- le equazioni sono lineari e omogenee in $v_A, v_B$; $M$ modifica solo la scala delle velocità e i tempi del processo, e nei calcoli si può tralasciare.

In forma matriciale si ha

$$\begin{bmatrix} v_A' \\ v_B' \end{bmatrix} = H \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} F-1 & 2 \\ 2F & 1-F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F-1 & -2 \\ 2F & F-1 \end{bmatrix}$$

- $H$ combina i due urti 1), 2)
- sostituendo $v_A$ con $w_A = \sqrt{F} v_A$ si ottiene la forma simmetrica

$$\begin{bmatrix} w_A' \\ v_B' \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} w_A \\ v_B \end{bmatrix} \text{ con } K = \begin{bmatrix} F-1 & -2\sqrt{F} \\ 2\sqrt{F} & F-1 \end{bmatrix}$$

ponendo

$F-1 = z\cos\beta,\ 2\sqrt{F} = z\sin\beta$ da cui quadrando e dividendo

$z = 1+F = M$, $\tan\beta = 2\sqrt{F}/(F-1)$

la matrice diventa, tralasciando $z = M$

$$K = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

All'inizio siano $(v_A, v_B) = (1,0) \to (w_A, v_B) = (\sqrt{F}, 0)$

- tralasciando $M$, dopo l'urto $k = 2s-1$

$$\begin{bmatrix} w_A \\ v_B \end{bmatrix}_{2s-1} = K^s \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{F} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(s\beta) & -\sin(s\beta) \\ \sin(s\beta) & \cos(s\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{F} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ da cui}$$

$(w_A)_{2s-1} = \sqrt{F}\cos(s\beta) \to (v_A)_{2s-1} = \cos(s\beta)$.

$(v_B)_{2s-1} = \sqrt{F}\sin(s\beta)$

- la comparsa inaspettata delle sinusoidi è evidente nel diagramma.

$A$ si allontana dal muro se, dopo l'urto $k = 2s-1$, $v_A$ diventa negativa

$(v_A)_{2s-1} < 0 \to \cos(s\beta) < 0 \to s\beta > \pi/2$

- per $F$ grande, usando il primo termine di $\arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 \ldots$

$\beta = \arctan\left(2\sqrt{F}/(F-1)\right) \to 2\sqrt{F}/(F-1) \to 2/\sqrt{F}$

(nel caso $n=1$, l'errore su $\beta$ è 0.0006).

- quindi $s > (\pi/2)/\beta \to s > (\pi/4)\sqrt{F}$
- prendendo per $s$ l'intero superiore, il primo urto con $v_A$ negativa è

$s = \left\lceil (\pi/4)\sqrt{F} \right\rceil$ cioè la (I) con $F \equiv m_A$.

Con calcolo analogo $v_B$ diventa negativa per $\sin(s\beta) < 0 \to s\beta > \pi$

$s = \left\lceil (\pi/2)\sqrt{F} \right\rceil$ cioè la (II).

Ottimo lavoro, adesso Rudy può smettere di preoccuparsi.

### 4.1.2 Dalla Cisleuthania alla Transnistria

Un altro problema che ritorna:

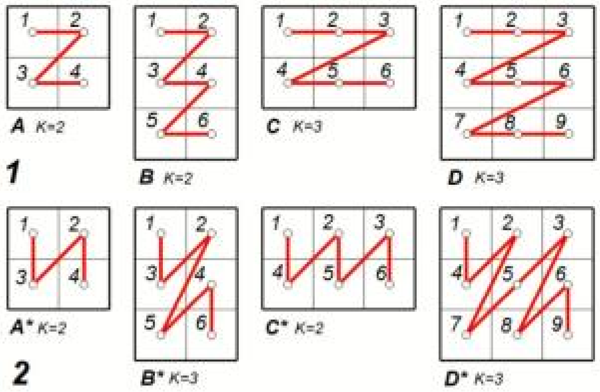
> *Dato l'atlante stradale di una nazione quadrata composto da cento pagine (griglia* 10×10*, ogni quadrato una pagina) è possibile costruire un atlante in modo tale che quadrati adiacenti siano in pagine adiacenti? Se no, qual è il valore cui non potrà*

*mai essere inferiore il valore della distanza massima tra due mappe adiacenti nella realtà, ma non nell'atlante?*

Il mese scorso abbiamo proposto la soluzione di ***Valter***, vi proponiamo ora un contributo di ***trentatre***, che scrive "*Ovviamente mi rimetto alla sorte. Come credo di avere già osservato nel secolo precedente, il povero lettore propone e la Trimurti decide.*" Beh, più che decidere (pubblichiamo quasi tutto quello che arriva in Redazione) facciamo un po' come possiamo, con i nostri tempi ed i nostri ritardi. Se avete dubbi, riscrivete e proponete ancora…. ma il bello di questo stupefacente commento in corsivo è che ***trentatre*** ci scriveva nel secolo precedente.

Con $N$: lato della griglia quadrata composta di $N^2$ mappe; $A$: atlante delle mappe disposte linearmente; $K$: massimo delle distanze minime in $A$ fra due mappe adiacenti nella griglia. Il problema è trovare $K$.

La risposta corretta $K$=$N$ è stata data da *Valter*. Aggiungo alcune osservazioni.




Nelle figure due varianti del percorso (in rosso) con cui sono allineate le mappe nell'atlante; in basso il valore $K$; si parte sempre da 2×2, aggiungendo prima una riga, poi una colonna, e si finisce in 3×3.

Due schemi sono equivalenti ($K$ non cambia) se trasformati per rotazione o simmetria.

Si nota che

- in tutti i casi il percorso è a zig-zag; in fig. 1 si tracciano le righe parallele a un lato e poi si congiungono gli estremi; in fig. 2 si tracciano le diagonali fra le mappe (come se la griglia fosse ruotata di 45°) e poi si congiungono

- $A$ e $A$* sono equivalenti

- nei rettangoli il valore minimo di $K$ si ha in $B$ e $C$* che sono equivalenti

- $D$ e $D$* sono due soluzioni diverse ma con lo stesso $K$

- proseguendo, nelle griglie quadrate (vedi $A$ e $D$) si ottiene $K$=$N$ per ogni $N$.

Nota – per rettangoli con lati maggiori di 2 (che non disegno) i percorsi tracciati nei due modi sono diversi, ma $K$ è sempre uguale al lato minore.

Riassumendo per ogni griglia, rettangolare o quadrata, con lati maggiori di 2, esistono due soluzioni diverse e $K$ è uguale al lato minore (ovviamente il lato nel quadrato).

Ho introdotto le mappe rettangolari per varie ragioni

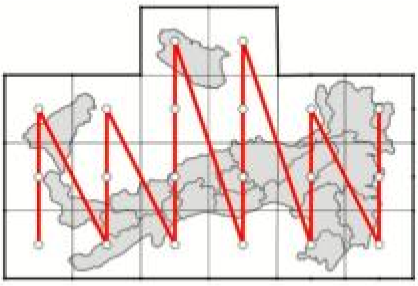
- la dimostrazione è più chiara

- per puro realismo; forzare un paese come l'Italia in una griglia 10×10 è uno spreco, ma non lo è per la Germania (paese come sappiamo molto più quadrato del nostro).

Trasformando il caso quadrato $N$=3 per rotazione o simmetria, nel caso 3×3 l'atlante si può ordinare secondo 8 permutazioni equivalenti

$D$ :123456789, 741852963
$D^*$:124357689, 362951847

e le stesse lette al contrario.



Per adattarsi alla situazione reale di un paese il perimetro della griglia può anche essere irregolare. In figura l'Italia in stato di riposo con 20 mappe e $K=4$. Che ovviamente è una sciocchezza ma mi sembra carina.

E su questo siamo d'accordo, peraltro lo stato di riposo è uno dei preferiti della maggior parte della Redazione.

## 4.2 [264]

### 4.2.1 Antiche tradizioni

Un giochino con le monetine per passare il tempo tra un brindisi e l'altro:

> *Dato un mucchio di* 2021 *(o x) monete ogni giocatore ha il diritto di prelevare, a sua scelta,* 2, 4 *o* 5 *monete; non si può saltare il turno e perde chi non riesce a muovere. Conviene giocare per primo o per secondo?*

Partiamo subito con la soluzione di ***Valter***:

> Vince chi inizia a giocare se l'anno non è ≡ 0 oppure non è ≡ 1 modulo 7, in caso contrario perde.
>
> Iniziando con l'anno 7 oppure 8, potendo prelevare solamente 2, 4 o 5 monete, non può che perdere. Si può verificare facilmente; così come, partendo da due a sei monete, si vince al primo prelievo.
>
> Se sul tavolo non c'è nessuna o, una sola moneta, cioè zero o uno modulo 7, il primo ha già perso. Per induzione si mostra che con 0 o 1 modulo 7, prendendo 2, 4 o 5 non si torna a tale situazione.
>
> Viceversa, da ogni altro valore modulo 7, si riesce a lasciare all'avversario tale configurazione.

Lineare, direi, vediamo che cosa ne dice ***Alberto R.***:

> Chiamiamo rossi i numeri del tipo 7K oppure 7K+1.
>
> Se il numero di partenza è rosso vince chi gioca per secondo, altrimenti vince chi gioca per primo. Ciò accade perché chi per primo lascia all'avversario un numero rosso può continuare a farlo sempre fino a vincere lasciargli uno 0 o un 1 che sono i più piccoli rossi. Infatti:
>
> - Non esiste una mossa lecita che trasformi un rosso in un altro rosso
> - Esiste sempre una mossa che trasforma un non-rosso in un rosso

Ci piace molto che i numeri siano colorati, e il concetto è lo stesso di quello di ***Valter***. ***Lorenzo*** è giunto alla stessa conclusione:

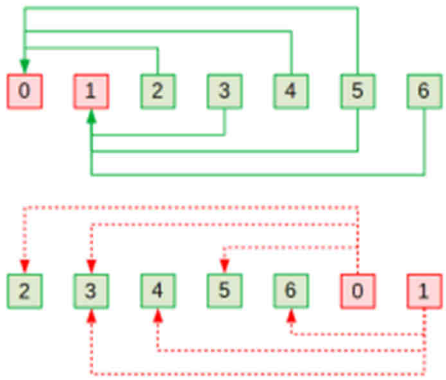
> Se sul tavolo non rimane alcuna moneta o ne resta una sola, vince chi ha fatto l'ultima presa; se rimangono da 2 a 6 monete, vince chi deve prendere: se le monete sul tavolo sono 2 o 3 ne prenderà 2, se sono 4 le prenderà tutte e 4, se sono 5 ne prenderà o 4 o 5, se sono 6 ne prenderà 5.

Poi questi casi si ripetono, con periodo 7: se sul tavolo rimangono 7 o 8 monete, chi deve prendere perde (poiché ne lascerà un numero compreso tra 2 e 6); se rimangono da 9 a 13 monete, vince chi deve prendere, e così via.

Poiché 2021 = 5 (modulo 7), a Rudy conviene giocare per primo, iniziando col prendere o 4 o 5 monete.

Anche ***Franco57*** si aggrega con un bel grafico degli stati possibili:

Il gioco è analizzato completamente dalla figura, dove gli stati rappresentano la classe modulo 7, cioè il resto della divisione per 7, del numero di monete rimaste sul tavolo.




Gli stati 2, 3, 4, 5, 6, rappresentati in verde, sono di vincita per chi muove da quella situazione e la freccia verde uscente mostra la mossa da fare (o le mosse da fare se ve ne è più d'una). Per non appesantire il diagramma non ho rappresentato le mosse sbagliate dagli stati vincenti, anche perché non concorrono alla determinazione della strategia ottimale.

Gli stati 0 e 1, rappresentati in rosso, sono di perdita e le frecce rosse tratteggiate sono le possibili mosse di 2, 4, o 5 monete da togliere, tutte quante che portano ovviamente a stati di vincita (per l'avversario) a parte il caso particolare di 0 (nessuna) moneta o 1 moneta, nel quale ovviamente chi dovrebbe giocare non può muovere e quindi ha perso.

Sulla freccia non ho segnato quante sono le monete da prelevare ma ben si capisce.

Per vedere che lo schema rappresenta effettivamente l'analisi del gioco basta effettuare delle semplici verifiche.

Una volta calcolato a inizio gioco il resto della divisione per 7 del numero di monete, il giocatore che ha la strategia vincete fa solo semplicissimi calcoli: quando sta a lui basta che tolga che tolga le monete necessarie per portare a 0 o 1 lo stato; quando gioca l'avversario deve aggiungere 7 allo stato e diminuirlo delle monete tolte dall'avversario.

Dallo stato 5, che poi è anche quello di 2021 monete poiché 2021 = 299 * 7 + 5, si può scegliere se portare l'avversario allo stato 0 togliendo 5 oppure allo stato 1 togliendo 4. A Rudy conviene quindi giocare per primo e addirittura può permettersi di concedere un illusorio vantaggio all'avversario facendogli scegliere una mossa che si impegna a non fare come apertura di partita.

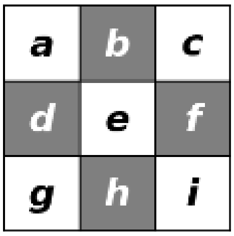
Benissimo, Rudy vince come sempre e l'ordine è ristabilito. Andiamo avanti.

### 4.2.2 ...e adesso, rimettete tutto in ordine!

Come avrete facilmente immaginato, i giochi con le monetine sono infiniti, soprattutto quando avete a che fare con il nostro Rudy:

*Dato un quadrato tre per tre, dove in ogni casella ci sono tre monetine, Rudy prende due monetine per volta, una da un mucchietto e una da un mucchietto di una casella adiacente. Esiste una strategia per minimizzare il numero delle monete rimaste, e qual è questo minimo?*

Cominciamo con un evento eccezionale: una soluzione di ***.mau.*** con disegno…

> Ci sono dodici monete sulle caselle grigie e ogni mossa toglie due monete su caselle di due colori diversi; quindi al più si possono togliere 24 monete. In effetti ci si arriva, togliendo tre coppie ab, tre coppie cf, tre coppie hi e tre coppie dg.
>
> 
> 
>
> Per la seconda parte, togliendo le tre coppie da ab, ef, gh otteniamo una configurazione dove non si possono più togliere monete.

Niente male, vero? Vediamo subito la versione di ***Valter***:

> Associo il quadrato tre per tre a una mini-scacchiera di cinque caselle nere e quattro bianche. Prendendo le due monetine da caselle adiacenti, ne viene elimina una per ognuno dei due colori. Da ogni casella bianca, ovviamente, se ne possono eliminare solo tre quindi, in totale, 3*4=12. Assieme ad esse ci sono pure dodici monetine dalle caselle nere adiacenti, per un totale di 24.
>
> Questo è il massimo di monetine che può prendere e, quindi, pure il minimo di quelle rimanenti.
>
> Ci sono vari modi per farlo; ne elenco solamente due, perché mi sembrano quelli più simmetrici (con <./.,./.> la coppia di riga/colonna):
>
> - tre da: <1/1,1/2>, <1/3,/2,3>, <3/3,3/2>, <3/1,2/1> (in questo modo, le tre monetine rimaste sul tavolo, sono tutte nella casella nera al centro)
>
> - due: <1/1,1/2>, <1/3,/2,3>, <3/3,3/2>, <3/1,2/1>; e una: <1/2,1/3>, <2/1,2/2>, <2/2,2/3>, <3/1,3/2> (così, in ogni casella nera della diagonale che parte da 1/1, rimane una monetina delle tre).
>
> Per quanto riguarda l'estensione:
>
> - tolgo tre monetine da: <1/1,2/1>, <2/2,3/2>, <1/3,2/3>; per un totale complessivo di 18
>
> - ne rimangono: tre nella sola casella bianca 1/2, e tre nelle due caselle nere 3/1 e 3/3
>
> - meno non è possibile poiché resterebbe, almeno, una riga o colonna da cui prenderne due.

L'idea della scacchiera è piaciuta a tutti, anche ***Alberto R.***:

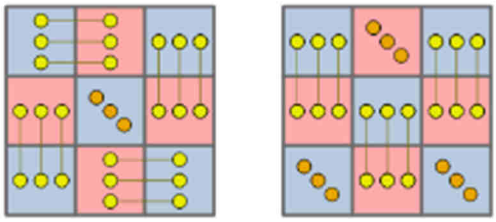
> È facile prendere tutte le monete delle caselle laterali lasciando solo le tre della casella centrale: basta "girarci intorno".
>
> E non si può fare di meglio perché se coloriamo a mo' di scacchiera: 5 caselle bianche e 4 nere, abbiamo 15 monete sul bianco e 12 sul nero, per cui, prelevando sempre una moneta dal bianco e una dal nero, ne avanzano 3 sul bianco.

***Lorenzo*** invece è andato per tentativi:

> In mancanza di idee migliori, si può procedere per esaurimento (sperando di non commettere errori)… Ispezionando il grafo delle transizioni tra tutti i possibili stati (modulo rotazioni e/o ribaltamenti), si vede che il minimo numero di monete che rimangono sul tavolo è 3, mentre il massimo è 9.

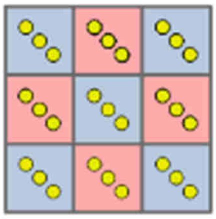
Non c'è niente di male ad andare per tentativi, ma è sempre bello vedere delle dimostrazioni, concludiamo quindi in bellezza con ***Franco57***:

> Con un po' di prove ci si rende conto che si riescono a minimizzare facilmente a 3 le monete rimaste e a massimizzarle a 9. Le due figure a fianco mostrano come si può fare, anche se sicuramente ci sono molte altre soluzioni.



Visto che non si riescono a migliorare questi risultati l'impressione netta è che 3 sia il minimo e 9 il massimo, ma dimostrarlo mi ha richiesto qualche astuzia.

Ecco come procedo. Prima di tutto osservo che possiamo distinguere le 9 caselle in 4 caselle "pari" che ho colorato di rosso e 5 caselle "dispari" che ho colorato di azzurro e che ogni mossa toglie sempre una moneta da una casella pari e una da una casella dispari.



Per dimostrare che 3 è il minimo, quindi che non possono essere fatte più 12 mosse (12 mosse tolgono 24 monete lasciandone 3) osserviamo che le caselle pari contengono esattamente 12 monete, quindi necessariamente con 12 mosse le togliamo tutte e non abbiamo più possibilità di fare altre mosse, perché qualsiasi altra mossa dovrebbe coinvolge anche una casella pari.

Per dimostrare che 9 è il massimo, quindi che non possono essere fatte meno di 9 mosse (9 mosse tolgono 18 monete lasciandone 9) supponiamo che siano state fatte 8 mosse o meno. Poiché le caselle pari contengono 12 monete, almeno in una di queste sarà rimasta almeno una moneta. Questa casella è adiacente a 3 caselle dispari, che in totale, a inizio partita, contenevano 9 monete. Ora poiché sono state fatte 8 mosse o meno, non tutte queste 9 monete possono essere state tolte, per cui siamo sicuri che esistono due caselle adiacenti ancora con una moneta. Quindi meno 9 mosse non sono possibili e ciò significa non possono essere lasciate più di 9 monete senza che non sia più possibile muovere.

Ci fermiamo qui, che febbraio è mese breve e speriamo di riuscire ad uscire prima di San Valentino... Alla prossima!

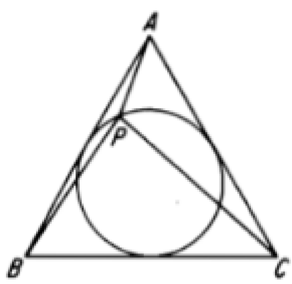
## 5. Quick & Dirty

Il triangolo ABC è equilatero, e il punto P è libero di muoversi sul cerchio inscritto. Dimostrare che la somma:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

è costante.

*Anche se sembra degno più di un Bungee Jumpers che di un Quick & Dirty, spesso le complicazioni portano a semplificazioni, come ha dimostrato Leo Moser con questo problema.*




## 6. Pagina 46

Affrontiamo il problema per induzione sulle dimensioni dello spazio: risolveremo prima l'equivalente problema monodimensionale, quindi estenderemo il metodo da questo ai casi bidimensionale e tridimensionale.

***Problema monodimensionale***: I punti finali di un segmento $S$ sono etichettati 1 e 2. $S$ è diviso in un numero finito di segmenti $S_i$, e gli estremi degli $S_i$ sono numerati in modo arbitrario. Mostrate che esiste almeno un segmento i cui estremi sono etichettati con numeri diversi.

***Dimostrazione***: un punto di divisione $A_j$ è detto *incidente* con il segmento $S_i$ se $A_j$ è un punto terminale di $S_i$. In questo caso diremo che la coppia ($A_j$, $S_i$) è una *coppia punto-segmento incidente*. Sostituiamo ad $A_j$ nella definizione di coppia il valore con il quale è stato etichettato il punto e contiamo il numero $n$ delle coppie incidenti (1, $S_i$); questo può essere fatto in due modi:

1. Se $n_1$ indica il numero di segmenti $S_i$ con un solo punto terminale 1 e $n_2$ il numero dei segmenti con due punti terminali 1, allora
$$n=n_1\cdot 1+n_2\cdot 2$$
2. Ogni punto 1, a parte per il punto terminale di $S$ etichettato 1, appartiene a due segmenti $S_i$. Quindi, se $n'$ è il numero di 1 in $S$, si ha:
$$n=(n'-1)\cdot 2+1$$

Combinando queste due espressioni, otteniamo:
$$n_1=2(n'-n_2)-1$$

Quindi, $n_1$ è un numero dispari quindi maggiore o uguale a 1; in altre parole, esiste almeno un segmento $S_i$ i cui estremi sono etichettati 1 e 2, che è la tesi.

***Problema bidimensionale***: I vertici di un triangolo $t$ sono etichettati 1, 2 e 3. Il triangolo viene diviso in un numero finito di triangoli più piccoli $t_i$ in modo tale che due qualsiasi triangoli $t_i$ hanno o nessun punto in comune, o un vertice in comune o un lato in comune. I vertici di $t_i$ sono etichettati 1, 2 o 3 sotto la restrizione che i vertici di $t_i$ che appartengono a un lato di $t$ con estremi $x$, $y$ devono avere una delle etichette $x$, $y$. Mostrare che esiste almeno un triangolo i cui vertici sono etichettati tutti con valori differenti.

***Dimostrazione***: un segmento $A_jB_k$ e un triangolo $t_i$ sono detti incidenti se $A_jB_k$ è un lato di $t_i$. Il numero $m$ delle coppie incidenti ([12], $t_i$), dove “1” e “2” sono le etichette rispettivamente di $A_j$ e $B_k$, può essere contato in due modi diversi:

1. Se $m_1$ è il numero dei triangoli $t_i$ con un lato [12] e $m_2$ il numero dei triangoli $t_i$ con due lati [12], allora:
$$m=m_1\cdot 1+m_2\cdot 2$$
2. Sia $m'$ il numero dei lati numerati [12] in tutti i triangoli $t_i$. Se $n_1$ di questi giacciono su un lato di $t$ con estremi “1” e “2”, allora i restanti $m'-n_1$ lati di tipo [12] sono all’interno di $t$. I primi appartengono ciascuno ad un $t_i$, i secondi a due $t_i$, e quindi:
$$m=n_1\cdot 1+(m'-n_1)\cdot 2$$

Combinando queste due espressioni, otteniamo:
$$m_1=2(m'-n_1-n_2)+n_1$$

Secondo quanto ricavato dal caso monodimensionale, $n_1$ è dispari, e quindi $m_1$ è dispari. Quindi esiste almeno un $t_i$ i cui vertici sono numerati con numeri diversi.

***Problema tridimensionale***: l’enunciato è il problema proposto *(Nel seguito, con “tetraedro”, salvo diversa specificazione, intenderemo uno dei piccoli tetraedri risultato della divisione del tetraedro originale).*

***Dimostrazione***: una faccia [123] di uno dei tetraedri e un tetraedro $T_i$ formano una coppia incidente se [123] è un faccia di $T_i$. Possiamo contare il numero delle coppie incidenti in due modi diversi:

1. Un tetraedro $T_i$ non può avere più di due facce etichettate [123]. Se $k_1$ è il numero dei tetraedri $T_i$ con una faccia etichettata [123] e $k_2$ il numero dei $T_i$ con due facce etichettate [123], allora:
$$k = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2$$
2. Sia $k'$ il numero delle facce dei tetraedri etichettate come [123]. Se $m_1$ di queste facce sono sulla faccia del tetraedro originale $T$ con etichettatura dei vertici [123], allora $k' - m_1$ facce sono all'interno di $T$. Le prime $m_1$ facce appartengono ciascuna ad un $T_i$ diverso, le restanti $k' - m_1$ appartengono ciascuna a due $T_i$ diversi. Da cui:
$$k = m_1 \cdot 1 + (k' - m_1) \cdot 2$$

Combinando le due equazioni, si ha:

$$k_1 = 2 \cdot (k' - m_1 - k_2) + m_1$$

Da quanto visto nel caso bidimensionale, $m_1$ è dispari, e quindi $k_1$ è dispari. Ossia, esiste almeno un tetraedro $T_i$ con i vertici etichettati 1, 2, 3, 4, che è la tesi.

# 7. Paraphernalia Mathematica

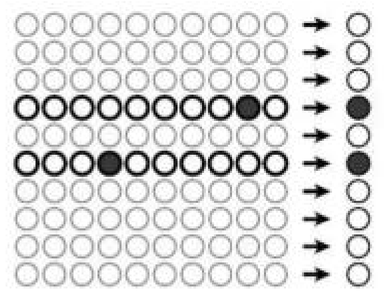
Come potrete facilmente dedurre dal titolo, continuiamo l'argomento del mese scorso, ma da un punto di vista leggermente diverso.

## 7.1 Il problema (del medico) di Mike

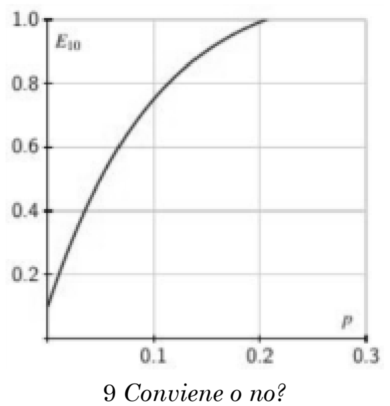
Il mese scorso, il nostro Mike aveva il problema di determinare con relativa certezza se fosse stato infettato dal CoViD-19 o no; e, per risolvere il problema, lo avevamo fatto passare attraverso una serie di test.

Questa volta vediamo quali sono i problemi dall'altro lato: i controlli sono lunghi da fare, e spesso sono merce pregiata; insomma, si vorrebbe trovare qualche metodo per risparmiare sia tempo che soldi, minimizzando il numero dei test necessari.

Un modo per raggiungere questo obiettivo era stato proposto nel 1943 da ***Robert Dorfman***[13]: combinando diversi test tra di loro (sostanzialmente, "mescolando i tamponi") in gruppi, diventa possibile risparmiare un numero notevole di tamponi.


8 *I pazienti e i test.*

Nella figura qui a fianco vedete un esempio: avendo cento pazienti da testare, li dividiamo in dieci gruppi da dieci persone ciascuna (parte sinistra della figura); mettiamo tutti i tamponi del gruppo nello stesso contenitore, e facciamo un unico test sul miscuglio ottenuto. I risultati sono sulla destra della figura, e vediamo che due test (il quarto e il sesto) risultano positivi. Sino a questo punto abbiamo effettuato dieci test e ora, avendo trovato due positivi, passiamo a fare il test a tutti e venti i singoli pazienti del quarto e sesto gruppo (...li avete tenuti i nomi, sì?), per un totale di trenta tamponi: dieci "di gruppo", più venti "singoli". Come tutti i metodi di ottimizzazione delle procedure, anche questo può presentare dei problemi: infatti, è fortemente dipendente dalla ***prevalenza*** $p$ dell'infezione, ossia di quanta gente sia infetta nel nostro campione; qui siamo dalle parti del 2%, ma se ci ritrovassimo una persona infetta per ogni gruppo di dieci, avremmo dieci risultati positivi durante la fase di test di gruppo; sareste quindi costretti a testare tutti i cento pazienti, per un totale di *centodieci* test: in questo caso, i test di gruppo sarebbero inutili!



9 *Conviene o no?*

Non è particolarmente complicato trovare il *valore atteso* del numero di test necessari per ogni persona: se organizziamo i nostri $k^2$ pazienti in $k$ sottogruppi di $k$ pazienti ciascuno, allora il numero atteso di test per persona risulta:

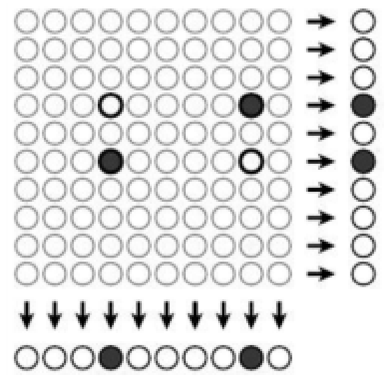
$$E_k = 1/k + (1 - (1 - p)^k)$$

Nel nostro caso particolare, con $k$=10, vediamo che il numero di test in funzione della prevalenza segue la logica del grafico qui di fianco; siccome il metodo di Dorfman ci permette di risparmiare test solo se ci aspettiamo di fare ***meno*** di un test per paziente, il momento nel quale non conviene più è quello per il quale $E_k$>1: si vede, che dalle parti di $p$=0.2 il nostro metodo diventa uno spreco di tempo e tamponi e diventa conveniente testare singolarmente tutti.

Stimando la prevalenza del CoViD-19 a $p$≈0.04, ci aspettiamo che il nostro metodo dia risultati buoni dal punto di vista del risparmio in tamponi.

[13] Storicamente, è stato utilizzato negli Stati Uniti nell'ambito della campagna contro la sifilide.

Tutto questo, in un mondo perfetto, quindi ben lontano dal nostro. Infatti, come abbiamo visto la volta scorsa, entrano in ballo due altri parametri, quelli della ***sensibilità*** e quello della ***specificità***[14]: il metodo di Dorfman riesce a ridurre il numero dei test al prezzo di ridurre la *sensibilità* del test: se la sensibilità di un test è un qualche valore $S_e$, questo metodo la porta a $S_e^2$. Quindi, se abbiamo una sensibilità del 95%, nel metodo di Dorfman dovremo considerarla dalle parti del 90%. Il che, come abbiamo visto, non è bello: comunque, la buona notizia è che aumentate la specificità; infatti se avete una specificità (e una sensibilità) del 95%, con una prevalenza dalle parti dell'1% avete un incremento della specificità sino al 99%.

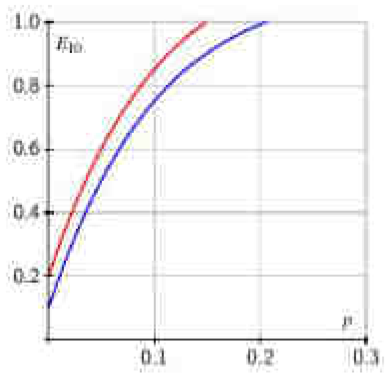


10 *Il "doppio Dorfman".*

A questo punto, a qualcuno di voi sarà venuto in mente un metodo piuttosto semplice per risparmiare tamponi: se facciamo un secondo "Giro di Dorfman", dovremmo riuscire (sempre nel mondo perfetto e teorico e con lo stesso esempio di prima) ad individuare tutti gli infetti con solo *ventiquattro* tamponi, come mostrato nella figura qui di fianco. Dieci tamponi "sulle righe", dieci tamponi "sulle colonne", e poi testate singolarmente i quattro pazienti (quelli a tondo pieno e quelli a tondo rinforzato) che si trovano all'incrocio tra i test positivi.

Qui, il calcolo del valore atteso di test per individuo nelle stesse condizioni del caso precedente (ivi incluse sensibilità e specificità al 100%) è un po' più complesso da calcolare, ma si arriva a:

$$E_k = 2/k + p + (1-p)(1-(1-p)^k)$$




11 *Doppio o singolo?*

Se tabuliamo questa formula congiuntamente alla precedente per poterle confrontare sempre per $p$, otteniamo i grafici della figura qui di fianco: in rosso vediamo il metodo "doppio", mentre in blu abbiamo la curva ottenuta precedentemente.

Può sembrare contro-intuitivo il fatto che la curva rossa implichi *più test* del metodo singolo, ma dovete considerare che nel "doppio", nella prima fase fate ***il doppio*** di test rispetto al "singolo", e quelli dovete farli obbligatoriamente.

Ma arrivano, dall'altro lato, anche le buone notizie: per mancare l'identificazione di un paziente infetto, qui dobbiamo avere *due* test che danno un risultato sbagliato; quindi, la sensibilità della strategia del doppio Dorfman è molto maggiore rispetto a quella del singolo, e ci fornisce risultati più precisi. Non solo, ma se la prevalenza è bassa, riusciamo comunque a diminuire il numero totale dei test.

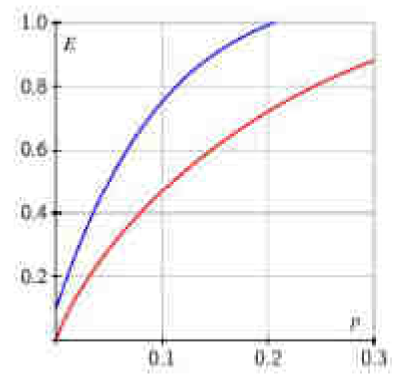
Cerchiamo adesso di esplorare quali possano essere i limiti teorici dei nostri metodi: qui, l'idea geniale l'hanno avuta ***Sobel*** e ***Groll***.

Prendendo a prestito qualche concetto dalla Teoria dell'Informazione, possiamo considerare una sequenza di risultati dei test come una ***sorgente di segnali*** avente ***entropia*** pari a:

$$I(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p)$$

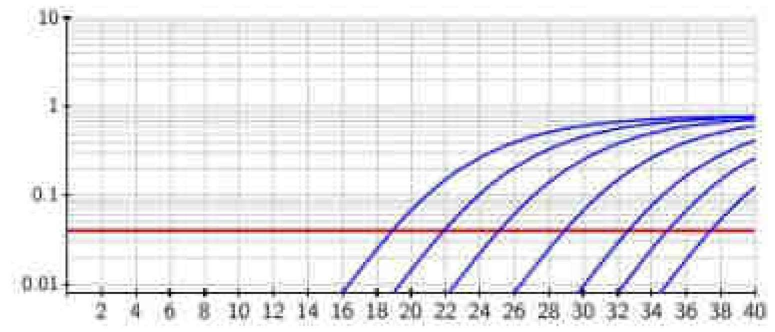
[14] ...siccome siamo certi che non andrete a ripassare, vi ricordiamo che la sensibilità definisce il comportamento del nostro test nei confronti delle persone che sono infette: un test ad alta sensibilità individuerà quasi tutte le persone infette, lasciandone sfuggire solo un piccolo numero (i "falsi negativi"), mentre la specificità, al contrario, al contrario, definisce il comportamento del nostro test nei confronti delle persone che non sono infette: un test ad alta specificità fornirà un risultato negativo per quasi tutte le persone non infette, scambiandone molto poche per positive (i "falsi positivi").

In questa ottica, una strategia di campionamento come i nostri due metodi significa applicare una ***codifica di sorgente*** per ***comprimere*** l'informazione generata. Questo significa che per quanto riguarda il nostro numero di test attesi per paziente ogni metodo efficace deve avere $E \geq I(p)$; quanti di voi hanno resistito alla tentazione di tabulare l'entropia confrontandola con il metodo (singolo) di Dorfman, possono vedere il risultato qui di fianco (l'entropia è in rosso).



12 *Meglio di così non si fa.*

Se vi fidate della nostra parola (non abbiamo trovato ulteriori dettagli), ***Ungar*** ha dimostrato che quando la prevalenza ha un valore $p \geq (3-\sqrt{5})/2$ (circa il 38%), allora qualsiasi metodo è meno efficiente del test di tutti i pazienti; quello che ci pare particolarmente intrigante è la comparsa di quella radice di cinque: ci sarà qualche parentela con la sezione aurea?



13 *Amplificazione.*

Passiamo un attimo alla biologia. Oggi come oggi, il metodo migliore di test, considerato come lo standard, è il cosiddetto RT-qPCR[15]: detto molto in soldoni, si effettua una riproduzione della catena di RNA nel suo DNA complementare; poi si dividono le due catene e si costruisce la catena corrispondente di ciascuna, per poi ricominciare da capo. In pratica, dopo ogni giro raddoppiate (o, come si dice in gergo, *amplificate*) il numero delle catene di DNA generate da un RNA che potrebbe essere virale; se lo è, mostra fluorescenza, che è funzione del numero di amplificazioni che abbiamo effettuato; in pratica, se mettete sulle ordinate la fluorescenza (attenti che quella è una scala logaritmica) e sulle ascisse il numero di amplificazioni, ottenete un grafico del tipo di quello qui di fianco: la linea rossa è il limite stabilito dalla Food & Drug Administration americana per decidere se il test è positivo o no. "...e perché ti sei fermato a 40?" Per il semplice motivo che oltre si ha un rumore di fondo che rede i dati inutili: non lamentatevi, vi bastano una decina di frammenti di RNA per avere una reazione positiva. Comunque, per ragioni di prudenza di solito si sta sotto le 32 amplificazioni.

I metodi di Dorfman (e le sue varianti, ne esistono) sono noti come ***metodi adattativi***: il che, dovrebbe farvi pensare che esistano anche ***metodi non-adattativi***. Nel caso, avete ragione. Ne esistono alcuni, derivanti tutti più o meno dallo stesso background: è nostra intenzione analizzarne nel dettaglio uno noto come ***metodo dell'arazzo*** (*Tapestry Method*, se preferite l'inglese).

Partiamo dai campioni raccolti su $N$ individui avente ciascuno carica virale $x_j$ e raggruppiamoli in $T$ gruppi (per ora non preoccupiamoci del metodo, la teniamo come sorpresa per dopo); in pratica otteniamo una matrice di raggruppamento $A_{i,j}$ per cui se il $j$-esimo individuo è presente nell'$i$-esimo gruppo avremo $a_{i,j}=1$, altrimenti varrà 0.

La carica virale nell'$i$-esimo test sarà allora:

[15] Per i curiosi: Reverse Transcription – Quantitative Polymerase Chain Reaction.

$$y_i = \sum_j a_{i,j} x_j$$

e questa possiamo misurarla attraverso il test RT-qPCR (ignoriamo le imprecisioni di misura che potrebbero nascere).

Possiamo esprimere le $T$ equazioni risultanti sotto la forma (vettoriale!) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$, dove $\boldsymbol{y}$ è il vettore delle misure, $\boldsymbol{A}$ è la matrice ($T\times N$) dei raggruppamenti e $\boldsymbol{x}$ sono le incognite cariche virali di ogni singolo paziente.

Piccolo problema: $T<N$ (ci sono meno gruppi che pazienti), quindi al nostro sistema manca qualche equazione, per essere risolto con i metodi usuali.

Fortunatamente, ci viene in aiuto la realtà: se supponiamo una $p$ (la nostra prevalenza) bassa, potremmo supporre che il nostro vettore $\boldsymbol{x}$ abbia molti valori a zero ossia, come si dice in gergo, che sia ***sparso***. E questo è esattamente quello che ci salva. Ma prima un po' di teoria.

Definiamo come 0-norma il numero degli elementi diversi da zero del vettore $\boldsymbol{x}$, e indichiamola con $\|\boldsymbol{x}\|_0$; la 1-norma è invece definita come:

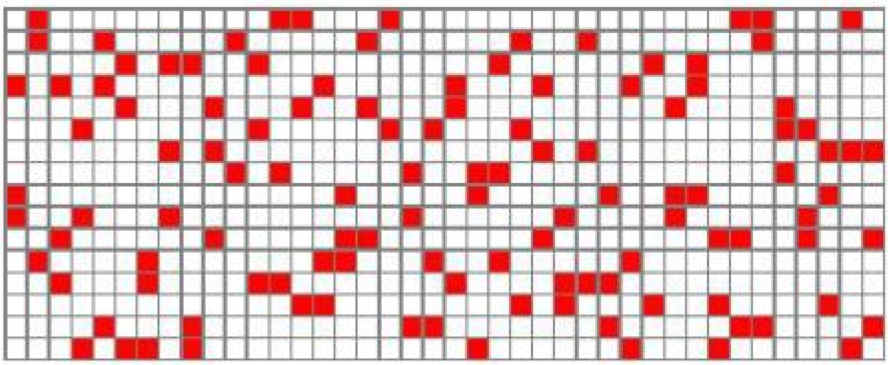
$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_j |x_j|$$

e la 2-norma è l'usuale norma euclidea; il fatto che il nostro vettore sia sparso implica che $\|\boldsymbol{x}\|_0$ sia piccola; con alcuni calcoli piuttosto complessi e noiosi (chiedete, se interessano), si vede che diventa possibile trovare una soluzione trovando il ***minimo della 1-norma di x sotto la condizione y=Ax***. E a questo punto posiamo risolvere il sistema.

Il problema resta quello di trovare una matrice di raggruppamento $\boldsymbol{A}$ che ci fornisca una 0-norma piccola, per avere un $\boldsymbol{x}$ sparso. Ma, per aumentare la *suspence*, prima un veloce (e classico) problemino di matematica ricreativa:

> *Sette educande hanno il permesso di recarsi in paese solo a gruppi di tre; ognuna delle educande deve, nell'arco del tempo considerato, uscire in compagnia di tutte le altre educande.*

Non "ricorda qualcosa"? Ad esempio, una matrice di raggruppamento? E, dovreste ricordare, la soluzione generale avviene attraverso le ***triplette di Steiner***. Un esempio del risultato che potreste ottenere tornando ai nostri test e applicando lo stesso metodo è indicato qui di seguito:



Questo aggeggio vi permette di testare *quaranta* persone (le colonne) con *sedici* test (le righe), e di individuare velocemente gli eventuali contagiati, considerato che ogni campione compare in tre test (le celle rosse per ogni colonna), e due campioni qualsiasi appaiono assieme in un qualche test, proprio come le educande!

Se si ammette che le colonne della nostra matrice non siano "pienamente ortogonali" e con qualche trucco basato sul fatto che particolari pazienti compaiano in gruppi di test sempre negativi (e che siano quindi sicuramente negativi), ci permette di lavorare anche con matrici più grosse, quali 4×105 o 93×961. Qui però è necessario che le prevalenze siano minori, rispettivamente, del 5% e dell'1%.

Già, la prevalenza… è sempre una *stima*, in fin dei conti… Il bello del metodo dell'arazzo sta proprio qui: se la prevalenza è troppo alta, il metodo "schianta" e non riesce a risolvere il sistema. Quindi, sapete anche quando non è il caso di usarlo.

Qualcuno è riuscito a mettere in piedi una app (Android) che calcola le matrici dei raggruppamenti; quindi, se l'infermiere dopo avervi infilato il palo del tampone nel naso comincia a scribacchiare furiosamente sullo smartphone, tranquilli: non sta raccontando su Twitter di quanto siete buffi.

*Rudy d'Alembert*
*Alice Riddle*
*Piotr R. Silverbrahms*