





Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 250 – Novembre 2019 – Anno Ventunesimo



1. Il suono del sale	3
2. Problemi	11
2.1 Novembre, finalmente!	11
2.2 Un albero cresce a Brooklin.....	11
3. Bungee Jumpers	12
4. Soluzioni e Note	12
4.1 [247].....	12
4.1.1 Divagazione.....	12
4.2 [248].....	14
4.2.1 ... in che anno siamo?	14
4.3 [249].....	15
4.3.1 Torna la capretta (con delle amiche)!	15
4.3.2 Abboffata di (metà) caramelle.....	33
5. Quick & Dirty	34
6. Pagina 46	35
7. Paraphernalia Mathematica	36
7.1 “Puro e disposto a salir le stelle” - [1] - Che ore sono?	36

	<i>Rudi Mathematici</i> Rivista fondata nell'altro millennio da <i>Rudy d'Alembert</i> (A.d.S., G.C., B.S) rudy.dalembert@rudimathematici.com <i>Piotr Rezierovic Silverbrahms</i> (Doc) piotr.silverbrahms@rudimathematici.com <i>Alice Riddle</i> (Treccia) alice.riddle@rudimathematici.com
	www.rudimathematici.com RM248 ha diffuso 3'303 copie e il 17/11/2019 per  eravamo in 11'600 pagine.
Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto <i>concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione</i> alle condizioni indicate alla pagina diraut.html del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per <u>dare</u> le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.	

La nona serie di banconote svizzere è stata messa in circolazione tra il 2016 e il 2019, ed è finalmente completa. La Redazione di RM ha giocato a scoprire i molti dettagli scientifici nascosti e non, incluse le proporzioni, ma la risposta ad ogni domanda si trova sul sito ufficiale della Banca Nazionale Svizzera (<https://www.snb.ch/>).

1. Il suono del sale

*“È difficile capire quale fecondissimo
genio abbia l’Austria in quest’uomo”
(Bernard Bolzano)*

Nel febbraio del 2013 la prestigiosa rivista *Nature* pubblica un articolo a firma di Marios Chatzigeorgiou, Sangsu Bang, Sun Wook Hwang e William Schafer intitolato “*tmc-1 encodes a sodium-sensitive channel required for salt chemosensation in C. elegans*”¹. Il solo fatto di essere pubblicato su *Nature* offre all’articolo un indiscutibile grado di importanza, come fanno tutti i ricercatori che, probabilmente senza eccezione, aspirano a vedere un proprio lavoro pubblicato sull’augusta rivista. Per il resto, non ci risulta che l’articolo in sé sia classificabile come rivoluzionario o sensazionale: giornali e televisioni non si sono affrettati a parlarne, non è diventato argomento di discussione al bar tra la gente comune, anche se indubbiamente avrà avuto la sua rimarchevole risonanza tra gli studiosi delle scienze della vita. Un ordinario lavoro di ottima ricerca, insomma, destinato essenzialmente agli addetti ai lavori.

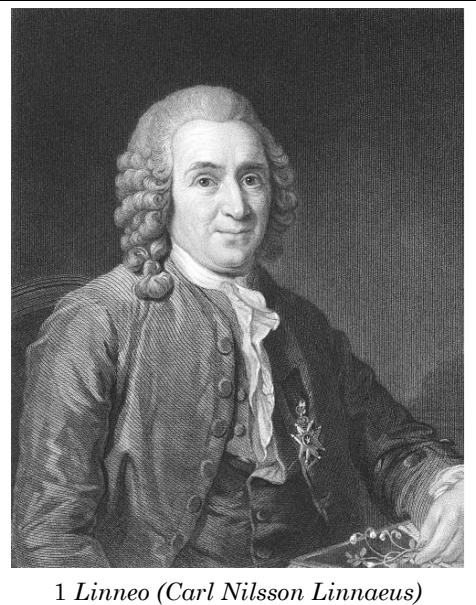
A proposito di addetti ai lavori: è alquanto sorprendente misurare a colpo d’occhio – praticamente anche solo soffermandosi sulle poche parole del titolo – la sovrumana ignoranza di chi (come chi scrive, ovviamente) addetto ai lavori non è. Questione di terminologia, certo: è verosimile che la stessa cosa succeda in ogni campo della ricerca, perché il linguaggio è strumento indispensabile in ogni attività umana, e ogni disciplina – più o meno consapevolmente – procede nella creazione e sviluppo di una sorta di “linguaggio tecnico”, che diventa presto una sorta di tessera di riconoscimento tra coloro che si interessano del medesimo campo di studio. Non che la matematica faccia eccezione, anzi: pescando del tutto a caso un titolo d’una recente memoria matematica troviamo subito “*Stabilità per la disuguaglianza GNS e la disuguaglianza Log-HLS con applicazioni all’equazione di massa critica Keller–Segel*”². Un dilettante di matematica riconosce almeno qualche termine familiare (equazione, disuguaglianza, massa) nel titolo del pezzo di Carlen-Figalli, mentre nel titolo di quello dei quattro biologi riesce a malapena ad individuare gli articoli e le congiunzioni; e ci si può ragionevolmente aspettare un risultato analogo, benché diametralmente opposto, nel caso che l’avventuroso lettore sia un dilettante di biologia molecolare.

È probabile che la prima cosa che colpisce, nel titolo dell’articolo di *Nature*, sia proprio quell’iniziale “*tmc-1*”; non tanto perché le stringhe composte solo da consonanti e numeri risultino facilmente sconosciute – del resto, è nella loro natura di sigle – quanto perché quel *tmc-1* resiste indefesso anche alla universale regola tipografica che impone che la prima lettera di un periodo, tanto più di un titolo, sia nobilitata dal maiuscolo; invece, *nisba*. La cosa risulta poi tanto più sorprendente quando, scorrendo da profani assoluti le prime righe dell’articolo, la medesima sigla la si incontra interamente in maiuscolo, così: *TMC-1*. Ce n’è insomma abbastanza per ipotizzare qualcosa di ben diverso da trascurabili errori tipografici: maiuscolo e minuscolo portano evidentemente significato, ed è sufficiente una velocissima ricerca in rete per appurare che è proprio così. I geni umani sono convenzionalmente riportati nei testi in maiuscolo, mentre i geni corrispondenti di altre specie devono accontentarsi delle lettere minuscole. Non c’è che dire, non si finisce mai d’imparare, perfino (e letteralmente) dalla prima parola di un titolo. I biologi, del resto, hanno, fin dall’inizio della loro storia, messo in pratica una particolare attenzione alle maiuscole e minuscole: ad esempio, poche cose li fanno arrabbiare più dell’incocciare, in un articolo di giornale (o in un testo qualsiasi), in una scritta tipo “Homo Sapiens”. Si

¹ Se siete curiosi, trovate tutto qua: <https://www.nature.com/articles/nature11845>.

² Nell’improbabile caso che vi interessi davvero, quel che abbiamo pescato è, più precisamente: Eric A. Carlen, Alessio Figalli. “*Stability for a GNS inequality and the Log-HLS inequality, with application to the critical mass Keller–Segel equation*”. *Duke Mathematical Journal*. [arXiv:1107.5976](https://arxiv.org/abs/1107.5976). [doi:10.1215/00127094-2019931](https://doi.org/10.1215/00127094-2019931).

tratta infatti di una marcata violazione della cosiddetta “nomenclatura binomiale”, che ha una storia assai antica, risalendo ai tempi di Linneo³, e segue delle regole assai precise: il primo dei due nomi, relativo al “genere” (“Homo”, nel più facile degli esempi) deve necessariamente avere la prima lettera maiuscola; il secondo, che invece indica la “specie”, deve – altrettanto rigorosamente – essere esplicitato interamente in minuscolo. Infine, entrambe le parole devono essere trascritte in corsivo: cosicché il citato “Homo Sapiens” contiene almeno due errori, rispetto al corretto “*Homo sapiens*”.



1 Linneo (Carl Nilsson Linnaeus)

Le regole della nomenclatura binomiale⁴ non si limitano certo a questi concetti: esistono regole precise sulla necessità della denominazione univoca per ogni specie⁵, sulle indicazioni di trattare entrambe le parole che individuano il nome come fossero parole latine, e naturalmente sulle abbreviazioni. È lecito, ad esempio – e il titolo dell’articolo citato in apertura infatti ne approfitta – abbreviare il nome del genere con l’iniziale maiuscola puntata, quando non ci sia rischio di fraintendimenti. Il che ci fa comprendere anche che i biologi e gli appassionati di biologia non dovrebbero aver alcuna difficoltà nell’individuare quel “*C. elegans*” del titolo con il *Caenorhabditis elegans*, mentre noi dobbiamo ricorrere subito a un motore di ricerca per scoprire che si tratta di un verme. Vietato saltare subito a facili conclusioni: è indubbiamente un verme, con tutto il carico

semantico che la parola si porta appresso: ma, una volta superati i pregiudizi, è immediato capire che si tratta di una vera star, e che tra i biologi è talmente famoso da potersi serenamente l’abbreviazione nel nome del “genus”, come hanno fatto gli autori dell’articolo di *Nature*: il *C. elegans* è famosissimo, e come Leonardo, Michelangelo e Raffaello che non hanno bisogno di presentarsi con il cognome, a lui basta e avanza l’abbreviazione. È così celebre per una serie di caratteristiche che lo promuovono a “organismo modello”: innanzitutto, come si può vedere dall’immagine, ha effettivamente un certo grado di eleganza, almeno per quanto sia possibile parlare di eleganza in riferimento ai vermi. Il nome del genere viene dottamente dal greco, e dovrebbe significare, almeno in prima approssimazione, qualcosa del tipo: “nuovo tipo di verme a forma di bastoncino”. Ebbene, questo “nuovo bastoncino elegante” appartenente al *phylum*⁶ dei nematodi è lungo appena un millimetro, e quindi decisamente piccolo e maneggevole, ma è dotato già di un numero significativo di organi, cosa che lo rende ovviamente assai interessante per i ricercatori. Per di più è piccolo solo su scala umana,

³ Carlo Linneo è il nome volgarizzato italiano del più nobile latino Carolus Linnaeus, che gli scienziati un tempo dovevano per forza latinizzarsi, per farsi conoscere al di fuori della patria d’origine. Prima della latinizzazione era noto come Carl von Linné, ma anche questo non era il nome con cui venne battezzato dai suoi genitori: il “von” è particella nobiliare, e Linneo se la cuce addosso solo nel 1761, ormai ultracinquantenne, quando re Adolfo Federico lo chiama a far parte dell’aristocrazia svedese. E che Linneo fosse svedese si capisce abbastanza bene dal suo nome primigenio: Carl Nilsson Linnaeus. Ma è un padre fondatore delle scienze naturali, e lo si può chiamare quasi in ogni modo possibile senza rischio di fraintendimenti.

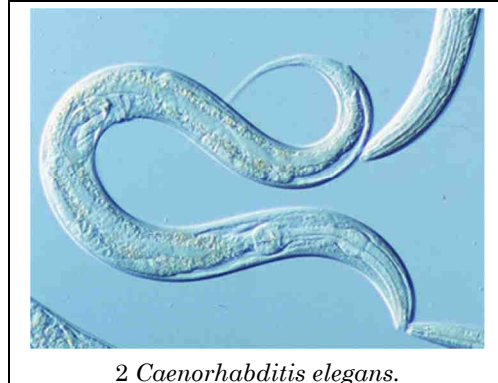
⁴ Supponendo che i lettori di questo pezzo abbiano più familiarità con la matematica che con la biologia, anche solo il semplice termine “binomiale” richiede verosimilmente un piccolo spostamento di significato, nelle loro teste.

⁵ Univocità che è comunque ristretta al singolo “regno”, cosa che comporta che un animale e una pianta possono condividere lo stesso nome binomiale. Se vi pare assai improbabile che la cosa possa comunque accadere, sappiate che, secondo Wikipedia, sono noti almeno 1241 casi di nomi scientifici duplicati tra un regno e l’altro.

⁶ Dominio, Regno, Phylum, Classe, Ordine, Famiglia, Genere, Specie. Immaginiamo che si tratti di una sorta di ABC per biologi, botanici, zoologi. Noi invece abbiamo copiato tutto da Wikipedia e no, non li conosciamo ancora a memoria, ahimè.

ma non su scala biologica; e questo è un vantaggio pratico assai notevole, perché può essere osservato anche solo con i normali microscopi ottici, senza che ci sia bisogno di affidarsi ai costosissimi microscopi elettronici. Come ulteriore segno di gentilezza, *C. elegans* si presenta agli occhi dell'umano studioso con la felice caratteristica d'essere trasparente⁷, e quindi si lascia esaminare gli organi interni in tutta comodità.

E tutto questo è solo l'inizio: dal punto di vista riproduttivo, ad esempio, c'è un grosso sbilanciamento sessuale, visto che si trova a malapena un maschio ogni duemila individui; tutti gli altri sono ermafroditi. Ciò che comunque rende questi organismi particolarmente attraenti per gli scienziati è il numero – fisso e ragionevolmente limitato – di cellule: un *C. elegans* ermafrodita ne conta in tutto 959, mentre per fare un maschietto ne occorrono 1031. Limitato è anche (e soprattutto) il patrimonio genetico del vermicello: in tutto possiede circa 19.000 geni, ed è essenzialmente per questa ragione che il piccolo nematode può vantare il record di essere il primo organismo pluricellulare ad avere il proprio corredo genetico completamente mappato, nel 1997.



2 *Caenorhabditis elegans*.

Insomma, si tratta di un vero tesoro per gli studi genetici: grazie alla recente mappatura di un altro nematode (il *Caenorhabditis briggsae*) si è virtualmente aperta una nuova disciplina, la “genetica comparata”; lo studio approfondito dei geni ha consentito di ricostruire con buona precisione l'evoluzione dell'organismo, sia in termini spaziali che temporali; ha consentito grandi progressi nello studio dell'apoptosi⁸ e, incidentalmente, ha procurato a Sydney Brenner (pioniere nello studio del nostro vermicello) e a Robert Horvitz e John Sulston il Premio Nobel per la Medicina nel 2002.

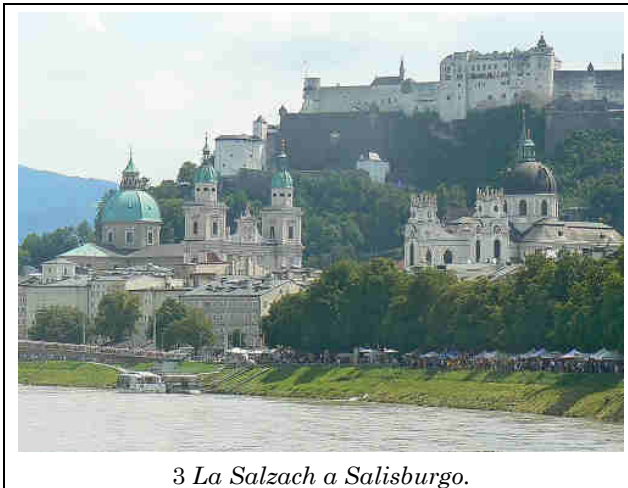
Tornando all'articolo che, con la sola potenza del titolo, ci ha condotto a scalfire appena il granitico mondo della biologia, quel che annuncia – in estrema e semplicistica sintesi – è la scoperta di una relazione tra alcuni geni del *C. elegans* deputati al riconoscimento della presenza di sale (il *tmc-1*, appunto), e al ruolo dell'omologo gene umano (*TMC1*) che è coinvolto in alcune forme di sordità. È indubbiamente curioso notare come la vita segua percorsi di complessità imprevista a partire da meccanismi iniziali relativamente semplici: nel caso del vermetto, come del resto per gran parte dei microrganismi, individuare la presenza del cloruro di sodio è vitale; in parte perché in piccole dosi è necessario al loro metabolismo, ma soprattutto perché in alte concentrazioni diventa rapidamente letale. Così, il *C. elegans* ha sviluppato nelle sue ciglia sensoriali la capacità di evitare il contatto con il sale, capacità veicolata proprio da *tmc-1*. Se, per qualche mutazione genetica, il vermicello non ha sviluppato questa capacità di evitare il contatto con il sale, la causa è quindi probabilmente dovuta a un malfunzionamento del suo *tmc-1*; si è ipotizzato insomma che, nel caso vi sia una sorta di regressione genetica, il gene possa perdere la capacità di trasduzione meccanica alle ciglia sensoriali degli impulsi elettrochimici. Una volta confermata l'ipotesi (tramite l'ingegneria genetica, che è ovviamente in grado di produrre mutazioni guidate nei geni), l'articolo ipotizza che alcune forme di sordità di cui è affetto Homo sapiens e nelle quali si è notato il coinvolgimento dei geni *TMC1* e *TMC2* possano essere dovute anche in questo caso ad una sorta di incapacità di meccano-trasduzione ciliare.

⁷ Non è una caratteristica specifica: tutti i *nematodi* sono trasparenti.

⁸ L'apoptosi è il fenomeno – abbastanza inquietante, almeno per chi biologo non è – della “morte cellulare programmata”; non si tratta di una normale morte cellulare (per la quale si usa il termine “necrosi”) ma di una morte appunto prevista e programmata, insomma propedeutica ad un successivo sviluppo dell'organismo. Non per niente il termine (introdotto nel 1972 dai biologi Kerr, Wyllie e Currie) richiama quello greco che indica il cadere delle foglie e dei petali dei fiori.

Suono e sale: come accade spesso, dopo la lettura di articolo di scienza si prova una sorta di oscillazione della curiosità. Inizialmente anche solo l'idea di associare in qualche modo il sale da cucina alla congerie di suoni che i nostri orecchi raccolgono in ogni istante della nostra vita sembra assurda, illogica, imprevedibile. Poi le argomentazioni scientifiche cominciano tracciare uno schizzo di rapporto, relazione, implicazione; il senso di incredulità decresce prima lentamente, poi sempre più velocemente, fino a scomparire del tutto. E alla fine, per quanto potesse sembrare impossibile solo qualche minuto prima, l'incredibile relazione è stabilita, solida, razionale. Quasi mai certa, ovviamente, perché la scienza raramente dà certezza assoluta, specialmente all'inizio del suo percorso di conoscenza; ma metter in relazione, connette, apre nuove strade, distrugge la presupponenza e feconda la meraviglia. E questo rinnova lo stupore, l'incredulità, non tanto su un evento o una connessione specifica, ma sulla natura stessa.

Sembra una delle caratteristiche più fertili della scienza: forse, per dirlo con una metafora, come se questo meccanismo fosse il suo stesso meccanismo riproduttivo. Da curiosità nasce curiosità, da scienza nasce scienza. Anche se, dobbiamo riconoscerlo, a voler uscire dai vincoli scientifici per metter in relazione il suono e il sale non sarebbe stato neppure necessario ricorrere alla biologia: sarebbe bastata la geografia.



3 La Salzach a Salisburgo.

L'etimologia del toponimo tedesco *Salzach* è abbastanza semplice e chiara: *Aach* è termine che si può ragionevolmente tradurre come “via d'acqua”, ed è infatti suffisso che si trova spesso nei nomi dei fiumi e torrenti che attraversano terre di lingua germanica; *Salz* significa “sale”. Così, se un fiume viene chiamato *Salzach*, è abbastanza facile dedurre che sia stato utilizzato a lungo come direttrice per il commercio del sale. Così è infatti per il corso d'acqua austriaco che, nascendo sulle Alpi di Kitzbühel, dopo una corsa di 227 chilometri si

getta nell'Inn in prossimità di Haiming. Le montagne da cui nasce sono ricche di miniere di salgemma, e fin dall'antichità sono state sfruttate dall'uomo; così, la *Salzach* è diventata davvero – ed è rimasta assai a lungo, fino a buona parte dell'Ottocento, quando poi è stata sostituita nel ruolo dalla ferrovia – la “via d'acqua del sale”.

Nel suo corso verso l'Inn, la *Salzach* accarezza e bagna un borgo le cui origini risalgono alla preistoria, e che gli antichi romani chiamarono *Juvavum*; più tardi, già nell'ottavo secolo, assume il nome di “*Salzburg*” a testimonianza del fatto che l'economia fondamentale di quella che è ormai diventata una città è sempre legata alle vicine miniere di salgemma: in prima approssimazione, il nome si può tradurre facilmente con “città del sale”, e si tratta del nome che ancora oggi orgogliosamente indossa; e, anche nella sua versione italiana, la presenza eponima del cloruro di sodio non è troppo nascosta: Salisburgo.

Come molte altre città dell'area germanica, Salisburgo cresce in modalità relativamente autonoma rispetto alle vicine: mentre Francia, Inghilterra, Spagna e altri paesi sviluppano velocemente il concetto di “nazione”, le città italiane e tedesche – cuore e residuo del mai concluso ma assai duraturo Sacro Romano Impero – si delineano sempre più restie a un controllo nazionale, e cercano da sole il proprio equilibrio. La piccola “città del sale” si coagula attorno alla figura del suo arcivescovo, e per lungo tempo l'istituzione più forte nella sua regione a cavallo tra Austria e Baviera sarà proprio l'Arcivescovato⁹.

⁹ Per essere un po' più precisi: nel 1213 Salisburgo ottiene il titolo di “arcidiocesi” (*Erzdiözese Salzburg*) che la qualifica pertanto come “principato arcivescovile” nel Sacro Romano Impero. È insomma una città che – come

Sono infatti i prelati dell'arcidiocesi che indirizzano lo sviluppo e lo stile della città: riescono a restare fuori dalla terribilissima Guerra dei Trent'Anni, a contenere le pulsioni della Riforma protestante, e – in buona sostanza – a mantenere il controllo della città.

È per questa ragione che nel 1756, quando dà i natali al più famoso dei suoi figli, Salisburgo ha nell'arcivescovo Leopold Anton Eleutherius Reichsfreiherr von Firmian il suo personaggio più potente. Ormai Salisburgo è qualcosa di ben più ampio che un piccolo borgo che vive del commercio del sale, ma gli arcivescovi che si sono succeduti prima di Firmian non sono riusciti a dargli una nuova identità caratteristica: in fondo, non ci riuscirà neppure lo stesso Firmian, ma ha quantomeno la fortuna di reggere la città quando questa inizierà – certo ancora inconsapevolmente – la sua trasformazione verso il suo nuovo ruolo di “città della musica”.

È il 27 gennaio 1756 quando nella casa di Leopold Mozart, violinista nell'orchestra della corte dell'arcivescovo, nasce Wolfgang Amadeus. Il genio di quest'ultimo non ha certo bisogno di essere raccontato su queste pagine: è uno spartiacque nella storia della musica, un talento naturale assoluto e precocissimo, perfino nell'abbandonare troppo presto questa valle di lacrime. Famosissimo già da bambino, quando il padre lo portava in giro per le corti e i teatri europei ad esibirsi con la sorella Maria Anne (detta Nannerl), ha lasciato un segno indelebile – e confrontabile solo con quelli di pochissimi altri – nella storia della musica.

Quello che forse è meno evidente e noto è il “segno” che Wolfgang Amadeus Mozart ha lasciato sulla sua stessa città natale: Salisburgo, la città del sale, agli occhi dei visitatori moderni è soprattutto la “città di Mozart” e, per inevitabile estensione, “la città della musica”. Ogni angolo della città ricorda – o fa del suo meglio per ricordare – i legami con il celeberrimo compositore: le vetrine delle pasticcerie traboccano delle *Mozartkugeln*, i cioccolati sferici al marzapane che recano il ritratto del musicista e che in suo onore sono stati creati già nel lontano 1890, e non c'è giorno dell'anno in cui non ci siano concerti o spettacoli musicali.

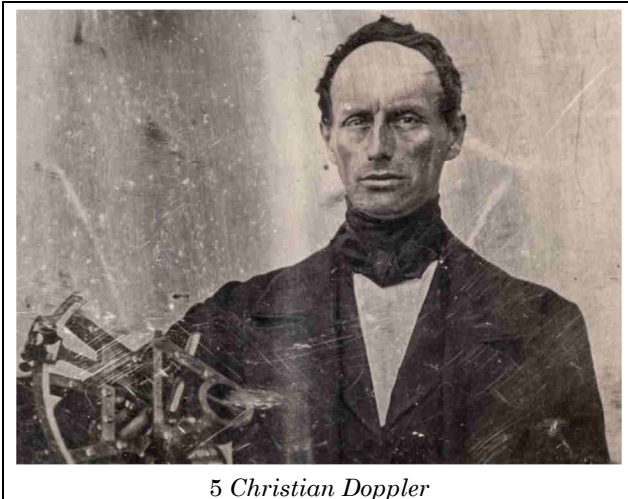
Così, la ricerca della nuova relazione tra sale e suono sembra di nuovo conclusa e realizzata: Salisburgo è un luogo perfetto per celebrare le nuove nozze tra i due elementi, perché è a un tempo “città del sale” e “città della musica”, e non c'è dubbio che la musica sia la più a lata e nobile forma di suono. Salisburgo, però, è città straordinariamente generosa, almeno per chi gioca a questo futile gioco di ricerca. Perché è quasi inevitabile, percorrendo le strade salisburghesi (sia nella realtà, sia attraverso una mappa virtuale) non fare un salto a Makartplatz, dove si trova la residenza della famiglia Mozart; ma una volta giunti là è inevitabile la sorpresa, lo stupore del turista



4 La famiglia Mozart in esibizione: Leopold al violino, Wolfgang alle tastiere e Nannerl come “lead vocalist”.

Roma soprattutto, ma anche come altre minori nel territorio del S.R.I. – è politicamente assegnata al potere ecclesiastico. Salisburgo era insomma sia Principato che Arcivescovato, in cui la figura del principe e quella dell'arcivescovo coincidevano. In più, Salisburgo è particolarmente importante perché il suo arcivescovo è il “primate di Germania”.

non sufficientemente edotto dalle guide turistiche: a fianco della casa di famiglia di Wolfgang Amadeus Mozart si erge la casa natale di uno scienziato che ha indissolubilmente legato il suo nome al più famoso degli effetti sonori, e più generalmente delle onde.



5 Christian Doppler

Christian Doppler nasce a Salisburgo il 20 novembre 1803, dodici anni dopo la morte del suo celeberrimo vicino di casa. La sua famiglia aveva una lunga tradizione nell'edilizia, che garantisce ai genitori un discreto livello di vita: ciò non di meno, si tratta essenzialmente del duro lavoro dei muratori, che appare subito poco adatto al giovane Christian la cui costituzione e salute appaiono subito troppo fragili per seguire le orme professionali degli antenati. In compenso, il fanciullo mostra una precoce e viva intelligenza che induce i familiari ad esplorare la possibilità

di indirizzarlo a studi accademici. Mentre il ragazzo frequenta una scuola secondaria di Linz, i signori Doppler si consultano con un professore del liceo di Salisburgo, che li esorta a iscrivere Christian al neonato Politecnico di Vienna.

Il consiglio è ben indirizzato, la famiglia lo segue, e Christian non delude le aspettative. Entra al Politecnico nel 1822, diciannovenne, si dimostra studente brillantissimo, ottiene la laurea nel 1825, e subito dopo diventa assistente del docente di Matematica Superiore e Meccanica. Resterà in questo ruolo fino al 1829, e nel frattempo scriverà quattro memorie significative di matematica.

L'organizzazione accademica e scolastica del primo Ottocento è però assai diversa da quella contemporanea, e anche nell'Impero Asburgico vigono regole abbastanza rigorose e particolari: per ottenere una cattedra, sia universitaria che scolastica, è necessario sottoporsi a stressanti prove scritte d'esame (alcune della durata di più di dodici ore) e, una volta superate, si viene esaminati da una severa commissione che valuta esclusivamente le capacità di insegnamento del candidato. Non vengono presi minimamente in considerazione i meriti di studi superiori: quattro anni passati come assistente universitario e un'evidente competenza negli studi superiori non hanno alcun valore ai fini di ottenere un posto da insegnante e il relativo stipendio. Così, Christian Doppler, dai venticinque fino ad oltre i trent'anni, si ritrova in una condizione economica assai difficile, perché non riesce a trovare di che vivere. Si impiegherà per un certo come bibliotecario, e alla fine deciderà di preparare le carte per emigrare negli Stati Uniti. Poco prima della partenza, però, gli giunge la notizia di una possibilità di insegnamento in una scuola secondaria di Praga¹⁰.

La capitale boema non si rivela però particolarmente ospitale per Doppler: insegnare matematica elementare non lo soddisfa, e i suoi tentativi di entrare al Politecnico di Praga come docente hanno solo un successo assai parziale: riuscirà a trovare un incarico di insegnamento per quattro ore la settimana, ma lo pagherà a carissimo prezzo, perché le sessioni di esame sono davvero estenuanti. Il numero di studenti che deve esaminare – sia oralmente che per iscritto – è davvero spaventoso¹¹, e la sua salute ne risente.

¹⁰ Tanto per dare un'idea delle difficoltà burocratiche: la sua domanda di adesione alla Scuola Secondaria Tecnica di Praga è del 1833; la trafila che lo vedrà infine ottenere la cattedra terminerà solo due anni dopo, nel 1835.

¹¹ Il record sembra essere quello del luglio 1847 (dopo il suo rientro in servizio, successivo al periodo di riposo ottenuto di cui si parla più avanti). In quel mese sembra che abbia dovuto esaminare 526 studenti in matematica e 289 in geodesia.

Chiede di essere messo a riposo per motivi di salute, e troverà un sostegno in Bernard Bolzano, che ha imparato ad apprezzare i suoi articoli fin dal lontano 1837. Lo ottiene, poi rientra al lavoro, ma è evidente che l'insegnamento, almeno quello praghese, non è il suo forte; gli studenti lo contestano per l'eccessiva difficoltà degli esami, e così Doppler decide di trasferirsi nuovamente, accettando un posto presso l'Accademia delle Foreste e Miniere di Banská Štiavnica¹². Corre però l'anno 1848, quello delle grandi rivoluzioni europee: non c'è quasi nazione che non ne resti sconvolta, e anche la vita di Christian Doppler ne risente, ma in senso positivo, tutto sommato. Forse perché è ormai una figura di un certo rilievo, forse perché il 1848 ha sconvolte anche le burocrazie accademiche, fatto sta che nel 1850 riesce finalmente a diventare direttore dell'Istituto di Fisica dell'Università di Vienna.

La realtà è che ciò che più ha contato nel cambiare il destino di Christian Doppler è stato certamente l'*endorsement* di Bolzano: questi era diventato segretario dell'Accademia Boema delle Scienze nel 1842, si era trasferito a Praga e aveva avuto occasione di conoscere e apprezzare il salisburghese. Del resto, la maggiore creazione di Doppler era precedente all'arrivo di Bolzano a Praga: corre l'anno 1840 quando pubblica la memoria "*Sui colori della luce delle stelle doppie e di alcune altre stelle dei cieli*", nella quale presenta per la prima volta l'effetto che prenderà il suo nome.

Detto in estrema sintesi, si tratta dell'effetto che si rileva quando una sorgente di onde è in moto rispetto all'osservatore, così la frequenza delle onde percepite dall'osservatore risulta alterata (aumentata o diminuita) in funzione della traiettoria relativa tra sorgente e punto d'osservazione. Nell'esempio più immediato e più classico, il suono della sirena di un'autoambulanza che si avvicina, raggiunge la distanza minima e poi prosegue la corsa allontanandosi produce un suono apparentemente sempre più alto nell'avvicinarsi e poi più grave nella fase di allontanamento.

Con il senno di poi, può sembrare abbastanza curioso che un "effetto" così familiare nell'esperienza quotidiana per quanto riguarda i suoni salga alla consapevolezza scientifica attraverso uno studio di natura astronomica, ma basta soffermarsi sul fatto che nell'Ottocento, dopo tutto, non era facile fare l'esperienza del suono di un'automobile in moto veloce di avvicinamento o allontanamento dall'osservatore: ai giorni nostri, basta restare sul ciglio d'una strada per qualche minuto per avere una pletora di riconoscibili "effetti Doppler" sonori, ma si tratta di esperienze solo relativamente recenti.

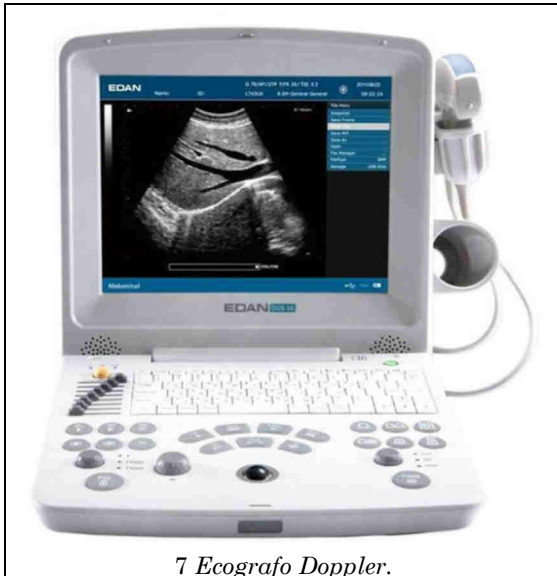
Ancora più curioso, a ben vedere, è che il suo studio prende in considerazione le onde luminose, non quelle sonore, e nello specifico quelle emesse dalle stelle doppie che – proprio per la loro natura di sistema in rotazione, hanno le componenti che di volta in volta risultano in avvicinamento o allontanamento rispetto alla Terra. Senza tener conto,



6 La casa natale di Doppler a Salisburgo.

¹² ...che oggi è in Slovacchia, ma che a quel tempo era, al pari di Salisburgo, Vienna, Linz, Praga e mille altre città, parte integrante dell'Impero Austro-Ungarico.

peraltro che l'idea che Doppler aveva sulla natura delle onde della luce non fosse del tutto corretta rispetto a quella già messa in evidenza da Fresnel.



7 Ecografo Doppler.

In ogni caso, nessun contemporaneo di Doppler avrebbe mai potuto immaginare quante applicazioni e scoperte sarebbero in breve arrivate proprio grazie a quell'effetto. Il celeberrimo "Red Shift", lo "spostamento verso il rosso" delle righe spettrali delle galassie è in tutto e per tutto uno "spostamento Doppler", ed è stato il primo e più potente indizio sull'espansione dell'universo, cosa che di fatto ha causato la nascita della nuova scienza della cosmologia. E gli esami medici di tipo "Doppler", prima fra tutte l'ecografia, sono in grado di annunciare il sesso dei nascituri e sono ormai entrati nel lessico comune, a maggior riprova dell'utilità dell'ingegno del matematico e fisico austriaco.

E, per quel poco che ci riguarda, che il sale abbia qualcosa a che spartire con il suono è ormai provato fuor d'ogni dubbio.



2. Problemi

2.1 Novembre, finalmente!

Rubiamo a Treccia uno dei suoi incipit preferiti per motivi che vi saranno chiari entro la fine del prossimo paragrafo.

Il bello di novembre, dicevamo. Arriva il vino novello, e con davanti un sano bicchiere di questo accompagnato da corpose quantità di caldarroste, si può lanciare lo sguardo fuori dalla finestra e rimirare le *inquietanti nebbie* che coprono quella rovina che è il giardino; consci del fatto che qualsiasi progetto sarà dimenticato nella frenesia della mercificazione natalizia, possiamo anche ascoltare le elucubrazioni delle nostre metà su *come andrà assolutamente organizzato il giardino* dopo le gelate. Tanto, cambieranno idea. Per qualsiasi idea, anche l'ultima.

Va detto che l'altra metà del cielo, questa volta, ha le idee piuttosto chiare (...capace che dura fino a metà del mese...): il giardino va organizzato attorno ad un'aiuola perfettamente circolare, circondata da una corona di quadrati uguali tra loro con un vertice sulla circonferenza e i due vertici contigui a questo in comune (uno ciascuno) con i due quadrati nelle stesse condizioni adiacenti lungo la corona.

A questo punto, se i quadrati vi sono antipatici, state già pensando a tracciarne il meno possibile, ma il vostro sguardo assorto fa immediatamente rilanciare il vostro partner, il quale avanza un'altra condizione.

Infatti, viene richiesto anche che:

1. Ci sia un tulipano al centro dell'aiuola circolare.
2. Ci sia un tulipano sul vertice del quadrato sulla circonferenza
3. Ci sia un tulipano sul vertice del quadrato opposto (il vertice, non il quadrato) a quello del punto (2)

Non solo, ma con sguardo sadico vi viene comunicato anche che:

4. Sulla retta individuata dai tre tulipani (ah, è una sola? Sì, è una sola) vanno piantati altri tulipani tutti a distanza uguale l'uno dal successivo, e nel conto vanno inclusi anche i tre che avete piantato al giro precedente.

Insomma, la cosa non vi entusiasma già dal punto di vista teorico, figurarsi da quello pratico... Il risultato finale dovrebbero essere una monotona serie di raggi prolungati oltre il cerchio senza nessun "salto" a differenziare quelli del cerchio da quelli dei quadrati. Speriamo di poter almeno variare i colori. E minimizzare il lavoro, mettendo meno quadrati possibili... E a questo punto, vi sorge un dubbio: non è che la quarta condizione "frega", dal punto di vista del numero di quadrati? Quanti ne dovrò tracciare, come minimo?

Estensione? Estensione. Trovato il "minimo faticabile" soddisfacente le condizioni, c'è la possibilità che dalle spalle vi arrivi la soave frase "...forse, facendo più quadrati viene più bello"? Nel senso di: oltre a quello trovato qui sopra, esistono altri valori soddisfacenti le quattro condizioni poste?

Tranquilli: deve ancora nevicare, e magari sotto la neve tutto il giardino sparirà in una voragine sino al centro della Terra, e lo chiameremo "Non-giardino Arne Sagnussen".

2.2 Un albero cresce a Brooklin

OK. Smith (1943) e Kazan (1945). Ma noi abbiamo solo uno spazio nel quale ci piacerebbe crescesse: al momento nisba, e la cosa marca (come vedremo) male.

Ragazzi, ci risiamo. Abbiamo un altro problemino per il quale vorremmo verificare le nostre capacità di descrizione delle realtà complesse senza l'utilizzo di figure. Abbiamo un appezzamento rettangolare ABCD in quel di Brooklyn: noi gli passiamo davanti tutte le mattine lungo il lato AD (che dà sulla strada ed è libero da costruzioni). I lati AB, BC e CD sono (a raso del prato, quindi senza vicoletti o sentierini: è un "prato cieco") grattaciel molto alti.

Dallo spigolo in B, un faro illumina il prato da piuttosto in basso (ma non rasoterra); procedendo da BC verso AD, si incontrano nell'ordine:

- Una staccionata che impedisce l'accesso alla parte del prato dove si trova la lampada, pur non impedendo di guardare oltre ma impedendo qualsiasi misurazione della seconda parte.
- Poi (sempre andando verso la strada), incontriamo un muro uscente da AB e ad esso perpendicolare della larghezza di 4 metri, distante dalla strada 16 metri.
- Avanti ancora e troviamo un secondo muro che esce da CD (perpendicolare) largo due metri e distante 12 metri dalla strada.
- Infine, trovate la strada che percorrete tutte le sere, a lo spazio AD è ampio 10 metri

I muri sono più alti di quanto sia alta la lampadina nello spigolo, quindi fanno un po' di ombra.

Sin quando una sera trovate un cartello di inizio lavori: a quanto pare, verranno costruiti due capanni attaccati ai muri, usando i muri medesimi come muri di fondo: uno verrà costruito "Dietro il muro di AB", l'altro "davanti il muro di CD". E le costruzioni saranno larghe quanto i muri. Inoltre, la staccionata verrà spostata a filo della strada, impedendo accesso e misurazioni sull'intera area.

Passando la sera sulla strada, vi accorgete che tra l'angolo più lontano (da voi) del capanno del muro su AB e l'angolo più vicino del capanno del muro CD riesce a passare, per un brevissimo attimo, un raggio di luce del lampione sul fondo, e tornate a casa felici.

Ma una domanda vi assilla (vi assillava anche prima, ma non vi sembrava importante).

Quanto è profondo l'appezzamento? O, se preferite, quanto è distante il lampione dalla strada? O anche, quanto è lungo AB?

Coraggio, che se smettete di passeggiarci sopra magari stavolta l'albero cresce sul serio.

3. Bungee Jumpers

Mostrate che esiste una sequenza *comunque lunga* di numeri naturali tali che siano tutti divisibili per dei quadrati perfetti maggiori di 1.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Novembre!

RM è in ritardo, il calendario è in ritardo, siamo in ritardo. Ma la parte di soluzioni è ricca e lunga e il numero di questo RM è bello rotondo, siamo fortunati dopotutto.

4.1 [247]

4.1.1 Divagazione

Torna alla ribalta questo problema di scacchiere:

Prendiamo tutte le scacchiere generiche $m \times n$, $m \leq n$, con la casella in basso a sinistra bianca. Sia $B_{m,n}$ il grafo di tutte le possibili mosse di un alfiere bianco sulla suddetta scacchiera. Per quali valori di m e n il nostro grafo ammette un circuito hamiltoniano?

In RM248 abbiamo pubblicato le soluzioni di **Alberto R.** e **Valter**, che non hanno però soddisfatto il nostro *trentatre*:

Il problema parla esplicitamente di grafo di tutte le possibili mosse dell'alfiere, e nella teoria dei grafi – dove si definiscono di norma i cicli hamiltoniani – i rami sono definiti come unione di due nodi, senza nessun riferimento geometrico, e senza nessuna relazione con gli altri nodi.

L'algebra del problema è abbastanza semplice. Numerando le caselle bianche da 1 a N e applicando ai centri le coordinate cartesiane intere (x, y) orientate come la scacchiera, un ciclo hamiltoniano è una permutazione degli N numeri in cui ogni

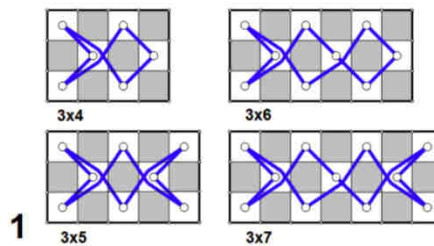
coppia di numeri adiacenti – inclusi il primo e l'ultimo – di coordinate (x', y') , (x'', y'') rispetta la condizione $|x'' - x'| = |y'' - y'|$ (una diagonale nel piano).

Un programma consente di trovare le prime soluzioni per i casi più semplici.

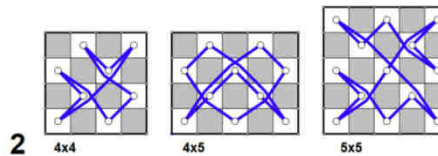
Una geometria viene imposta al problema, come nei grafi, solo disegnando in piano i cicli, cioè nell'adattamento alla scacchiera. Se i passi dell'alfiere sono segmenti retti sorge il problema che alcuni possono essere in parte sovrapposti. Per chiarezza li ho disegnati lievemente spostati, in modo da "schivare" i nodi intermedi.

Se m e n sono i lati della scacchiera, il numero N di caselle bianche è $N = m * n / 2$ dove il prodotto va aumentato di 1 se dispari (per la condizione imposta nel problema in questo caso ci sono 4 caselle bianche negli angoli).

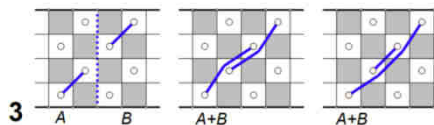
In fig. 1 i cicli nelle scacchiere di lati $3 \times n$, $n = 4, 5, 6, 7$ che si estendono facilmente a valori maggiori. Il ciclo 3×4 è il minore possibile e, salvo rotazioni e simmetrie, unico.



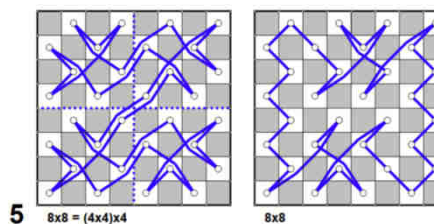
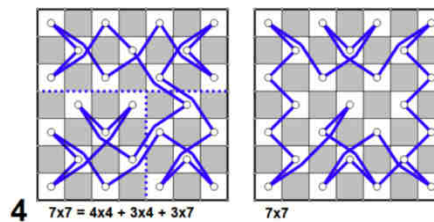
In fig. 2 un esempio dei casi 4×4 , 4×5 e 5×5 .



Due scacchiere A e B con un lato uguale si possono unire (fig. 3) se è garantita la continuità della colorazione e nei cicli delle due scacchiere esistono due tratti allineati su una stessa diagonale. Il risultato si ottiene sostituendo i due tratti con altri due che collegano A e B in uno dei due modi a destra.



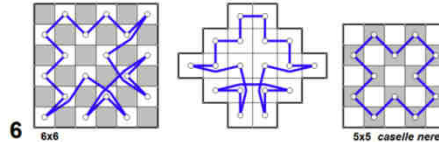
In fig. 4 e 5 i casi quadrati 7×7 e 8×8 sia in forma composta che "primitiva".



Per comporre tutte le $m \times n$ con $m \geq 3, n \geq 4$ bastano i sette pezzi primitivi di fig. 1 e 2. Quelli nelle figure sono esempi. Il numero di soluzioni diverse, salvo rotazioni e simmetrie, cresce rapidamente.

Per esempio in $4 \times 3, 4 \times 4, 4 \times 5, 4 \times 6$ le soluzioni sono 1, 2, 21, 84.

A riprova del fatto che il modo di disegnare le soluzioni non è essenziale si possono eliminare le caselle nere, che non hanno nessun ruolo, ruotando il disegno come in fig. 6. L'alfiere diventa una torre, ma la scacchiera non è più un rettangolo.



La condizione di muovere l'alfiere in campo bianco è arbitraria; per tutte le $m \times n$ pari i cicli sono gli stessi, salvo una rotazione della scacchiera. Per $m \times n$ dispari i cicli sono diversi, e di solito più semplici (il ciclo non passa per le caselle d'angolo e ha un tratto in meno, v. 5×5 in fig. 6).

Il problema, su scacchiera rettangolare, si può estendere agli altri pezzi degli scacchi. Per torre e regina il risultato è banale, per il re e i pedoni è impossibile. Resta il cavallo, già citato nel testo del problema, e che compare spesso su scacchiera 8×8 , come rompicapo.

Mi limito a qualche osservazione sui casi più piccoli. Per $m \times n$ dispari non ci sono soluzioni (il cavallo cambia colore della casella ad ogni salto, e il numero di caselle deve essere pari); non ci sono soluzioni $4 \times n$; ammettono soluzioni i casi $3 \times n$ per n pari e >10 , e tutti i casi uguali o più grandi di 5×6 . Anche per il cavallo le soluzioni si possono comporre, ma non la scacchiera standard 8×8 .

Bello vero? E tra poco vedrete che **trentatre** veramente si preoccupa dei problemi passati non completamente chiusi.

4.2 [248]

4.2.1 ... in che anno siamo?

L'anno volge alla fine, e il problema proposto ha ricevuto solo una risposta da **Valter**, il mese scorso:

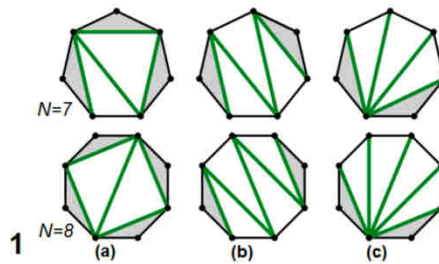
Il giardino è un n -gono convesso, da tenere ad erba, con qualche diagonale tracciata con dei fiori monocromatici: non solo, ma quando si traccia una nuova diagonale si chiede che incroci al più una delle diagonali già presenti, e nel punto di incrocio mettere un singolo fiore dal colore contrastante. Qual è il numero massimo di diagonali soggiacenti alla condizione data che si possono tracciare per $n=2011$ e $n=2019$?

Ci ha quindi scritto **trentatre**:

Un poligono convesso può essere deformato, senza alterare le relazioni fra vertici e diagonali, in un poligono regolare, e questo evidenzia le simmetrie del problema.

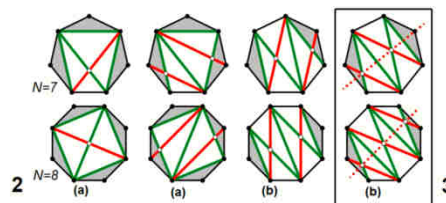
Indico con N, D, E il numero dei vertici, delle diagonali semplici che non si incrociano fra loro, e delle diagonali secondarie che si incrociano una sola volta con un'altra. Inoltre D^* è il numero delle D minime, che sul perimetro formano un triangolo (in grigio). Il numero di tutte le diagonali semplici è sempre, comunque si traccino, $\boxed{D=N-3}$, come si dimostra partendo da un poligono semplice e aggiungendo vertici uno alla volta.

In fig. 1 diversi modi di tracciare le D per $N = 7$ e 8 .



In (a) il numero di diagonali minime D^* è massimo, in (b) lo schema a zig-zag, in (c) tutte le diagonali passano per un vertice.

I modi (b) e (c) presentano sempre due D^* e sono equivalenti. Infatti (b) si trasforma in (c) spostando una diagonale alla volta senza interferire con le altre. Il problema si può limitare ai casi (a) e (b), per ognuno dei quali le diagonali E (in rosso) si possono tracciare nei due modi di fig. 2.



Il numero di E dipende dal modo di tracciare sia le D che le stesse E . Nei due schemi (b) le differenze dipendono dalla presenza o meno dell'incrocio con le D^* . In particolare, sia per N pari che dispari, il massimo si ha secondo lo schema 3 a destra, con le D tracciate a zig-zag e le E che incrociano le D^* almeno una volta.

Da notare che le E corrispondono al zig-zag delle D ribaltato rispetto a un asse del poligono, a meno delle diagonali sovrapposte. Ne segue il numero massimo delle diagonali E

$$N \text{ pari} : E = (D + 1) / 2 = (N - 2) / 2$$

$$N \text{ disp} : E = D / 2 = (N - 3) / 2$$

$$\text{- che si riassumono in } E = \lfloor (N - 2) / 2 \rfloor.$$

Il numero massimo totale di diagonali $D_{tot} = D + E$ è quindi

$$D_{tot} = \lfloor (3N - 8) / 2 \rfloor.$$

E con questo passiamo ai problemi più freschi, vediamo se hanno interessato i nostri lettori.

4.3 [249]

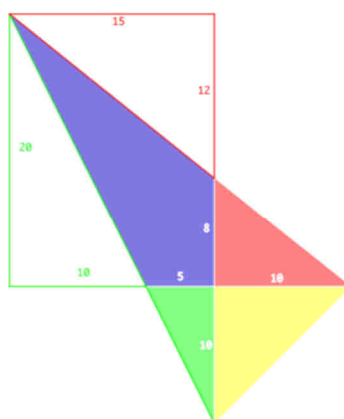
4.3.1 Torna la capretta (con delle amiche)!

Un bel problema di geometria, finalmente, senza nemmeno un freccia.

È dato un appezzamento di forma triangolare, diviso in quattro parti da due muretti che partono dagli angoli alla base e proseguono sino a incontrare il lato opposto all'angolo di partenza. I due muretti dividono il triangolo in quattro parti: Nord, Est, Sud e Ovest. Sapete che il prato Ovest nutre 5 caprette, il prato Sud è in grado di nutrirne 10 e il prato Est riesce a satollarne 8. Il prato Nord, infine, riesce a nutrire tutte le caprette restanti. Quante caprette avete, in tutto?

Cominciamo subito con la soluzione di **Valter**:

Inizio con un disegno che mi aiuti nell'esposizione:



L'area di ciascun prato diviso cinque corrisponde al numero di caprette che lo stesso nutre.

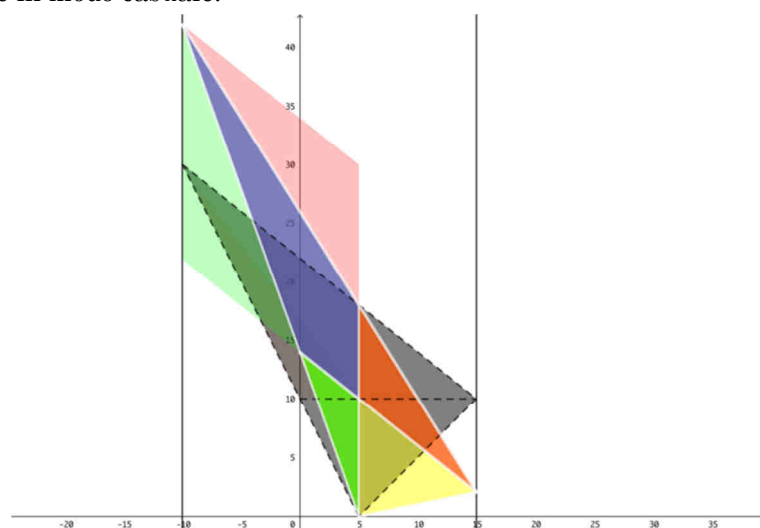
Per comodità nel calcolo delle aree e avere lati interi i muretti s'incrociano perpendicolarmente.

I due triangoli esterni ai prati bordati di rosso e verde sono simili ai prati di egual colore. Le ipotenuse di tali triangoli rettangoli coincidono esattamente con i due lati del prato a Nord. Un semplice calcolo fornisce le misure univoche che devono avere i loro tre lati per ottenere ciò.

Nel calcolo sfrutto la similitudine dei due triangoli esterni con i rispettivi prati Ovest e Est. Ciascuno dei tre lati di ogni triangolo deve essere un multiplo univoco dei corrispondenti prati. Si ottiene che il triangolo bordato di verde ha i lati doppi e quello bordato di rosso tre mezzi.

Dall'area del rettangolo 15×20 , togliendo quella dei due triangoli, ho l'area del prato Nord: 110. Il prato a Nord dovrebbe nutrire quindi 22 caprette e quindi ne ho in tutto: $8 + 10 + 5 + 22 = 45$.

C'è infine da verificare tutte le disposizioni dei due muretti diano la stessa area del prato Nord. Per fare ciò propongo un nuovo disegno in cui ho inclinato il muretto orizzontale in modo casuale:



Per avere le stesse aree precedenti ho mantenuto le altezze che avevano sui lati in comune con loro.

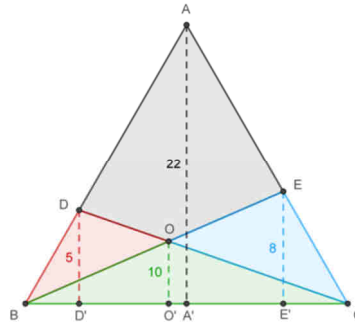
Dal disegno e con una dimostrazione simile si dovrebbe dedurre che l'area del prato Nord rimane 110.

Bene, vediamo come arriva alla stessa conclusione il nostro **Panurgo**:

Considerato un triangolo equilatero di base b segniamo sul lato AB il punto D , distante dalla base $(30 \text{ capre})/b$ e sul lato AC il punto E , distante dalla base $(36 \text{ capre})/b$: i segmenti BE e CD si intersecano nel punto O , distante dalla base $(20 \text{ capre})/b$.

Siano D' , O' e E' le proiezioni sulla base dei punti D , O e E rispettivamente.

In questo modo il triangolo BCO (Sud) ha un'area di 10 capre, il triangolo BCD ha un'area di 15 capre quindi BOD , Ovest, ha un'area di 5 capre, e il triangolo BCE ha un'area di 18 capre e CEO , Est, ha un'area di 8 capre, come richiesto.



Per trovare il valore di b osserviamo che $BO':BE' = \frac{20 \text{ capre}}{b} : \frac{36 \text{ capre}}{b}$ e $D'C:O'C = \frac{30 \text{ capre}}{b} : \frac{20 \text{ capre}}{b}$; inoltre, $E'C = \frac{36 \text{ capre}}{\sqrt{3}b}$ e $BD' = \frac{30 \text{ capre}}{\sqrt{3}b}$, dato che il triangolo è equilatero.

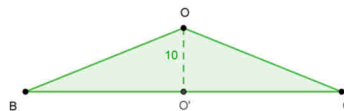
Dunque

$$BC = BO' + O'C = \frac{5}{9} \left(b - \frac{36 \text{ capre}}{\sqrt{3}b} \right) + \frac{2}{3} \left(b - \frac{30 \text{ capre}}{\sqrt{3}b} \right) = b$$

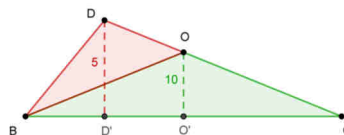
da cui si ricava, con pochi passaggi, $b^2 = 60\sqrt{3}$ capre e l'area del triangolo è pari a 45 capre.

“Ma il triangolo non doveva essere scaleno?”, direte voi.

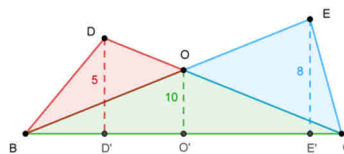
Per voi che siete pignol... accurati disegniamo un triangolo isoscele di base $10\sqrt{\text{capre}}$ e altezza $2\sqrt{\text{capre}}$ (Sud, area 10 capre)



Prolunghiamo il segmento CO fino al punto D distante da BC $3\sqrt{\text{capre}}$ in modo che il triangolo BCD abbia un'area di 15 capre: così O vest avrà un'area di 5 capre.

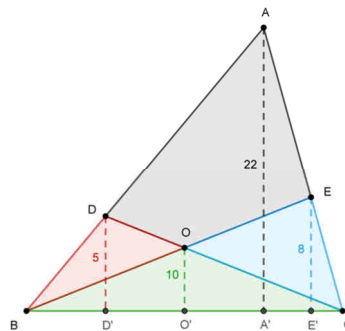


Ripetiamo l'operazione prolungando BO fino al punto E , distante da BC $3,6\sqrt{\text{capre}}$, in modo che il triangolo BCE abbia un'area di 18 capre (e EST un'area di 8 capre)



Per trovare l'altezza del triangolo ABC consideriamo, come prima, che $BO':BE' = 2\sqrt{\text{capre}} : 3,6\sqrt{\text{capre}}$ (cioè $E'C = \sqrt{\text{capre}}$) e $D'C:O'C = 3\sqrt{\text{capre}} : 2\sqrt{\text{capre}}$ (cioè

$BD' = 2,5 \sqrt{\text{capre}}$: da ciò ricaviamo che $\tan \hat{B} = DD'/BD' = 1,2$ e $\tan \hat{C} = EE'/E'C = 3,6$ e quindi che $BA' = 7,5 \sqrt{\text{capre}}$, e che l'altezza del triangolo ABC è $AA' = 9 \sqrt{\text{capre}}$

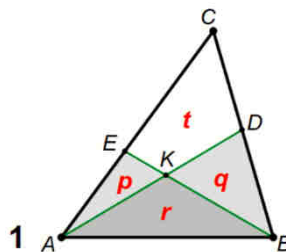


L'area di questo triangolo è di nuovo 45 capre.

Dovrebbe essere chiaro a questo punto che la forma del triangolo è indifferente. I quattro triangoli ABC, BCD, BCE e BCO hanno in comune la base quindi le loro aree stanno in proporzione come le loro altezze: qualsiasi triangolo può essere trasformato in un triangolo equilatero traslando orizzontalmente il vertice fino a che diventa isoscele, indi traslando il vertice verticalmente fino a che diventa equilatero. Lo spostamento orizzontale del vertice lascia invariate le altezze, e con loro le rispettive aree; lo spostamento verticale modifica le altezze in modo proporzionale e i rapporti tra le aree non cambiano: se poi la modifica delle altezze viene compensata, come nel caso del triangolo equilatero precedente, dalla modifica inversa della base sono le aree stesse a rimanere inalterate.

Noi siamo convinti. Però vi passiamo ancora la soluzione di **trentatre** che nomina le ceviane, care al Capo e a tutta la Redazione:

In fig. 1 il triangolo diviso dalle due ceviane AD e BE. Le aree (l'unità di misura è la "capretta") **p, q, r** sono note, la **t** incognita.



Le aree si possono calcolare a partire dai soli rapporti in cui sono divisi i lati, cioè da

$$[1] \quad x = BD / CD, \quad y = AE / CE$$

- in rapporto all'area del triangolo (cioè con $(ABC) = 1$) le aree sono

$$[2] \quad (ABK) = \frac{xy}{k}, \quad (BDK) = \frac{x^2}{k(1+x)}, \quad (AEK) = \frac{y^2}{k(1+y)}$$

$$(DCEK) = \frac{k+xy}{k(1+k)} \text{ dove } k = x + y + xy.$$

Nelle formule, che sono uno sviluppo del teorema di Ceva, entrano solo rapporti fra lunghezze e aree e valgono, con le ceviane definite dalle [1], per un triangolo di forma qualsiasi.

Dai valori noti **p, q, r** di ha

$$[3] \quad u = p/r = \frac{(AEK)}{(ABK)} = \frac{y}{x(1+y)}$$

$$v = q/r = \frac{(BDK)}{(ABK)} = \frac{x}{y(1+x)}$$

- da cui risolvendo in x, y

$$[4] \quad x = \frac{1-uv}{u(1+v)}, \quad y = \frac{1-uv}{v(1+u)}, \quad k = \frac{1}{uv} - 1.$$

Dai dati del problema $p = 5, q = 8, r = 10$ si ricava $u = 1/2, v = 4/5$ e quindi

$$x = 2/3, y = 1/2, k = 3/2$$

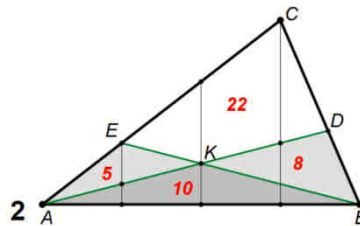
$$(ABK) = \frac{xy}{k} = 2/9, \quad (AEK) = \frac{y^2}{k(1+y)} = 1/9$$

$$(BDK) = \frac{x^2}{k(1+x)} = 8/45, \quad (DCEK) = \frac{k+xy}{k(1+k)} = 22/45.$$

Da questi valori – riferiti al triangolo unitario – si hanno le aree iniziali $p, q, r = 5, 8, 10$ moltiplicando per 45.

Quindi l'area cercata è $t = 22$ e l'area del triangolo (il n° totale di caprette) è 45.

In fig. 2 un triangolo con le aree corrette. Le verticali sono equidistanti, le pendenze delle due rette AD e AC sono $1/5$ e $3/5$, la base è $AB = 10\sqrt{2}$. Presumo che l'origine del problema sia un disegno del genere.



Dimostrazione delle [2]

- vale la simmetria $(A, E, y) \leftrightarrow (B, D, x)$ e la terza formula si ricava dalla seconda

- le quattro formule hanno somma 1 e la quarta si ricava dalle altre.

Basta quindi ricavare (ABK) e (BDK) che compongono il triangolo (ABD)

- i due triangoli generati da AD hanno la stessa altezza rispetto a BC , e il rapporto delle aree è lo stesso delle basi, cioè

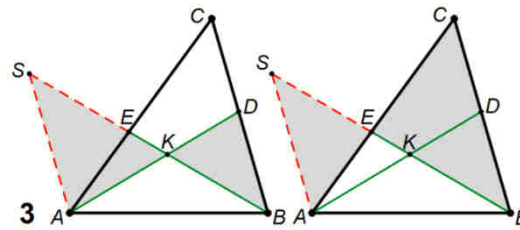
$$\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{BD}{CD} = x, \quad (ABD) + (ACD) = 1 \quad \text{da cui} \quad (ABD) = \frac{x}{1+x}$$

- (ABK) e (BDK) si ottengono dividendo (ABD) secondo la ceviana BK

- con $v = DK / AK = (BDK) / (ABK)$, come in [3]

$$\frac{(ABK)}{(ABD)} = \frac{AK}{AD} = \frac{AK}{AK + DK} = \frac{1}{1 + DK / AK} = \frac{1}{1+v}$$

$$(ABK) = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+v}$$



- si ottiene v in funzione di x, y sfruttando le due coppie di triangoli simili di fig. 3, in cui il punto S è aggiunto con AS parallela a BC

$$v = \frac{DK}{AK} = \frac{BD}{AS} = \frac{BD}{AE} \cdot \frac{AE}{AS} = \frac{BD}{AE} \cdot \frac{CE}{BC} = \frac{BD}{BD+CD} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{1}{1+1/x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y(1+x)}$$

- cioè la [3], e le due formule cercate sono

$$(ABK) = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+v} = \frac{xy}{x+y+xy}$$

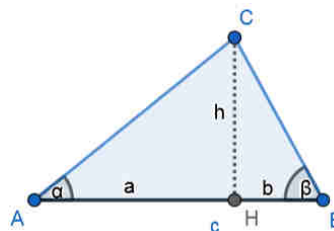
$$(BDK) = (ABD) - (ABK) = \frac{x}{1+x} - \frac{xy}{x+y+xy} = \frac{x^2}{(1+x)(x+y+xy)}$$

Il problema si può estendere aggiungendo una o più ceviane; i rapporti fra le aree interne e il modo in cui ogni ceviana è divisa dalle altre si possono calcolare usando solo i rapporti x, y, \dots sui lati.

Nel caso di tre ceviane per i tre vertici si hanno 7 aree interne, e basta conoscere i valori di 4 di esse per risalire ai rapporti sui lati e calcolare le altre. La formula per il triangolo centrale, particolarmente simmetrica, è nota come teorema di Routh per i triangoli.

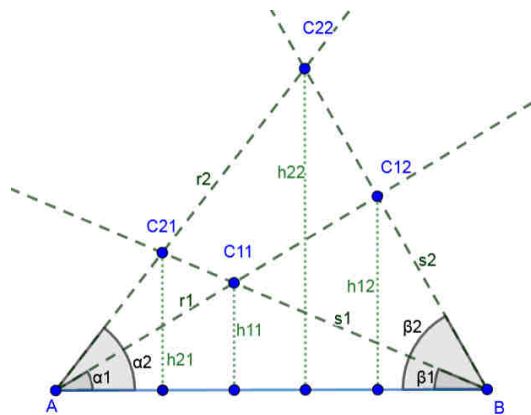
Che ne dite? Una simile linea è seguita da **Franco57**, che non si faceva sentire da una vita, e propone sempre generalizzazioni:

Per il ragionamento successivo è utile fare il semplice calcolo dell'altezza h rispetto alla base AB in un triangolo in funzione della lunghezza c della base e degli angoli α e β rispettivamente in A e in B .



Posto H il piede dell'altezza sulla base e chiamati $\overline{AH} = a$ e $\overline{BH} = b$, abbiamo $\frac{h}{a} = \text{tg}(\alpha)$ e $\frac{h}{b} = \text{tg}(\beta)$, per cui $c = a + b = \frac{h}{\text{tg}(\alpha)} + \frac{h}{\text{tg}(\beta)}$ e quindi $h = \frac{c}{\frac{1}{\text{tg}(\alpha)} + \frac{1}{\text{tg}(\beta)}}$

Il quesito mi ha spinto a scoprire una simpatica proprietà che generalizza il metodo che inizialmente ho usato per la soluzione.



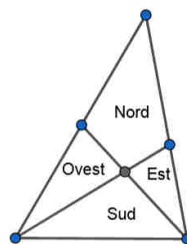
Partiamo adesso sempre da un segmento AB di lunghezza c che sarà la base dei nostri triangoli. Da A tracciamo n rette r_1, r_2, \dots, r_n e da B s_1, s_2, \dots, s_n . Chiamo C_{ij} il punto di incontro di r_i con s_j e H_{ij} il suo piede su AB . Per fissare le idee nel disegno ho messo $n=2$ e i C_{ij} nel semipiano superiore (ma considerando negative le aree dei triangoli che si formano nel semipiano inferiore, come ci si aspetta, la proprietà che presento non cambia). Adesso incrocio ogni r_i con una s_j diversa formando n dei triangoli (ABC_{ij}) . Lo posso fare in $n!$ modi diversi, uno per ogni permutazione σ di $\{1, 2, \dots, n\}$ ponendo $j = \sigma_i$.

Ebbene, la media armonica H_σ delle aree S_{ij} dei triangoli è un'invariante su tutte le permutazioni.

Infatti
$$S_{ij} = \frac{c \cdot h_{ij}}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_i)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta_j)}} \quad \text{e} \quad \text{quindi}$$

$$H_\sigma = n \cdot \sum_i \frac{1}{S_{i\sigma_i}} = n \cdot \sum_i \frac{2}{c^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_i)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta_{\sigma_i})} \right)$$

Ma ovviamente $\sum_i \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta_{\sigma_i})} = \sum_i \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta_i)}$ e quindi H_σ in realtà non dipende da σ .



Per tornare al quesito abbiamo dunque

$$\frac{1}{\text{Nord} + \text{Ovest} + \text{Est} + \text{Sud}} + \frac{1}{\text{Sud}} = \frac{1}{\text{Ovest} + \text{Sud}} + \frac{1}{\text{Est} + \text{Sud}}, \quad \text{da cui}$$

$$\frac{1}{\text{Nord} + 5 + 8 + 10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5 + 10} + \frac{1}{8 + 10} \quad ; \quad \frac{1}{\text{Nord} + 23} + \frac{1}{10} = \frac{1}{15} + \frac{1}{18} \quad ;$$

$$\frac{1}{\text{Nord} + 23} = \frac{6 + 5 - 9}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45} \quad ; \quad \text{Nord} + 23 = 45 \quad ; \quad \text{Nord} = 22.$$

Ci fermiamo qui? Beh, basterebbe, ma **Br1** ci ha mandato un bel trattatello, e noi non riusciamo mai a resistere...

La risposta più semplice ed immediata al quesito delle caprette di RM249 è che, essendo il sub-appezzamento Nord totalmente improduttivo (e lo sapevate benissimo...), lì non cresce neppure un filo d'erba, e quindi le caprette ivi nutribili sono pari a $C_N = 0$. Il numero totale C_T di caprette è allora:

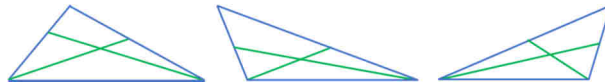
$$1) C_T = C_W + C_S + C_E + C_N = 5 + 10 + 8 + 0 = 23$$

Ciò, ovviamente, tenendo vagamente fede al testo del problema; che fa sì l'assunzione di appetito uniforme fra le caprette; ma non parla di omogeneità delle rese per ettaro dei 4 sub-appezzamenti...

Con l'ipotesi aggiuntiva di resa omogenea d'erba su tutta l'estensione dell'appezzamento complessivo, le cose si complicano un pochettino...

Cominciamo col dire che abbiamo 3 diverse casistiche di triangoli da esaminare; se disegniamo sempre a Sud¹³ la base del triangolo (unico dei tre lati dell'appezzamento complessivo da cui partano entrambe i muretti), il vertice Nord può trovarsi, come da Figura_1 che segue:

in una posizione orizzontalmente intermedia fra gli estremi della base a W (cioè ovest, da adesso in poi) dell'estremo W della base ad E dell'estremo E della base



Figura_1: dov'è il vertice Nord?

I disegni di Figura_1 sono ovviamente solo qualitativi (le ripartizioni in sub-appezzamenti – come superfici – non rispettano precisamente i termini del problema), ma può darsi che spieghino almeno in parte la criptica affermazione rilevabile nel testo del quesito:

[...] per una serie di motivi che forse un giorno vi spiegheremo, vorremmo riuscire a spiegarci senza disegni [...]

Pendiamo dalle labbra dei Rudi... Volevate dirci che con un disegno avreste indirizzato (o compromesso) le soluzioni proposte?

Comunque, prendiamo tanto per partire l'idea che una configurazione risolvibile sia quella con il vertice Nord *intermedio* (come *longitudine...*). Corrispondente quindi alla prima rappresentazione a sinistra della Figura_1.

In questo caso, si vengono a comprendere tutte le situazioni in cui il triangolo da analizzare è *acutangolo alla base*. Questo ingloba anche i casi di triangoli isosceli o equilateri, anche se quest'ultimi non sono previsti dal testo del problema (il triangolo sarebbe richiesto *scaleno...*). E ingloba anche i triangoli ottusi sul vertice N.

La Figura_2 qui sotto rappresenta in dettaglio la configurazione del triangolo che si sta affrontando: detti A, B e D i vertici (la lettera C è destinata alle caprette...), siano α e γ gli angoli alla base. Posti β e δ gli angoli di inclinazione dei muretti, tutti gli altri angoli si ricavano da semplici considerazioni trigonometriche.

I termini C_X – con $X = (W, E, S, N)$ – indicano i quattro sub-appezzamenti, ed L la lunghezza (incognita) della base, espressa in un'unità di misura tale che una superficie di estensione 1 riesca a nutrire esattamente una capretta:

¹³ A Sud, quindi *in basso*. Però mica è scontato... Vedere: <http://www.melisandra.org/laboratori/wp-content/uploads/2011/10/MAPPA-SOTTOSOPRA.jpg>. Oppure, più frivolo (Pazienza...): <https://www.giornalettismo.com/il-25-aprile-secondo-sandro-pertini-e-pazienza/>

$$\begin{aligned}
 3) A_T &= \frac{1}{4} \sqrt{(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DB})(-\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DB})(\overline{AB} - \overline{AD} + \overline{DB})(\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{DB})} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left[L + L \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} + L \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} \right] \left[-L + L \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + L \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} \right] \left[L - L \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} + L \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} \right] \left[L + L \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - L \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Dopo numerosi passaggi algebrico/trigonometrici (che si lasciano per controllo al volenteroso lettore...) si arriva a:

$$4) A_T = \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}}$$

Procedendo in modo analogo per i tre sub-appezzamenti E, W e S, si ricava, ricordando anche i dati del problema:

$$5) \left\{ \begin{aligned}
 A_E &= \frac{L^2}{2} \frac{\tan \gamma - \tan \delta}{\left(\frac{\tan \gamma}{\tan \beta} + 1\right) \left(\frac{\tan \delta}{\tan \beta} + 1\right)} = 8 \\
 A_W &= \frac{L^2}{2} \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\left(\frac{\tan \alpha}{\tan \delta} + 1\right) \left(\frac{\tan \beta}{\tan \delta} + 1\right)} = 5 \\
 A_S &= \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \delta} + \frac{1}{\tan \beta}} = 10
 \end{aligned} \right.$$

La superficie incognita del sub-appezzamento N si ricava per differenza fra quella totale data dalla 4) e quelle dei tre sub-appezzamenti noti date dalle 5):

$$6) A_N = A_T - A_E - A_W - A_S = \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - 8 - 5 - 10 = \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - 23$$

Ora, sembrerebbe che ci siamo impantanati... Abbiamo solo tre equazioni – le 5) – e cinque incognite: L ed i 4 angoli.

Per sbloccare l'imbarazzante impasse, proviamo a calcolare i rapporti fra le superfici W, E e N, e quella S:

$$7) \left\{ \begin{aligned}
 \frac{A_W}{A_S} &= \frac{\frac{L^2}{2} \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\left(\frac{\tan \alpha}{\tan \delta} + 1\right) \left(\frac{\tan \beta}{\tan \delta} + 1\right)}}{\frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \delta} + \frac{1}{\tan \beta}}} = \frac{\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} - 1}{\frac{\tan \alpha}{\tan \delta} + 1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\
 \frac{A_E}{A_S} &= \frac{\frac{L^2}{2} \frac{\tan \gamma - \tan \delta}{\left(\frac{\tan \gamma}{\tan \beta} + 1\right) \left(\frac{\tan \delta}{\tan \beta} + 1\right)}}{\frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \delta} + \frac{1}{\tan \beta}}} = \frac{\frac{\tan \gamma}{\tan \delta} - 1}{\frac{\tan \gamma}{\tan \beta} + 1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\
 \frac{A_N}{A_S} &= \frac{A_T - A_E - A_W - A_S}{A_S} = \frac{\frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - 8 - 5 - 10}{\frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \delta} + \frac{1}{\tan \beta}}} = \frac{\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \delta}}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - \frac{23}{10}
 \end{aligned} \right.$$

Dalle prime due delle 7), con qualche passaggio algebrico si ha:

$$8) \begin{cases} \frac{1}{\tan \beta} = \frac{3}{2 \tan \gamma} + \frac{5}{2 \tan \alpha} \\ \frac{1}{\tan \delta} = \frac{3}{\tan \gamma} + \frac{2}{\tan \alpha} \end{cases}$$

Ora, sostituendo le 8) nella terza delle 7) si ha:

$$9) \frac{A_N}{A_S} = \frac{\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \delta}}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - \frac{23}{10} = \frac{\frac{3}{2 \tan \gamma} + \frac{5}{2 \tan \alpha} + \frac{3}{\tan \gamma} + \frac{2}{\tan \alpha}}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - \frac{23}{10} = \frac{9 \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}}{2 \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - \frac{23}{10} = \frac{22}{10}$$

E quindi, dato che è noto sin dall'inizio che $A_S = 10$, si ricava:

$$10) A_N = 22$$

Che è la risposta al quesito...

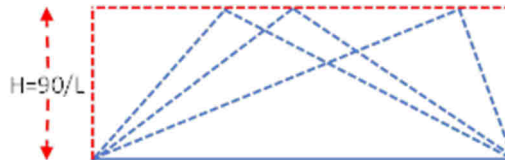
La cosa strabiliante di questo quesito è la *sparizione* di due incognite in un colpo solo, con la semplificazione in rosso nella 9). In pratica, delle 5 variabili del problema (L e i 4 angoli), due possono essere scelte (quasi) arbitrariamente, le altre tre si adattano alle prime due, e la superficie N resta sempre 22!

Tutto ciò fornisce la risposta al quesito, ma lascia un po' insoddisfatti... Quali valori possono assumere le variabili? Vi sono triangoli *impossibili*, che ad esempio ammettono solo muretti all'esterno del triangolo complessivo? Come possiamo *disegnare* almeno un triangolo che illustri la soluzione del problema?

Vediamo come procedere, divagando... Per cominciare, si scelgano L ed α come variabili indipendenti; il fatto che l'area totale sia costante:

$$11) A_T = A_E + A_W + A_S + A_N = 8 + 5 + 10 + 22 = 45$$

comporta che, a parità del valore di L, i triangoli complessivi potenziali candidati abbiano tutti la stessa altezza H:



Figura_3: alcuni triangoli acutangoli alla base candidabili

Ora, riassumiamo qui le 5) e 6), ed introduciamo le 4 variabili R, S, T ed U definite qui sotto nelle 13) (ciò solo per *alleggerire* le formule, e renderle più *maneggevoli*):

$$12) \begin{cases} A_E = \frac{L^2}{2} \frac{\tan \gamma - \tan \delta}{\left(\frac{\tan \gamma}{\tan \beta} + 1\right) \left(\frac{\tan \delta}{\tan \beta} + 1\right)} = 8 \\ A_W = \frac{L^2}{2} \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\left(\frac{\tan \alpha}{\tan \delta} + 1\right) \left(\frac{\tan \beta}{\tan \delta} + 1\right)} = 5 \\ A_S = \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \delta} + \frac{1}{\tan \beta}} = 10 \\ A_N = \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma}} - 23 = 22 \end{cases} \quad 13) \begin{cases} R \equiv \tan \alpha \\ S \equiv \tan \beta \\ T = \tan \gamma \\ U \equiv \tan \delta \end{cases}$$

Con queste posizioni, si ha:

$$14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{L^2}{2} \frac{T-U}{\left(\frac{T}{S}+1\right)\left(\frac{U}{S}+1\right)} = 8 \\ \frac{L^2}{2} \frac{R-S}{\left(\frac{R}{U}+1\right)\left(\frac{S}{U}+1\right)} = 5 \\ \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{U}+\frac{1}{S}} = 10 \\ \frac{L^2}{2} \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{T}} = 45 \end{array} \right.$$

Le 14) costituiscono *apparentemente* un sistema di 4 equazioni nelle 5 incognite L, R, S, T ed U; svolgendo i calcoli si arriva a:

$$15) \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{90T}{L^2T - 90} \\ S = \frac{20U}{L^2U - 20} \\ U = \frac{45T}{TL^2 + 45} \\ U = \frac{45T}{TL^2 + 45} \end{array} \right.$$

E si vede che le ultime due equazioni delle 15) sono identiche! Ma è quello che dovevamo aspettarci: il sistema 14) è composto infatti da relazioni *non indipendenti*, altrimenti in precedenza nella 9) non sarebbe stato così semplice disfarsi del termine in rosso...

Comunque, dato che si è stabilito di utilizzare L ed α (e quindi R) come variabili indipendenti, rimescolando le prime 3 delle 15) si arriva a:

$$16) \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{60R}{L^2R + 60} \\ T = \frac{90R}{L^2R - 90} \\ U = \frac{30R}{L^2R - 30} \end{array} \right.$$

E finalmente abbiamo le equazioni per S, T ed U (e quindi per β , γ e δ), in funzione di L e R (L ed α); poiché ci stiamo occupando solo del caso di *appezzamento complessivo acutangolo alla base*, dovrà essere:

$$17) \left\{ \begin{array}{l} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \rightarrow 0 < R < \infty \\ 0^\circ < \beta < \alpha \rightarrow 0 < S < R \\ 0^\circ < \gamma < 90^\circ \rightarrow 0 < T < \infty \\ 0^\circ < \delta < \gamma \rightarrow 0 < U < T \end{array} \right.$$

Dati questi vincoli si può dire che:

la prima delle 17) garantisce che la prima delle 16) produca sempre valori positivi; quindi la prima disequazione della seconda delle 17) – cioè $S > 0$ – è soddisfatta

la seconda disequazione della seconda delle 17) – cioè $S < R$ – è soddisfatta se:

$$18) S = \frac{60R}{L^2R + 60} < R$$

cioè se:

$$19) L^2R > 0$$

ma ciò è sempre vero, grazie alla prima delle 17)

la prima disequazione della terza delle 17) – cioè $T > 0$ – è soddisfatta se:

$$20) T = \frac{90R}{L^2R - 90} > 0$$

cioè se:

$$21) R > \frac{90}{L^2} \rightarrow \alpha > \tan^{-1}\left(\frac{90}{L^2}\right)$$

ciò pone una prima costrizione ai valori che α può assumere al variare di L
la prima disequazione della quarta delle 17) – cioè $U > 0$ – è soddisfatta se:

$$22) U = \frac{30R}{L^2R - 30} > 0$$

cioè se:

$$23) R > \frac{30}{L^2} \rightarrow \alpha > \tan^{-1}\left(\frac{30}{L^2}\right)$$

ciò pone una seconda costrizione ai valori che α può assumere al variare di L
la seconda disequazione della quarta delle 17) – cioè $U < T$ – è soddisfatta se:

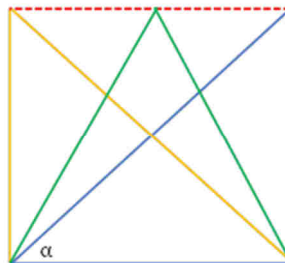
$$24) U = \frac{30R}{L^2R - 30} < T = \frac{90R}{L^2R - 90}$$

che è sempre vera, grazie alla prima delle 17)

In sintesi, la costrizione più forte 21) impone un limite inferiore ai valori che α può assumere; e adesso possiamo divertirci con Excel™ e provare a tracciare qualche grafichino...

Per prima cosa scegliamo un valore di L *decente*; per far questo, sappiamo che la superficie totale del triangolo, dalla 11), è 45. Per avere un triangolo *disegnabile* (cioè che entri opportunamente in una pagina Word™...) non si può scegliere $L=0,01$ o $L=7410$; avremmo $H=9000$ o $H=0,012$... Se invece scegliamo $L=10$, avremo $H=9$, cioè qualcosa come quanto mostrato nella Figura_4 che segue, per la quale la 21) diventa:

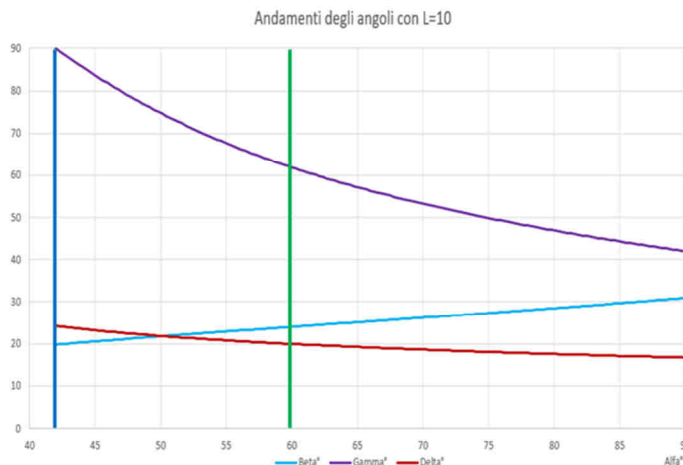
$$25) \alpha > \tan^{-1}\left(\frac{90}{L^2}\right) \cong 42^\circ$$



Figura_4: triangoli acutangoli alla base decenti

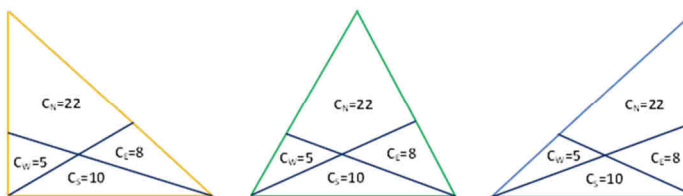
In figura, il triangolo con lati in blu è quello corrispondente al caso limite dato dalla 25) (se α fosse inferiore, diventerebbe ottusangolo a destra, cioè con $\gamma > 90^\circ$); quello con i lati in arancio corrisponde al caso $\alpha=90^\circ$ (se fosse superiore, di nuovo il triangolo diventerebbe ottusangolo), e quello con i lati in verde con un valore intermedio, pari ad $\alpha=60^\circ$ nell'esempio.

In Figura_4 non vi sono ancora i muretti; prima di rappresentarli, vediamo in grafico l'andamento di β , γ e δ al variare di α , con $L=10$, ricavato in base alle 16) e 13):



Figura_5: Tutti gli angoli del triangolo acutangolo alla base (con L=10)

Le tre linee colorate verticali corrispondono ai tre casi di Figura_4; e i tre corrispondenti appezzamenti completi di muretti sono rappresentati qui sotto:

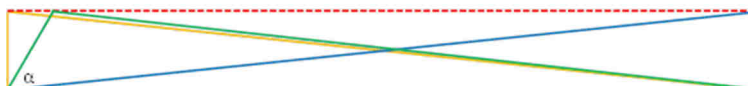


Figura_6: I primi appezzamenti acutangoli alla base completi di muretti (con L=10)

E se l'appezzamento fosse invece largo e basso? Ad esempio, con L=29,28 (e quindi H=3,07)¹⁴? La 25) diviene in questo caso:

$$26) \alpha > \tan^{-1} \left(\frac{90}{L^2} \right) \cong 6^\circ$$

L'equivalente della Figura_4 è:



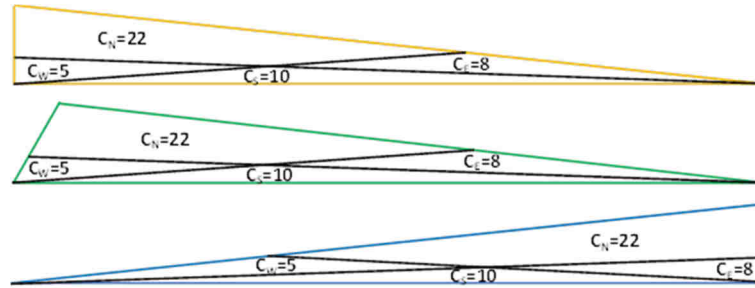
Figura_7: triangoli acutangoli alla base schiacciati

L'equivalente della Figura_5 è poi:



¹⁴ Perché questi valori *strampalati*? Per colpa di Word™... Nel fare i disegni, Word™ non accetta angoli con cifre decimali, e ad esempio trasforma 5,7° in 6° se si tenta di inclinare un segmento... Accetta invece segmenti la cui lunghezza abbia due cifre decimali. I triangoli delle figure 7 e 9 sono rappresentati con la stessa unità di misura di quelli delle figure 4 e 6; quindi gli appezzamenti triangolari hanno tutti la stessa "superficie Word™" (più o meno), larghi, medi o stretti che siano...

**Figura_8: Tutti gli angoli del triangolo *acutangolo alla base* (con L=29,28)
E quello della 6):**

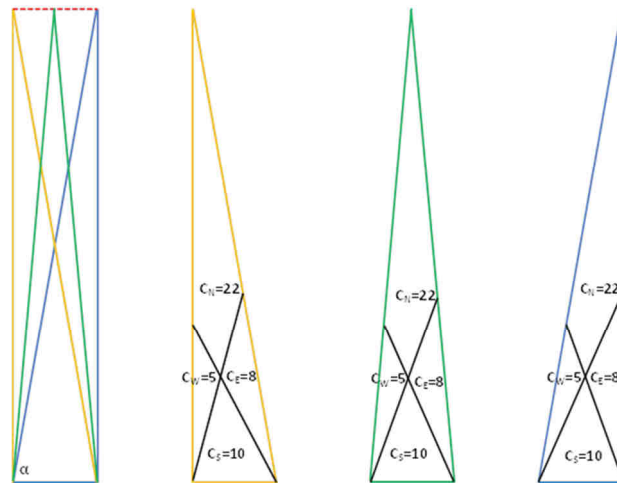


**Figura_9: Altri appezzamenti *acutangoli alla base* completi di muretti
(con L=29,98)**

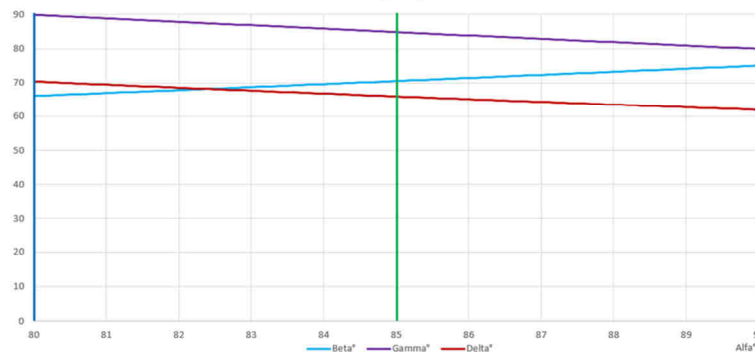
E se poi l'appezzamento fosse *stretto e alto*? Ad esempio, con L=4 (e quindi H=22,5)?
Si ha adesso:

$$27) \alpha > \tan^{-1}\left(\frac{90}{L^2}\right) \cong 80^\circ$$

E le tre figure di cui sopra divengono (scegliendo stavolta $\alpha=85^\circ$ come caso intermedio):



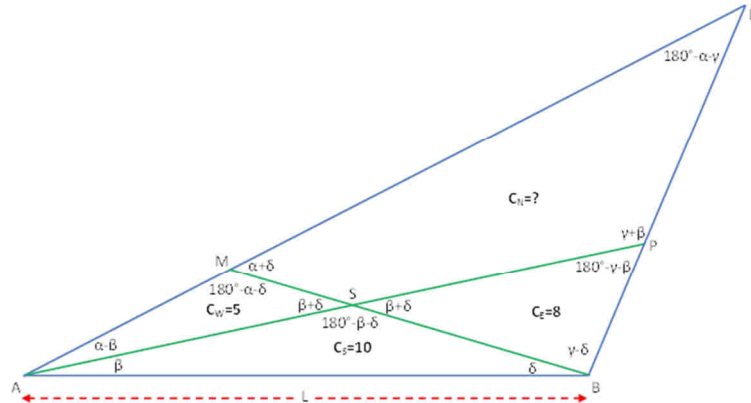
Andamenti degli angoli con L=4



Figura_10: Ancora altri appezzamenti *acutangoli alla base* completi di muretti (con L=4)

E per gli appezzamenti *acutangoli alla base* è tutto...

Vediamo cosa accade con un appezzamento *ottusangolo alla base a destra*¹⁵: la figura da considerare, equivalente alla Figura_2, è quella che segue; si vede che, pur cambiando la posizione dei vertici dell'appezzamento e dei vari sub-appezzamenti (nonché della Stalla...), la valutazione di tutti gli angoli resta immutata. In questa configurazione, è γ ad essere ottuso, mentre le sue parti δ e $\gamma-\delta$ potrebbero esserlo o no (nel caso, una sola delle due). L'angolo α è invece necessariamente acuto, non potendovi essere più di un angolo ottuso in un triangolo.



Figura_10: i dettagli del triangolo *ottusangolo alla base a destra*

E quindi, essendo questo triangolo semplicemente *deformato* rispetto all'*acutangolo alla base*, tutte le considerazioni e le formule valide per quello sono ancora applicabili, dalla prima fino al gruppo di equazioni 16), incluso il fatto che il sub-appezzamento N avrà ancora estensione $A_N=22$.

Per poter disegnare adesso qualche *triangolo ottusangolo alla base a destra*, ricordiamo qui le 13) e 16):

$$28) \begin{cases} S = \frac{60R}{L^2R + 60} \\ T = \frac{90R}{L^2R - 90} \\ U = \frac{30R}{L^2R - 30} \end{cases} \quad 29) \begin{cases} R \equiv \tan \alpha \\ S \equiv \tan \beta \\ T = \tan \gamma \\ U \equiv \tan \delta \end{cases}$$

Ora, ciò che cambia è l'equivalente delle 17):

$$30) \begin{cases} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \rightarrow 0 < R < \infty \\ 0^\circ < \beta < \alpha \rightarrow 0 < S < R \\ 90^\circ < \gamma < 180^\circ \rightarrow -\infty < T < 0 \\ 0^\circ < \delta < \gamma \rightarrow 0^\circ < \delta < 180^\circ \rightarrow -\infty < U < \infty \end{cases}$$

Preoccupano un po' i vincoli (o meglio *non* vincoli...) su U, che praticamente può assumere qualsiasi valore...

Comunque, continuando a considerare L ed α come variabili indipendenti, interessano soprattutto le costrizioni su α (e quindi su R); dati questi vincoli si può dire che:

la prima delle 30) garantisce che la prima delle 28) produca sempre valori positivi; quindi la prima disequazione della seconda delle 30) – cioè $S > 0$ – è soddisfatta

la seconda disequazione della seconda delle 30) – cioè $S < R$ – è ancora soddisfatta se $L^2R > 0$, quindi sempre

la prima disequazione della terza delle 30) – cioè $T > -\infty$ – è sempre soddisfatta; la seconda – $T < 0$ – lo è se:

¹⁵ Quello raffigurato a destra in Figura_1...

$$31) T = \frac{90R}{L^2R - 90} < 0$$

cioè se:

$$32) R < \frac{90}{L^2} \rightarrow \alpha < \tan^{-1}\left(\frac{90}{L^2}\right)$$

e ciò pone l'unica costrizione ai valori che stavolta α può assumere al variare di L (oltre ad $\alpha > 0$)

la quarta delle 30) non impone nessuna costrizione su α ; osserviamo però che – dalla terza delle 28) – U è positivo solo quando:

$$33) L^2R - 30 > 0$$

ciò capita quando δ passa dall'essere ottuso ad acuto, e questo si ha quando:

$$34) R > \frac{30}{L^2} \rightarrow \alpha > \tan^{-1}\left(\frac{30}{L^2}\right)$$

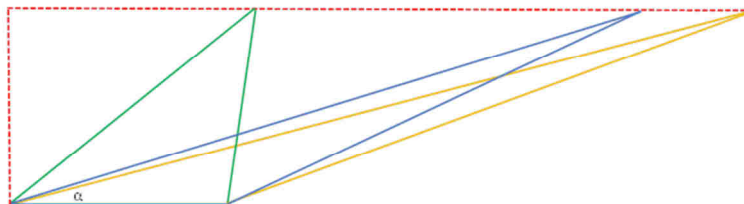
Cominciamo col considerare triangoli con rapporto d'aspetto *dignitoso*; scegliamo di nuovo L=10, come nel caso dei triangoli *acutangoli alla base* visti sopra. Stavolta, vengono rappresentati i tre seguenti sotto-casi:

quello con γ un po' maggiore di 90° , in verde

quello *critico*, con α che soddisfa al milligrado la condizione 34), quando U cambia segno, in blu ($\delta=90^\circ$)

quello con δ *abbastanza* maggiore di 90° con triangolo *stirato* verso destra, in arancio

il caso limite $\delta=90^\circ$ è già stato trattato prima, con triangoli in blu nella descrizione di quelli *acutangoli alla base*

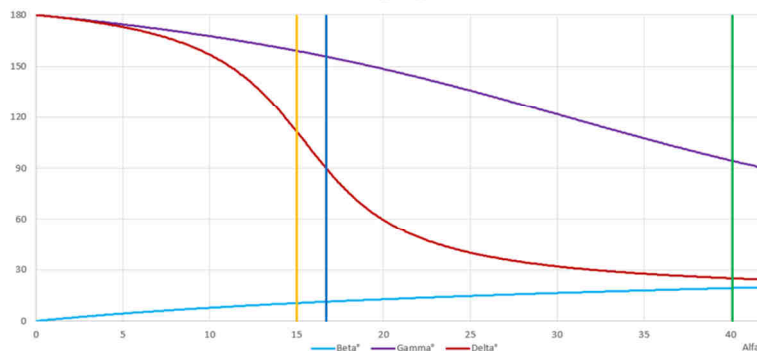


Figura_11: triangoli ottusangoli alla base a destra dignitosi

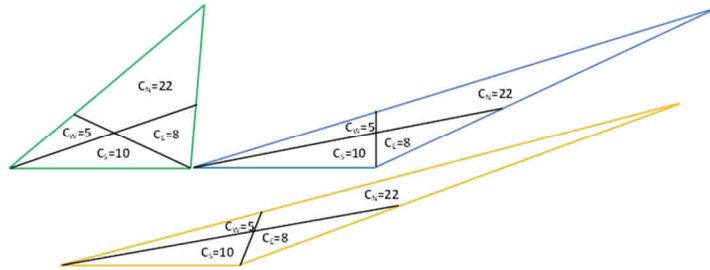
In Figura_11 di nuovo non vi sono ancora i muretti. Prima di rappresentarli, vediamo nuovamente in grafico l'andamento di β , γ e δ al variare di α , con L=10; grafico ricavato in base alle 28) e 29). Si dovrà porre, in base alla 32):

$$35) R < \frac{90}{L^2} \rightarrow \alpha < \tan^{-1}\left(\frac{90}{L^2}\right) \cong 42^\circ$$

Andamenti degli angoli con L=10



Figura_12: Gli angoli del triangolo ottusangolo alla base a destra (con L=10)



Figura_13: I primi appezzamenti ottusangolo alla base a destra completi di muretti (con L=10)

Per gli *appezzamenti larghi*, con L=30 si ha, ancora in base alla 32):

$$36) R < \frac{90}{L^2} \rightarrow \alpha < \tan^{-1}\left(\frac{90}{L^2}\right) \cong 5,7^\circ$$



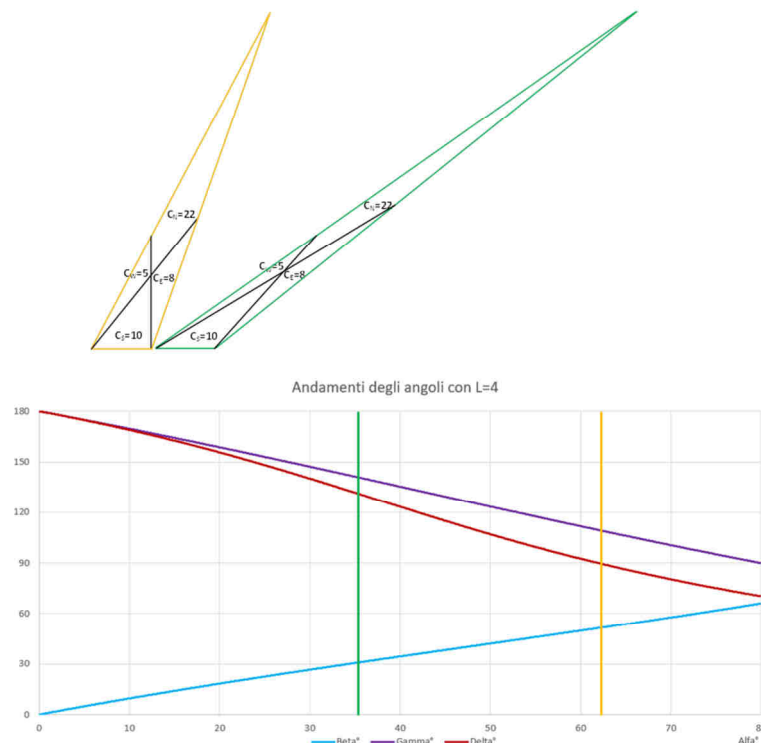
Figura_14: Gli angoli del triangolo ottusangolo alla base a destra (con L=30)

Il sotto-caso indicato dalla riga verticale blu, sulla destra, corrisponde più o meno a quello già rappresentato dal triangolo blu della Figura_9. Quelli relativi alle righe verticali verde ed arancio (il primo ha $\delta=90^\circ$), sono praticamente non disegnabili, perché troppo schiacciati...

Vediamo cosa capita invece per *appezzamenti stretti*, con L=4; qui si ha:

$$37) R < \frac{90}{L^2} \rightarrow \alpha < \tan^{-1}\left(\frac{90}{L^2}\right) \cong 80^\circ$$

Stavolta, scegliamo come rappresentativi gli appezzamenti con $\alpha \approx 62^\circ$ (in arancio, che corrisponde a $\delta=90^\circ$), ed α intermedio (35° , in verde); i soliti disegni sono rappresentati qui di seguito; anche qui, bisogna rinunciare a rappresentare un triangolo con α piccolo (ad esempio, $\alpha=10^\circ$), perché *troppo largo* per entrare nel foglio Word™...



Figura_15: Altri appezzamenti ottusangoli alla base a destra completi di muretti (con L=4)

E per gli appezzamenti *ottusangoli alla base a destra* sarebbe tutto...

Infine, davvero, per gli appezzamenti *ottusangoli alla base a sinistra*, sostanzialmente le cose non cambiano molto rispetto ai precedenti *ottusangoli alla base a destra*: la lieve asimmetria fra i valori delle superfici dei sub-appezzamenti W ed E porterebbe a figure molto simili a quelle già viste, semplicemente riflesse orizzontalmente ma qualitativamente analoghe.

Incredibile, vero? Adesso però basta, passiamo secondo problema.

4.3.2 Abboffata di (metà) caramelle

Un altro problema con la teoria dei giochi!

Due giocatori hanno a disposizione un sacchetto contenente N caramelle e, a turno, possono prenderne quante vogliono, da una a metà delle caramelle presenti. Perde chi non riesce a fare una mossa legale.

Per quali valori di N il primo giocatore ha una strategia di vittoria? E il secondo?

Indovinate chi ci ha scritto per primo? Ormai succede molto raramente, per cui ci fa doppiamente piacere una risposta-blitz del nostro **.mau.**:

Per il 249.2, il secondo giocatore vince se e solo se il numero di caramelle è una potenza di due meno 1. Con una caramella è ovvio che il primo giocatore non abbia mosse, con due caramelle l'unica mossa a disposizione è prenderne una e vincere, con tre caramelle l'unica mossa a disposizione è prenderne una e perdere. Più avanti, se il numero di caramelle è compreso tra 2^k e $2^{k+1}-2$ chi gioca può sempre portare il numero di caramelle a 2^k-1 , mentre chi se ne trova $2^{k+1}-1$ è costretto a lasciarne tra 2^k e $2^{k+1}-2$. Da qua per discesa (non) infinita si arriva alla soluzione.

La strategia di **Valter** è la stessa:

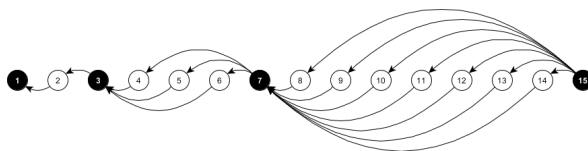
Ho una strategia di vittoria per tutti gli N da 2^n a $2^{n+1}-2$ con $n>0$ altrimenti vince l'avversario.

Alberto R. si limita a definire la mossa del giocatore di turno:

- Controlla se Il numero di caramelle è del tipo $2^n - 1$
- Sì. Rassegnati: puoi solo sperare in una grillata del tuo avversario.
- No. rendilo sempre tale ed hai vinto.

Non commentiamo ovviamente sulla definizione dell'errore avversario. Ci limitiamo ad aggiungere la versione del **Panurgo**:

Prendo a prestito (cfr. G. Polya, *How to Solve It*) le idee necessarie a risolvere questo problema dalla risposta da me data ad un quesito posto nel numero 225 di una prestigiosa e-zine.



Con riferimento alla figura, da ciascun numero nero si possono raggiungere solo numeri bianchi; da ogni numero bianco è sempre possibile raggiungere un numero nero: se il secondo di mano mette nel sacchetto $2^k - 1$ caramelle è sicuro di vincere se, ad ogni mossa, lascia un numero dello stesso tipo.

Per esempio, partendo da 15 caramelle, se il primo di mano ne prende una il secondo ne prende sette, se il primo ne prende due il secondo ne prende sei, ecc. facendo così in modo che il primo di mano si trovi con sette caramelle. Di nuovo, qualunque numero di caramelle il primo giocatore prenda il secondo risponderà lasciandone tre. Indi una.

Il primo di mano ha una consolazione: se prende sempre il numero massimo di caramelle costringerà il secondo a prenderne sempre una sola se vuole “vincere”. In questo modo egli si abborferà con molto più di metà caramelle (almeno per quasi tutti i valori di k): precisamente ne mangerà $2^k - k - 1$, il secondo ne mangerà $k - 1$ (una caramella rimane nel sacchetto).

Questo è però importante, se ricordate quanto golosi siano i Redattori della Prestigiosa Rivista. Vediamo ancora che cosa scrive **Luigi**:

Partiamo dalla constatazione che, a parte la soluzione banale di mettere nel sacchetto una sola caramella, se il giocatore A consegna 3 caramelle al giocatore B ottiene la vittoria poiché il giocatore B non potrà fare altro che prenderne una e riconsegnarne 2 al giocatore A che a sua volta ne prenderà una e consegnerà l'ultima caramella rimasta al giocatore B.

Risulta subito evidente che se il giocatore A consegnasse $3 \cdot 2 + 1$ caramelle al giocatore B avrà allo stesso modo la vittoria poiché il giocatore A potrà prendere da 1 a 3 caramelle consegnandone al giocatore A da 6 a 4 caramelle e quest'ultimo potrà in ogni caso ridare al giocatore B 3 caramelle.

Lo stesso ragionamento ci porta a considerare vincente la consegna iniziale di $7 \cdot 2 + 1$ caramelle e così via...

Quindi il giocatore A, che decide il numero di caramelle da mettere nel sacchetto, ha una strategia vincente data dal mettere nel sacchetto $2^N - 1$ caramelle.

Se dovesse mettere qualsiasi altro numero di caramelle il giocatore B avrà a sua volta una strategia vincente che consiste appunto nel prendere il numero di caramelle che gli permetta di consegnare al giocatore A $2^N - 1$ caramelle.

E con questo pensiamo di avervi fatto vedere più o meno tutto quello che è arrivato in Redazione. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Vi propongo un gioco: lanciamo una moneta (onesta) più volte: se compare per prima la sequenza Croce-Croce-Testa vincete 16 euro, se compare prima la sequenza Testa-Croce-Croce perdetevi 8 euro. Accettate?

I primi due lanci della moneta possono essere (con pari probabilità):

Testa-Testa

Testa-Croce

Croce-Testa

Croce-Croce.

Nei primi tre casi, Testa-Croce-Croce ha possibilità di comparire prima di Croce-Croce-Testa, visto che Testa-Croce-Croce deve cominciare con Testa; solo l'ultima sequenza ha la possibilità di far comparire prima Croce-Croce-Testa. Quindi, la vostra probabilità di vittoria è solo una su quattro, e il vostro guadagno atteso sarà: $\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{3}{4} \cdot 8 = -2$. No, non vi conviene.

6. Pagina 46

Dimostreremo il teorema per induzione.

Per $n = 1$, qualsiasi quadrato (maggiore di 1) soddisfa la richiesta.

Per il caso n , supponiamo che tutti i numeri naturali:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

siano tutti divisibili per un quadrato perfetto maggiore di 1; verifichiamo che questo implica l'esistenza di $n+1$ numeri naturali consecutivi con la medesima proprietà.

Sia s_i un quadrato perfetto maggiore di 1 divisore di a_i per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, e sia L il prodotto dei diversi s_i . Essendo gli a_i consecutivi, si ha che $a_2 = a_1 + 1$ e avanti così. Mantenendo questa notazione, indichiamo $a_n + 1$ come a_{n+1} , in modo tale che la sequenza $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ siano numeri naturali consecutivi. Sia inoltre $A = a_{n+1} (L+2) L$.

Contenendo il fattore L , A è divisibile per ogni s_i . Ora, consideriamo gli $n+1$ numeri naturali consecutivi:

$$A+a_1, A+a_2, \dots, A+a_{n+1}.$$

Per $i = 1, 2, \dots, n$ abbiamo che s_i divide sia A che a_i , e quindi ognuno dei primi n numeri è divisibile per un quadrato maggiore di 1. L'ultimo numero è:

$$A + a_{n+1} = a_{n+1} (L + 2) L + a_{n+1} = a_{n+1} (L^2 + 2L + 1) = a_{n+1} (L + 1)^2$$

Essendo $s_i > 1$, allora $L > 1$, e quindi $(L+1)^2$ è un quadrato maggiore di 1. Quindi, tutti gli $n+1$ numeri sono divisibili per dei quadrati maggiori di 1, e la tesi segue per induzione.

Si può dimostrare, per la stessa via, che per qualsiasi numero naturale n esistono n numeri naturali consecutivi ognuno dei quali è divisibile per una potenza m -esima con m maggiore di 2: è sufficiente scegliere gli s_i come potenze m -esime e modificare la definizione di A come:

$$A = a_{n+1} [(L+1)^m - 1].$$

Si noti che questa argomentazione non solo stabilisce l'esistenza di qualsiasi sequenza del tipo richiesto, ma mostra come costruirla per via iterativa. Visto che l'unica proprietà richiesta a L è che sia divisibile per ogni s_i , anziché prendere per L il prodotto è sufficiente prendere il minimo comune multiplo, che può essere un numero più piccolo e semplificare i calcoli.

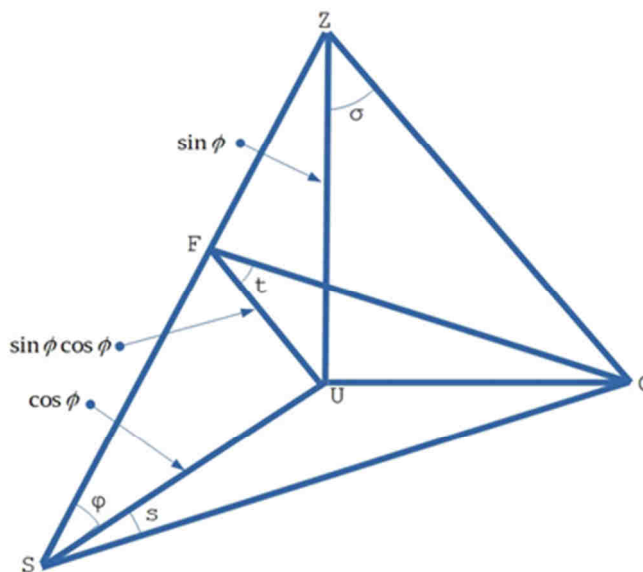


7. Paraphernalia Mathematica

Scusate, ma andiamo di stretto (che sarebbe “andiamo di fretta” nel dominio spaziale): ci serve che un mucchio di cose stiano in una sola pagina. Questa.

Per cominciare, consideriamo due forme di meridiana: quella *orizzontale* e quella *verticale meridionale*: nella prima il piano E del quadrante è orizzontale, nella seconda verticale. L’asse terrestre è rappresentato dallo **gnomone** o **stilo** (se verticale) che getta l’ombra su E. A mezzogiorno (locale) l’ombra è in posizione centrale, sulla **linea meridiana**, e ad un’ora t forma un angolo s (per l’orizzontale) o σ (per la verticale) con la linea meridiana (*attenzione* che sono angoli *orientati*) detto **angolo dell’ombra**. Il piano formato dal Sole, dallo gnomone (e dall’ombra, che giace sempre su questo piano) è detto **piano dell’ombra**.

Problema: determinare l’angolo d’ombra in funzione di t .



In figura, US, UO e UZ sono i segmenti da U verso *Sud*, *Est* e lo *Zenit*, in modo tale che SZ rappresenti lo gnomone. In questo modo, USZ è la latitudine ϕ della meridiana e SOZ è il piano dell’ombra, e quindi SO è l’ombra. USO è l’angolo dell’ombra per la meridiana *orizzontale* s , mentre UZO è quello della meridiana *verticale* σ . L’angolo t tra il piano d’ombra SOZ e il mezzogiorno (piano SUZ) è l’angolo UFO formato da UF e dalla perpendicolare a OF tirata da O a SZ. Se consideriamo SZ unitario, dal triangolo rettangolo SUZ abbiamo $US = \cos \phi$, $UZ = \sin \phi$, $UF = \sin \phi$, $UF = \sin \phi \cos \phi$, dal triangolo UOF abbiamo $UO = \sin \phi \cos \phi \tan t$, e dai triangoli USO e UZO infine $UO = \cos \phi \tan s$ e $UO = \sin \phi \tan \sigma$. Ponendo le tre espressioni di UO uguali tra loro, si ha:

$$\tan s = \sin \phi \tan t$$

$$\tan \sigma = \cos \phi \tan t$$

che risolve il problema.

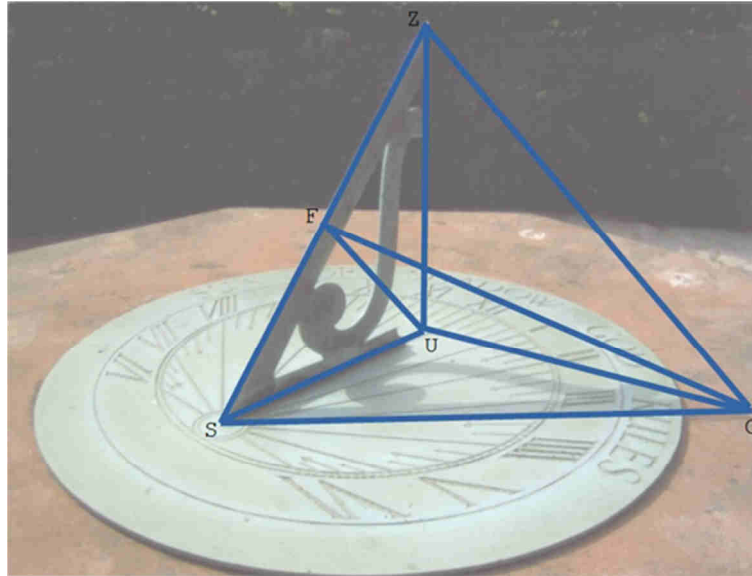
Bene, c’è stato tutto. Adesso, possiamo respirare. E mettere il titolo.

7.1 “Puro e disposto a salir le stelle” - [1] - Che ore sono?

Sapete tutti che, da tempo, Rudy insegue l’idea di scrivere un libro sulla matematica (e non solo) delle meridiane. Arrivato ormai per la terza volta al secondo capitolo, si è stufato per la quarta volta (la prima è stata mentre decideva gli argomenti, quindi conta poco) e, visto che in quel di ottobre abbiamo trovato una meridiana che è una meraviglia, ha deciso di abbandonare (tranquilli, lo aveva deciso anche le volte precedenti); solo un agile trattato di trigonometria astronomica (con una notazione atroce) lo ha convinto a

riprendere in mano l'argomento, quindi iniziamo una nuova serie nel quale cercheremo di tradurre gli scarabocchi che abbiamo trovato.

Adesso, affrontiamo il problema della meridiana orizzontale con un po' più di calma. Per prima cosa, rileggetevi la pagina precedente, poi confrontate il disegno che c'è là con questo¹⁶.

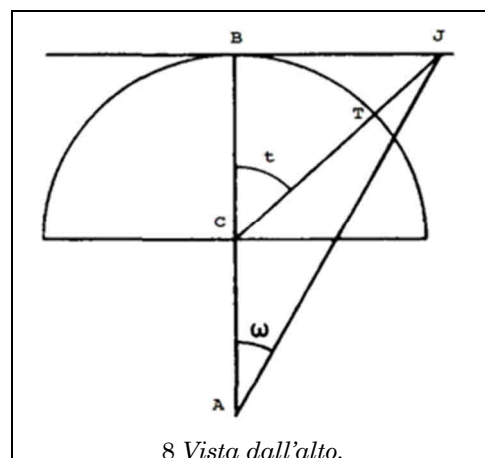


...tutto più chiaro, adesso?

Per quanto riguarda la meridiana verticale, non stiamo a rifarvi il disegno (anche perché fotografarne una “dalla parte giusta” non è facile, e non abbiamo trovato foto soddisfacenti; ci basti dire che il ruolo giocato dal coseno della latitudine (che poi è l'angolo ZSU) qui è giocato dal seno della medesima, e quindi i calcoli sono facilmente trasferibili dal piano SUO al piano ZUO, ottenendo la seconda formula vista sopra: notate che σ è in un “posto diverso” rispetto a s , giocando comunque lo stesso ruolo sulla verticale.

Fatti tutti i conti, ottenuta una simpatica tabellina, si tratta di tracciare i punti e tirare le righe, punto nel quale è facilissimo sbagliare le misure o le direzioni. Sin quando siete per terra (ossia se state facendo una meridiana orizzontale) la cosa non è eccessivamente problematica: trasferite il tutto sulla meridiana verticale a mezza altezza del campanile del Duomo più vicino e (soprattutto se siete soggetti a vertigini come il sottoscritto) i numeri cominciano a ballarvi davanti e trovare un punto può diventare un'impresa epica.

Fortunatamente, esiste anche un metodo grafico per tracciare la nostra meridiana (orizzontale, per ora: le modifiche per verticalizzarla seguiranno a ruota). Su un segmento considerato unitario AB, partendo da B marchiamo la distanza $\sin\phi$ ottenendo il punto C; se tracciamo il semicerchio di centro C e centro d'arco B e la tangente in B al semicerchio (che risulta perpendicolare a AB). Se adesso tracciamo l'angolo temporale t (ad esempio, come in figura, 45° per tre ore), estendiamo CT sino all'intersezione J con la tangente in B e tracciamo la retta da J ad A, allora l'angolo ω è il nostro angolo s per il tempo t .



¹⁶ Dal sito della British Sundial Society, elaborazione nostra.

Se volete un po' più di formalismi, considerate che dal triangolo BJA si ricava che $BJ = BA \tan \omega$, mentre dal triangolo BJC si ha $BJ = BC \tan t$, da cui segue $BA \tan \omega = BC \tan t$, ma essendo $BC = BA \sin \phi$, si ha finalmente che:

$$\tan \omega = \sin \phi \tan t$$

che è la formula cercata. Nel caso della meridiana verticale (oltre a guardare il disegno al contrario), è sufficiente scambiare $\sin \phi$ con $\cos \phi$ e s con σ ; il disegno risulterà con B che punta a Nord e A che punta a sud nel caso della meridiana orizzontale, B in alto e A in basso nel caso della meridiana verticale; in entrambi i casi lo stilo viene fissato in A parallelo all'asse terrestre.

Adesso, il motto ve lo trovate da soli.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms