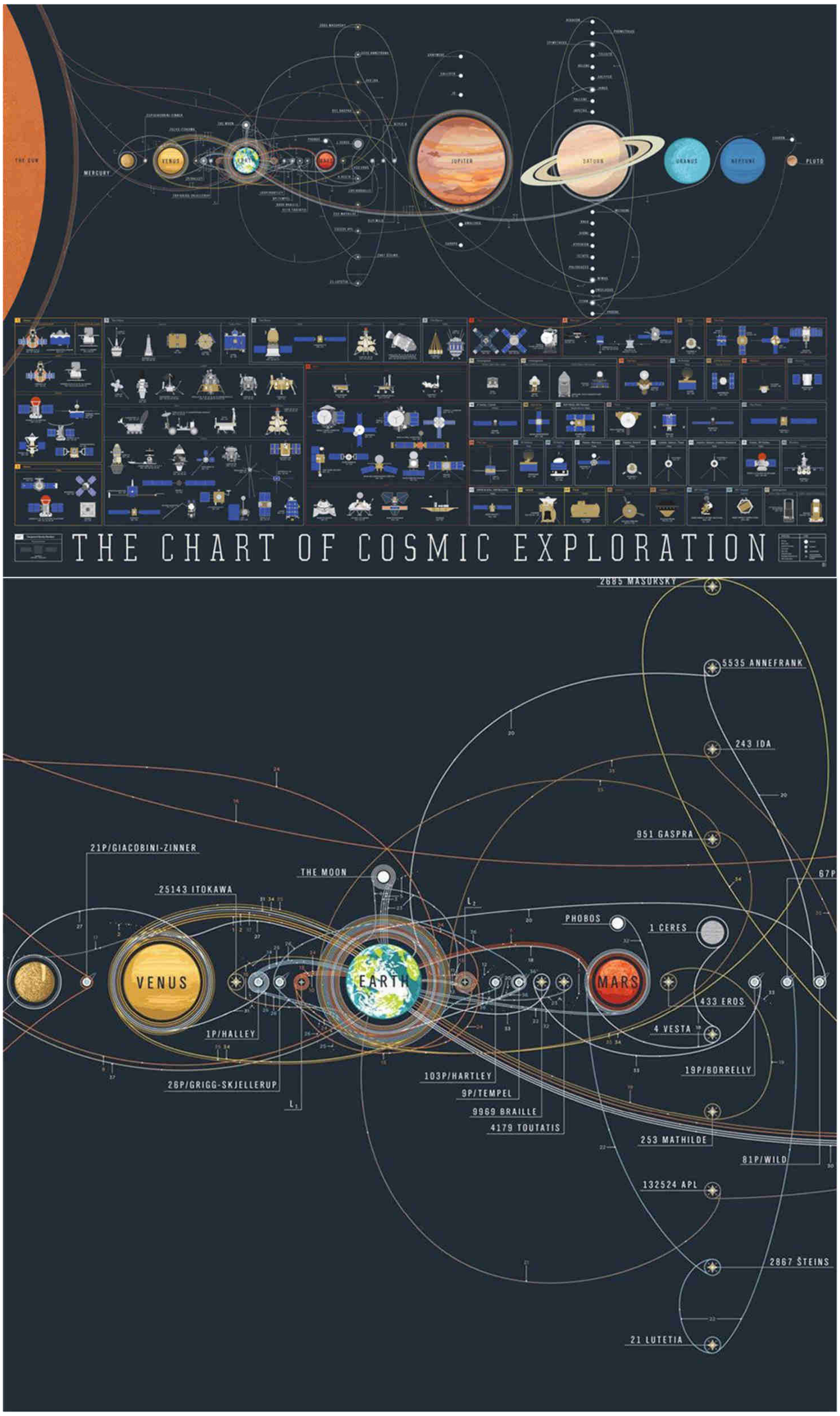
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 245 – Giugno 2019 – Anno Ventunesimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM244 ha diffuso 3'307 copie e il 16/06/2019 per Google eravamo in 12'800 pagine.

In fondo, a noi Tolomeo è sempre stato simpatico. Supponete i pianeti fermi, e tracciate le esplorazioni dello spazio svolte dall'uomo: *The Colossal Shop* lo ha fatto, e vende il tutto per 37 dollari. Interessante: tutto quel traffico ai Lagrangiani non ce lo aspettavamo. Ci sembravano (ingiustamente) ignorati.

1. Paura e Terrore

"Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
E questa siepe, che da tanta parte
Dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminati
Spazi di là da quella, e sovrumani
Silenzi, e profondissima quïete
Io nel pensier mi fingo, ove per poco
Il cor non si spaura. E come il vento
Odo stormir tra queste piante, io quello
Infinito silenzio a questa voce
Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
E le morte stagioni, e la presente
E viva, e il suon di lei. Così tra questa
Immensità s'annega il pensier mio:
E il naufragar m'è dolce in questo mare."

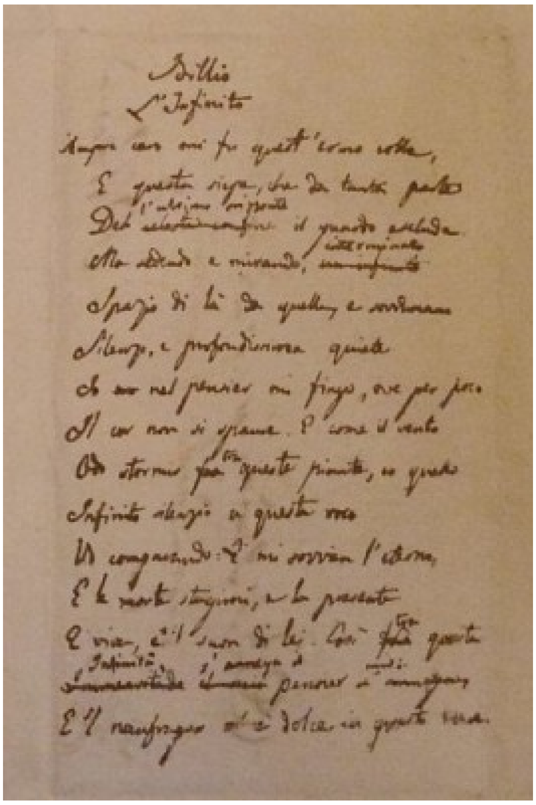
È tutt'altro che insolito che un paese abbia quella che potremmo chiamare OLN, Opera Letteraria Nazionale: in un certo senso, l'OLN è un simbolo di unità quasi al pari della bandiera o dell'inno. Certo, occorrono un certo numero di condizioni perché l'opera letteraria possa ragionevolmente assurgere a tale augusto compito: innanzitutto, essendo veicolata dal linguaggio, deve esistere una "lingua nazionale" fortemente caratterizzata e condivisa[1], e l'opera deve essere scritta appunto in quell'idioma; anzi, assai spesso diventa "simbolo nazionale" proprio quella OLN che in qualche modo sancisce e ratifica la lingua usata nella sua scrittura come "lingua nazionale" – l'inglese di Shakespeare e l'italiano di Dante ne sono splendidi esempi. Poi – o per meglio dire "prima" – occorre che ci sia un certo sentimento, una decisa idea di "nazione"[2], tant'è che la maggior parte delle OLN sono spesso poemi epici, insomma celebrazioni di epopee: ne sono esempi "*Os Lusíadas*" di Luis Vaz de Camões per il Portogallo, il "*Cantar de mio Cid*" per la Spagna, il "*Kalevala*" finlandese e molti altri, per non parlare dei superclassici di nazioni e popoli antichi come l'Iliade, l'Odissea e l'Eneide.

L'Italia non può certo lamentarsi, da questo punto di vista: certo, la sua unità nazionale è stata più tardiva e travagliata di altre grandi nazioni, e non si può forse parlare di un'opera propriamente di "epica italiana", ma ha marchiato così a fondo la cultura occidentale che non ha difficoltà a recuperare singole epopee locali (a volerle contare, probabilmente nessun altra nazione al mondo possiede all'interno dei suoi confini così tante città che si sono potute fregiare del titolo di "capitale" di qualche forma statuale di una certa importanza), o ripiegare con geografico e storico diritto sull'epopea di Roma, che ha generato quasi tutte le altre epopee dell'area europea. Ma anche tralasciando questi meccanismi artificiosi per recuperare un'epica, l'Italia può comunque vantare una OLN poetica di valore universale nella *Divina Commedi*a, il cui merito principale è forse proprio quello di avere fissato la nascita della lingua; e una OLN in forma di romanzo, "*I Promessi Sposi*", che ratifica ed estende a quella lingua il valore nazionale, peraltro quasi in coincidenza con la ritrovata unità politica.

[1] Questo rende difficile l'esistenza di opere letterarie nazionali in quegli stati in cui le lingue nazionali sono più d'una; ne sono testimoni, ad esempio, sia il Belgio che la Svizzera: entrambi, addirittura nella denominazione ufficiale della nazione, ricorrono al latino come lingua franca. Il Belgio è chiamato *Belgique* dai Valloni, *België* dai Fiamminghi e *Belgien* dalla minoranza tedesca, e per questa ragione la denominazione più frequente è la neutrale *Belgium*. La Svizzera è *Suisse* per l'occidente francofono, *Schweiz* per la parte tedesca, *Svizzera* in Canton Ticino e *Svizra* in romancio, ma la sua sigla internazionale CH (specialmente quando coniugata in termini monetari, con la sigla CHF) ricorda bene che anche la nazione alpina approfitta del toponimo neutro latino *Confoederatio Helvetica*.

[2] Questa seconda condizione taglia fuori i grandi Imperi che hanno dominato la storia fino a tutto il XIX secolo, che quasi per definizione erano sovranazionali.

La cosa insolita, però, è che l'Italia ha forse anche qualcosa in più, qualcosa che agli altri stati probabilmente manca: ovvero una singola, breve poesia che in qualche modo è riconosciuta come la più preziosa del patrimonio poetico nazionale. Non c'è stato mezzo di informazione, dai giornali alle radio, dalla televisione al web, che nella primavera del 2019 abbia dimenticato di ricordare che *l'Infinito* di Giacomo Leopardi compiva due secoli di vita. È possibile che accada qualcosa di analogo anche per altre poesie in altre nazioni, ma ne dubitiamo un po'.



1 *L'originale «Infinito»*

Proprio perché è così bello, sul leopardiano *Infinito* è stato scritto già tutto il possibile: ogni verso analizzato, ogni singolo termine valutato, ogni possibile intenzione dell'autore scandagliata e ipotizzata. Non è certo il caso di aggiungervi particolari interpretazioni matematiche o scientifiche da parte di una rivista che si occupa di matematica ricreativa, e non tanto perché i letterati potrebbero inquietarsi dell'inopportuna invasione di campo, ma piuttosto perché certamente anche tutte le osservazioni numeriche e scientifiche saranno già state consumate nei duecento anni di vita del componimento. È facile immaginare cosmologi che tentano di confrontare la visione ancora un po' newtoniana dell'universo infinito con le ambasce del valore della Costante Cosmologica; numerologi che si perdono nell'analisi della scelta leopardiana del numero canonico delle sillabe dei suoi versi (endecasillabi, versi principi della poesia italiana) ma liberandoli dalle forzature delle rime e degli schemi, e addirittura allineando 15 versi, giusto uno in più dei 14 che avrebbero fatto somigliare ancora di più il "piccolo idillio" a un sonetto. Grammatici e logici avranno probabilmente discusso sulla catena di aggettivi (ultimo, interminati, sovrumani, profondissima, infinito, eterna) che all'"infinito poetico sono tutti legati, ma che – grazie alla libertà dell'arte lirica – possono coniugarsi nello spazio, nel tempo, e perfino nell'infinito teologico e teleologico. E quasi certamente qualche fisico quantistico avrà letto nell'infinito leopardiano – a un tempo bloccato e amplificato dagli ostacoli del colle e della siepe – una somiglianza con l'infinita propagazione dell'onda dell'Equazione di Schrödinger, che proprio grazie ai vincoli, agli ostacoli, riesce a generare l'intero mondo quantistico.

Gran parte di queste visioni farebbero sorridere, se non addirittura inorridire, quel ventunenne marchigiano molto intelligente, molto ricco e molto infelice che quei quindici versi scrisse. Però è inevitabile: se si ha la ventura di creare un'opera che colpisce e innamora gran parte dei mortali, che sopravvive agli anni e alle mode, bisogna anche rassegnarsi a vederla crescere e diventare altro da sé. Le mille letture dell'*Infinito* hanno tutte una ragione d'essere, sono tutte un riverbero, per quanto umano, di un messaggio ormai liberato dai vicoli di filiazione con l'autore.

E quindi non c'è da stupirsi se anche critici puramente letterari non mancheranno di rimarcare, anche al prossimo anniversario, la preveggenza poetica del recanatese: il suo *Infinito* del 1819 anticipa l'attenzione di Cantor agli *infiniti* matematici, si è detto (e si dirà ancora), e chissà, forse potrebbe persino esserci qualcosa di vero, in cotanta fantasiosa ipotesi. Non che valga la pena difendere l'idea: ma è comunque dilettevole giocare con le coincidenze ex-post, guardare indietro nel tempo, alla ricerca di previsioni del tutto arbitrarie che, per qualche magia, si rivelano (almeno in qualche senso) incredibilmente esatte. Uno dei casi più sorprendenti, da questo punto di vista, è quello dei satelliti di Marte, Deimos e Fobos.

I due piccoli satelliti del pianeta rosso sono stati scoperti nel 1877 da Asaph Hall, astronomo statunitense: non è insomma troppo tempo – neanche un secolo e mezzo – che sappiamo dell'esistenza delle due lune marziane. Certo, usare il termine "lune" suona un po' improprio, in questo caso specifico: la nostra Luna è un satellite con dimensioni di tutto rispetto, specialmente se messe in rapporto con le dimensioni del pianeta madre: come ricorda Isaac Asimov in un suo celebre libro di divulgazione, è verosimile che, agli occhi di extraterrestri, il sistema Terra-Luna appaia più simile a un vero e proprio "pianeta doppio" che a un normale sistema pianeta-satellite. Lei, Selene, se ne sta in cielo a fare da alter-ego al Sole, con la sua regolarissima sfericità astronomica e persino con un diametro apparente praticamente identico a quello della nostra stella madre. A pensarci bene, situazioni come quella a cui siamo abituati noi terrestri, con un unico satellite che riesce ad oscurare perfettamente il Sole e a generare delle eclissi così spettacolari, deve essere abbastanza raro, nonostante il gran numero di sistemi planetari che certo popolano le galassie. La norma delle "eclissi", sulla maggioranza dei pianeti, sarà assai meno evocativa, dei semplici passaggi di ombre scure sull'immagine della stella principale. Su Marte, poi, la scena deve essere davvero diversa: i suoi due satelliti sono così piccoli che non si sognano neppure di avere la forma sferica caratteristica di quei corpi astrali in cui la forza di gravità riesce serenamente a plasmare la materia di cui sono composti. Hanno entrambi forma vagamente ellissoide e Fobos, il più grande dei due, ha il "diametro maggiore" che misura più o meno 28 chilometri. Deimos, più piccolo, stenta ad arrivare a 12[3]. Fobos è davvero curioso: più massivo del fratellino, orbita anche più vicino al suo pianeta, e con una velocità davvero considerevole. Se esistono e osservano il loro cielo, gli astronomi marziani saranno abituati a vedere la loro luna principale sorgere ad ovest e tramontare ad est per la bellezza di tre volte al giorno.

2 *Asaph Hall*

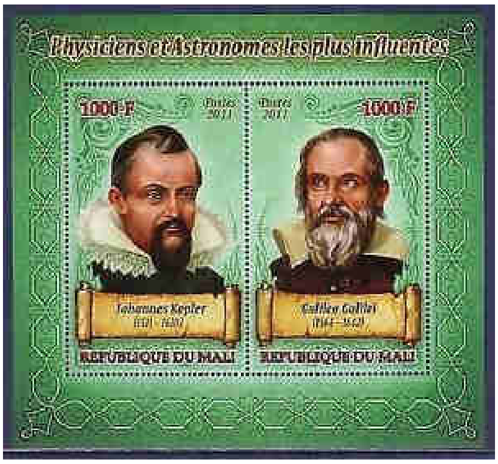
Curiosi, plurali, niente affatto sferici e, come già sottolineato, decisamente piccoli. Soprattutto quest'ultima caratteristica ha fatto sì che la loro osservazione diretta sia giunta così tardiva: non per niente, per riuscire ad inquadrarli nell'agosto del 1877, Hall ha dovuto fare affidamento al suo telescopio da 66 centimetri, che a quel tempo era il telescopio rifrattore più potente del mondo. Ciò non di meno, l'idea che il pianeta Marte potesse avere due satelliti naturali era tutt'altro che inedita, prima del 1877: anche se per ipotesi e ragionamenti non propriamente guidati dal metodo scientifico.

Tutto comincia, probabilmente, con la grande topica che, insieme, generarono due tra i più grandi geni dell'umanità. La priorità nelle scoperte scientifiche è cosa importante e difesa a spada tratta ancora oggi, ed è tutto sommato comprensibile: un ricercatore che dedica tutta vita alla ricerca, una volta che realizza una scoperta significativa (che potrebbe facilmente essere l'unica di tutta la sua carriera) tenderà a combattere fino allo stremo contro eventuali concorrenti che affermino di aver ottenuto il medesimo risultato

[3] Vale forse la pena di ricordare che la Luna ha un diametro di quasi 3500 chilometri, che è più di un quarto del diametro della Terra (circa 12750). Marte è ben più piccolo del nostro pianeta (il suo diametro vale circa 6800 km), ma, come è facile vedere, il rapporto dei diametri col suo satellite maggiore è qualcosa dell'ordine di 1:240, contro il (neanche) 1:4 per la coppia Terra-Luna.

in precedenza. Al giorno d'oggi ci sono una quantità di sistemi in grado (il più delle volte) di risolvere le diatribe sulla priorità, ma nei secoli passati bisognava arrangiarsi in altro modo. Il metodo usato da Galileo, ad esempio, si basava su complicati anagrammi[4]: quando il padre della fisica puntò il suo cannocchiale su Saturno, non riuscì a capire che il grande pianeta aveva uno spettacolare sistema di anelli, perché il potere risolutivo del suo strumento non era sufficiente. Bastava però a mostrarne la presenza, che si traduceva nell'immagine di una sorta di pianeta triplice, come se si trattasse di tre pianeti vicinissimi praticamente attaccati uno all'altro. La scoperta era sconvolgente, e Galileo voleva certo comunicarla ai suoi colleghi e concorrenti, ma come fare ad impedire che qualche mascalzone la rubasse, spacciandola per propria? Occorreva più tempo per ripetere e migliorare le osservazioni, ma in quel tempo, chissà, qualcun altro poteva davvero osservare il pianeta per conto proprio, e annunciarlo al mondo. Il metodo usato da Galileo – ma non solo da lui, era un metodo ragionevolmente diffuso – consisteva nello scrivere una frase che annunciasse la notizia, e poi anagrammarla in maniera sostanzialmente casuale, in modo che nessuno potesse davvero capirla. Se poi, per accidente, qualcuno avesse fatto la medesima scoperta, era possibile mostrare la frase "criptata", ricostruirne il significato piano e palese, e rivendicare la primogenitura.

Così, Galilei annunciò l'osservazione della forma triplicata di Saturno con la strana stringa "*smaismrmilmepoetaleumibunenugttauiras*", che mescolava in maniera indecifrabile la notizia "*Altissimum planetam tergeminum observavi*". Insomma, qualcosa di chiaramente (per chi legge il latino, e a quei tempi lo leggevano tutti i dotti) decifrabile: "ho visto Saturno (l'altissimo pianeta, perché a quei tempi era il più lontano conosciuto) in tre parti". E amen, se qualcun altro avesse notato la stessa cosa, Galileo poteva facilmente dimostrare di essere arrivato prima.



3 *Le poste del Mali hanno celebrato insieme Galilei e Kepler*

Tra quelli che leggevano con curiosità questi annunci c'era anche Johannes Kepler, ovviamente. Facile immaginare cosa deve essergli passato per la testa (a lui e a tutti gli altri dotti) nel veder comparire un nuovo anagramma galileiano: veicolava certo una scoperta importante, meritava di fare un tentativo di decrittazione, se non altro per mera curiosità. Il tedesco doveva essere abbastanza abituato a certi tentativi: del resto, la comunità scientifica era quella che era, l'argomento più "caldo" erano certo le scoperte astronomiche, quindi si potevano fare dei tentativi ragionevoli. Del resto, Galileo aveva appena stupito il mondo con la scoperta dei satelliti di Giove, vuoi vedere che… insomma, Kepler, provando e riprovando, conclude che la misteriosa stringa galileiana è in realtà la frase "*Salve umbistineum geminatum Martia proles*", insomma un "Salve, furiosi gemelli figli di Marte", o qualcosa del genere. Sarà che ci si mette in mezzo anche la mitologia, che in effetti prevede l'esistenza di due gemellini figli di Marte che accompagnavano in battaglia il Dio della Guerra, e che avevano gli accoglienti nomi di "Paura" (Fobos) e "Terrore" (Deimos), fatto sta che l'errore di interpretazione di Kepler si risolve in una affermazione veritiera, anche se né Kepler né Galilei lo sapranno mai[5].

[4] Per i curiosi, ne parliamo abbastanza diffusamente nel compleanno di Leibnitz, "*L'Acusmatico*", RM054, Luglio 2003.

[5] Per quanto possa apparire improbabile che un anagramma venga mal interpretato e comunque risolto con un'affermazione poi rivelatasi esatta, Galilei e Keplero riescono incredibilmente a ripetersi: il pisano annuncerà con un altro anagramma di aver osservato le fasi di Venere, Keplero lo interpreterà come l'annuncio dell'esistenza di una Macchia Rossa su Giove. Fossero già state inventate le lotterie, Keplero avrebbe probabilmente sbancato ripetutamente gli organizzatori delle stesse.

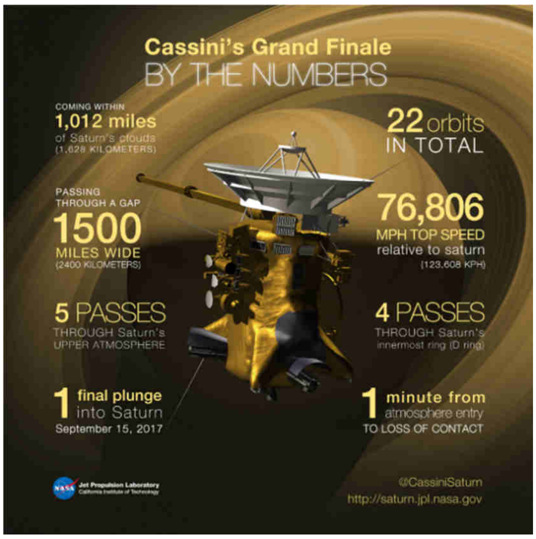
Il grande astronomo tedesco (che peraltro, come gran parte dei suoi colleghi e coevi, era anche astrologo e divinatore) è convinto di aver interpretato correttamente l'anagramma anche per una ragione per così dire "matematica": l'orbita di Marte è compresa tra quella della Terra (che ha un solo satellite) e quella di Giove (che di satelliti ne ha quattro, almeno per quanto lui ne sapeva, a valle della scoperta dei satelliti medicei), era quindi "aritmeticamente" ipotizzabile che a Marte ne toccassero due. Poi… beh, poi inizia quasi una sorta di "telefono senza fili" tra grandi intellettuali: l'opinione di Keplero è certo da tenere in considerazione, soprattutto dopo che è stato dimostrato che le sue Tre Leggi del moto celeste funzionano alla grande; nulla di strano allora se ne *"I viaggi di Gulliver"* Jonathan Swift fa dire agli astronomi di Laputa che Marte ha due satelliti. Un quarto di secolo dopo – e probabilmente perché influenzato da Swift – è il grande Voltaire a ribadire l'affermazione in *Micromégas*. Alla fine, quando Hall scopre davvero i due satelliti – a pochi giorni di distanza l'uno dall'altro – c'è la possibilità che a stupirsi davvero siano stati forse solo gli astronomi, vista la gigantesca tradizione letteraria e culturale che li dava già per scontati.

Questo potrebbe forse bastare a farsi un'idea di quanto sia stato lungo e complesso il percorso che ha portato dalla definizione di "metodo scientifico" così come lo conosciamo oggi: come in tutte le altre attività umane, il miglioramento passa attraverso errori continui, ridefinizioni, aggiustamenti. Ne approfittiamo allora per celebrare un astronomo che visse proprio in quegli anni assai complicati, in cui la scienza imparava ad essere sé stessa: probabilmente, anche lui ha attraversato dubbi, creduto in false logiche, ma quantomeno non ne abbiamo trovate di significative, e per quanto riguarda Marte e i suoi figli/satelliti, beh… non ha lasciato detto granché su quella prole bellicosa, ma ha misurato con buona approssimazione, per primo, il periodo di rotazione del pianeta rosso.


4 *Giovanni Domenico Cassini*

Gian Domenico Cassini nasce a Perinaldo, non distante da Imperia, il giorno 8 Giugno 1625. Il suo nome completo era naturalmente Giovanni Domenico, ma in breve decise di farsi chiamare Gian Domenico, e quando infine andò in Francia tradusse il suo nome in Jean-Dominique (e con ogni probabilità comincio anche a pronunciare il suo cognome come Cassinì, alla francese). A conferma della difficoltà implicita, in quei secoli, di ben distinguere il grano dal loglio, Cassini non fa mistero del fatto che la sua prima passione – prima ancora della filosofia naturale, della matematica e dell'astronomia – sia stata proprio l'astrologia: fin da giovanissimo la studia con passione e accanimento, fino a diventare un vero esperto. Però, proprio dall'alto della sua erudizione nel campo, giunge all'inevitabile conclusione che l'astrologia non ha alcuna base di verità, e decide di abbandonarla. Sia come sia, è comunque la sua fama di esperto astrologo a cambiargli la vita, perché viene invitato dal marchese Cornelio Malvasia a trasferirsi a Bologna; e l'invito era diretto proprio all'"astrologo" Cassini, visto che Malvasia era un appassionato di astrologia.

A quel tempo, comunque, anche gli astrologi avevano bisogno di strumenti (o forse così credevano) e, grazie ai buoni uffici del marchese, Cassini comincia a lavorare all'osservatorio di Ponzano, assai avanzato per quei tempi. Oltre agli strumenti, a Bologna Cassini trova eccellenti maestri nei gesuiti Riccioli e Grimaldi, e finisce per occupare la cattedra di matematica e fisica nella più antica università del mondo; quella stessa cattedra che era stata, fino a poco prima, di Bonaventura Cavalieri.



5 *Un'altra Cassini*

Il resto della sua vita è un piano, continuo, processo di conoscenza, senza particolari colpi di scena, ma con una messe di risultati davvero sorprendente: scopre e calcola orbite di comete, scopre satelliti di Saturno, tra i massimi sistemi non si schiera né con Tolomeo né con Copernico, ma opta per quello di Tycho Brahe; completa il lavoro dello gnomone "inserito" nella cattedrale stessa di Bologna, San Petronio, ideato e iniziato da Danti. Bologna era sotto lo Stato della Chiesa, e il papa Alessandro VII viene presto a conoscere la fama di Cassini, che è esperto non solo di astri, ma anche di ingegneria, di ponti, idraulica e fiumi. Il papa lo esorta a prendere i voti – cosa indispensabile per fare carriera nello stato pontificio – ma Cassini cortesemente declina l'invito, e continua a fare il professore. Quando, nel 1664, riesce ad ottenere un telescopio ancora più potente, le sue scoperte si moltiplicano: misura i periodi di rotazione di diversi pianeti, e arriva al punto di sospettare la finitezza della velocità della luce a causa di alcune discrepanze nei tempi misurati delle eclissi dei satelliti di Giove. Decide però che l'idea era troppo stramba per poter essere vera, e lascia perdere tutto. Ironia della sorte, quando Ole Rømer, pochi anni dopo, riporterà in vita (e con successo) l'ipotesi, userà proprio i dati delle misurazioni di Cassini per dimostrare la sua tesi.

Continuerà a fare scoperte importanti per tutta la vita: si trasferirà in Francia su invito di Luigi XIV, che lo vorrà a capo del Reale Osservatorio di Parigi; sposerà una parigina, e genererà il figlio Jacques, che seguirà le sue orme prendendo infine il suo posto al Reale Osservatorio. Non è certo un rivoluzionario, anzi: le sue principali diatribe professionali lo vedono piuttosto dalla parte del conservatore, e non necessariamente a ragione.

Ma era tutto sommato di buon carattere, placido, e ha fatto molto – senza troppo clamore né ardite divinazioni – per far progredire la sua scienza.

2. Problemi

"...a grande richiesta", il primo è quello accennato nel "librino".

2.1 Treni probabili

Rudy e Doc hanno, oltre ad altre, una ben precisa caratteristica antitetica: cerchiamo di chiarirla raccontando un aneddoto realmente avvenuto (tranquilli, il problema vero e proprio è nella parte irreale, e segnaleremo il passaggio all'asse immaginario).

L'anno scorso, anziché usufruire come d'abitudine dell'auto di Doc, i nostri due eroi hanno deciso di recarsi in Svizzera per il più-o-meno-annuale Comitato di Reazione dei Rudi Mathematici (*aka* "mangiare e bere a spese di Treccia"[6]). L'appuntamento era alla Stazione Centrale di Milano, un quarto d'ora prima della partenza del treno.

Rudy arriva alla stazione e sente annunciare il treno per Zurigo. Quello *prima*, e ce n'è circa uno ogni due ore.

Dispostosi ad aspettare, comincia il suo abituale giro di edicolerie/librerie/carabattolerie (che ormai trovate in tutte le stazioni tranne Torino Porta Susa: ha chiuso anche l'edicola...), sin quando decide che, mancando meno di un'ora alla partenza del treno, potrebbe anche essere il caso di avvicinarsi al binario opportuno, anzi al vagone, anzi di cominciare a vedere dov'è il posto prenotato...

Quattro minuti prima della partenza del treno, riceve il messaggio di Doc: "...secondo te, ci sta, un caffè al bar?".

Ecco, crediamo di aver chiarito il concetto[7]. Passiamo ora al mondo del problema.

Rudy, arrivato al proprio vagone, stressato dal "ritardo sull'anticipo" di Doc, non ha nessuna voglia di mettersi a fare strani conti e a tirar fuori il biglietto prima del tempo per verificare il posto prenotato: è il primo, il vagone ha cento posti a sedere e, da bravo spirito libero, sceglie quello che gli piace di più e si siede, con l'aria feroce di chi sa già che solo una serie di malori accuratamente sincronizzati di Capotreno, Macchinista, Steward e Addetto alle Pulizie permetteranno a Doc di prendere il treno.

Intanto, si affacciano al treno gli altri passeggeri, in ordine sparso: essendo Svizzeri Tedeschi per prima cosa si recano al loro posto prenotato (e se il posto è libero vi si siedono) ma, essendo anche Persone di Mondo, se lo trovano occupato ne scelgono uno libero a loro confacente (e si siedono). Tutti e novantotto i passeggeri seguenti (...treno pieno... Il CdR di RM è un evento a risonanza mondiale) seguono questa procedura.

"Rudy, guarda che novantotto più uno fa novantanove, non cento". Indovinate chi è l'ultimo a salire?

Ecco, adesso per avere la domanda ad effetto dovremmo limitarci a dire: "Dove si siede Doc?" ma, una volta tanto, saremo più precisi. Evidentemente Doc si siede nell'unico posto libero.

Qual è la probabilità che Doc si sieda al proprio posto?

Qual è la probabilità che Doc si sieda al posto di Rudy?

Qual è la probabilità che Doc si sieda al posto di uno degli altri novantotto passeggeri?

2.2 Svelti, che dobbiamo arrabbiarci

No, non nel senso che dovete risolverlo alla svelta: siamo noi che la facciamo breve perché questa estate dal punto di vista delle ferie "marca male": molto difficilmente vedremo il mare (ci considereremo fortunati se riusciremo a vedere una piscina per un paio di

[6] *Excusatio non petita*: noi ci proviamo, ogni tanto, a pagare, ma ostacoli socioeconomici (la lingua e la moneta) nonché minacce neppure troppo velate (se Treccia vi ha guardato male una volta, capite di cosa parliamo) continuano ad impedircelo.

[7] (Ri)*Excusatio eccetera*: Alla domanda "...ma come fate a sopportarvi?", la risposta di Rudy è, di solito, che lui non ha paura di essere in ritardo, ha paura di essere in ritardo per colpa propria: se è colpa di un altro, problemi suoi.

giornate disgiunte[8]); quindi, vi diamo già adesso il problema che potete risolvere nelle *numerose* giornate di pioggia che vi auguriamo.

Siete sulla vostra bellissima barca e il motore vi spinge verso est alla velocità costante di 10 nodi[9]; la bandiera (panamense, guardata con sospetto dalla Guardia Costiera) sulla cima dell'albero (non ho detto che non ha le vele, ho detto che state andando a motore!) punta orgogliosamente a sud-est.

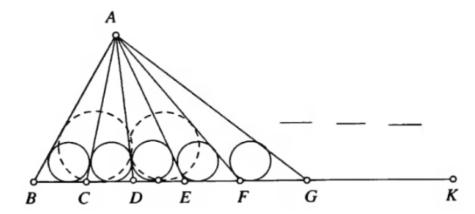
A seguito di una virata a sud, procedendo sempre a 10 nodi, notate che la bandiera punta validamente a est.

Qual è la velocità del vento?

3. Bungee Jumpers

Sia *r* il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ABC, e sia BC prolungato di una distanza arbitraria in K. Si costruisca un cerchio di raggio *r* tale che sia tangente a CK e ad AC, tracciando l'ulteriore tangente al cerchio per chiudere il triangolo ACD.

Si prosegua con la costruzione del ventaglio di triangoli radianti da A con base lungo BK, ciascuno con inscritto un cerchio di raggio *r*.



6 *Cerchi nel ventaglio.*

Dimostrare che i cerchi inscritti nelle *coppie* di triangoli consecutivi (tratteggiati nella figura) hanno tutti il medesimo raggio.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno!

Non sembra proprio, ma quest'anno l'estate tarda. E noi che siamo sempre in ritardo anche peggio. Ma è giugno, le scuole finiscono, si va in vacanza, e RM deve uscire, prima o poi…

4.1 [244]

4.1.1 Un'aiuola "molto triangolare"

Il primo problema era di pianificazione teoretica di giardini:

> *L'idea è di fare un'aiuola sommariamente triangolare seguendo le seguenti regole:*
>
> *• Formo una "fila" con il primo numero dispari (1) con un dato colore di tulipano*
>
> *• Formo due file con i due successivi numeri pari (2, 4), con un dato colore*
>
> *• Formo tre file con i tre successivi numeri dispari (5, 7, 9) con un dato colore*
>
> *• Formo quattro file con i quattro successivi numeri pari (10, 12, 14, 16), con un dato colore...*
>
> *...e avanti in questo modo.*
>
> *Avendo intenzione di piantare una fila per volta, ci chiediamo quanti tulipani ci saranno necessari per "quel giro": non volendo, ogni volta, ricalcolare tutti i termini precedenti, ci farebbe comodo una formula non ricorsiva per avere il numero... Ad esempio, quanti fiori ci sono nella fila 2019?*

Vi diciamo tutti che ci hanno scritto in tanti. Il più veloce è stato ***Valter***:

> Io farei così (indicando con "N" il numero di fiori e "F" quello della fila):
>
> $N = 2F - \lfloor (2F)^{½} + 0.5 \rfloor$ → vale a dire l'intero più prossimo alla radice quadrata di 2F.

[8] ...e la più bella che conosciamo costa piuttosto cara ma fa lo sconto se andate *due giorni di seguito.*

[9] No, non all'ora.

> Nel caso di 2019 si ha:
>
> N = 4038 – ⌊4038^½ + 0.5⌋ = 4038 – ⌊63.54… + 0.5⌋ = 4038 – 64 = 3974

Non la pensa così ***.mau.***, che scrive

> Non mi torna il problema. Come fanno a esserci 3974 fiori nella fila 2019? Nella riga 10 ci sono 4 fiori, e in genere nella riga $n(n+1)/2$ ce ne sono n.

Per fortuna ognuno fa i propri ragionamenti, così abbiamo la versione di ***Jeeves62***:

> Considerando la fila f essa conterrà: $n^2 - \left(\frac{n*(n+1)}{2} - f\right) * 2$ tulipani
>
> Con $n = \left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8f}}{2}\right\rceil$ dove le parentesi indicano la parte intera superiore.
>
> Cominciamo con il constatare che l'ultima fila di ogni sequenza (pari o dispari) di file contiene esattamente n^2 tulipani (dove con n indichiamo il numero progressivo della sequenza) e che all'interno di una sequenza le quantità nelle diverse file si differenziano di due unità l'una dall'altra ed in particolare ognuna di esse si scosterà dall'ultima fila della sequenza del doppio della loro distanza.
>
> Ciò detto ci basterà individuare a quale sequenza appartiene la nostra fila, individuare l'ultimo elemento della sequenza ed agire di conseguenza.
>
> Le sequenze hanno un numero progressivo di file: 1,2,3,4,5….
>
> Come applicato da Gauss in tenera età la somma delle file fino alla n-esima sequenza sono in totale $\frac{n*(n+1)}{2}$ e per conoscere a quale sequenza appartiene la nostra file basterà risolvere l'equazione: $\frac{n*(n+1)}{2} = f$.
>
> La soluzione (positiva) è $n = \frac{-1+\sqrt{1+8f}}{2}$
>
> La soluzione, a parte per le file che terminano la sequenza, non sarà un numero intero e noi dovremo arrotondare per eccesso la soluzione trovata: $n = \left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8f}}{2}\right\rceil$
>
> Una volta conosciuta la sequenza n a cui appartiene la nostra fila f toglieremo alla quantità dell'ultima fila della sequenza (cioè n^2) il doppio della distanza tra quest'ultima (cioè la fila $\frac{n*(n+1)}{2}$) e la nostra fila f.
>
> Come spesso accade è più difficile da spiegare che da fare.

Certo non è questo uno dei problemi principali, la stessa soluzione può essere raggiunta da diversi angoli. ***Alberto R.*** scrive:

> La successione dei numeri di tulipani delle varie file è
>
> (1) (2, 4) (5, 7, 9) (10, 12, 14, 16) (17, 19,21, 23, 25) …………..
>
> Le parentesi indicano i gruppi di file.
>
> L'ultimo numero del K-esimo gruppo vale K^2 ed occupa l'N-esimo posto con N=K(K+1)/2, da cui K=[sqrt(8N+1) –1]/2
>
> Con queste premesse posso illustrare l'algoritmo risolutivo con un esempio.
>
> Supponiamo di voler trovare quanti tulipani ci sono nella 2019° fila
>
> Dalla K=[sqrt(8N+1) –1]/2 per N=2019 otteniamo K=63,047. Se K fosse risultato intero K^2 sarebbe la soluzione. Poiché non lo è lo arrotondiamo **in eccesso** ponendo K=64 da cui, utilizzando la N=K(K+1)/2, otteniamo N=2080
>
> Adesso sappiamo che la fila 2080 contiene 64^2=4096 tulipani. Ma a noi interessa la fila 2019 che si trova **nello stesso gruppo (perché abbiamo arrotondato in eccesso)** 61 posizioni prima (2080–2019=61) e ogni posizione, nell'ambito dello stesso gruppo, vale due tulipani in meno per cui il numero cercato è 4096–2*61=3974.

Non siamo affatto preoccupati, lo sapete. Ecco la soluzione di ***BR1***:

Premettendo che – prima che solleviate criticamente il sopracciglio – ho ben notato l'avvertenza "*attenzione, non un gruppo di file!*", direi che seguendo le istruzioni del quesito si può costruire *a mano* la seguente tabella per *gruppi*:

Gruppo di file G	File del gruppo e tulipani in ciascuna fila																File totali F_{TG}
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[...]	62	63	64	65	[...]	
1	1																1
2	2	4															3
3	5	7	9														6
4	10	12	14	16													10
5	17	19	21	23	25												15
6	26	28	30	32	34	36											21
7	37	39	41	43	45	47	49										28
8	50	52	54	56	58	60	62	64									36
9	65	67	69	71	73	75	77	79	81								45
10	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100							55
[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]					[...]
63	3845	3847	3849	3851	3853	3855	3857	3859	3861	3863	[...]	3967	3969				2016
64	3970	3972	3974	3976	3978	3980	3982	3984	3986	3988	[...]	4092	4094	4096			2080
65	4097	4099	4101	4103	4105	4107	4109	4111	4113	4115	[...]	4219	4221	4223	4225		2145
[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]	[...]

Dal fatto che nel generico gruppo di file G si trovano proprio G file, si deduce che il numero totale di file al completamento di ciascun gruppo G è dato da un *numero triangolare* (ultima colonna della tabella):

$$1)\ F_{TG} = \frac{G(G+1)}{2}$$

Il numero P_G di tulipani della prima fila di ciascun gruppo G è – sempre secondo istruzioni – pari al numero di tulipani U_{G-1} dell'ultima fila del gruppo precedente, incrementato di 1:

$$2)\ P_G = U_{G-1} + 1$$

Ciò garantisce che nella tabella si alternino righe con elementi pari e dispari; l'ultima fila di ciascun gruppo conterrà poi un numero di tulipani pari a:

$$3)\ U_G = P_G + 2(G-1)$$

Combinando la 2) e la 3) si ottiene:

$$4)\ U_G = (U_{G-1} + 1) + 2(G-1) = U_{G-1} + 2G - 1$$

Prendiamo adesso un valore di G a casaccio - ad esempio G=4 - ed osserviamo che U_{G-1}=9: si tratta di un quadrato perfetto, pari a $(G-1)^2$; *almeno* in quel caso, la 4) si può riscrivere così:

$$5)\ U_G = (G-1)^2 + 2G - 1 = G^2$$

La 5) indica che *se* U_{G-1} è un quadrato perfetto, *allora* lo sarà anche U_G: poiché in *almeno* un caso siamo certi che la premessa è vera, la cosa si verificherà all'infinito per induzione, qualunque sia il valore di G nella 5)…

Dalla 2) e dalla 5) segue che:

$$6)\ P_G = U_{G-1} + 1 = (G-1)^2 + 1$$

Torniamo ora alla 1), e riscriviamola come segue (avendo posto G-1 in luogo di G):

$$7)\ F_{T(G-1)} = \frac{G(G-1)}{2}$$

La 7) fornisce il numero di file già completate *appena* prima di cominciare con il gruppo G; se la *ribaltiamo* ricavando G in funzione di $F_{T(G-1)}$ si ottiene che:

$$8)\ G^2 - G - 2F_{T(G-1)} = 0$$

Da cui:

$$9)\ G = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8F_{T(G-1)}}}{2} = \frac{\sqrt{1 + 8F_{T(G-1)}} + 1}{2}$$

Nell'ultima eguaglianza della 9), si è scelta come valida la sola determinazione che rende positivo G; se poniamo ad esempio $F_{T(G-1)}=45$, si ottiene G=10, il che trova corrispondenza nella tabella in alto: il *prossimo* gruppo è in tale esempio il decimo.

Combinando le 6) e 9), il numero di tulipani della prima fila del gruppo G si può allora esprimere con:

$$10)\ P_G = \left(\frac{\sqrt{1+8F_{T(G-1)}}+1}{2}-1\right)^2+1$$

Seguendo ancora l'esempio suddetto (cioè $F_{T(G-1)}=45$), si ricava $P_G=82$, di nuovo in linea con la tabella…

La *fila* cui fa riferimento la 10) per il calcolo del numero di tulipani P_G è quella di posto $F_{T(G-1)}+1$, cioè la *prima* del gruppo G; denominiamola ora F, come fila *generica* (il che, è quello che ci dovrebbe interessare…). Almeno per la *prima* fila F di tulipani di ciascun gruppo G, la 10) può quindi essere così riscritta così (dove T_F è il numero di tulipani della generica fila F, l'*agognato obiettivo…*):

$$11)\ T_F = \left[\frac{\sqrt{1+8(F-1)}+1}{2}-1\right]^2+1$$

Purtroppo, la 11) funziona benissimo *se e soltanto se* F–1 è un numero *triangolare*, cioè se F è la prima fila di un gruppo. In caso contrario – per un generico F – la 9) va riscritta come segue:

$$12)\ G_F = \left\lfloor\frac{\sqrt{1+8(F-1)}+1}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor$$

dove la parentesi *semi-quadra* indica la *parte intera* del suo contenuto.

La 10) si può allora riscrivere così:

$$13)\ P_G = \left(\left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor-1\right)^2+1$$

La 13) fornisce ancora il numero di tulipani della prima fila del gruppo G, o meglio – nella nuova formulazione – il numero di tulipani della prima fila del gruppo cui appartiene la generica fila F. Per il numero di tulipani T_F della fila F, occorre aggiungere a P_G il doppio del numero di file di *scostamento* della fila F dall'ultima del gruppo precedente, il cui indice è dato dalla 7), così riformulata in base alla 12):

$$14)\ F_{T(G-1)} = \frac{\left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor-1\right)}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} 15)\ T_F &= P_G + 2\left[F - F_{T(G-1)} - 1\right] \\ &= \left(\left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor-1\right)^2+1 \\ &\quad + 2\left[F - \frac{\left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor-1\right)}{2} - 1\right] \end{aligned}$$

Se si preferisce una formula meno *criptica*, con un po' di calcolucci si ottiene:

$$16)\ T_F = 2F - \left\lfloor\frac{\sqrt{8F-7}+1}{2}\right\rfloor$$

E, se si pone F=2019 nella 16) come il quesito richiede, si ha $T_F=3974$…

● ● ● ●

Qualche divagazione sul tema… Quanti tulipani occorrono complessivamente per piantare le 2019 file?

Ricordando la 7) e la 10), il numero di tulipani della prima fila di un gruppo si può riscrivere così:

$$17)\ P_G = \left[\frac{\sqrt{1+8\frac{G(G-1)}{2}}+1}{2}-1\right]^2 + 1 = G^2 - 2G + 2$$

Il numero di tulipani della generica fila K del gruppo G è poi:

$$18)\ P_{KG} = P_G + 2(K-1)$$

Quindi, il totale di tulipani del gruppo G sarà dato da:

$$19)\ T_G = \sum_{K=1}^{G}[P_G + 2(K-1)] = \sum_{K=1}^{G}[G^2 - 2G + 2K] = G(G^2 - G + 1)$$

E il totale di tutti i tulipani dei primi G gruppi si ottiene come segue (dando per scontate le formule per il calcolo delle somme dei primi G interi, quadrati e cubi):

$$20)\ T_{1\cdots G} = \sum_{K=1}^{G} K(K^2 - K + 1) = \left[\frac{G(G+1)}{2}\right]^2 - \frac{G}{6}(G+1)(2G+1) + \frac{G(G+1)}{2}$$
$$= G\frac{(G+1)(3G^2 - G + 4)}{12}$$

Ponendo G=63 nella 20), e sommando i tulipani delle file da 2017 a 2019 del gruppo 64, il totale di tulipani necessari sarà:

$$21)\ T_{T\_2019} = 63\frac{(63+1)(3\cdot 63^2 - 63 + 4)}{12} + 3970 + 3972 + 3974 = 3.992.844$$

Ma non scoraggiamoci… Nella pagina web:

https://d.repubblica.it/attualita/2016/06/14/news/mercato_botanico_mondiale_rose_tulipani_amsterdam_olanda-3124030/

si legge che "… *alle porte di Amsterdam, ogni settimana vanno all'asta 80 milioni di rose e tulipani* …". Basta quindi acquistare 1/20 della produzione settimanale olandese, e siamo a posto…

Rassicurante, vero? Così come la versione di ***trentatre***:

Nella tabella le prime "righe", ognuna indicata con tre numeri

- *n*: il numero progressivo della riga
- *g*: il numero del gruppo, ogni gruppo composto di 1, 2, 3, ... righe
- *k*: la lunghezza della riga.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
g	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
k	1	2	4	5	7	9	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32	34	36

Valgono per ogni terna le due condizioni

[1] $g + k = 2n$

[2] $g = \left\lfloor 1/2 + \sqrt{2n - 7/4} \right\rfloor$

- da cui si ottiene l'espressione non ricorsiva cercata

[3] $k = 2n - \left\lfloor 1/2 + \sqrt{2n - 7/4} \right\rfloor$

- p.es. $n = 2019 \rightarrow\ g = 64 \rightarrow k = 2\cdot 2019 - 64 = 3974$.

La [1] è evidente dalla tabella. Per dimostrare [2]

- l'ultima riga del gruppo *g* è

$n = 1 + 2 + 3 + \ldots g = g(g+1)/2$

- la prima riga di g (successiva all'ultima del gruppo precedente) è quindi
  $n = 1 + g(g-1)/2$
- la soluzione positiva di questa equazione quadratica in g è
  $g = f(n) = 1/2 + \sqrt{2n - 7/4}$
- $f(n)$ è crescente con n e vale $g+1$ per la prima riga del gruppo successivo
- per tutti gli n del gruppo g si ha quindi $g \le f(n) < g+1$ da cui $g = \lfloor f(n) \rfloor$ cioè la [2].

A questo punto possiamo definitivamente passare al secondo problema.

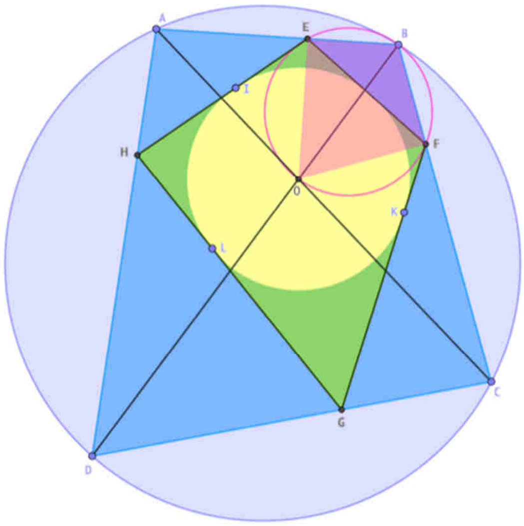
4.1.2 Un "progettino" per qualcosa di rotondo

Rudy comincia a raccontare dettagli sempre più privati della famiglia d'Alembert, che a questo punto sappiamo proprietaria di quasi un centinaio di paperi, ma i paperi nel problema non compaiono per niente:

> *Rudy sta cercando una regola per disegnare un quadrilatero di perimetro minimo all'interno di una circonferenza. Fissati quattro punti casuali ma non troppo sulla circonferenza, questi definiscono un quadrilatero ciclico ABCD, sui lati del quale devono trovarsi i vertici del quadrilatero cercato.*
>
> *Il metodo di Rudy è: tracciamo le due diagonali di ABCD, che si incroceranno in un punto X; da X, tracciamo le quattro perpendicolari ai lati e usiamo i loro piedi per definire il nostro quadrilatero. Siamo sicuri che sia il minimo?*

La prima soluzione è quella di ***Valter***:

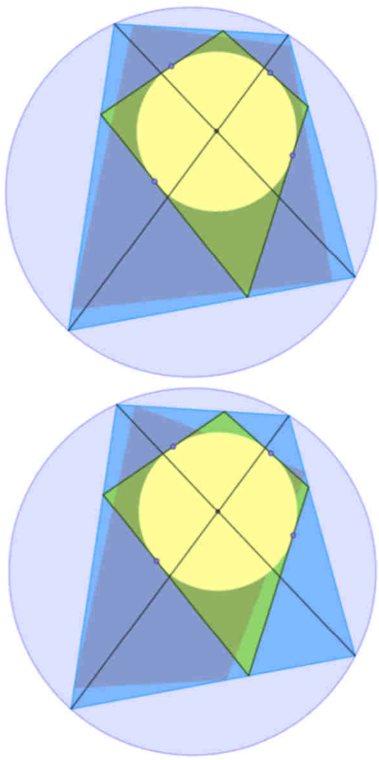
> E' solo uno spunto perché non sono riuscito a fare di meglio. Lo propongo nel caso servisse … sempre se ha un senso. Parto con un disegno che utilizzo nell'esposizione:



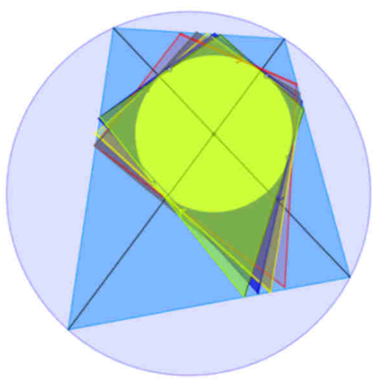
Il quadrilatero interno, per com'è costruito, circoscrive sempre una circonferenza:

- il quadrilatero BEOF è ciclico perché la somma degli angoli opposti vale 180°
- BO è un diametro del cerchio che lo circoscrive essendo ∠BEO = ∠BFO = 90°
- abbiamo quindi ∠OEF = ∠OBF perché insistono sullo stesso arco ⌒OF
- … e ∠OEF = ∠OBF = ∠DBC perché ∠OBF e ∠DBC sono lo stesso angolo
- ∠DBC e ∠DAC sono anch'essi congruenti riferendosi allo stesso arco ⌒DC
- posso fare analoghe considerazioni per il quadrilatero AEOH
- da cui alla fine si ricava ∠OEF = ∠OEI

- la stessa cosa vale per gli altri vertici del quadrilatero EFGH
- nel punto O s'incontrano quindi le bisettrici dei vertici del quadrilatero EFGH
- è stato dimostrato che i quadrilateri con la proprietà di cui sopra circoscrivono sempre una circonferenza
- si verifica facilmente che tali quadrilateri hanno la somma delle lunghezze delle due coppie di lati opposti che coincide
- per com'è stato costruito, EFGH è inoltre l'unico con tale proprietà circoscritto da ABCD
- qualsiasi altro quadrilatero circoscritto da ABCD ha almeno un lato esterno alla circonferenza circoscritta da EFGH
- propongo alcuni disegni per motivare la mia affermazione:

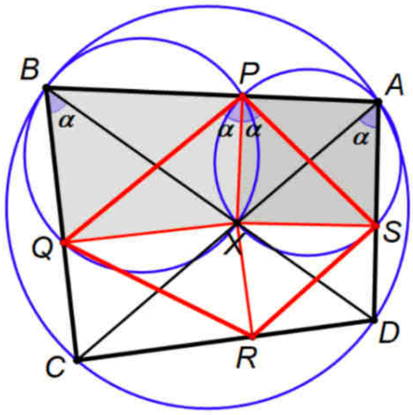


- costruisco una serie di quadrilateri partendo dal lato esterno di uno di essi
- propongo un disegno per spiegare come procedo nella costruzione in quanto a parole mi viene difficile:



- si nota che i perimetri dei quadrilateri si riducono man mano
- i quadrilateri si approssimano sempre più a EFGH oltre al quale però non si può andare.

Bene, vediamo la versione di ***trentatre***:



Nella figura, costruita secondo le indicazioni, abbiamo

- *ABCD*: quadrilatero inscritto in un cerchio
- *X*: incrocio delle diagonali
- *PQRS*: quadrilatero con vertici sulle ortogonali ai lati di *ABCD* passanti per *X*.

I triangoli *APX* e *ASX* sono per costruzione rettangoli in *P* e *S* – il quadrilatero *SAPX* è quindi inscritto in un cerchio con diametro *AX* – analogamente per *PBQX* in un cerchio con diametro *BX*.

I quattro angoli α in *A*, *P* e *B* sono uguali, infatti

- in *A* e *B* vedono la stessa corda *CD* del cerchio grande
- in *A* e *P* (a destra) vedono la stessa corda *SX* di un cerchio piccolo
- in *B* e *P* (a sinistra) vedono la stessa corda *QX* dell'altro cerchio piccolo.

Quindi il percorso rosso *SPQ* corrisponde alla riflessione di un raggio di luce su *AB*, con raggio incidente e raggio riflesso posti ad angolo α dalla normale.

Estendendo a tutta la figura, l'intero quadrilatero *PQRS* è l'unico percorso ottico chiuso entro la scatola riflettente *ABCD*, ed è quindi <u>minimo</u> per il principio di Fermat.

E se lo è per il principio di Fermat ci crediamo e ci fermiamo qui.

4.1.3 La Lumaca extraterrestre di Franco57

Il problema della lumaca del mese scorso aveva ispirato ***Franco57*** a proporre un problema simile, che è piaciuto molto. Vediamo le soluzioni ricevute in proposito, ma prima il problema:

> *C'è una lumaca extraterrestre che partendo dal bordo di un monolite cerca di raggiungere il bordo opposto distante dieci metri, che raggiungerebbe in dieci giorni poiché avanza alla impressionante velocità di un metro al giorno. Il guaio è che al termine di ogni giorno il monolite si dilata improvvisamente e aggiunge altri dieci alla sua lunghezza, apparentemente vanificando tutta la fatica fatta dalla lumaca. Tuttavia la lumaca, che è immortale e molto testarda, ce la fa a raggiungere il bordo opposto. Come si spiega?*

Cominciamo con i pensieri di ***Jeeves62***:

> Riguardo al problema proposto da ***Franco57*** possiamo affermare che la lumaca, testarda e soprattutto longeva, raggiungerà il bordo opposto del monolite dopo 12.367 giorni, circa 33 anni 10 mesi e mezzo.

La spiegazione si basa sul fatto che il monolite si "dilata" di 10 metri cioè vengono aggiunti 10 metri uniformemente su tutta l'ampiezza del monolite ovvero sia nella parte da percorrere sia nella parte già percorsa dalla lumaca.

Concentriamoci dapprima sulla dilatazione notturna del monolite.

Ogni notte la dilatazione sarà di 10 metri ma rispetto alla dimensione totale del monolite la percentuale di incremento sarà sempre minore. In particolare voglio stabilire il moltiplicatore che mi darà la nuova ampiezza del monolite giorno dopo giorno.

La formula generale è: (ampiezza al giorno g) x K(g)

Dove K(g) = (ampiezza al giorno g + 10)/(ampiezza al giorno g)

Avremo:

K(g) = (10g+10)/(10g) = (g+1)/g

Concentriamoci ora sul percorso che la lumaca deve ancora percorre al termine di ogni giorno:

g 1 (10-1)

g 2 (10-1)*2/1 – 1 = 2*10 - 2 – 1

g 3 (2*10 -2 -1)*3/2 -1 = 3*10 – 3 – 3/2 – 1 = 3*(10 – 1 – 1/2 – 1/3)

g 4 3*(10 – 1/2 – 1/3)*4/3 – 1 = 4*(10 -1 – 1/2 - 1/3 – 1/4)

…

g n = n (10 - $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$)

Quando il percorso ancora da fare sarà negativo la lumaca sarà giunta a destinazione. Dobbiamo risolvere la disequazione in n data da

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq 10$

Sappiamo che

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln(n) + \Upsilon$ (fonte wikipedia)

Dove Υ= 0,57721 56649 …. È la costante di Eulero Mascheroni che tutti noi conosciamo a memoria.

Quindi

$\ln(n) + \Upsilon \geq 10$ da cui

$n \geq e^{10-0,5772156649}$

n ≥ 12.366,9681…

Da cui il tempo di percorrenza di 12.367 giorni

Anche ***Valter*** si è impegnato a seguire la lumaca nella sua ascesa:

Se ho capito il problema … .

- primo giorno: lunghezza M del monolite = 10, metri percorsi dalla lumaca L = 1

- fine primo giorno: M = 20, L = 1 + 1 =2 (per la dilatazione di M, e quindi di L, raddoppiano di lunghezza entrambi)

- secondo giorno: M = 20, L = 2 + 1 = 3

- fine secondo giorno: M = 30, L = 3* (3/2) = 9/2

[M e L si dilatano di 3/2 della loro lunghezza in quanto M passa da 20 a 20*(3/2) = 30]

- …

Sicuramente c'è una formula, io ho utilizzato il comando "Nest" di Wolfram.

Ho usato due argomenti:

- #[[1]] = numero d'iterazione partendo da 0 (quindi moltiplicato 10 è M a quell'iterazione)

- #[[2]] = la strada percorsa dalla lumaca, comprese le dilatazioni, sino a quel momento

Mi pare che dopo 12.365 giorni la lumaca raggiunga il bordo opposto. Sempre che non abbia sbagliato qualcosa nel ragionamento o nei calcoli, cosa facile … .

Il comando che ho usato è il seguente:

Nest[{#[[1]]+1,#[[2]]*((#[[1]]+1)/#[[1]])+1}&,{1,1},12365]

In pratica L, cioè #[[2]], al giorno/iterazione I/#[[1]] dovrebbe valere:

(L al giorno prima) * ((I+1)/I) + 1 (vale a dire la dilatazione a fine giorno precedente più il solito metro percorso nella giornata).

A quel punto il monolite dovrebbe essere diventato lungo 123.660 metri.

Siccome dopotutto il problema era suo, alleghiamo per concludere la soluzione dello stesso ***Franco***:

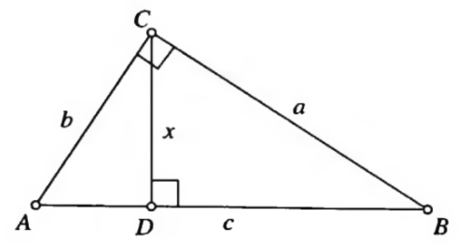
> Soluzione al mio quesito: quando il monolite si dilata, la percentuale di lunghezza che la lumaca ha percorso non cambia. Dopo il primo giorno è pari a 1/10, dopo il secondo se ne aggiunge 1/20, dopo in terzo 1/30 e così via. Ma la serie armonica è illimitata, quindi la lumaca raggiunge effettivamente l'altro capo. Calcolando il numero di giorni g tale 1/10 + 1/20 + 1/30 + … + 1/*g* ≥ 1 si trova che sono necessari quasi 34 anni, quindi basta una lumaca longeva, ma se già il monolite fosse invece lungo 20 metri e incrementasse la sua lunghezza di 20 metri ogni giorno, si calcola che ci vorrebbero quasi 750.000 anni.

Che ne dite? Vale la pena non mollare mai... Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Dimostrate il Teorema di arogatiP: Nel triangolo rettangolo ABC, se CD=x è l'altezza relativa all'ipotenusa AB, allora:

$$a^{-2}+b^{-2}=x^{-2}$$



7 *Il noto teorema.*

6. Pagina 46

Sia *ABD* il triangolo formato dai due triangoli consecutivi *ABC* e *ACD*, e sia ρ il raggio del cerchio inscritto in *ABD*.

Essendo l'area di un triangolo data dal semiperimetro (s) moltiplicato per il raggio del cerchio inscritto, se S è l'area del triangolo *ABD* si ha:

$$\rho=\frac{S}{s}\ .$$

Indicando le aree e i semiperimetri dei triangoli *ABC* e *ACD* con S_1, S_2, s_1, s_2 , si ha

$$S_1=rs_1,\quad S_2=rs_2$$

e quindi

$$S=S_1+S_2=r(s_1+s_2)\ .$$

La somma dei perimetri dei due triangoli più piccoli vale:

$$\begin{aligned} 2s_1+2s_2 &= (AB+BC+AC)+(AC+CD+AD)\\ &= (AB+BD+AD)+2AC\\ &= 2s+2AC \end{aligned}$$

da cui,

$$S=r(s_1+s_2)=r(s+AC)$$

e quindi

$$\rho=\frac{S}{s}=\frac{r(s+AC)}{s}=r\left(1+\frac{AC}{s}\right)$$

Ricaviamo ora una particolare espressione per *AC*[10]:

Siano *AB=x*, *BC=y*, *AC=z*, *AD=u*, *CD=v*. Avendo i triangoli *ABC* e *ACD* la medesima altezza e il medesimo raggio del cerchio inscritto, le loro aere sono proporzionali alle basi, e abbiamo:

$$\frac{v}{y}=\frac{S_2}{S_1}=\frac{rs_2}{rs_1}=\frac{s_2}{s_1}=\frac{u+v+z}{x+y+z}\ .$$

che si riduce facilmente a:

$$v(x+z) = y(u+z).$$

Sia l'angolo ABC=α: applicando il Teorema di Carnot al triangolo *ABC* abbiamo:

$$x^2=y^2+z^2-2\,y\,z\cos\alpha$$

da cui,

$$\cos\alpha=\frac{y^2+z^2-x^2}{2\,y\,z}$$

Se notiamo che il coseno dell'angolo *ACD* vale –cosα, applicando il Teorema di Carnot al triangolo *ACD* otteniamo:

$$u^2=v^2+z^2+2\,v\,z cos\,\alpha \quad \text{e} \quad \cos\alpha=\frac{u^2-v^2-z^2}{2\,v\,z}$$

uguagliando le due espressioni di cosα otteniamo:

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2\,y\,z}=\frac{u^2-v^2-z^2}{2\,v\,z}$$

e quindi

$$y\left(u^2-v^2-z^2\right)=v\left(y^2+z^2-x^2\right)$$

risolvendo le due equazioni ottenute nelle incognite *u* e *v* in funzione di *x*, *y* e *z* ci dà:

$$u=\frac{xy^2+3\,xz^2+2\,zy^2+2\,z^3-x^3}{(x+z)^2-y^2}$$

$$v=\frac{y\left(y^2+3\,z^2-x^2+2\,xz\right)}{(x+x)^2-y^2}$$

Quindi, in termini di *x*, *y*, *z*, *u*, *v*:

$$s(s-BD)=\frac{x+y+v+u}{2}\left[\frac{x+y+v+u}{2}-(y+v)\right]$$

Il secondo membro dell'equazione si semplifica a z^2 sostituendo *u* e *v*, il che ci porta all'espressione richiesta:

$$z=AC=\sqrt{s(s-BD)}$$

Dalla formula qui sopra dimostrata, segue che:

$$\frac{AC}{s}=\sqrt{\frac{s-BD}{s}}=\sqrt{1-\frac{BD}{s}}\ .$$

[10] Questa formula piuttosto insolita viene citata nella raccolta di Sangaku giapponesi di Hidetoshi Fukagawa (Yokosuka High School, Tokai) e Daniel Pedoe (University of Minnesota). Ed. Charles Babbage Research Centre, Winnipeg. Purtroppo, la dimostrazione originale risulta dispersa (la dimostrazione presentata è dovuta a Daniel Wellemant).

Se ora imponiamo pari ad h l'altezza comune dei triangoli nel ventaglio, allora:

$$\frac{BD}{s}=\frac{\rho\cdot BD}{\rho\cdot s}=\frac{5\,rho\cdot BD}{S}=\frac{\rho\cdot BD}{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h}=\frac{2\,\rho}{h}\quad .$$

da cui

$$\frac{AC}{s}=\sqrt{1-\frac{BD}{S}}=\sqrt{1-\frac{2\rho}{h}}\quad .$$

E quindi:

$$\rho=r\left(1+\frac{AC}{s}\right)=r\left(1+\sqrt{1-\frac{2\rho}{h}}\right)$$

ma h è una costante, quindi ρ dipende unicamente da r, che è la tesi.

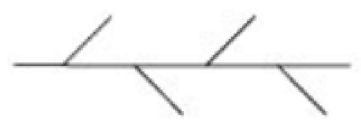
7. Paraphernalia Mathematica

Bene, sembra che la nostra serie di pezzi sulla preparazione alle prossime olimpiadi stia riscuotendo l'abituale successo (la stanno leggendo solo i correttori di bozze). Quindi, spronati dal *potente dio interiore*[11], continuiamo. Restiamo sul canottaggio, per il momento (e cambiamo la numerazione).

7.1 Fisico Olimpionico [2] - È il Momento di remare!

E dal titolo dovreste aver capito tutti dove vogliamo andare a parare.

Avendo appena buttato in acqua il vostro timoniere sovrappeso, voi e i vostri tre compari vi apprestate ad armare il vostro "quattro-con-appena-diventato-senza", e qui cominciano i problemi. Visto che ogni vogatore voga "da una parte sola", dovete decidere da che parte mettere lo scalmo; *evidenti ragioni di simmetria*[12] vi fanno propendere per la disposizione presentata in figura che indicheremo, all'inglese, come *udud* ("Up, Down, Up, Down").



8 *"udud", forse...*

Cominciamo con il notare che non abbiamo detto da che parte sia la prua (sarebbe il davanti), quindi se preferite potete tranquillamente mettere la prua al posto della poppa, tenendolo però a mente quando faremo i conti.

Adesso, come ogni matematico, semplifichiamoci il lavoro: i nostri vogatori sono di ugual peso e pari potenza, utilizzano la stessa tecnica e le diverse attrezzature utilizzate sono identiche tra loro, quindi, nessuno di loro comincia a frignare che vuole "quella posizione lì", e sono in attesa del vostro Verbo per sapere cosa fare, visto che stanno fraintendendo la vostra frase "...momento...".

Già, il momento.

Quando un vogatore voga, esercita sulla barca una forza variabile nel tempo, generata dalla coppia applicata sullo scalmo (che sarebbe dove si incastra il remo); anche se un allenatore serio dà enorme importanza a questa variabilità della forza (concionando di forma del remo, flessibilità, angolo di attacco con l'acqua, idrodinamica e compagnia cantante), noi la ignoreremo e ci limiteremo a dividere la forza in due componenti, una parallela al senso di moto della barca (che indicheremo con $\boldsymbol{P}$) e l'altra perpendicolare al moto[13] (che indicheremo con $\boldsymbol{F}$).

Durante la prima parte del moto (quella che gli inglesi chiamano *catch and drive*) la componente perpendicolare è diretta dallo scalmo verso l'interno della barca, mentre durante la seconda parte del moto (quella di estrazione e "ricarica") è diretta verso l'esterno, e questa alternanza della componente procede per tutto il periodo della regata.

Proviamo adesso a sommare tutti questi momenti, calcolati rispetto al punto che "trova l'acqua" per primo, ossia la prua: supponiamo la distanza tra la prua e il primo vogatore sia s e quella tra un vogatore e l'altro sia x. Inoltre, assumiamo che ogni vogatore eserciti la stessa forza (trasversa) F; il momento totale, per quanto riguarda la fase 1 (di *catch and drive*) sarà:

$$M_1 = sF - (s+x)F + (s+2x)F - (s+3x)F = -2Fx < 0\ .$$

Adesso, prima di esplorare altri casi, semplifichiamoci la vita.

Tanto per cominciare, visto che comunque dobbiamo bilanciare le distribuzioni dei rematori, avendone lo stesso numero per ogni lato, i valori s si eliminano, e quindi possiamo porre s=1. Inoltre, possiamo "assorbire" il valore x ridefinendo F (o, quando

[11] Da quel che ricordiamo, è questa l'etimologia della parola *entusiasmo*.

[12] Tranquillo, Doc. Una volta tanto, hai ragione tu.

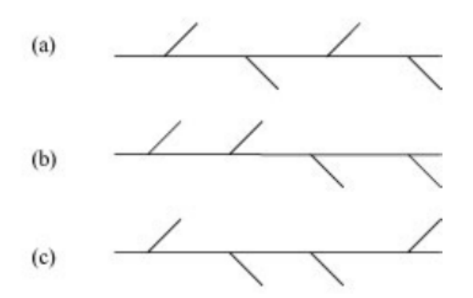
[13] Non sottovalutate questa componente: Rudy ha ricordi di gioventù di quando (in kayak) sfruttava questa componente per "parcheggiare il mezzo" (muovendo il sistema perpendicolarmente alla linea poppa-prua)

tratteremo la fase 2, F'), e quindi porre x=1. Infine (e questo è il punto più importante), se il nostro momento è diverso da zero ma noi vogliamo che la barca vada dritta, nella fase 2 il momento dovrà assumere un valore $-F'<0$ e quindi:

$$M_2 = +2F'x > 0$$

Insomma, la nostra barca mentre va avanti zigzaga sotto l'effetto di questa forza trasversa; possiamo affidarci alla sensibilità dei rematori (o del timoniere, se presente) per avere dei piccoli aggiustamenti che ci tengano sulla rotta corretta, ma questo richiede uno sforzo che preferiremmo impegnare sulla vogata; perché le cose "si aggiustino da sole", deve essere $F=F'$: che, per ulteriore semplificazione, porremo anch'essi pari a 1.

Volendo tenere la nostra barca *bilanciata*, ossia con lo stesso numero di vogatori per parte, e considerato che possiamo confondere la poppa con la prua, abbiamo tre possibili disposizioni dei rematori, che trovate nella figura a fianco: parliamone un attimo.



9 *I possibili armi.*

La disposizione (a), nota come *tradizionale*, non è una meraviglia: infatti, come abbiamo visto, ha un momento $M_a = \pm 2$ (abbiamo posto le F paria a 1, ricordate?).

Fortunatamente, si può fare di peggio: infatti, se provate a calcolare il momento della disposizione (b) ottenete (ci prendiamo una certa libertà con i segni, ma la cosa ci pare chiara):

$$M_b = \pm 1 \mp 2 \pm 3 \mp 4 = \pm 4$$

Il doppio del tradizionale. Un pessimista, visto questo risultato, non ci proverebbe neanche a calcolare la disposizione (c), ma da bravi teorici noi lo facciamo lo stesso:

$$M_c = \pm 1 \mp 2 \mp 3 \pm 4 = 0$$

Già, esiste una disposizione (detta disposizione Carcano[14]) con momento pari a zero.

Semplifichiamo ulteriormente la notazione, presumendo che il primo rematore abbia sempre un momento pari a 1 (se rema "dall'altra parte", basta cambiare tutti i segni). La disposizione Carcano diventa $M_c = 1 - 2 - 3 + 4$ e possiamo generalizzare la nostra condizione di equilibrio: *se ci sono* 2N *rematori, con* N=1, 2, 3, ..., *quello che stiamo cercando è una soluzione dell'equazione:*

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 2N = 0$$

in cui il primo membro contiene un egual numero di segni positivi e negativi.

Insomma, *gli equipaggi bilanciati con momento zero sono possibili solo con* 2N *rematori e* N *pari.*

Infatti, per ottenere zero, dobbiamo sommare o sottrarre N numeri pari e N numeri dispari; questo è possibile solo se N è pari in quanto solo in questo caso la somma di N numeri dispari potrà fornire un pari uguale alla somma di N numeri pari (che sarà sempre pari).

Ossia, il numero dei rematori deve essere divisibile per 4, e quindi possiamo limitarci a esaminare i casi con 4, 8, 12,... rematori[15].

Se indichiamo con n i valori portatori di segno negativo e con p quelli di segno positivo, la nostra condizione di equilibrio diventa (si noti il valore zero al centro):

[14] Un po' di storia: prende il nome da Giulio Cesare Carcano, mitico ingegnere della Moto Guzzi e (immaginiamo noi) simpatico rompiscatole del Club di Canottaggio Moto Guzzi sul lago di Como. Nel 1956 riesce a convincere gli allenatori a utilizzare questa disposizione e non solo il Club rappresenta l'Italia ai giochi olimpici di Melbourne, ma si porta a casa la medaglia d'oro.

[15] Quindi, il "2" (N=1) non sarà mai equilibrato.

$$\sum_{r=1}^{2N} r + 2\left(\sum n\right) = 0 = \sum_{r=1}^{2N} r - 2\left(\sum p\right) ,$$

dove le seconde sommatorie sono su tutti i valori del tipo indicato.

Per un equipaggio di $2N$ vogatori,

$$N(2N+1) + 2\left(\sum n\right) = 0 = N(2N+1) - 2\left(\sum p\right)$$

Quindi, ci basta cercare i casi per cui la somma dei valori positivi (o negativi) vale:

$$\frac{N(2N+1)}{2} .$$

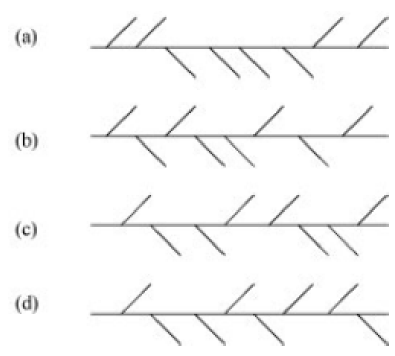
E, per il caso N=2, dobbiamo trovare le disposizioni per cui le due somme dei valori (positivi o negativi cambiati di segno) vale 5, che è la disposizione Carcano. Oibò, funziona!

Adesso, se vi siete stancati di remare e volete approfondire il concetto (noi non lo faremo), potremmo farvi notare che questo problema è noto in matematica come *problema delle somme uguali*: nel nostro caso, cerchiamo tutti i sottoinsiemi di un insieme dato di numeri positivi per cui la somma sia pari a quella indicata qui sopra.

Passiamo all'Otto, che succedono cose strane.

Esattamente come il Quattro, la disposizione tradizionale ha un momento mica da ridere: infatti, la somma dei valori negativi (cambiata di segno) risulta 20, anziché l'atteso (da formula qui sopra) 18; quindi, dobbiamo cambiare qualcuno di posto.

Si verifica facilmente che esistono solo quattro disposizioni che forniscono questo valore, e le trovate qui di fianco in figura. E adesso partiamo con la storia.



10 *Abbiamo l'oro in tasca!*

Il tipo (b) è nota come "Tedesca" ò "Ratzeburg", ed è stata utilizzata alla fine degli anni '50 da Karl Adam (...indovinate con che squadra...); il tipo (c) è nota come "Italiana" o "triplo tandem" (per le tre coppie dallo stesso lato al centro), e risale allo stesso periodo; entrambe sono (testuali parole degli allenatori) "ispirate al modello Carcano". Insomma, hanno provato e ha funzionato.

"Rudy, e la (a) e la (c)?" Oh, quelle non le ha mai usate nessuno. Ora, se vi decidete a entrare in acqua e fare qualche prova...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms