Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 223 – Agosto 2017 – Anno Diciannovesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM222 ha diffuso 3221 copie e il 14/08/2017 per Google eravamo in 84'100 pagine.

L'immagine è di ***Paul Noth***, e ci pare una grande idea per un racconto di psicofantasy. Fermo restando il sempre presente nostro stupore nel "salto" in una singola illusione ottica tra una "visione" e l'altra, in questo caso, i salti sono quattro o due? Le due illusioni sono indipendenti tra di loro, e... Va bene, seguirà dibattito. Per non parlare delle interpretazioni psicologiche delle future visioni del mondo del bambino (amorevolmente guardato dalla bella figliola, mentre la nonnina ci pare piuttosto annoiata, a ripetere la stessa storia per l'ennesima volta). Comunque, secondo noi, un bel tappeto con dei triangoli di Penrose intrecciati tra loro avrebbe "movimentato" la stanza.

1. Carnevale all'incontrario

"_
canta
il merlo
canta, canta
tra i cespugli
canta il merlo
..."

(Poesia Gaussiana o dell'unicità della fattorizzazione. *MFB*, detto *Popinga*.)

Occorrerà, una volta o l'altra, ammettere in via ufficiale che scrivere in estate una rivista di matematica ricreativa è assai poco ricreativo. Quale mai sarà la probabilità che gli affezionati lettori di RM si portino l'e-zine in vacanza, per godersela sotto l'ombrellone? Quanti saranno coloro che non vedono l'ora di indagare su improbabili problemi dalle ancora più improbabili ambientazioni mentre sono tutti presi a organizzare il barbecue di Ferragosto? Chi avrà mai voglia di seguire le farneticazioni che costituiscono il tessuto connettivo dei compleanni, piuttosto che seguire le caduche traiettorie delle Perseidi, nella notte di San Lorenzo?

Bisognerà farsene una ragione. O meglio, bisognerà che la ragione se la facciano gli ostinati triplici redattori di questa rivistucola: anche perché fare in modo che le e-zine agostane escano regolarmente[1] implica per tutti svariate sudate lugliesche, che assai difficilmente saranno recuperate poi nelle serate settembrine.

Come minimo, occorre violare le regole. Mandare in vacanza i vincoli semiprofessionali, impostare i pezzi d'Agosto più o meno come si impostano gli impegni professionali del periodo, ovvero cercando di evitarli il più possibile. Così, questo compleanno avrà ben poco in comune coi confratelli: forse potrebbe perfino violare il vincolo più sacro, quello di finire – farneticazione dopo farneticazione – con il parlare d'un matematico degno d'esser ricordato nel suo mese di nascita. Forse.

Così, sull'onda calda ed estiva che rende lecita ogni leggerezza, scriveremo quasi un pezzo di cronaca: cronaca certo minore, anzi minima, ancorché matematica. L'occasione è data da due eventi simultanei: il primo, è che siamo in Agosto. Come molti ricorderanno, Agosto è l'ottavo mese dell'anno, cosa che lo pone immancabilmente agli antipodi orbitali del secondo mese dell'anno, cioè Febbraio. E Febbraio è, quasi sempre, il mese canonico del Carnevale[2].

Il Carnevale è una festa lunga e bugiarda: bugiarda perché viene da "*carnem levare*" cioè far sparire la carne dalla tavola; solo che la carne sparisce (insomma… diciamo che canonicamente dovrebbe sparire per i cattolici osservanti) durante la Quaresima, non certo durante il Carnevale, che anzi ha come "*mission*" la licenza di darsi agli stravizi e ai

[1] Gli avverbi di modo sono un problema storico per RM; se ne trovano sempre più del dovuto in ogni articolo, e qualcuno è particolarmente prolifico, nel senso che si presenta in una dozzina di occorrenze in ogni numero della e-zine. Se qualche lettore non ci ha ancora fatto caso, questo è dovuto principalmente all'azione sterminatrice di Alice, che appena può ne falcia a blocchi di una ventina per volta. In particolare, la dottoressa Riddle dà una caccia spietata ai "decisamente", che compaiono sulle tastiere degli altri due redattori con capacità riproduttiva da far invidia ai conigli più assatanati. Ciò nonostante, questo specifico avverbio qui, il "regolarmente" che impudico ha generato questa nota a piè di pagina, può forse passare alla storia come l'avverbio più sfacciato della storia della rivista: accostarsi ad una frase che parla dell'uscita di RM, se ti chiami "regolarmente", è indice di una faccia tosta senza precedenti.

[2] Vi abbiamo annoiato troppo spesso con i virtuosismi dei calendari, non perderemo ulteriore tempo per ricordarvi che sì, qualche volta l'ultimo giorno di Carnevale, il celebre Mardi Gras, può capitare a Marzo. L'ultima volta che è successo è stato davvero poco tempo fa, del resto…

bagordi finché è possibile, e formalmente questa possibilità termina il Mercoledì delle Ceneri, inizio appunto della Quaresima. Insomma, è una festa che prende il nome da ciò che tenta disperatamente di evitare[3].

Oltre al latino, lingua imperante per molti secoli, occorre pure tener conto dell'inglese, che impera attualmente. Anzi, a dire la verità, proprio dell'americano, che ogni tanto si discosta dal britannico idioma genitore: un londinese, ad esempio, direbbe più probabilmente "*funfair*", invece di "*carnival*", per parlare di ciò che il Merriam-Webester definisce letteralmente "*una forma di divertimento che viaggia attraverso posti diversi e include giochi e gare alle quali si può partecipare per vincere premi*". Le parole chiave ci sono già tutte: "giochi", "gare", divertimento"; basta poi aspettare che prenda forma la Rete, che è in grado di fornire tutti i "posti diversi" che si vuole, purché virtuali, e il gioco è fatto: un "*carnival*" può ben essere un sito che fa da guida verso altri siti, con intenti giocosi, cosicché l'internauta di turno possa gironzolare da un luogo (virtuale) all'altro, in una comunità di giocosi intenti. Quanto tempo ci sarà voluto, prima che in qualche computer americano cominciasse a gironzolare l'idea di fare un "*Carnival of Mathematics*[4]"? Non molto, certo non molto. E quanto ci sarà mai voluto prima che qualche *matematto* decidesse di importare anche in Italia qualcosa di simile, che con molta originalità avrebbe potuto chiamarsi, ad esempio "*Carnevale della Matematica*"? Ancora meno, è ovvio.

1 *Carnevale della Matematica*

Va subito riconosciuto che gli italici pervicaci matecarnevalisti avranno pure rubato l'idea agli anglofoni, ma di certo non sono meno in gamba. Anzi, in inglese adesso in linea ci sarà pure l'edizione numero 147, ma il meno che si possa dire è che un po' disordinata: iniziato nel febbraio 2007, il "*Carnival of Mathematics*" rifugge da uscite regolari, naviga un po' a vista. Vogliamo confrontarlo con il nostro *Carnevale della Matematica*, che è un orologio atomico, invece? Esce una sola volta al mese, ma rigorosamente il 14, in modo tale che le edizioni marzoline possano degnamente celebrare il Pi Day: e a partire dal Maggio 2008 ha sfornato 110 edizioni puntuali come i rintocchi dei dì di festa. Altro che il disordine temporale anglo-americano.

[3] D'accordo: un'altra teoria etimologica sostiene che il nome venga piuttosto dal "salutare la carne" prima che sparisca, cosa forse più coerente. Ma l'etimologia, poverina, non è mica scienza esatta…

[4] http://aperiodical.com/carnival-of-mathematics/. Aperiodici già nel nome, e non se ne vergognano nemmeno.

Adesso, però, non mettetevi a fare i conti precisi, d'accordo? Perché sennò arrivereste subito a capire dove sia la magagna. Se il CdM numero 1 è stato celebrato nel Maggio 2008, non ci va un gran calcolatore per capire che il CdM 110 è stato celebrato nel Giugno 2017; ma allora, dacché questo articolo è di Agosto 2017, perché non si parla del CdM111?[5]

Eccolo, il secondo evento annunciato più di una pagina fa, che certo v'eravate dimenticati: insomma, dopo centodieci numeri, il Carnevale della Matematica si prende una pausa. Torna a Settembre; e noi, per convincerlo a ritornare più bello e sicuro che prima, abbiamo deciso di celebrarlo un po'.


2 *.mau., ovvero Maurizio Codogno*

E per celebrarlo, non si può far a meno che cominciare dal suo propugnatore, fondatore, padre: insomma, il matematto di cui sopra. Già il fatto che si usi cotanto termine può bastare a individuarlo: è lui stesso che si definisce così. Insomma, ladies and gentlemen, lasciatevi introdurre a ***Maurizio Codogno***, in arte ***.mau.***

Chissà se si arrabbia, per la sua foto pubblicata così, senza preavviso. Chissà se si arrabbieranno gli altri che, fra qualche riga, saranno sbattuti anch'essi in prima pagina, come lestofanti su foto segnaletiche. A nostra discolpa possiamo solo dire che così imparano a disseminare vanitose immagini personali per la Rete: non li abbiamo mica pedinati come agenti segreti armati di una macchina fotografica nascosta, abbiamo solo dato in pasto il nome a Google Immagini. Capito, sig. Garante della Privacy?

Del Dotto Codogno si potrebbe parlare assai a lungo, ma non si sa mai fino a che punto spingersi col gossip: sarà lecito dire che deve avere una certa propensione per le accoppiate, visto che le ha messe in atto sia con la prole che con le lauree? Mah… questo compleanno rischia di filare via tutto sul crinale della denuncia.

Di certo occorre, visto il tema, ricordare che l'idea di italianizzare il Carnival of Mathematics è sostanzialmente colpa sua. Deve avere un sacco di tempo libero, visto che oltre a lavorare le canoniche quaranta ore settimanali e fare il padre di famiglia, scrivere libri e rilassarsi traducendo quelli scritti da altri, se ne esce anche con queste belle idee. Vabbè, alla fin fine è un maledetto *influencer*, e deve farsi carico delle sue responsabilità. Poiché non potremo certo parlare di tutti i Carnevalisti che hanno ospitato edizioni del Carnevale della Matematica, abbiamo deciso di parlare solo di quelli che hanno una qual certa peculiarità: ad esempio, il record di "Maggior Numero di Carnevali Ospitati". E qui cominciano subito i guai, perché il Codogno si meritava la citazione anche solo per averlo inventato, il Carnevale, e subito bisogna ritirarlo in ballo perché è anche il "tenutario" del maggior numero di edizioni. Ne ha presidiate la bellezza di 19, pari al 17,3% del totale. Certo, per amor di precisione andrebbe precisato che raggiunge simili irraggiungibili vette anche perché Egli, perfido, pubblica (e ospita CdM) su due blog diversi: l'antico e glorioso "***Notiziole di .mau.***" (10 edizioni) e il più recente – ma certo non meno prestigioso – "***Il Post***" (9 edizioni).

[5] Noi, che siamo perfidi e complottisti, una risposta ce l'abbiamo subito: nel fatidico Luglio 2017 sarebbero dovuti uscire due "numeri" davvero numerologicamente notevoli, ovvero RM222 e CdM111. Probabilmente, una tale magica occorrenza era troppo fenomenale per gli dei della matematica, e così, invidiosi, hanno impedito che una tale congiuntura diventasse realtà. *Ubris teòn*, dicevano i Greci…

3 *Rudi Mathematici*

Con la sua smania equiparatrice, però, ha commesso il fatale errore di distribuire al meglio possibile le edizioni del CdM tra i suoi due blog, perdendo così clamorosamente il prestigioso titolo di "Blog Che Ha Ospitato il Maggior Numero di Edizioni del CdM". Tale ambitissimo titolo spetta infatti ad un blog che codognesco non è, e che non dovrebbe essere difficile da indovinare visto che non è stato per caso che si è usato l'aggettivo "prestigioso". Con ben 12 presenze, pari al 10,9% del totale, questa corona va ai vostri affezionati anfitrioni: per l'occasione, pubblicheremo una foto recente del trio. E sempre per l'occasione, eviteremo di spendere ulteriori parole su questi tre, che sospettiamo conosciate già, visto che state leggendo questa rivista.

Una volta assegnati i titoli di maggiori edizioni ospitate sia nella classifica per tenutari sia in quella dei blog, possiamo passare a mostrare le duplici classifiche al completo. I lettori più attenti non faranno soverchia fatica a notare un gran numero di corrispondenze tra le due classifiche, e questo è dovuto al fatto che la maggior parte dei carnevalisti non è affetta da schizofrenia blogghista: ad esempio, il numero 8 che accompagna in una lista il nome di ***Annalisa Ruberto***, Principessa della Rete Matematica, proprio come fa nell'altra per il blog "***Matem@ticaMente***" dovrebbe essere indizio sufficiente ad avanzare l'ipotesi che la tenutaria e il blog siano in stretta relazione.

	Tenutario
19	Maurizio Codogno
12	Rudi Mathematici
11	Gianluigi Filippelli
10	Marco Fulvio Barozzi
8	Annalisa Ruberto
7	Roberto Zanasi
7	Roberto Natalini
5	Spartaco Mencaroni
5	Paolo Alessandrini
5	Flavio Ubaldini
3	Claudio Pasqua
2	Marcello Seri
2	Matematica 2005
2	Daniele
2	Maestra Rosalba
2	Leonardo Petrillo
2	Peppe Liberti
2	Davide Passaro
1	Giovanna
1	Daniele Gouthier
1	Il Glogottatore
1	Martino Sorbaro

	Blog
12	Rudi Matematici
10	Notiziole di .mau.
10	Popinga
9	Il Post
8	Matem@ticaMente
7	DropSea
7	Proooof
7	MaddMaths!
5	Il Coniglio Mannaro
5	Mr. Palomar
5	Pitagora e dintorni
3	Gravità Zero
3	Science Backstage
2	Marcellosblog
2	Chartitalia
2	Crescere Creativamente
2	Il Coniglio Mannaro
2	Scienza e Musica
2	Math is in the Air
1	Al caffè del Cappellaio Matto
1	Medium
1	MatematicaMedie
1	Rangle
1	Pi Greco Quadro
1	Il Glogottatore
1	Termueske

E di indizi d'accoppiamento del genere se ne ritrovano davvero un bel po', almeno finché i numeri delle edizioni non cominciano a duplicarsi, confondendo le acque. Ma qualche poliblogghista indubbiamente c'è, a contendere la molteplice identità che tanto piace a .mau.; anzi, c'è chi sa fare di meglio, come ***Gianluigi Filippelli***. Questi, infatti, non solo si porta a casa il terzo posto assoluto nella classifica del Tenutari, ma si esibisce in una performance di rara maestria: è infatti l'Unico A Concatenare Ben Tre Blog: ***DropSea*** (7 edizioni), ***Science Backstage*** (3 edizioni) e ***Al caffè del cappellaio matto*** (1 edizione). In totale 11, pari al 10% esatto del totale.

4 *Gianluigi Filippelli*

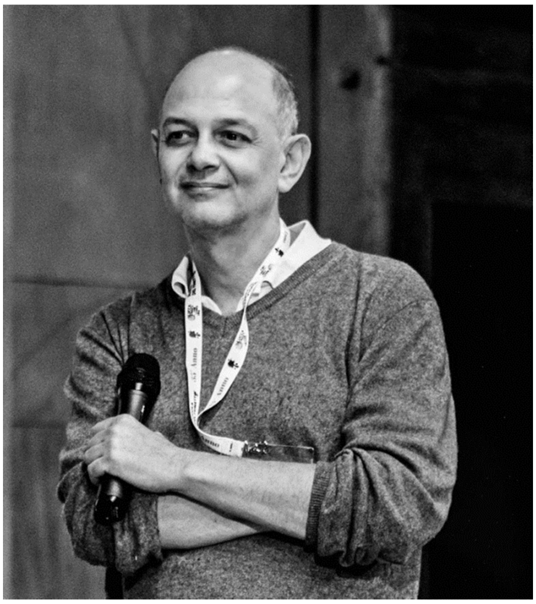
D'altro canto, è perfino superfluo notare come trasformare tutto in una specie di gara sportiva è davvero riduttivo: non ci sono premi, non c'è competizione, non si vince nulla, nell'ospitare tante volte il Carnevale della Matematica. Anche perché, che ci si creda o meno, ricucire insieme in un solo post tutta l'attività matematica dell'italica rete non è un lavoro da poco, e porta via tempo e fatica. Anche chi ha dato il suo contributo una sola volta è del tutto meritevole di elogio ed encomio: figuriamoci allora come dovremmo alzare alla gloria degli altari colui che, solo e impavido, ha coraggiosamente dato anima e cuore alla *Primissima Edizione*. Ha un blog caratterizzato da quattro "o" consecutive, un mestiere impegnativo, diverse cinture nere nell'armadio, e un nome di battaglia tutt'altro che modesto: ***Zar***. Ma noi lo sappiamo che si chiama ***Roberto Zanasi***, anche se lui gioca a fare il timido, e riesce a nascondersi perfino quando si lascia fotografare. Il suo blog, ***Proooof***, ha ospitato 7 edizioni del Carnevale, che possono parere poche, rispetto a quelle del primo in classifica: ma tutti i Carnevalisti sanno che non devono fidarsi: Zar è uno che mira all'infinito, ma sempre con molta, molta calma.

5 *Zar, Roberto Zanasi*

E poi, c'è poco da fare, su. Tra le molte tradizioni del Carnevale, una delle più consolidate è quella (condivisa anche con le altre edizioni nazionali), di dedicare al "numero d'ordine" del CdM un po' di palcoscenico, raccontarne alcune qualità, caratteristiche. Se Hardy e Littlewood sostenevano che tutti i numeri interi erano degli "amici intimi" per Ramanujan, è quasi un obbligo, per i Carnevalisti, mostrare nelle introduzioni alle varie edizioni del CdM che, pur restando lontanissimi dalla familiarità del genio indiano, un certo grado di conoscenza con gli interi ce l'hanno anche loro. Tutto ciò comincia ad essere vagamente "tecnico" quando si supera il primo centinaio, ma per le prime uscite ci sarebbe perfino da annoiarsi, specialmente con numeri evocativi come il sette: Sette Meraviglie, Sette Stelle dell'Orsa, Sette Samurai e i Magnifici Sette, e così via cantando. Pertanto, il fatto che Zar da più di un anno abbia deciso di non muoversi da questa magica cifra, nel numero delle ospitate, è cosa quasi certamente voluta: passare da un primo dispari evocativo come il sette per tuffarsi nel primo cubo degno di questo nome, è un passaggio impegnativo, e grondante di rimpianti.

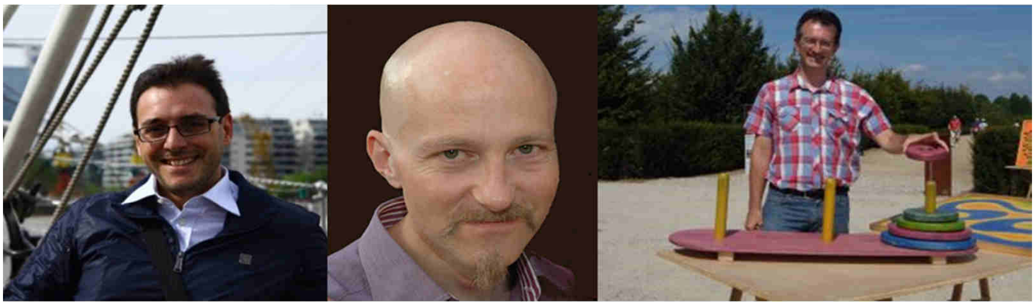
O forse – chissà – potrebbe contare anche il fatto che gli piace molto la compagnia che ritrova in quelle parti della classifica. Nella classifica dei Tenutari, infatti, nell'ambita casella delle sette presenze il professore si ritrova in compagnia d'una vera e propria portaerei della Rete Matematica Italiana, sulla tolda della quale troneggia un

Ammiraglio celebre in tutti i mari matematici della penisola. Anzi, di più: non si limita mica alla penisola, quella portaerei. Stiamo parlando di ***MaddMaths***!, e l'ammiraglio sulla tolda altri non è che il sovrumano ***Roberto Natalini***. Con MaddMaths! e Natalini le cose cominciano a farsi davvero serie, perché "MaddMaths" non è mica la traduzione approssimata di "matematto", proprio no.



6 *Roberto Natalini, di MaddMaths!*

Se sia il "MA" iniziale che il "maths" finale stanno ovviamente per "matematica", è la duplice "DD" a incutere rispetto: Divulgazione e Didattica, signori miei, mica noccioline. E fosse tutto qua: il fatto è che non appena si prova a pulirsi le scarpe sullo zerbino virtuale del sito, bisogna subito salutare con umile riverenza i loghi dell'UMI (Unione Matematica Italiana), del SIMAI (Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale) dell'AIRO (Associazione Italiana Ricerca Operativa), e insomma si capisce subito che qui, altro che scherzi di Carnevale… questo è con tutta evidenza l'atrio muschioso di un covo di matematici veri e propri. Certo, come talvolta capita, è proprio la matematica a venire in aiuto, a far superare almeno un po' il timore reverenziale… ad esempio, la celeberrima teoria dei Sei Gradi di Separazione. Basta scavare un po' (ma poco), e chiedersi: ma quanti mai saranno i gradi di separazione tra un sito così autorevole, dove fioccano nomi e cognomi che si ritrovano anche sulle "vere" Riviste di Matematica (e non solo su quelle "Prestigiose") e, tanto per dire, un fumetto? O un sito di satira? E la risposta lascia basiti, perché se si evitano modesti indugi e si mira subito in alto, scegliendo per esempio, come fumetto il mai abbastanza lodato e genialissimo *Rat-Man*, e come sito di satira il principe delle domande inquietate[6] come *Lercio.it*, la risposta è semplicemente devastante: i gradi di separazione sono, più o meno, mezzo. Zerovirgolacinque, arrotondato per difetto.



7 *Tre per il cinque: Medici narratori, archeomatemusicologi, e poeti osservatori di stelle*

Solo che ormai siamo arrivati su quel crinale difficile, quello in cui o ci si ferma o si è perduti: perché nella storia delle prime centodieci edizioni del CdM i carnevalisti sono comunque tanti, troppi, quantomeno, troppi per la tastiera di uno stanco redattore di RM in vacanza. E scorrendo le classifiche dall'alto in basso, uno prima o poi deve decidere di smettere, di fermarsi, ma è dannatamente difficile scegliere il momento giusto. Che facciamo, approfittiamo dello iato che esiste tra le sette edizioni di ***Zar*** e ***MaddMaths!*** e le cinque del ***Coniglio Mannaro***, di ***Mr.Palomar*** e di ***Pitagora e Dintorni*** per piantarla con la ricerca di foto e con i pettegolezzi? Così uno rischia di farsi nemici per

[6] "Ah, ma non è Lercio?"

sempre ***Spartaco Mencaroni***, ***Paolo Alessandrini*** e ***Flavio Ubaldini***, e possiamo giurare se ciò che abbiamo di più caro che quei tre, uniti dal "cinque" che ha reso famosi i postulati di Euclide, non se lo meritano davvero.

Ma se si cede, il problema si ripropone: avremmo poi il dilemma se citare o meno ***Gravità Zero***, se menzionare o no ***Math Is In The Air*** e il suo instancabile propugnatore ***Davide Passaro***, che peraltro ha il gran merito di essere la ultima "New Entry" nel novero dei Carnevalisti; se alzare pubblicamente alti lai per la prolungata assenza della prodigiosa penna di ***Peppe Liberti***, che ospita un CdM solo se apre un blog nuovo, e così via, ad ogni scatto del ranking. Quindi, stop. La finiamo qua.

O quasi.

Perché forse possiamo passare colpevolmente sotto silenzio che una tradizione del tutto italiana è la "cellula melodica" di ***Dionisoo***, che abbiamo citato appena (Dioniso è Flavio Ubaldini, quello di Pitagora e Dintorni e puranco del ***Blogghetto***), con la scusa della stanchezza; ma non possiamo far finta di niente, non possiamo proprio, nonostante la calura, evitare di parlare della Poesia Gaussiana.

Prendete i numeri primi, e associate loro un verso, una frase, anche solo una parola. Poi esercitatevi nel gioco più vecchio del mondo, quello di contare, stando attenti a che i numeri primi siano citati per il verso associato mentre i composti (gli è ovvio) saranno imperlappunto composti dai versi dei fattori primi che li compongono. Troppo oscuro? No, è solo che è più facile farlo che spiegarlo. Vi ricordate "Il Corvo" di Edgar Allan Poe? Beh, non c'entra niente. Ma prendete piuttosto un volatile più allegro, un merlo pimpante; sbeffeggiate il numero (e il verso) numero 1, che farebbe saltare il Teorema dell'Unicità della Fattorizzazione, e cominciate marchiando il 2 con "*canta*", e il 3 con "*il merlo*". Avrete così "Canta – Il Merlo – Canta canta", dacché al verso 4 tocca ineluttabilmente il duplice 2, e poi servirà un "*tra i cespugli*" per il primo 5, preparare in anticipo un "*melodioso*" per il primo 7, e piano piano tutto comincia a prendere forma:

…
Canta
Il merlo
Canta canta
Tra i cespugli
Canta il merlo
Melodioso
Canta canta canta
Il merlo, il merlo
Canta tra i cespugli
…


8 *Marco Fulvio Barozzi, alias Popinga*

e non finisce, e ripete il suo verso, come la gallina leopardiana: ma a differenza di questa, ha l'infinito come impianto naturale, e non come poesia consorella.

E la colpa (o il merito, a voi l'ardua sentenza) è tutta del Sommo ***Popinga***, al secolo ***Marco Fulvio Barozzi***. Così, il CdM italico ha – e per sempre avrà – il vincolo di presentarsi al mondo marchiato da un nuovo verso della Poesia Gaussiana.

Il CdM111, tanto per dire, è lì che freme, bloccato dalla pausa estiva imprevista, ma certo ben pronto a cinguettare vigoroso il verso centodecimo, quel suo "*il merlo gorgheggiando*" che ancora non è stato librato per l'aere.

Il Barozzi, peraltro, meritava d'essere citato un po' prima, in quest'articolo: le classifiche parlano chiaro: il suo blog (*terribilis locus est iste*) è uno dei tre che vantano un numero di

Carnevali a doppia cifra; e se anche non lo fosse, non poteva non essere ricordato per la capacità oblunga e permeante di fare di storia, matematica e letteratura un mélange compatto e senza grumi. E poi il Sommo Popinga è comunque una star, colonna dorica del tempio del CdM. Non era proprio immaginabile non citarlo, e quindi, perché mai farlo solo adesso?

Diamine, è ovvio: perché è proprio lui a darci il testimone per mantenere viva la missione dei compleanni, no? Non abbiamo la certezza che Marco Fulvio sia un discendente diretto in linea maschile di Francesco, ma che importa? Potrà mai esistere una scusa migliore di un contemporaneo matematico Barozzi per parlare di un antico matematico Barozzi?

9 *Francesco Barozzi, alias Franciscus Barocius*

Francesco Barozzi nasce a Candia, quella dell'isola di Creta[7], il 9 Agosto 1537. Come sempre, la geografia fisica guida la Storia, ma la Storia si vendica alla grande sulla geografia politica. Candia e Creta, in quel periodo strano della storia in cui il XV e i XVI secolo si passano il testimone, quasi non si sa come definirle: figlie dell'Impero Romano d'Oriente almeno fino al vergognoso scandalo della Quarta Crociata, quando i crociati cristiani usano la scusa della liberazione della Terrasanta per mettere a sacco la più grande metropoli cristiana del tempo, Costantinopoli; poi più esplicitamente veneziane, pur rimanendo ovviamente terra, città e isola cruciale della storia greca. Poi Maometto Secondo trasforma Costantinopoli in Istanbul, e dopo la caduta di Bisanzio sono molti gli studiosi cristiani che fuggono, cercano scampo altrove. Creta è un buon posto dove rifugiarsi, e Candia, o per meglio dire Iráklion, a volerla chiamare con il suo nome greco, diventa un centro d'eccellenza accademico: è qui che si copiano e traducono i manoscritti greci, è qui che l'Occidente cristiano latino mantiene i maggiori contatti con l'Oriente cristiano greco, ferito dalla caduta della capitale sacra.

Come sempre, non è davvero il caso di indulgere a giudizi sommari e affrettati: sono secoli in cui la cultura dell'Islam rifulge e splende, e non è affatto detto che non fosse più aperta, libera e attraente di quella cristiana, se nel 1571 tutta Creta insorge contro i dominatori veneziani tentando, anche se senza successo, di sfuggire al giogo della Serenissima per farsi accogliere nei domini della Mezzaluna.

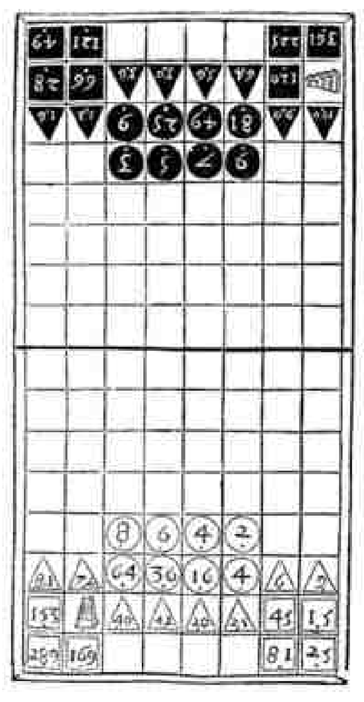
Ma nel 1571 Francesco Barozzi è già un uomo fatto, bisogna tornare indietro almeno un po': figlio di Iacopo, nobiluomo veneziano, Francesco è indubbiamente un buon frutto della Repubblica di Venezia: studia a Padova, dove impara Latino e Greco; poi prosegue, entrando nel celebre ateneo patavino, dove comincia a studiare anche matematica. Erano tempi in cui i dotti – e il nostro ben presto viene qualificato come "dottissimo" – potevano,

[7] Già, perché di Candia ce ne sono diverse… una poi, è vicinissima a un pezzo di RM, più o meno a mezza strada tra Il Luogo Del Divano Quantistico e Il Luogo Da Cui.

forse addirittura dovevano mostrarsi tali in tutto lo scibile, senza artificiose segregazioni tra il sapere umanistico e la filosofia naturale.

Francesco (che secondo gli usi del tempo si fa chiamare anche Franciscus Barocius, con piena denominazione latina), non ha soverchi problemi per mantenersi, e trascorre la sua vita tra Venezia e le altre città della Serenissima, concedendosi di tanto in tanto qualche soggiorno estivo nella natia Creta, dove ovviamente ha dei possedimenti. È abbastanza sapiente e famoso da tenere delle lezioni all'università, ma non sembra che abbia mai tenuto ufficialmente una cattedra; quello che più lo appassiona, ciò per cui più si impegna, è l'idea di recuperare il sapere e la scienza classica, degli antichi Greci in particolare. Traduce gli *Elementi* di Euclide a partire dalla versione di Proclo; nello stesso periodo (attorno al 1560, e quindi appena ventitreenne) pubblica un libello[8] in cui si oppone alle ipotesi di Alessandro Piccolomini[9] in merito alla "certezza matematica"; non sappiamo cosa sostenesse il Piccolomini, ma è gratificante leggere che Francesco Barozzi sostenesse che la certezza matematica "*è contenuta nel sintattico rigore delle dimostrazioni*".

Molto si deve a Francesco Barozzi, nel recupero della scienza classica: traduce non solo Euclide attraverso Proclo, ma anche Pappo, Archimede, Erone. Era un sapiente, non c'è altro modo di definirlo: certo tolemaico nel suo approccio astronomico (e come poteva non esserlo, ai suoi tempi?), ma brillante, intellettualmente onesto e di vastissima cultura. A renderlo simpatico ad una rivista di matematica ricreativa, peraltro, basterebbe certo il suo manuale del 1572 sulla *Rithmomachia*, un antico "gioco pitagorico" che, come dice il nome, è una sorta di "Battaglia di Numeri", o meglio ancora una "Lotta di Armonie Numeriche". Si gioca con pedine di diverso valore e lignaggio su una scacchiera, con l'obiettivo di catturare il re nemico, proprio come negli scacchi.



10 *Rithmomachia*

Figlio dei suoi tempi razionali e mistici al tempo stesso, Francesco non disdegna di coltivare, oltre a ciò che ancor oggi chiamiamo "scienza", ben altre passioni: se Newton si dilettò, un secolo dopo, con l'alchimia, Barozzi non esitò a cimentarsi con la divinazione e le profezie, fino a meritarsi l'appellativo di "mago". Il suo "*Pronostico universale di tutto il mondo*" del 1566, è di fatto la volgarizzazione delle profezie di Nostradamus (più vecchio di lui di appena una trentina d'anni, in fondo) per il quinquennio 1565-1570. Questo ed altro bastò ad un tribunale ecclesiastico di recente istituzione, la Sacra Inquisizione, per metterlo sotto processo non una, ma due volte. Non

[8] *Opusculum, in quo una Oratio, et duae Quaestiones: altera de certitudine, et altera de medietate Mathematicarum continentur*

[9] Altro bel tipo: umanista e astronomo, cardinale e arcivescovo. Avrà anche avuto qualcosa a che ridire con Francesco Barozzi, ma non era un tipo da prendere sottogamba: fu il primo a classificare le stelle in base alla loro luminosità, assegnando loro una lettera, come fece molto tempo dopo tutta la comunità astronomica; soprattutto, condivideva appieno con Francesco Barozzi l'idea che occorresse recuperare il sapere scientifico degli antichi. Scrisse di matematica, astronomia, poesia e teatro. Non sono molti gli autori che possono vantarsi di aver scritto, da sapienti, sia opere dal titolo "*De le stelle fisse*" o "*Annotazione del libro della Poetica di Aristotele*" insieme a "*De la nobiltà et eccellenza de le donne*" e "*Amor costante*". Faceva parte (era anzi tra i fondatori) della senese Accademia degli Intronati, la cui biblioteca è ancora uno dei luoghi più evocativi di Siena (a giudizio di un paio di redattori di RM, che ci sono capitati, guarda un po', per sentire la dotta conferenza di un Carnevalista). Il cognome lo apparenta a papa Pio II, Enea Silvio Piccolomini, anche se il nostro è del ramo della famiglia Carli-Piccolomini; del resto, provare a districarsi lungo gli alberi genealogici della famiglia Piccolomini, straordinariamente popolata (cfr. la voce "Piccolomini" su Wikipedia), è più o meno come cercare di distinguere due particelle che seguono la statistica di Bose-Einstein.

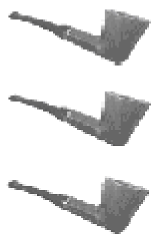
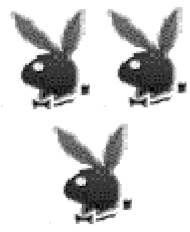
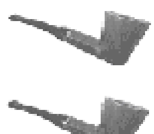
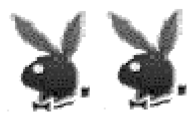
se la cavò poi male, rispetto ad altri tristemente più celebri: il peggio che gli toccò fu di dover pagare cento ducati di multa per aver provocato, a detta del Santo Uffizio, una terribile tempesta proprio a Creta, sua terra natale.

Solo una multa, dicevamo: ma in realtà si trattava di una condanna che avrebbe previsto almeno la prigione, con "pena sospesa"; forse bastò a spaventare a sufficienza Franciscus Barocius, che decise di non scrivere più altro, né di profezie, né di scienza. Se ne restò buono a Venezia fino alla sua morte, per colpo apoplettico, nel novembre del 1604.

Erano tempi strani e confusi, quelli, in cui superstizione e sapienza ancora si miscelavano senza troppa attenzione. E per quanto possano esserci antipatici i tipi alla Nostradamus, non possiamo non riservare una buona quota di simpatia verso questo Barozzi, che più che altro ci sembra essere soprattutto uomo curioso del mondo, e animato da una vigorosa sete di conoscenza.

E poi, diamine, era di Venezia, città dei uno dei carnevali più famosi del mondo: al pari del suo omonimo Marco Fulvio, siamo certi che sarebbe stato un "carnevalista" d'eccezione.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Un classico moraleggiante			
Problema in famiglia			

2.1 Un classico moraleggiante

OK, non lo abbiamo inventato noi. Ma non sappiamo se per *pruderie* o per effettiva difficoltà matematica, è sempre stato considerato decisamente difficile.

Per evitare accuse di sessismo, ci teniamo a specificare che l'uso del maschile è unicamente dovuto all'intenzione di maltrattare il meno possibile la lingua italiana e, ovunque possibile, intendiamo utilizzare termini che, nell'accezione comune, hanno un significato neutro.

Bene, chiuso con il *politically correct*, andiamo ad incominciare.

Otto *[...ma vedi dopo (RdA)]* coppie si trovano per una cena, e hanno prenotato un tavolo rotondo ad un ristorante. Per evitare le classiche recriminazioni ("No, *io* il vino lo reggo benissimo: è *il mio partner* che, dopo il secondo bicchiere..." E, stranamente, questo lo dicono entrambi, quando il partner non è presente), decidono di sedersi in modo tale che nessuno abbia al proprio fianco il rispettivo partner ma, in ossequio alle regole del galateo, vi sia un'alternanza di genere tra un posto e l'altro.

Non avendo (ancora) gli aperitivi esercitato il loro devastante effetto, in breve tempo viene trovata una sistemazione soddisfacente, e la cena può cominciare: data la sistemazione (e la propensione per la "sbronza allegra" dei commensali), l'evento si rivela un enorme successo: tant'è che, all'unanimità (i maligni sostengono che "quei due" è la prima volta che sono d'accordo, dopo tanti anni) si decide di ripetere la cena la settimana successiva con una disposizione diversa, pur seguendo le stesse regole di base. A quel punto, viene chiesto al meno *mathematically challenged* del gruppo quante cene debbano essere prenotate al ristorante per esaurire tutte le "possibilità di prossimità" (nel senso che "la disposizione dell'altra volta, ma spostati di uno in senso orario" non vale: il tavolo è rotondo).

Siccome il Nostro, al momento, si sta rendendo conto che la dichiarazione di cui sopra del suo partner *forse* un po' di verità la conteneva, riesce più o meno goffamente a svicolare la domanda (con una risposta del tipo "...beh, almeno un'altra disposizione esiste... per la prossima volta vi porto il risultato").

Date una mano al(la) nostr(o/a) amic(o/a)! Quante sono le disposizioni possibili?

Ah, come dicevamo sopra: non fermatevi a otto coppie! Consideratene pure N, potremmo far felici altri gruppi di commensali.

Adesso, Rudy si stava chiedendo... Avete presente i tre generi di "Neanche gli Dei", di Asimov? Il problema è generalizzabile ad una specie con *tre* generi? Già solo la generalizzazione del galateo, qui, dovrebbe essere un problema non da poco...

Mah, forse sua moglie ha più ragione di quanto sembri, a proposito del Cannonau di oggi a pranzo...

2.2 Problema in famiglia

Tranquilli: siccome per il problema ci servono quattro personaggi, lo ambientiamo nella famiglia D'Alembert, tutto qui. Ma prima, per non ridurre il tutto a quattro righe striminzite, un po' di divagazioni.

Rudy ha scoperto l'esistenza di un terzo ramo (immaginario) della famiglia: a parte il più famoso (quello che contiene lui) e quello dello scribacchino (Jean), esiste una serie di romanzi di E.E. (Doc) Smith che hanno come personaggi i membri di una famiglia di circensi di nome D'Alembert. Anche per i più sfegatati fan della saga dei *Lensmen* e apprezzatori di E.E. "a prescindere", questi romanzi sono orribili: fortunatamente non sono mai stati tradotti in italiano (almeno, non ci risulta, data la carenza di editori masochisti) e, nel caso ve li proponessero, rifiutate gentilmente: non valgono la spesa neanche regalati. Incredibile, cosa può fare uno scrittore per la pagnotta.

Bene, abbiamo sforato la pagina, quindi possiamo passare al problema.

Questa estate, per quanto riguarda Rudy, gran parte delle ferie si svolgeranno sulle tranquille e solatie sdraio in riva al mare di libri del salotto di casa sua.

Non per la sua pigrizia innata, ma lui e sua moglie hanno quelli che hanno deciso di definire "*problemi con le suocere*" (nel senso che tra tutti e due hanno dei problemi con le suocere di almeno uno dei due... Speriamo il concetto sia chiaro, delle mamme non si dice mai male...); nulla di preoccupante, ma meglio restare in un'area da cui le due simpatiche vecchine (*non diteglielo, che le abbiamo chiamate così...*) siano raggiungibili con discreta prontezza.

Un po', però, in giro si riesce ad andare: l'altro giorno, l'intera famiglia (Rudy, Paola, Alberto & Fred) è riuscita a fare una simpatica passeggiata-con-mangiata in campagna.

Alle dieci e mezza di mattina erano (perfettamente orientati, nonostante per alcuni di loro l'ora sia definibile come "pre-antelucana") all'interno di un bosco: questo bosco era attraversato da un sentiero rettilineo al cui estremo c'era una rinomata locanda di campagna rispondente al poetico nome di "Al Trogolo Felice", dove i nostri avevano intenzione di mangiare.

Come dicevamo, tutti perfettamente orientati: avevano perfettamente presenti distanze, posizioni e angoli necessari, e il terreno era piatto.

Siccome ogni tanto un po' di tranquilla solitudine fa bene allo spirito, decidevano appunto alle dieci e mezza di dirigersi al Trogolo ma per quattro vie diverse:

Rudy, pragmaticamente, decideva di puntare alla locanda in linea retta, per la via più breve. Paola optava per raggiungere il sentiero per la via più breve. Alberto prende la strada che gli permette di arrivare il più presto possibile alla locanda (con un nome del genere, capace che nell'aia sul retro trovi dei potenziali clienti[10]). Fred, che ha fatto colazione tardi e, crocianamente ("...Uomo di Lettere...". E, una volta tanto, ci sentiamo quasi di dar ragione a quel vecchio trombone di Neto), non sente particolare stimolo a fare da assistente infermiere per i pazienti di suo fratello, opta per una direzione simmetrica a quella di Paola rispetto al percorso di Alberto.

[10] Non ditegli che ve l'abbiamo raccontata, ma era diventato l'eroe del primo anno di Vet quando era riuscito a tenere fermo un maiale (mettendocisi pure a cavalcioni) mentre il resto del corso gli faceva prelievi di sangue in campo aperto (al maiale, non ad Alberto). No, dico, avete presente la stazza di un maiale adulto "non prosciuttato"? Il ragazzo ha un futuro.

Se adesso cominciano a venirvi dei dubbi, sappiate che i Nostri camminano tutti alla stessa velocità, ma all'interno del bosco tengono una velocità che è la metà di quella che tengono sul sentiero.

Fred arriva all'albergo nello stesso momento di Rudy dopo aver percorso tre chilometri più di Alberto; la velocità media più alta tra i quattro è stata di 5,5 chilometri all'ora.

La domanda è: quando si mangia?

Per essere più seri: a che ora arriva ciascuno dei quattro alla locanda, e quanta strada ha percorso?

Forse, leggere il Manoscritto di Voynich nell'originale con l'aria condizionata "a palla" era più rilassante...

3. Bungee Jumpers

MN è una corda fissata in un cerchio S con centro O, e AB è un diametro variabile che non interseca MN. AM e BN si incontrano in un punto C all'esterno del cerchio e quindi per ogni posizione di AB esiste un triangolo ABC avente altezza CD rispetto ad AB.

Dimostrare che, al variare di AB (e di C), tutte le altezze CD sono concorrenti.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Agosto.

Forza e coraggio, che ci siamo riusciti anche questo mese. Prima di partire con le vostre soluzioni, un ringraziamento di cuore a tutti quelli che hanno reagito alla domanda di copertina, alleghiamo qualcuno dei link ricevuti.

> Qui troverete alcune interessanti informazioni sulla biblioteca "a nastro di Mobius" di cui avete accennato nel numero 222:
>
> http://www.archdaily.com/33238/national-library-in-astana-kazakhstan-big
>
> https://www.designboom.com/architecture/big-new-national-library-in-astana-kazakhstan/
>
> https://www.e-architect.co.uk/kazakhstan/kazakhstan-national-library
>
> https://www.youtube.com/watch?v=YRIzMWT7xW8
>
> In ogni modo, sembra che la biblioteca non sia stata realizzata secondo questo progetto:
>
> https://goo.gl/maps/Thw1vJguip72
>
> http://presidentlibrary.kz/en

Bene, ora procediamo, che c'è tanto da dire.

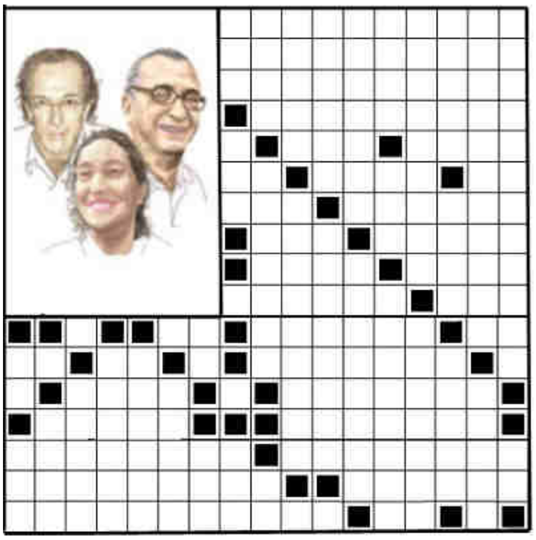
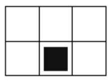
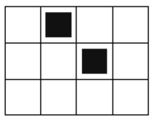
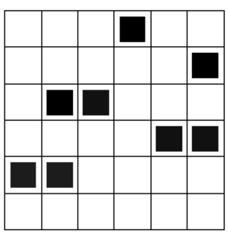
4.1 [221]

4.1.1 Numeri (ma anche parole) incrociati

Ancora una soluzione sul problema dello schema di parole crociate:

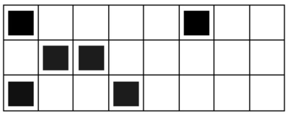
> *Lo schema non necessariamente quadrato che dovete disegnare deve contenere meno caselle nere che caselle bianche e, per un dato n (≥ 2), deve poter ospitare, tra verticali e orizzontali:*
>
> *Una parola di lunghezza n.*
>
> *Due parole di lunghezza n*–1.
>
> *Tre parole di lunghezza n*–2.
>
> … … …
>
> *n parole di lunghezza* 1.
>
> *"k parole di lunghezza j" significa "k e solo k parole di lunghezza j". È sempre possibile?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato le risposte di ***RM^2***, ***trentatre***, ***Valter*** ed ***Emanuele***. Ci ha poi scritto ***Camillo***:

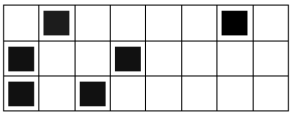
> Quando è uscito RM 222 gran parte di quello che segue era già stato scritto e devo dire che la soluzione per n=2 non l'avevo presa in considerazione perché non presenta nessun incrocio. Mentre ho sempre contato le "parole lunghezza 1 (SIC)" una volta sola[11] anche se sia ***Trentatre*** che ***Valter*** non sono d'accordo. I due propongono gli stessi schemi, rispettano le direttive del problema, però in quanto ad estetica enigmistica...
>
> 
>
> La copertina è fatta su uno schema 17×17 n=12 con 36 nere e 183 bianche. A proposito dei numeri incrociati non penso che lo schema più piccolo sia un problema, eccovi il più piccolo schema possibile è unico a parte sue rotazioni.
>
> 
>
> Rispetta anche "l'estetica enigmistica" del "non ci devono essere parole o blocchi isolati". Anche il prossimo è unico e rispetta l'estetica.
>
> 
>
> I due precedenti sono venuti fuori a memoria durante uno spostamento in autobus. Poi per fare dispetto al GC ci ho dato dentro con forza bruta.
>
> Man mano che si sale con n lo schema si ingrandisce ma la regola delle nere inferiori alle bianche unito alle lettere singole fa in modo che sia impossibile compilare uno schema. Lascio ai matematici l'onere della dimostrazione.
>
> Parlando di schemi quadrati con n uguale al lato non sono riuscito a superare il 6×6 eccovene uno:
>
> 

[11] I Rudi scrivono: Comunque, sia ben chiaro che "*k* parole di lunghezza *j*" significa "*k* **e solo *k*** parole di lunghezza *j*". A mio parere questo significa che le parole isolate di lunghezza 1 vanno contate un volta sola. Al GC l'ardua sentenza.

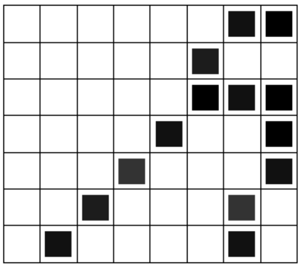
Con schemi rettangolari l'estetica non è il massimo come in questi da 8×3 n=5:



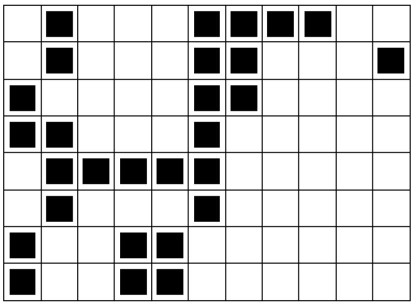
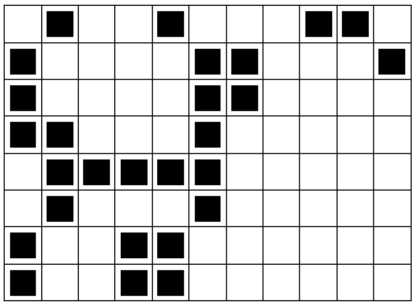
A proposito con certi valori come in quello qui sopra è impossibile l'estetica enigmistica; c'è sempre almeno una casella da 1 isolata.



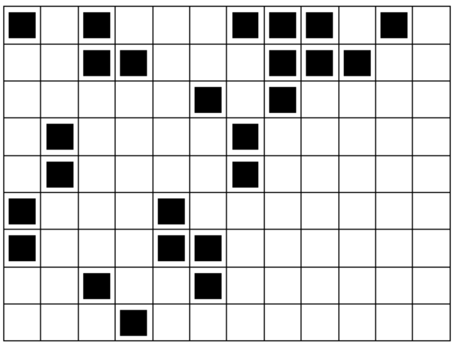
A questo punto interpreto "...cominciare una gara tra di voi a chi ce l'ha (lo schema) più piccolo..." che si intende per ogni n. Per cui il n=6 è già qui sopra: 36 caselle con 8 nere. Ma anche n=5 non mi sembra male con 24 caselle di cui 6 nere. A seguire n=7 8×7 14 nere.



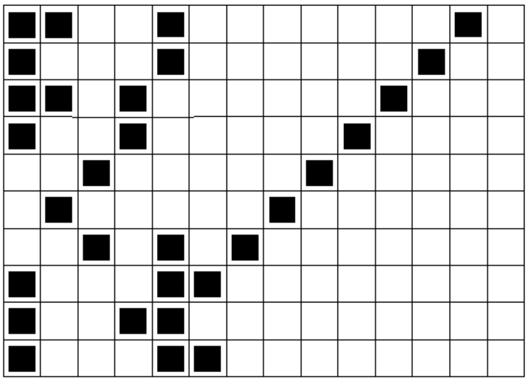
N=8 11×8, propongo due schemi uno con 28 nere l'altro con 27.

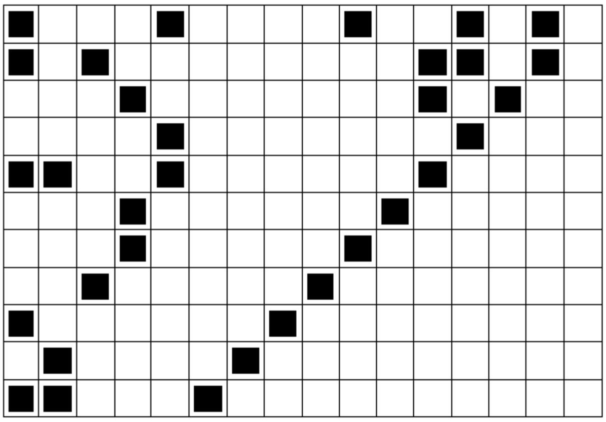
Di questi schemi il programma di forza bruta quando è stato interrotto dopo quasi 5 ore di lavoro ne ha trovati 1512 tutti con 27 o 28 nere. Quello che segue è un n=9 da 12×9 e 25 nere. All'interruzione dopo 21 ore ne aveva trovati 8800.



A questo punto visti gli eoni necessari per avere dei risultati; carta quadrettata e matita. Per cui n=10 14×10 con 30 nere. Questo rispetterebbe anche l'estetica senonché è diviso in due parti.

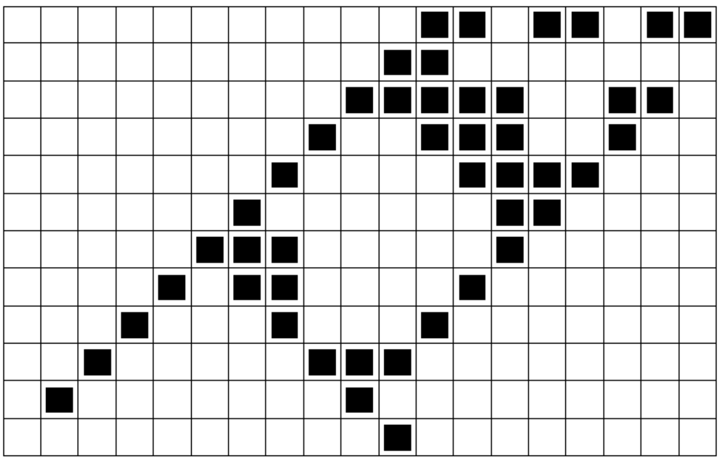


n=11 16×11 32 nere

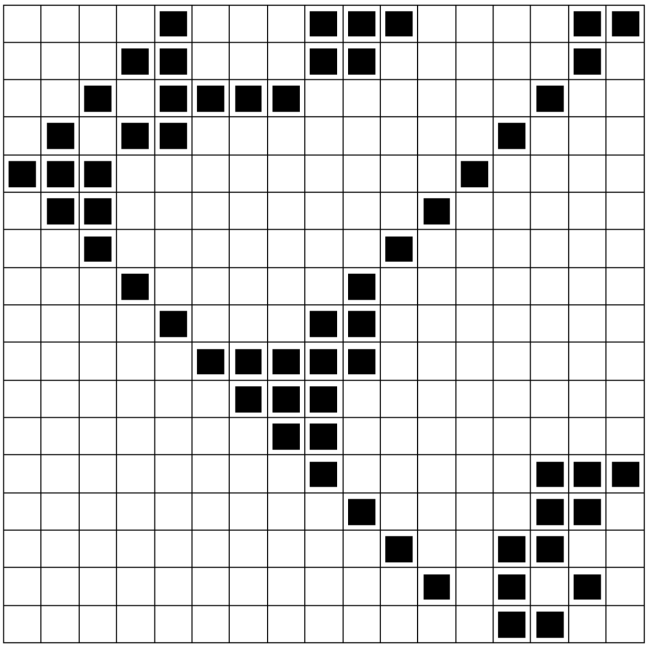


Dopo ore alle prese con una n=12 ed aver consumato una miriade di fogli ed una gomma alle prese con il conteggio delle parole e delle sue lunghezze mi sono deciso a scrivere un programma da usarsi come ausilio all'ingrato compito dei conteggi. E vai col vecchio TurboC e l'ancor più vecchio DOS.

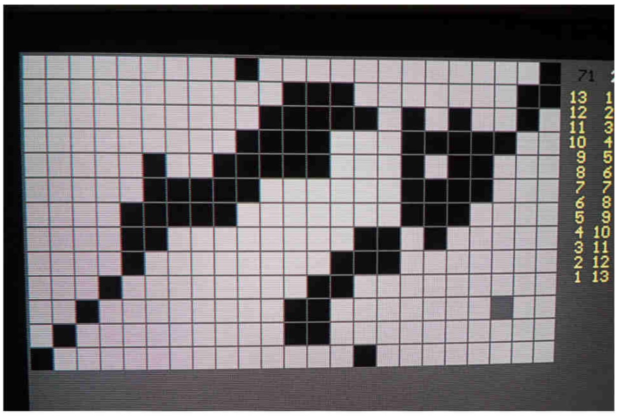
Eccovi un 19×12 con 46 nere. Da qui in avanti mi pare che anche l'estetica delle caselle nere vada a farsi benedire perché è impossibile non formare delle isole nere.



Avrei voluto fare uno schema da 22×12 (come il Bartezzaghi) n=13 ma non ci sono riuscito. Per cui ho ripiegato su un 23×13 che è risultato con 71 nere, troppe, così ne ho fatto uno più piccolo da 17×17 con 60 nere eccolo qui di seguito.



Di seguito la fotografia dello schermo del 23×13 eseguito col programmino DOS qui sopra descritto. Le isole nere antiestetiche sono evidentissime.



In conclusione ritengo che sia possibile produrre uno schema con qualsiasi n ma sfoltire le parole più corte diventa sempre più difficile. Già con questi n=13 spiazzare le parole lunghe 1, 2 e 3 è stata un'impresa.

Noi apprezziamo moltissimo lo sforzo, e – ovviamente – la copertina.

4.1.2 Altro schema!

Il secondo problema del mese scorso mancava di ambientazione:

> *Avete una scacchiera N×N, e uno zero per ogni casa; avete anche un altro quadrato, questa volta di lato* (N – 1)×(N – 1)*: se volete coprire un numero intero di case, il vostro quadrato andrà appoggiato in un angolo della scacchiera. Ogni volta che appoggiate il quadrato, per ogni singola casella coperta si aggiunge* 1 *o si toglie* 1 *secondo una regola a vostra scelta; indi, sollevate il quadrato e lo posate in un altro angolo della scacchiera a vostra scelta, e ricominciate con un'altra regola. Il vostro scopo è di ottenere (non necessariamente in ordine) sulla scacchiera tutti i valori da* 1 *a N^2. Si può? Se sì, per quali valori di N? Se no, perché?*

Nel pasticcio del solito ritardo, abbiamo pubblicato la soluzione di ***trentatre*** e ***Valter***, ma ci siamo fumati la soluzione die ***Emanuele*** che – tra l'altro – proponeva una bella dematematizzazione. Vediamo di rimediare:

> Molti conoscono la leggenda della Torre di Hanoi, ma ben pochi (per non dire nessun'altro oltre a me) sanno che è stato scoperto un manoscritto in cui è

testimoniato come molti secoli prima la torre, o per meglio dire "le torri", non erano solamente tre messe in file ma bensì il loro numero variava a seconda dello spazio che avevano a disposizione i monaci dell'epoca per costruire questo strumento catartico. Infatti il successivo ritrovamento di alcuni resti di questi manufatti indica che fossero ad appannaggio dei soli monaci che lo utilizzavano per la preghiera e la contemplazione.

Sempre nella pergamena era indicato anche che la disposizione delle torri, semplici pali conficcati nel terreno, non era lungo una semplice linea, ma le "torri" dovevano sempre essere disposte in modo da formare una griglia quadrata, quindi il numero delle torri doveva sempre essere quello che per i monaci era probabilmente considerato un numero magico, un quadrato perfetto, il quadrato di HaiNoi.

Inoltre i vari dischi forati, che vanno inseriti dalla sommità delle varie torri/pali sono tutti di eguale misura, a differenza dei dischi della torre di Hanoi.

Il quadrato di HaiNoi veniva generalmente costruito assieme al monastero che lo conteneva, infatti, mentre la maggior parte dei monaci era intenta a costruire pietra su pietra il proprio luogo di culto, vi era un folto numero di altri monaci, indaffarati a misurare, conficcare pali nel terreno e tagliare tronchi d'albero a fettine per poi forarle in maniera opportuna affinché potessero essere inseriti nei pali del quadrato.

Una metà circa di questi "dischi" era contrassegnato con un simbolo corrispondente allo "Ying" e i restanti con il simbolo identificato con "Yang".

Ogni sera, al tramonto, un monaco, a turno, recitando quelli che per i monaci occidentali sarebbero i vespri, legava attorno ai vari pali formanti due qualsiasi dei lati del quadrato di HaiNoi, un fazzoletto rosso.

Ogni mattina, di buon'ora, un altro monaco (ma a volte erano di più, dipendentemente dalla grandezza del quadrato), recitando le proprie preghiere, in profonda meditazione, per ognuno dei pali non contrassegnati dal fazzoletto rosso, decideva se inserire o togliere un disco secondo alcune ben precise regole. Se l'intenzione del Monaco fosse stata quella di inserire un disco "Yang" e vi fossero stati solo dischi "Yang" inseriti nel palo, allora il monaco poteva procedere con l'inserimento, mentre qualora vi fosse stato anche un solo disco "Ying", il monaco doveva "semplicemente" sfilare un disco "Ying" dal palo e basta. L'operazione sarebbe stata speculare qualora il monaco avesse deciso di inserire un disco "Ying". Una sola di tali operazioni doveva essere effettuata per ogni uno dei pali non contrassegnati.

Al pomeriggio, un altro monaco, munito di una tavoletta di cera e una penna d'oca, segnava ordinatamente il numero di dischi "Yang" presenti in ogni palo, compresi quelli contrassegnati.

Qualora i vari conteggi avessero evidenziato che ogni palo avesse contenuto solo dischi "Yang", in numero diverso, a partire da un solo disco fino a pareggiare in numero il numero dei pali stessi, allora i monaci avrebbero dovuto "sconficcare" tutti i pali, ammassarli tutti assieme ai dischi come in un enorme pira, bruciare il tutto e festeggiare la nuova era che stava arrivando.

Dalla pergamena ritrovata non si evince se sia mai stato effettuato tale rito finale.

***

Abbiamo una griglia N×N e una griglia (N–1)×(N–1), definisco con OPERAZIONE l'opera di posizionare (secondo le regole da voi esposte) la griglia più piccola sopra la griglia più grande e quindi sommare o sottrarre l'unità dal volare della griglia sottostante per TUTTE le celle che hanno una corrispondente cella nella griglia più piccola. Associamo alla griglia N×N risultante dalle operazioni precedenti la matrice C, mentre andremo a "popolare" altre due matrici N×N:

- A – contenente in ogni cella la somma delle unità SOMMATE nelle rispettive celle in C

- B – contenente in ogni cella la somma delle unità SOTTRATTE nelle rispettive celle in C

In questa maniera otteniamo ovviamente che C = A–B, ma quella che a me interessa è un'altra matrice, la matrice D = A+B.

La matrice D indica, per ogni cella, quante operazioni sono state eseguite per raggiungere il valore della corrispettiva cella in C

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & & & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & & & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & & & d_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

A-B=C
A+B=D

A rappresenta la matrice risultante dalla somma degli incrementi (+1) dopo i vari posizionamenti
B rappresenta la matrice risultante dalla somma in valore assoluto dei decrementi (-1) dopo i vari posizionamenti
C rappresenta la matrice risultante dai vari incrementi/decrementi
D rappresenta la matrice in cui in ogni cella c'è il *numero* di somme e sottrazioni (operazioni) effettuate che hanno dato luogo al corrispettivo valore nella cella di C avente le medesime coordinate della cella in D

cercando di non fare strafalcioni:

$c(i, j) = a(i, j) - b(i, j)$ per ogni i, j tra 1 e n

$d(i, j) = a(i, j) + b(i, j)$ per ogni i, j tra 1 e n

Inoltre definiamo questa costante caratteristica:

K = Somma($a(i, j) + b(i, j)$) per $(i, j) = \{(1, 1)(1, n)(n, 1)(n, n)\}$ = Somma($d(i, j)$) per $(i, j) = \{(1, 1)(1, n)(n, 1)(n, n)\}$

Tralasciando per un attimo le matrici, se ho un valore E appartenente ai naturali e maggiore di 0, ottenuto con un totale P di operazioni tra somma e sottrazione di una unità, ho che come minimo E operazioni sono di somma mentre le restanti P–E operazioni si dovranno "compensare" dando come risultato 0, il che vuol dire che P–E è sicuramente pari (avendo tante somme di 1 quante sottrazioni dello stesso) quindi possiamo dire con tranquillità che se dopo P di operazioni (tra somma e sottrazione di unità) otteniamo un numero E, allora la parità di P sarà la stessa parità di E, cioè se E è pari anche P è pari e viceversa.

Ora tornando alle nostre matrici, abbiamo che dopo un qualsiasi numero di operazioni eseguite, la sottomatrice quadrata di D di lato (N–2) con vertice superiore sinistro $d(2,2)$ sarà popolata con lo uno stesso numero (K) per tutta la sua estensione. Infatti le celle "centrali" della matrice C saranno sempre soggette ad una somma o sottrazione unitaria.

Da ciò si evince che TUTTE le celle "centrali" della matrice C conterranno un valore che è ottenuto tramite un numero K tra somme e sottrazioni, quindi dovranno per forza contenere numeri con la stessa parità.

Questo implica che affinché sia possibile avere tra tutte le celle della matrice C tutti i valori da 1 a N×N, ci dovranno essere almeno $(N-2)^2$ numeri pari o dispari per poterla riempire. Il numero di numeri pari o dispari è suppergiù $N^2/2$ (bisognerebbe fare dei distinguo se N pari dispari ma ora non mi serve).

Quindi deve essere soddisfatta la disequazione:

$(N - 2)^2 \leq N^2/2$

$N^2 - 2N + 4 \leq N^2/2$

$2N^2 - 4N + 8 \leq N^2$

$N^2 - 4N + 8 \leq 0$

N = (4 ± Radice(16–32))/2

Essendo il determinante negativo, in questo caso, la disequazione non ammette valori N che la soddisfi.

Da ciò si evince che i monaci di cui sopra non abbiano mai festeggiato (a meno di operazioni non permesse) la nuova era.

E finalmente passiamo alle soluzioni del mese scorso.

4.2 [222]

4.2.1 Bel problema, brutta soluzione

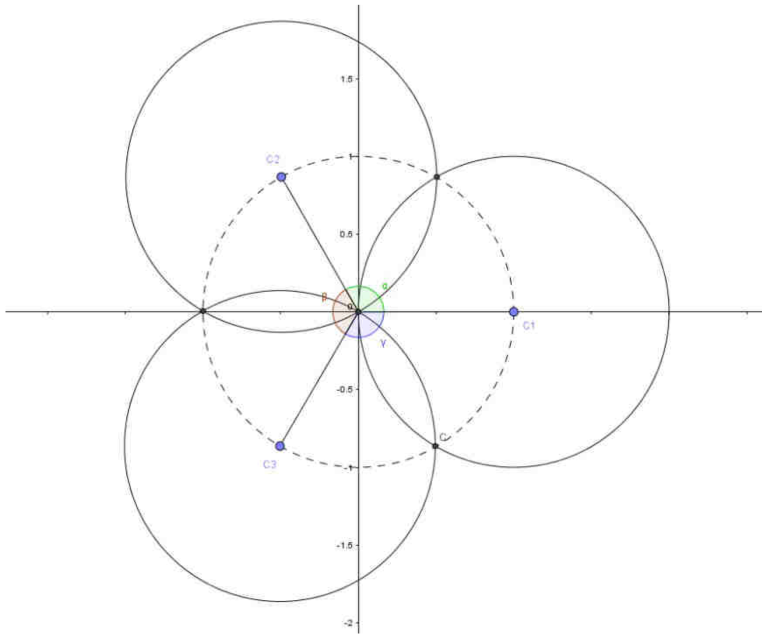
Ecco qui il testo del problema per il quale il Capo ha una brutta soluzione:

> *Tracciare tre cerchi di raggio unitario in modo tale che si incontrino tutti e tre in un punto; sia A l'insieme dei punti appartenenti ad almeno due cerchi. Quanto vale l'area minima di A?*

Cominciamo con ***Emanuele***, la cui premessa ci ha fatto accorgere di aver dimenticato la sua mail del mese scorso:

> Innanzitutto voglio toglievi qualsiasi dubbio, non me la sono assolutamente presa per quanto riguarda il fatto che non abbiate ritenuto una importante scoperta quella pergamena che parlava del quadrato di HaiNoi. Per dimostrarvelo questo mese ho deciso di raccogliere la sfida delle circonferenze sovrapposte. Ma la sfida che raccolgo non è solo quella di riuscire a trovare una soluzione ma di riuscire a trovarne una più brutta della vostra (pur non conoscendola).

Vediamo se c'è riuscito:

> Di norma per i problemi che comportano troppe variabili, tendo a tagliare l'elefante a fette, cercando di semplificare il problema, spero di esserci riuscito anche stavolta.
>
> 
>
>
> Semplificazione del problema (comincio a tagliare l'elefante): con A,B,C indico le circonferenze da tracciare e con C1, C2, C3 i rispettivi centri. Definendo un piano su assi cartesiani:
>
> 1) Come punto fisso attraverso il quale passano le tre circonferenze scelgo il punto (0,0), l'origine degli assi;
>
> 2) C1 giace, sempre solidale con l'asse X, alle coordinate (1,0) C1 quindi verrà considerato inamovibile rispetto agli assi cartesiani;
>
> 3) α: l'angolo sotteso tra i segmenti O-C1 e O-C2;

4) impongo $\pi \geq \alpha \geq 0$;

5) β: l'angolo sotteso tra i segmenti O-C2 e O-C3;

6) anche in questo caso impongo l'intervallo $\pi \geq \beta \geq 0$;

7) $\alpha + \beta \leq 2 * \pi$ e quindi l'angolo C3-O-C1 $\gamma = 2*\pi - (\alpha + \beta)$.

Con queste 7 restrizioni posso comunque replicare qualsiasi delle infinite combinazioni, infatti qualora volessi cercare una combinazione al di fuori delle restrizioni poste, questa corrisponderà comunque ad una combinazione "riflessa" usando l'asse X come asse di simmetria.

B e C potranno essere posizionati (ricordo che A è già posizionato stazionariamente sull'asse delle X) in modo tale da avere delle zone di sovrapposizione in cui andranno a cadere delle porzioni di 2 o tre circonferenze, quindi, essendo il nostro intento quello di calcolare le aree di sovrapposizione di almeno 2 circonferenze dovremo sommare le varie aree di sovrapposizione tra due circonferenze (A-B, A-C, B-C) ed eventualmente sottrarre il doppio dell'area in cui risultano posizionate 3 circonferenze, in quanto tale area (se esistete) risulterebbe sommata già 3 volte nella somma precedente.

L'eventuale area di sovrapposizione di A, B, C, con la configurazione inizialmente imposta, potrà presentarsi solamente nel primo e/o quarto quadrante. Inoltre tale area corrisponderà con a più piccola delle sovrapposizioni che si verranno a creare tra due circonferenze.

Per un momento ragioniamo solamente con A e B considerandole come due circonferenze generiche che abbiano una sovrapposizione ($\alpha < \pi$) L'area di sovrapposizione (due segmenti circolari) equivale al doppio della differenza tra il settore circolare di A, il cui arco è compreso tra O e il punto di incontro I tra A e B, e il triangolo isoscele O-C1-I.

L'angolo phi = O-C1-I è uguale a $\pi - 2*\alpha/2 = \pi - \alpha$ Essendo A di raggio unitario:

area settore circolare As = phi/2 = $(\pi - \alpha)/2$

area triangolo O-C1-I At= $\sin(\alpha)/2$

area segmento Ag=As–At= $(\pi - \alpha)/2 - \sin(\alpha)/2$

area di sovrapposizione = 2*Ag = $(\pi - \alpha) - \sin(\alpha)$

Ora definendo le aree di sovrapposizione con A1 (sovrapposizione C1,C2), A2 (sovrapposizione C2,C3), A3 (sovrapposizione C3,C1)

A1 = $(\pi - \alpha) - \sin(\alpha)$

A2 = $(\pi - \beta) - \sin(\beta)$

A3 = $(\pi - \gamma) - \sin(\gamma)$

A3 può essere semplificato:

A3 = $(\pi - 2*\pi + \alpha + \beta) - \sin(2*\pi - \alpha - \beta) = (-\pi + \alpha + \beta) - \sin(-\alpha - \beta)$

A3 = $(\alpha + \beta - \pi) + \sin(\alpha + \beta)$

Siccome A3 per $\alpha + \beta < \pi$ risulta negativo dobbiamo metterlo sotto modulo.

A3 = $|(\alpha + \beta - \pi) + \sin(\alpha + \beta)|$

Quindi ora possiamo scrivere una funzione in α e β che restituisca la somma delle tre sovrapposizioni di due circonferenze:

$S1(\alpha, \beta) = (\pi - \alpha) - \sin(\alpha) + (\pi - \beta) - \sin(\beta) + |(\alpha + \beta - \pi) + \sin(\alpha + \beta)|$

$S1(\alpha, \beta) = 2*\pi - \alpha - \beta - \sin(\alpha) - \sin(\beta) + |(\alpha + \beta - \pi) + \sin(\alpha + \beta)|$

Nello studio di tale funzione bisogna comunque tenere conto dei domini di α e β, le quali possono variare da 0 a π.

Dovremmo tenere conto di quei casi in cui ci possa essere una sovrapposizione delle tre circonferenze per cui dovremmo togliere una certa quantità corrispondente alla minore di dei tre addendi iniziali.

Avendo ristretto il range di α e β e avendo tenuto fisso C1, è facile dimostrare che la sovrapposizione dei tre cerchi avverrà solamente nel primo quadrante e solo nel caso in cui:

(2) $\alpha < \pi$ e solo se β non sarà compresa nel range $\pi \leq \beta \leq \alpha+\pi$ quindi basta quest'ultima disuguaglianza per determinare se vi possa essere o meno una sovrapposizione di tre cerchi.

Ora nel caso in cui la (2) risulti vera quale sarà il valore dell'area di sovrapposizione? la risposta è A3. Infatti al minimo ß potrà essere 0 permettendo una totale corrispondenza tra A3 e A1

Riassumendo abbiamo:

$0 \leq \alpha \leq \pi$

$0 \leq \beta \leq \pi$

$\gamma = 2*\pi - (\alpha+\beta)$

se $\alpha+\beta = \pi$ (solo sovrapposizioni di due circonferenze)

$S(\alpha, \beta) = 2*\pi - \alpha - \beta - \sin(\alpha) - \sin(\beta) + |(\alpha+\beta-\pi) + \sin(\alpha+\beta)|$

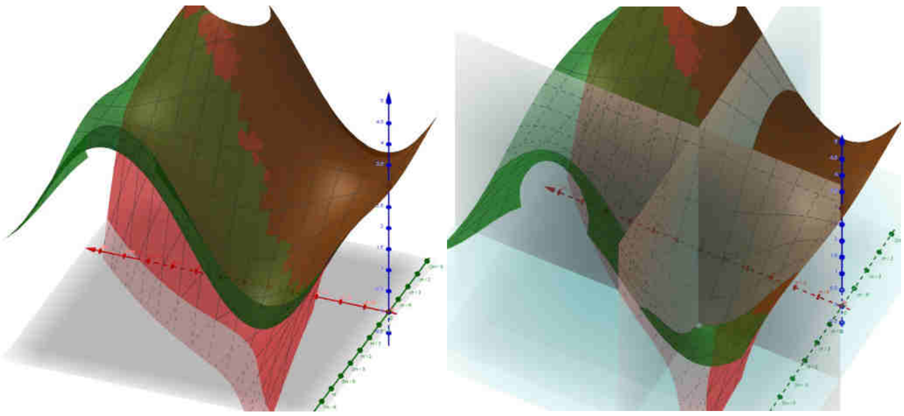
se $\alpha < \pi$ e solo se β non sarà compresa nel range $\pi \leq \beta \leq \alpha+\pi$ (sovrapposizione 3 circonferenze)

$S(\alpha, \beta) = S1(\alpha,\beta) - 2*A3 = 2*\pi - \alpha - \beta - \sin(\alpha) - \sin(\beta) - |(\alpha+\beta-\pi) + \sin(\alpha+\beta)|$

altrimenti

$S(\alpha, \beta) = 2*\pi - \alpha - \beta - \sin(\alpha) - \sin(\beta) + |(\alpha+\beta-\pi) + \sin(\alpha+\beta)|$

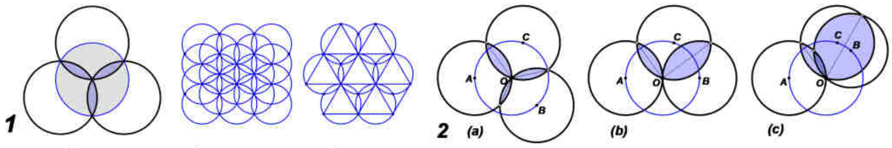
E ora arriviamo alla bruttezza della soluzione. Mi sono già scontrato in passato con le matrici Hessiane e anche stavolta hanno vinto loro. Quindi ho tagliato la testa al toro e se deve essere brutta, che brutta sia questa benedetta soluzione.



Ho aperto GeoGebra ho inserito le due funzioni sopra descritte, la prima (sovrapposizioni solo con due circonferenze) in verde, mentre l'altra in rosso, come si vede dalle figure, si raccordano perfettamente e appare un minimo (in realtà sono molti ma ho preso quello del primo quadrante *x-y*) e per capire a quali coordinate si trova ho creato un piano orizzontale per evidenziare il minimo spostandolo finché appare che taglia appena il punto più basso, dopodiché ho creato due piani verticali uno parallelo all'asse delle x e l'altro a quello delle y, finché non si sono incrociati al centro di quel "laghetto" attorno al minimo ... e sorpresa $x = y = (2/3)*\pi$ .... cioè le tre circonferenze sono in "fase" perfetta con un angolo $\alpha=\beta=\gamma = 120$ gradi.

Non so se avete notato quanti animali ci hanno rimesso nel processo, ma dopotutto sono solo virtuali, quindi speriamo che gli animalisti non si siano preoccupati. Il punto qui è che i grafi allegati non possono non essere considerati bellissimi, quindi… Ma procediamo con la versione di ***trentatre***:

L'unica soluzione è quella simmetrica in fig. 1. Con i cerchi di raggio unitario l'area delle sovrapposizioni vale $\boldsymbol{A} = \pi - \sqrt{27}/2 = 0.5435$. Se ne possono ricavare varie tassellature del piano come a destra.



In fig. 2, con O punto comune ai cerchi, A, B, C centri dei tre cerchi di raggio unitario, $(AB), (BC), (CA)$ aree di sovrapposizione, si hanno tre casi

(a) i cerchi si intersecano due a due

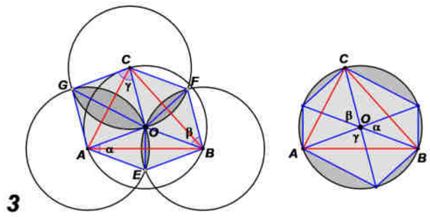
(b) due cerchi non si intersecano (due centri allineati con O)

(c) esiste una zona comune ai tre cerchi

- il caso (c) si ottiene da (b) spostando un cerchio, le aree aumentano e (c) non è la soluzione

- (b) è un caso particolare di (a).

Resta da discutere solo (a) disegnato in fig. 3, con E, F, G punti di intersezione dei cerchi, in grigio le aree $(AB), (BC), (CA)$), α, β, γ angoli delle stesse viste dai punti A, B, C.



I sei triangoli $(OAE) = (OBE), (OBF) = (OCF), (OCG) = (OAG)$ sono uguali due a due e isosceli con due lati unitari. Gli stessi triangoli sono ridisegnati, a destra, con i vertici isosceli raccolti attorno ad O.

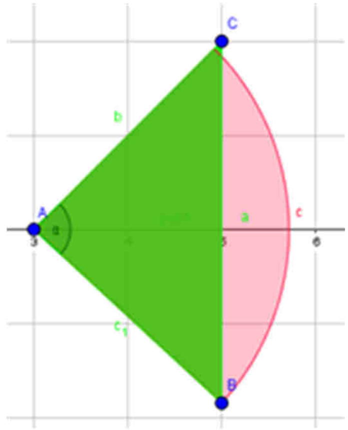
I due esagoni di sinistra e di destra hanno la stessa area Q. Il triangolo rosso (ABC) dimezza l'esagono a sinistra, e la sua area è $T = Q/2$. L'area cercata $\boldsymbol{A}$ di sinistra corrisponde alla somma delle aree in grigio di destra, cioè al cerchio meno l'esagono. Poiché l'area del cerchio unitario vale π, si ha $\boldsymbol{A} = \pi - Q = \pi - 2T$, e il minimo di $\boldsymbol{A}$ corrisponde al <u>triangolo inscritto in un cerchio di area massima</u>. Ma questo è il triangolo <u>equilatero</u>, la cui area nel cerchio unitario è $T = \sqrt{27}/4$.

Ne segue $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, i due esagoni diventano regolari e $\boldsymbol{A} = \pi - \sqrt{27}/2 = 0.5435$.

Che ne dite? La bellezza è nella sintesi? Un gradito ritorno, ***Mirhonf***, ci fornisce la prossima versione:

Prima di affrontare il problema, vediamo come si calcola l'area di un segmento circolare.

Se un **SEGMENTO CIRCOLARE** è **MINORE** della **SEMICIRCONFERENZA**, la sua **AREA** si ottiene come **DIFFERENZA tra l'AREA del SETTORE CIRCOLARE** $A_1 = \frac{1}{2}\alpha r^2$ (α espresso in radianti) che insiste sullo stesso arco e l'**AREA del TRIANGOLO** ***ABC***



$$A_2 = AH \cdot CH = r\sin\frac{\alpha}{2} \cdot r\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$$ (vedi fig. 1) . Quindi

$$A_3 = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)$$

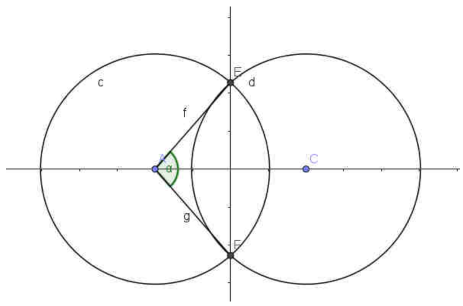
Se $r = 1$, $A_3 = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)$

Date due circonferenze (fig. 2) di centro rispettivamente (-c; 0) e (c; 0) con $c \in [0;1]$ si intersecano nei punti E(0; $+\sqrt{1-c^2}$) e F(0; $-\sqrt{1-c^2}$). Calcoliamo l'ampiezza dell'angolo α in funzione di c. EO= $\sqrt{1-c^2} = \sin\frac{\alpha}{2}$ da cui

$$\alpha = 2\arcsin\sqrt{1-c^2} = 2\arccos c = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin c\right) = \pi - 2\arcsin c\ ;$$

di conseguenza

$$\sin\alpha = \sin(2\arcsin c) = 2c\sqrt{1-c^2}$$

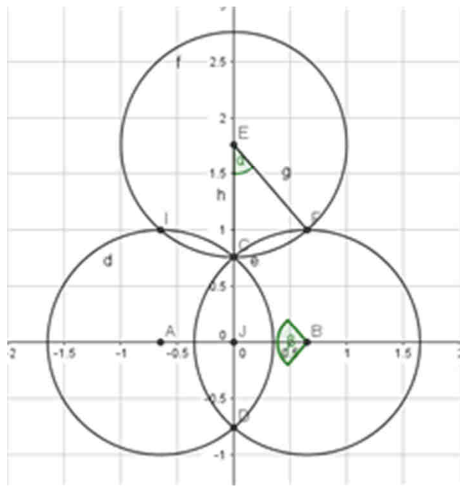


Quindi, l'area di ognuno dei due segmenti circolari vale

$$A' = \frac{1}{2}\left(\pi - 2\arcsin c - 2c\sqrt{1-c^2}\right).$$

Di conseguenza, l'area in comune alle due circonferenze misura

$$A_3 = \pi - 2\arcsin c - 2c\sqrt{1-c^2}$$



Consideriamo ora la figura 3 qui di fianco, in cui alle prime due circonferenze aggiungiamo un'altra circonferenza di raggio unitario che ha il punto C in comune con le prime due.

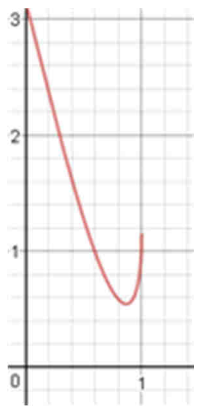
In particolare consideriamo le circonferenze di centro B ed E che si intersecano nei punti C ed F. Il punto C ha coordinate (0; + $\sqrt{1-c^2}$). Per determinare le coordinate del punto F, ricordiamo che C ed F sono simmetrici rispetto al punto medio del segmento BE che unisce i centri delle due circonferenze. Poiché B(c; 0) e E(0; 1+ $\sqrt{1-c^2}$), il loro punto medio M ha coordinate (c/2; $\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{2}$). Di conseguenza F ha coordinate (c;1). Per determinare l'area comune ai cerchi di centro B ed E, dobbiamo determinare l'angolo α (sempre facendo riferimento alla figura 3). Ora, poiché $MF = EF \sin\frac{\alpha}{2}$, *EF*=1,

$CF = \sqrt{c^2 + \left(1-\sqrt{1-c^2}\right)^2} = \sqrt{c^2+1-2\sqrt{1-c^2}+1-c^2} = \sqrt{2-2\sqrt{1-c^2}}$;

$MF = \frac{CF}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{CF}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-c^2}}{2}}$, da cui ricaviamo che $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{2}}$, $\sin\alpha = c$.

In conclusione, $\alpha = \arcsin c$. Quindi l'area in comune ai due cerchi di centro B ed E misura $A_4 = \arcsin c - c$. L'area totale dell'insieme A dei punti che sono comuni ad almeno due cerchi è:

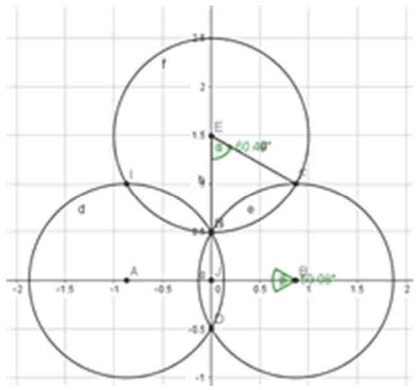
$$A = A_3 + 2A_4 = \pi - 2\arcsin c - 2c\sqrt{1-c^2} + 2\arcsin c - 2c = \pi - 2c - 2c\sqrt{1-c^2}$$



Non ci resta che calcolare il minimo di *A(c)*. Il grafico di *A(c)* ha l'andamento riportato in fig. 4. La derivata di *A(c)*, $A'(c) = -2 - 2\sqrt{1-c^2} + \frac{2c^2}{\sqrt{1-c^2}}$, si annulla quando $\frac{-2+4c^2}{\sqrt{1-c^2}} = 2$ cioè $-1+2c^2 = \sqrt{1-c^2}$ da cui $1-4c^2+4c^4 = 1-c^2 \Rightarrow 4c^4 - 3c^2 = 0$ che oltre che in *c*=0, si annulla in $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ che è punto di minimo. Il minimo di *A* quindi è

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pi - \sqrt{3}\left(1+\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}5435$$

Le tre circonferenze con area minima sono raffigurate qui sotto (fig. 5).



In realtà io ho considerato una situazione in cui ho piazzato la terza circonferenza in modo simmetrico rispetto alle prime due. Per verificare che si trattasse proprio del minimo, ho fatto una simulazione con Geogebra verificando che per ogni valore di *c* la posizione della circonferenza che da' il valore minimo per l'area di nostro interesse si ottiene con la terza circonferenza in posizione simmetrica rispetto alle prime due.

Anche qui, a voi la decisione sull'estetica, sempre che la mia impaginazione non abbia rovinato tutto. Il Capo pare soddisfatto, ma con lui non si sa mai.

4.2.2 Il tempo della musica

Giochi estivi, danze e un bel quesito questa volta:

> *Avete $n/2$ coppie, e si sono messi tutti in cerchio in modo tale che ogni persona è diametralmente opposta al proprio partner; ad ogni battuta del metronomo, due persone adiacenti si scambiano di posto secondo i vostri ordini (trasmessi e compresi dagli interessati in tempo zero): "scopo del ballo" è far scambiare di posto a tutti i partner. Le persone che si scambiano sono solo due e vicine di posto, tutti gli altri stanno fermi. Lo scambio deve essere completato esattamente per la fine della musica, e dovete quindi determinare di quante battute debba essere composta la canzone, per diversi valori di n.*

I nostri ritardi producono bei lavori da parte vostra. Cominciamo con ***Mr Cæsar***:

> Rappresentiamo il cerchio di ballerini in questo modo (perché è più facile e non prevede disegni):
>
> $$a\ b\ c \ldots m\ n\ A\ B\ C \ldots M\ N$$
>
> ogni ballerino "minuscolo" è il partner del corrispondente ballerino "maiuscolo"; notiamo che, all'istante iniziale, ognuno dei ballerini si trova a una distanza di n posizioni da quella di arrivo. Per minimizzare il numero di mosse, occorre scambiare le coppie di ballerini vicini facendo in modo che non aumenti mai la distanza di ogni singolo ballerino dal suo punto di arrivo (e, di conseguenza, non aumenti mai nemmeno la somma delle singole distanze), per arrivare a questa conformazione
>
> $$A\ B\ C \ldots M\ N\ a\ b\ c \ldots m\ n$$
>
> La strategia vincente è quella di spostare fino alla posizione finale, indifferentemente, l'ultimo elemento "minuscolo" o il primo elemento "maiuscolo", in modo tale che diminuiscano, contemporaneamente, le distanze dei singoli due ballerini coinvolti e la somma totale delle distanze di tutti i ballerini.
>
> Una volta sistemati j elementi "maiuscoli" e k elementi "minuscoli" (con j; $k < n$), la situazione diventa la seguente:
>
> $$\text{numero di elementi: } \underbrace{A \ldots}_{j}\ \underbrace{a \ldots}_{n-k}\ \underbrace{\ldots N}_{n-j}\ \underbrace{\ldots n}_{k}$$
>
> $$\text{distanze: } \underbrace{A \ldots}_{0}\ \underbrace{a \ldots}_{n-j}\ \underbrace{\ldots N}_{n-k}\ \underbrace{\ldots n}_{0}$$
>
> Introduciamo un numero T_{jk} che rappresenta il totale di scambi compiuti e un numero S_{jk} che identifica la somma delle distanze di tutti i ballerini rispetto alla loro posizione di arrivo.
>
> All'inizio la somma delle distanze è uguale a $S_{00} = 2n \cdot n = 2n^2$; dopo il posizionamento di j ballerini maiuscoli e k ballerini minuscoli, la somma S_{jk} vale
>
> $$S_{jk} = 2\,(n-j)\,(n-k) = 2\,(n^2 - (j+k)\,n + jk)$$
>
> e, dopo il posizionamento del $(k+1)$-esimo ballerino, vale
>
> $$S_{j,k+1} = 2\,(n-j)\,(n-k-1) = 2\,(n^2 - (j+k+1)\,n + j\,(k+1))$$
>
> La differenza $S_{jk} - S_{j,k+1}$ vale
>
> $$S_{jk} - S_{j,k+1} = n - j > 0 \Rightarrow S_{jk} > S_{j,k+1}$$
>
> perché $j < n$; in questo modo concludiamo che, utilizzando questa strategia, la somma delle distanze per ogni mossa successiva è sempre minore della somma delle distanze nelle mosse precedenti. Si può dimostrare lo stesso anche quando aumenta j; tralascio la dimostrazione perché è esattamente uguale.
>
> Per sistemare in posizione j ballerini maiuscoli e k ballerini minuscoli, il numero totale di scambi compiuti è

$$T_{jk} = jn + k\ (n - j) = kn + j\ (n - k) = (j + k)\ n - jk$$

e possiamo scrivere la somma totale delle distanze come

$$S_{jk} = 2\ (n - j)\ (n - k) = 2(n^2 - (j + k)\ n + jk = 2\ (n^2 - T_{jk})$$

Il ballo finisce quando tutti i ballerini hanno raggiunto la loro posizione finale e, quindi, la somma totale delle distanze S_{jk} è uguale a zero. Ciò si traduce nella ricerca delle soluzioni dell'equazione

$$S_{jk} = 0 \Rightarrow T_{jk} = n^2 \Rightarrow n^2 - (j + k)\ n + jk = 0$$

che corrispondono a

$$n = \frac{(j+k) \pm \sqrt{(j+k)^2 - 4jk}}{2} = \frac{(j+k) \pm (j-k)}{2} \Rightarrow n = j \lor n = k$$

Sostituendo uno dei valori trovati (ad esempio $n = j$) nella formula per il calcolo del totale di mosse, otteniamo

$$T_{nk} = (j + k)\ j - jk = j^2 = n^2$$

e il caso con $n = k$ è esattamente analogo.

In conclusione: quando in pista ci sono n coppie di ballerini, la durata minima della musica è di n^2 battute.

Breve parentesi personale. È lo stesso risultato che hanno trovato i miei studenti quando ho proposto loro il problema.

Con loro ho adottato un approccio più semplice, pratico e diretto: ho diviso la classe in gruppi da quattro studenti, ho fatto ritagliare loro una serie di omini e donnine di carta e ho sfidato ogni gruppo a trovare il numero di scambi più basso possibile per farli arrivare dalla parte opposta ("Vince il gruppo che trova un numero più basso degli altri!") quando sul tavolo c'erano due, tre, quattro e cinque coppie di ballerini.

Alla fine del lavoro di gruppo abbiamo compilato insieme alla lavagna una tabella come la seguente:

Numero di coppie	Numero di mosse
2	4
3	9
4	16
5	25

Avevamo appena finito di ripassare le potenze e le loro proprietà, quindi è stato facile vedere che i numeri nella colonna di destra erano esattamente i quadrati di quelli nella colonna di sinistra. Abbiamo fatto una previsione del numero di mosse necessarie con sei coppie e l'abbiamo verificata. Siamo riusciti anche a ricavare la regola generale della relazione, che associa a un numero qualsiasi n il suo quadrato $n \cdot n = n^2$, e siamo stati molto soddisfatti di aver risolto un problema "da grandi" in un modo semplice. (La classe coinvolta è la prima media delle scuole del Centro Culturale Italiano di Olivos, provincia di Buenos Aires – so che sembra strano fare lezione ad agosto, ma qua è pieno inverno...)

Non so voi, ma a noi è sembrato bellissimo pensare ai bambini a Buenos Aires che giocano con i nostri problemi. Ancora un paio di soluzioni veloci… ***trentatre***:

I posti del tavolo e le persone sono numerati da 1 a n, $D = (p_1, p_2, p_3, \dots p_n)$ è la disposizione generica delle persone, con p_k: persona che occupa il posto k, S_a è una sequenza di a persone estratta da D. Valgono le

[1] il n° P di passi (o battute) per <u>spostare</u> una persona in S_a di m posti è $P = m$

[2] il n° P di passi per <u>scambiare</u> due sequenze adiacenti $S_a S_b$ è $P(a,b) = ab$

p.es. $(36\underline{214}) \to (\underline{214}36)$ - richiede $P(2,3) = 6$ passi.

Con $N = n/2$, la disposizione iniziale $D_0 = (1,2,3,\dots n)$ - cioè la persona 1 nel posto 1, ecc. – si può scrivere $D_0 = S_N S'_N$ con $S_N = (1,2,\dots,N)$, $S'_N = (N+1, N+2, \dots, 2N)$, cioè due sequenze lunghe N corrispondenti ognuna a metà del tavolo. La disposizione finale corrisponde a una rotazione di 180°, cioè a $S'_N\, S_N$. Applicando la [2] il n° di passi $P(N)$ per la soluzione del problema è

[3] $\boxed{P(N) = N^2}$.

Ognuna delle $2N$ persone si sposta nel tavolo di N posti; il n° minimo di spostamenti elementari è quindi $2N^2$. Ogni passo (scambio di due persone adiacenti) genera 2 spostamenti elementari; il numero minimo di passi è quindi la metà degli spostamenti, cioè N^2.

Ne segue che [3] è la soluzione minima.

dimostrazioni

[1] scambiando m volte la persona con la successiva (o con la precedente)

[2] $S_a S_{b+1} \to S_{b+1} S_a$ si ottiene scambiando $S_a S_b \to S_b S_a$ e lasciando fermo l'ultimo elemento di S_{b+1}, poi spostando questo all'indietro di a posti

p.es. (36214) → (21436) si ha con (3621)4 → (2136)4 e poi spostando 4 di due posti

- da [1] e poiché $P(a,b) = P(b,a) \to P(a,b+1) = P(a,b) + a$ e da $P(1,1) = 1$ per iterazione $\to P(a,b) = ab$.

E ancora ***Franco57***:

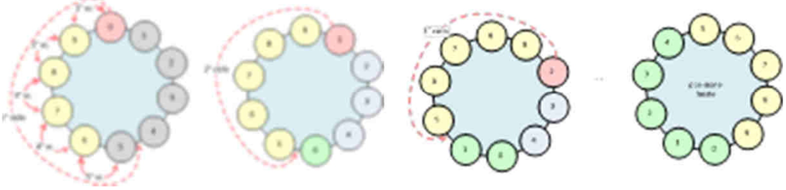
Per comodità di esposizione pongo $n = 2 \cdot k$ e numero ogni ballerino da 0 a $n-1$ in senso orario, giusto per fissare un verso. È chiaro che ogni ballerino raggiunge la posizione del suo dirimpettaio se ruota di k posizioni in senso orario oppure antiorario.

I due metodi più naturali, quindi quasi sicuramente quelli trovati, sono:

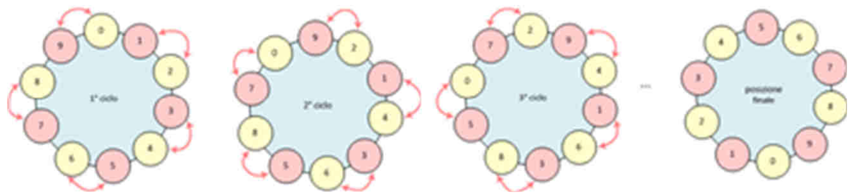
- metodo 1: nell'ordine, per ogni $i = 0,1,\dots,k-1$ scambio il ballerino i col suo vicino antiorario k volte;
- metodo 2: per k volte scambio i k ballerini pari, in quale ordine non importa, con il loro vicino antiorario (che risulta sempre dispari).

Entrambi i metodi richiedono k cicli di k scambi, cioè k^2 battute di musica e funzionano.

Infatti, col metodo 1 i ballerini minori di k migrano uno ad uno in senso antiorario verso le proprie posizioni obiettivo e poi mai più mossi una volta raggiunte, mentre gli altri ballerini da k in poi rimangono contigui e si muovono in blocco di una posizione in senso orario ad ogni ciclo.

Esempio: 

Il metodo 2 è mi pare ancora più semplice: i ballerini pari si muovono di una posizione antioraria ad ogni ciclo, mentre i dispari di una posizione oraria.

Esempio: 

Ma certo che i metodi sono minimali! Infatti, ogni ballerino deve scambiarsi almeno k volte per giungere al posto del proprio del proprio partner e poiché ogni scambio coinvolge due persone, è impossibile terminare in meno di $\frac{n \cdot k}{2} = k^2$ scambi.

Da notare che con opportuni scambi affiancati è possibile fare assumere ai ballerini qualsiasi formazione (permutazione per far vedere che abbiamo studiato) delle $n!$ possibili, infatti si possono scambiare due ballerini qualsiasi lasciando tutti gli altri al loro posto: basta che il 1° dei due si scambi con quello a fianco in senso antiorario (giusto per fissare un verso) fino a giungere in $s \geq 0$ scambi a fianco del 2°, poi i due si scambiano tra loro e infine il 2° effettua al rovescio s scambi in senso orario. Ma, com'è facile mostrare, gli scambi sono un insieme di generatori del gruppo delle permutazioni e generatori di generatori sono essi stessi generatori. Semmai il problema è trovare nel caso generale il numero di scambi affiancati minimale, ma questo non penso sia così semplice.

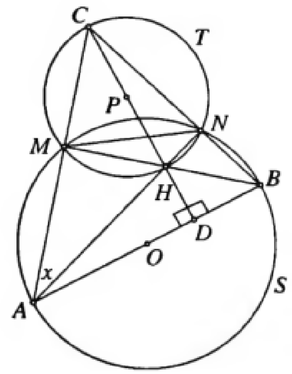
E qui ci fermiamo, anche se avevamo altre soluzioni. Non vi scoraggiate e continuate a scrivere, anche se non sembra noi leggiamo tutto. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Dimostrare che in ogni progressione aritmetica di interi positivi, esistono almeno due termini per cui la somma delle cifre è uguale.

6. Pagina 46

Essendo AB diametro del cerchio, gli angoli AMB e ANB sono angoli retti e AN e BM sono le altre due altezze del triangolo ABC.



Quindi, AN e BM si intersecano nell'ortocentro H di ABC, e anche la terza altezza CD passa per H.

Per qualsiasi posizione di A, MN sottende sempre lo stesso angolo in A, e quindi in qualsiasi triangolo CAN gli angoli in A e in N sono costanti.

Questo significa che anche l'angolo in C deve essere costante, e quindi MN sottende sempre lo stesso angolo in C. Quindi, C giace su un cerchio fisso T passante per M e N.

Essendo gli angoli CNA e CMB angoli retti (in quanto angoli supplementari ad angoli retti), il cerchio T ha diametro CH.

Quindi, al ruotare di AB su S con centro in O, CH ruota su T con centro in P, e quindi tutte le altezze CD, al ruotare di AB, saranno concorrenti in P.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 La legge dei numeri VERAMENTE grandi [4] – Qualche esempio, non necessariamente serio (e qualche riepilogo).

Cominciamo parlando d'altro: vince Ercole. Anche se non usa il cervello.

Esplorando il campo dei "grossi numeri", siamo inciampati in un teorema che ha l'aria insolita: per gli addetti ai lavori, si tratta del ***Teorema di Goodstein***. Anche qui, cominciamo parlando d'altro.

Laurence Kirby e ***Jeff Paris*** hanno dimostrato un teorema piuttosto divertente; definiamo come *Idra* un grafo ad albero con radice, sul quale l'operazione ammessa è il taglio di un ramo; in risposta a questa mossa, l'albero fa crescere un numero finito di foglie, definito da una qualche regola.

La prima riga di questo pezzo è, in soldoni, il contenuto del teorema.

Non ci sogniamo neanche di dimostrarlo (anche perché è stato dimostrato che è *indimostrabile secondo Peano*, e a noi Peano è simpatico), ma il "trucco" ci pare insito nel fatto che Ercole taglia un *ramo*, mentre l'Idra fa ricrescere un certo numero di *foglie*; se si riescono, in un modo o nell'altro, a far "convergere" un mucchio di foglie sullo stesso ramo, con un taglio solo Ercole si toglie molti problemi.

Evidentemente, qualcuno si è chiesto "quante mosse ci mette?" Beh, il numero è "grossino" (secondo i nostri testi, il Numero di Gödel è di svariati ordini di grandezza minore di questo valore), ma la cosa pare affrontabile attraverso le ***Sequenze di Goodstein***, che sembrano (e, al di fuori dell'Idromachia, probabilmente sono) abbastanza inutili. Prima di vedere come sono fatte, però, ci serve il concetto di *Notazione ereditaria in base n*: caviamocela con un esempio (sì, lo stesso di Wikipedia).

Se vogliamo scrivere 35 in base 2, abbiamo che:

$$35 = 2^5 + 2^1 + 2^0 = 2^5 + 2 + 1.$$

Se adesso volete fare i pignoli, potreste notare che gli *esponenti* non sono scritti in base 2; volendo, potete farlo, ottenendo:

$$35 = 2^{2^2+1} + 2 + 1$$

e, a questo punto, avete ottenuto quella che si chiama appunto "notazione ereditaria in base 2"; utilità, a occhio e croce, circa pari a zero. Tranne se volete, appunto, costruire una sequenza di Goodstein. All'n-esimo passaggio:

1. Scrivete il numero in base (n+1). *[...e questa è l'idra...]*
2. Ad ogni ricorrenza di n+1, sostituite n+2. *[...e l'idra si è fatta crescere qualche testa...]*
3. Sottraete 1. *[...e Ercole ne taglia una...]*

Avanti così sin quando non ottenete zero *[...e l'idra è morta]*.

Per numeri piccoli, la cosa non rappresenta un grosso problema: ad esempio, $G(3)$ (la sequenza di Goodstein che parte con "3") è:

Base	Notazione ereditaria e valore	Note
2	$2^1+1=3$	"3" in N.E.
3	$3^1+1-1=3$	Trasformo i "2" in "3" e sottraggo "1"
4	$4^1-1=3$	Trasformo i "3" in "4" e sottraggo "1". E non ci sono "4".
5	$3-1=2$	Non c'è nessun "4" da trasformare in "5", quindi sottraggo "1"
6	$2-1=1$	Non c'è nessun "5" da trasformare in "6", quindi sottraggo "1"
7	$1-1=0$	Non c'è nessun "6" da trasformare in "7", quindi sottraggo "1" e il procedimento termina.

Adesso, con G(4) provate voi.

Siccome ci fidiamo di Wikipedia, vi diciamo subito che cresce sino alla base $3 \cdot 2^{402'653'209}$ (quando assume questo valore meno 1), resta costante per un numero di passi sempre pari a questo valore, e poi comincia a decrescere, raggiungendo il valore zero alla base $3 \cdot 2^{402'653'211} - 1$. Altre sequenze crescono in modo più veloce: ad esempio, G(19) dalle parti della base 9 ha circa 370 milioni di cifre.

Ma anche lui, prima o poi, comincia a scendere: il *Teorema di Goodstein*, infatti, sostiene che *Qualsiasi sequenza di Goodstein raggiunge prima o poi il valore zero*.

"...e quanto ci mette?" Beh, già solo G(12) va oltre il Numero di Graham[12].

Bene, torniamo alle cose serie.

Dicevamo che un buon trucco per scrivere numeri "grossi" è utilizzare una notazione *triadica* per le funzioni; dicevamo anche che ce ne sono *alcune*, visto che ciascuno si inventa quella che gli fa più comodo in un dato momento. Va detto però che le notazioni triadiche nascono comunque sempre da degli oggetti "diadici" con dei simboli tutti loro, che mostrano rapidamente la loro insufficienza: ad esempio, abbiamo già incontrato la definizione (triadica) della notazione di ***Steinhaus-Moser***, ma non abbiamo visto da dove nasce: usiamo il metodo descrittivo, visto che anche l'*Unicode*, in questo caso, difetta di simboli.

X dentro un **triangolo** vale X^X.

X dentro un **quadrato** vale *X* dentro *X* triangoli.

X dentro un **pentagono** vale *X* dentro *X* quadrati.

...e avanti in questo modo: volendo spararle grosse, i Nostri hanno definito un *Mega* come "2 dentro un pentagono", e un *Megiston* come "10 dentro un pentagono"; se definite *megagono* un poligono con *Mega* lati, un *Moser* vale "2 dentro un megagono". Se ricordate, un paio di puntate fa avevamo detto:

$$SM(a,n,p)=\begin{cases} a^a & n=1,\ p=3 \\ SM(a,a,p-1) & n=1,\ p>3 \\ SM(SM(a,1,p),n-1,p) & n>1 \end{cases}$$

Dove a è il nostro X, mentre p è il numero dei lati del "cosagono". Non stiamo a ridefinirvi il Mega, il Megiston e il Moser secondo la formula perché lo abbiamo già fatto (PM221).

Abbiamo già parlato del Numero di Ackerman? No? Male.

Il modo migliore è definirla come funzione diadica, e per comodità scopiazziamo da Wikipedia:

$$A(m,n)=\begin{cases} n+1 & \text{if } m=0 \\ A(m-1,1) & \text{if } m>0 \text{ and } n=0 \\ A(m-1,A(m,n-1)) & \text{if } m>0 \text{ and } n>0. \end{cases}$$

Anche lei cresce piuttosto alla svelta, ma abbiamo visto di peggio.

Visto che abbiamo Wikipedia aperta, approfittiamone per rubare un'immagine che ormai è diventata un *meme*: l'espressione del ***Numero di Graham-Gardner*** (sì, *quel* Gardner):

$$G = \left.\begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ \underbrace{\qquad\;\; \vdots \qquad\;\;} \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdot\uparrow}3 \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} \text{64 layers}$$

[12] V. PM di RM221, verso il fondo.

E, se vi ricordate che quattro frecce valgono "un quattro dentro al cerchio", potete provare a cominciare a far di conto: secondo noi, è il modo migliore per chiarire il fatto che la notazione "a frecce verticali" di Conway non è esattamente una meraviglia.

Il bello è che se ne è accorto anche Conway, che infatti ha inventato la notazione "a frecce orizzontali"; tutto lo sproloquio visto qui sopra, si riduce a:

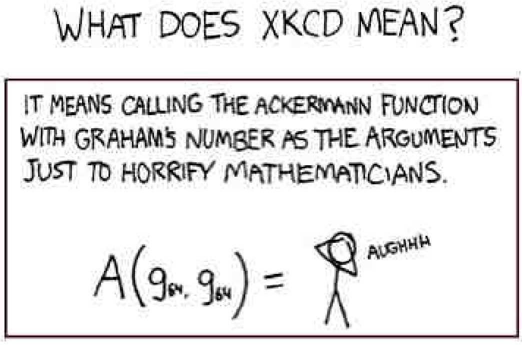
$$3\to3\to64\to2 < G < 3\to3\to65\to2.$$

Anche qui, la definizione è piuttosto ricorsiva; sorvoliamo sui casi banali (tipo $p\to q = p^q$) e andiamo subito sul materiale "robusto":

$$X\to(p+1)\to(q+1) = X\to(X\to p\to(q+1))\to q$$

Dove X è una *catena di frecce orizzontali di qualsiasi dimensione*. Carina, vero? Permette delle notevoli scorciatoie.

Per evitarvi i mal di testa, chiudiamo con una barzelletta (da xkcd.com):



La prossima volta ripartiamo da zero, tranquilli.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms