Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 221 – Giugno 2017 – Anno Diciannovesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM220 ha diffuso 3'196 copie e il 18/06/2017 per Google eravamo in 9'590 pagine.

Abbiamo già detto che una delle espressioni inglesi che ci piacciono meno è *Reinventing the wheel*. Qualcuno ci aveva già provato a fare una cosa del genere, ma usava dei nanotubi di carbonio e costava uno sproposito. Questa l'ha fatta ***Bridgestone*** ed è composta di resine termoplastiche, e non si fora mai. Ulteriori dettagli al sito Bridegestone: http://www.bridgestone.com/corporate/news/2017041701.html.

1. Gatti, tartarughe e altri animali

"Tutta la matematica è divisa in tre parti: la crittografia (pagata dalla CIA, dal KGB e compagnia cantando), l'idrodinamica (supportata dai fabbricanti dei sottomarini atomici) e la meccanica celeste (finanziata dai militari e da altre istituzioni che lavorano con i missili, come la NASA). La crittografia ha generato la teoria dei numeri, la geometria algebrica dei campi finiti, l'algebra, la combinatoria e i computer. L'idrodinamica ha partorito l'analisi complessa, le equazioni differenziali parziali, i gruppi di Lie, le teorie algebriche e di co-omologia, e il calcolo scientifico. La meccanica celeste è la procreatrice dei sistemi dinamici, dell'algebra lineare, della topologia, del calcolo variazionale e della geometria simplettica.
L'esistenza di relazioni misteriose tra tutti questi differenti domini è la più sorprendente e deliziosa caratteristica della matematica (e non ha una spiegazione razionale)."

È un periodo complicato per parlare del rapporto tra l'uomo e gli altri animali.

Gran parte degli esseri umani contemporanei (e verosimilmente tutti quelli che hanno la ventura di leggere questo articolo) hanno un rapporto estremamente mediato, indiretto con il mondo animale, almeno se confrontato con quello che hanno avuto i loro progenitori. Certo è opportuno, per poter asserire questo, tralasciare un aspetto che è peraltro tradizionalmente poco considerato, ovvero che da svariati decenni la scienza ci ha informato che sotto la categoria "animali" vanno classificati una pletora di microrganismi che abitano allegramente dentro di noi di cui non si aveva idea fino a poco (relativamente alla storia dell'Uomo) tempo fa. Animaletti (e vegetali) che ospitiamo all'interno del nostro stesso corpo: alcuni in grado di mettere seriamente a rischio la nostra stessa esistenza, altri senza i quali la suddetta esistenza probabilmente non avrebbe possibilità di proseguire.

Ciò non di meno, pur essendoci questi animali così vicini che più vicini – letteralmente – davvero non si può, l'essere umano medio, occidentale e metropolitano, è riuscito a ridurre drasticamente il suo rapporto con gli animali, anche con quelli che i suoi antenati conoscevano meglio. Molti posseggono animali domestici, che accudiscono per il puro piacere della compagnia; d'altro canto, quasi tutti si nutrono di altri animali, a meno che non seguano una dieta vegetariana, ma lo fanno tramite un sistema così organizzato e così specificatamente attento alla rimozione della visibilità degli aspetti più brutali del processo, che è difficile perfino risalire, a partire da un piatto servito a tavola, all'animale che ne è parte. O, se non proprio "difficile", è quantomeno resa facile al commensale la decisione di non prestare troppa attenzione alla cosa. Per il resto, in un ambiente urbano è possibile di tanto in tanto notare qualche volo di uccelli, sorprendere qualche insetto indaffarato in un parco, e poco altro.

Non è stato sempre così, evidentemente: non lo è ancora in molte parti del mondo, e soprattutto non lo è stato per la maggior parte della storia dell'Uomo. Quando compare sul pianeta, il progenitore dell'*Homo sapiens* (e a fortiori anche quello dell'*Homo habilis*, e pure dell'*Homo erectus*), è un anello ben consolidato della catena alimentare. Ha un certo numero di prede da cacciare (e la presenza dei canini nella dentizione lascia supporre che non disdegnasse una dieta a base di animali, oltre che vegetali), ed è ben conscio che ci sono un bel numero di grandi e veloci predatori che non disdegnerebbero di trasformare lui stesso in un energetico pasto proteico. In un ambiente del genere, sembra logico affermare che il "rapporto con gli altri animali" non fosse altro che l'attività che occupava la stragrande maggioranza del tempo del nostro eroe.

Però, nel lento fluire della preistoria, alcuni fenomeni giungono presto a sconvolgere la vita, la natura, l'identità stessa dei primi uomini: il passaggio di status da cacciatori-raccoglitori a coltivatori, ad esempio; e, appunto, la domesticazione di alcuni animali. Non è del tutto chiaro, almeno a chi scrive, se la domesticazione di animali sia stata una delle cause o piuttosto uno degli effetti della nascita dell'agricoltura: certo è che difficilmente si può considerare casuale la coincidenza dei periodi in cui le due attività prendono l'avvio. Con rozza approssimazione[1], si può dire che sia la domesticazione degli animali sia l'agricoltura prendono entrambe l'avvio circa diecimila anni fa. Si tratta naturalmente di processi di difficile datazione: non solo perché, come in ogni evento preistorico, mancano dei documenti corredati di date e contenuti, ma anche e soprattutto perché si tratta di eventi di portata generale, spontaneamente e indipendentemente comparsi in parti diverse del pianeta. E di portata spaventosa, dal punto di vista dell'evoluzione culturale.


1 *Canis lupus familiaris*

Il concetto di "domesticazione" può essere ingannevolmente ritenuto intuitivo: in realtà, richiede una definizione abbastanza precisa. Tanto per fare un esempio banale, sono molti gli esseri umani che tengono per "animali di compagnia" dei pesci, ma questo potrebbe non basta per poter definire "domesticati" i colorati abitanti dell'acquario[2]. E occorre anche fare uno sforzo di onestà e riconoscere un gretto spirito di convenienza all'origine della domesticazione: gli uomini sono sempre dimostrati crudelmente pragmatici, con gli animali: da essi si sono sempre aspettati aiuto nel lavoro, possibilità di movimento, energia muscolare, e servizi specifici; ma soprattutto cibo.

A dimostrazione delle difficoltà di datazione si può chiamare in causa Wikipedia. La voce "addomesticamento" della versione italiana pubblica una tabella su tre colonne (Specie, Data, Luogo) dove si elencano gli animali addomesticati, ma i severi revisori italici marcano tutta la voce come carente nella citazione delle fonti. Curiosamente, la madre di tutte le Wikipedie, quella in lingua inglese, evita perfino di riepilogare in tabella i dati della domesticazione, forse proprio per una sorta di principio di cautela. In compenso, ben due lingue accostano al titolo della voce la stellina d'oro che le marca come voci di qualità: il francese e il catalano. Per gli abitanti della Catalogna, di tabelle guida ve ne sono addirittura due; i cugini transalpini si limitano invece ad una sola, ma particolarmente ricca e densa di note. In qualsiasi modo si voglia vederla, comunque, la mappa temporale della domesticazione degli animali genera qualche sorpresa.

Sorprese che non riguardano comunque il primo animale della lista: le ricerche scientifiche sembrano andare d'accordo con l'opinione dell'uomo comune, e sacramentano il cane come il primo mammifero che si è affiancato all'uomo. Ad una prima approssimazione, il patto d'amicizia sembra essersi stretto attorno al quindicimila a.C., ed è significativo che si tratti della sola data dell'elenco che si può ragionevolmente ipotizzare essere precedente all'invenzione dell'agricoltura. Uomo e cane si alleano per cacciare insieme, prima ancora che per proteggersi reciprocamente; e in realtà la loro alleanza potrebbe essere assai più antica dei centosettanta secoli citati: cani e lupi cominciano a distinguersi come specie diverse circa centomila anni fa, e resti di cani vecchi di più 33.000 anni sembrano essere stati rinvenuti in prossimità ad accampamenti umani.

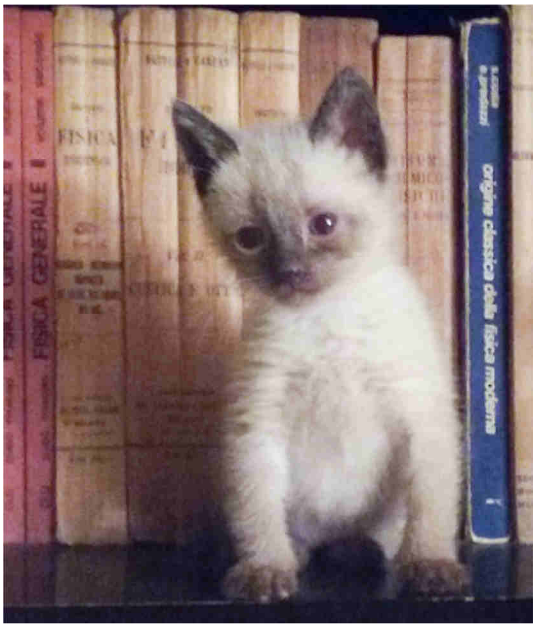
In ogni caso, prima che un altro animale cominci a fidarsi degli esseri umani al punto di vivergli accanto senza tentare di fuggire, devono passare molti anni. Verosimilmente il

[1] Rozza approssimazione che potremmo valutare in un bel $\pm$ 5000, "più o meno cinquemila".

[2] Ciò non di meno, negli elenchi degli "animali domestici" la carpa e il pesce rosso sono spesso presenti: li si ritiene addomesticati da circa un millennio, inizialmente in Cina o comunque in estremo oriente.

secondo animale domestico dovrebbe essere stata la capra, addomesticata nell'altopiano iranico attorno al 10.000 avanti Cristo. In quest'ottica, la proverbiale storiella che chiede come salvare capra e cavoli (dall'appetito del cane, elemento trascurato dalla citazione proverbiale ma ben presente nel celeberrimo aneddoto) assume una dignità particolarmente vetusta.

Da questo momento in avanti, gli addomesticamenti sembrano concentrarsi su animali che forniscono, ad un tempo, cibo, carne, potenza muscolare e capacità di trasporto: in altri termini, tutte caratteristiche preziose, ma di fatto utili soprattutto a comunità stanziali che si dedicano esplicitamente all'allevamento o che coltivano la terra: pecore, buoi, maiali, polli, bufali, asini, cavalli, lama, yak; vengono tutti addomesticati tra il 8000 e 4000 a.C., e poco dopo faranno loro compagnia anche cammelli e dromedari. Il cane, amico già del cacciatore-raccoglitore, mantiene il suo ruolo speciale anche tra allevatori e agricoltori; non viene mangiato, solo raramente viene usato come macchina energetica, ma viene incaricato di molte funzioni di controllo, delegategli dagli esseri umani.

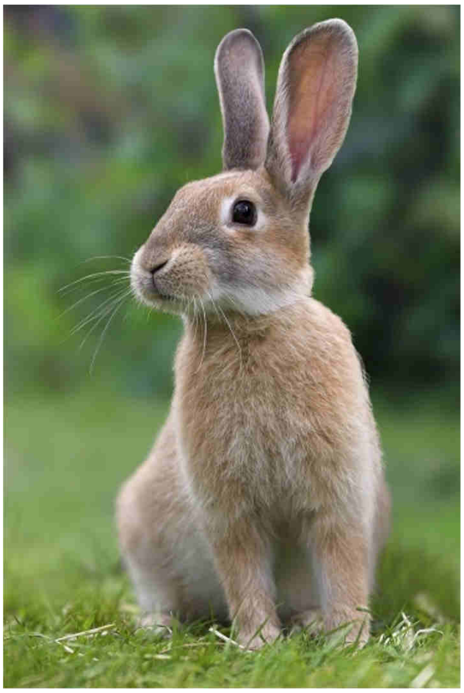

2 *Felis catus*

C'è però un altro animale che ha caratteristiche particolari, tra quelli addomesticati nel bacino del Mediterraneo in tempi antichi, attorno al 7000 a.C.; al pari del cane, non viene allevato per mangiarne le carni, o per avere latte o uova, e non è affatto utile neppure come animale da trasporto o fatica; anzi, in questi ambiti, è meno adatto del cane che, pure non eccellendovi, almeno in alcuni casi vi si cimenta. Ma così come il cane è il collaboratore perfetto del cacciatore-raccoglitore, quest'animaletto assurge presto al ruolo di collaboratore fidato (anche se sempre su un piano di indipendenza particolare, nel novero degli animali domesticati) dell'agricoltore.

La nascita dell'agricoltura deve essere stata a un tempo una prova eccezionale di intelligenza, di coraggio e di pazienza. In un mondo governato tirannicamente dalla fame continua, è necessaria un'intelligenza straordinaria per dedurre che alcune piante commestibili possono essere riprodotte da piccole parti della pianta stessa: i semi. E visto che i semi sono quasi sempre commestibili – in alcuni casi, la sola parte commestibile della pianta – ci vuole una prova di coraggio davvero estrema per decidere di non mangiarli, e provare a vedere se l'anno successivo si trasformeranno davvero in piante. Infine, la pazienza: davvero sovrumana, perché richiede di attendere lunghi mesi, e sono mesi invernali, quindi freddi, quelli in cui la fame si fa sentire in maniera più acuta e feroce. Il primo agricoltore, colui che deve aver visto, in un giorno di primavera, spuntare il germoglio che coronava la sua ipotesi rivoluzionaria e pazzesca, deve essere rimasto così stordito dalla felicità che diventa davvero logico, quasi inevitabile, constatare che quasi tutte le civiltà umane riservano all'arrivo della primavera le loro feste più grandi e significative.

Come tutte le rivoluzioni, però, a grandi successi seguono un certo numero di problemi imprevisti. Raccogliere le messi è festa grande, ma poi occorre stiparle, conservarle; si presentano problemi di conservazione e protezione. Paradossalmente, sarà la scoperta dell'agricoltura a dare inizio alle città, nonostante nei secoli successivi la contrapposizione città-campagna sarà uno dei temi più frequenti nell'evoluzione della cultura umana. Su scala più piccola, ma in fondo non troppo meno importante, stipare il raccolto in un luogo protetto significa proteggerlo non solo dagli altri uomini e dai grandi erbivori, ma anche da uno stuolo di piccoli – ma intelligentissimi e voracissimi – roditori.

È così che, con ogni probabilità, il gatto entra a far parte del novero degli animali domestici. Non gli si chiede altro se non di tenere i topi lontani dai granai, e del resto difficilmente il gatto si presterebbe a fare qualcosa di diverso, di forzato, lontano dalla sua natura di minuscola macchina cacciatrice.


3 *Oryctolagus cuniculus*

A parte il cane e il gatto, virtualmente nessun altro animale è stato addomesticato senza aver già segnato il suo destino finale di trasformarsi in cibo per esseri umani. Forse solo le api possono rientrare nella medesima eccezione, perché non finiscono certo per essere mangiate dagli uomini; ma è palese che lo scopo principale della loro domesticazione resta la produzione del miele, e quindi rimane di natura essenzialmente alimentare; più esplicita, per restare nell'entomologia, è forse l'eccezione del baco da seta, domesticato in Cina già intorno al 3000 a.C., ma non può non prendersi in considerazione che questo tipo di addomesticamento si affidi a tecniche più vicine a quelle della coltivazione che dell'allevamento. Altri animali fondamentali nella storia dell'uomo, come cavalli, asini e dromedari, hanno presto rivestito il ruolo principale di mezzi di locomozione, senza però evitare che, a fine servizio, la possibilità di essere trasformati in grandi quantità di cibo venisse dimenticata.

Solo le date più recenti, nella lista di Wikipedia, portano alla luce la presenza di animali addomesticati per ragioni essenzialmente estetiche o di compagnia: ed è probabile che alcuni studiosi potrebbero contestare il titolo di "animali domestici" al cervo o al criceto. Il furetto è un caso davvero particolare, invece, perché risulta addomesticato in Europa già un mezzo millennio prima di Cristo; ma la sorpresa più grande che la lista riserva riguarda invece proprio la preda preferita dei furetti, ovvero il coniglio. Pare assodato che il comune coniglio, così spesso associato al pollo come animale classicamente presente e diffuso nelle cascine del continente, sia stato addomesticato soltanto attorno al 1600[3]. In realtà, il caso del coniglio è particolarmente istruttivo per illustrare la difficoltà di definire il concetto di addomesticamento: il coniglio selvatico è presente da sempre in Europa, ed è la preda principale di un gran numero di predatori. Per considerarlo "domestico" si deve risalire appunto all'inizio dell'era moderna, quando si è cominciato ad allevarlo, essenzialmente per usi alimentari; per contro, quando è stato diffuso al di fuori dei territori originari, in zone povere di predatori naturali, il coniglio è diventato presto un pericolo per l'ecosistema. La stessa specie è quindi vista, in funzione del luogo e del comportamento, come animale domestico animale selvatico e addirittura come flagello biologico.

[3] Potrebbe essere interessante cercare quanti errori di anacronismo siano presenti in romanzi e film ambientati in periodi dell'antichità e medioevali: non ci sembra che registi e sceneggiatori si siano preoccupati spesso di eliminare i conigli dalle scenografie campagnole.

4 *Oche svampite (ma non per colpa loro)*

In ogni caso, la frequentazione con gli animali è stata così profonda e assidua, nella storia, che ogni civiltà fa un grande uso, nella lingua di metafore basate sulle caratteristiche delle varie specie. Forse la maggioranza degli insulti esistenti al mondo ha riferimenti animaleschi[4], e i dizionari che riportano frasi idiomatiche e modi di dire prenderebbero davvero molto meno spazio sugli scaffali se da essi venissero rimossi tutti i riferimenti bestiali. Dimostrarsi furbi come una volpe o forti come un leone; chiudersi a riccio, restare testardi come muli, comportarsi da oca svampita, avere il cervello d'una gallina, essere sporco come un maiale… sono tutte espressioni talmente familiari che non devono essere spiegate neppure ai bambini piccoli, anche se quei bambini non hanno probabilmente ancora mai visto, in vita loro, nessuno degli animali eletti a modello della citazione. La lingua è dinamica, cambia spesso e velocemente: eppure, nei modi di dire, sembra avere una lentezza evolutiva diversa: non ci sono nuovi molti modi di dire derivati dal profondo incremento dell'utilizzo della tecnologia ("importuno come un smartphone"? "noioso come un telecomando la domenica sera"? "tronfio come un air-bag"?), e in compenso quelli derivati dalla frequentazione con gli animali resistono anche se le nuove generazioni non li frequentano più.

È invece curioso come possano fare il loro ingresso metaforico nel linguaggio scientifico alcuni animali, quando si rende necessario tradurre in linguaggio divulgativo concetti che, tecnicamente, sono nascosti dentro complicate formule matematiche. Ancora più curioso è notare che, in questo campo, a farla da padrone è soprattutto il gatto.

La più celebre espressione di Norbert Wiener sul concetto di modellizzazione è *"Il miglior modello materiale di un gatto è un altro (o meglio ancora lo stesso) gatto*"[5], e ci si può chiedere per quale oscura ragione il padre della cibernetica abbia deciso di utilizzare un animale per chiarire al meglio la relazione tra un oggetto e il suo modello, e soprattutto perché come animale più didatticamente efficace sia stato prescelto proprio il micio.

Forse perché c'era un precedente illustrissimo: Sua Maestà il Gatto di Schrödinger[6] è ormai così celebre che sussistono ben pochi dubbi sul fatto che sia diventato più famoso del suo stesso creatore. Si fa carico di tradurre in linguaggio divulgativo un paio di concetti davvero pregnanti: innanzitutto il Principio di Sovrapposizione quantistico, che asserisce che in Meccanica Quantistica due stati distinti possono essere trattati come un unico "stato sovrapposto"[7], e la sua apparente contraddizione con la fisica classica, che difficilmente riesce a conciliare l'idea che possa avere un reale significato fisico la sovrapposizione dello stato "gatto vivo" e dello stato "gatto morto". È un compito davvero ingrato da caricare sulle vibrisse di un singolo felino: e anche in questo caso c'è da chiedersi per quale ragione Erwin Schrödinger abbia deciso di rinchiudere per un'ora[8]

[4] L'unico vero concorrente, in questa lotta, è rappresentato dal gruppo degli insulti a sfondo sessuale. Probabilmente, però, è un concorrente così robusto che potrebbe facilmente vincere la sfida.

[5] Citazione che naturalmente riportiamo in apertura dell'animalesco compleanno a lui dedicato, "Voli di falena e fughe di scarafaggio", RM172, Maggio 2103.

[6] Sì, certo, anche di lui (e del suo gatto) abbiamo già parlato: era l'Agosto 2007, RM103, e il compleanno si intitola, ovviamente, "Non dire gatto…"

[7] Al giorno d'oggi, si preferisce usare il termine inglese "entanglement".

[8] Va riconosciuto ad Erwin un certo grado di umanità, visto che limita ad un'ora la permanenza del gatto nella pericolosissima scatola. Un grado ben maggiore gli va riconosciuto per essersi limitato, nel 1935, a descrivere l'esperimento solo come *gedankenexperiment,* insomma solo come esperimento ideale (anche perché, come esperimento "reale", è quanto meno di difficile interpretazione....

proprio un gatto in quell'infermale marchingegno della sua scatola di laboratorio, in cui una fiala di cianuro era pronta a rompersi non appena un contatore Geiger riscontrava l'emissione di una particella radioattiva.

Anche se meno famoso del collega fisico e meno noto anche del micio di Wiener, esiste anche un gatto più matematico: è quello generato da Arnol'd.

5 *Vladimir Igorevič Arnol'd*

Vladimir Igorevič Arnol'd nasce a Odessa il 12 Giugno 1937, ed è un vero peccato che abbia deciso di lasciarci giusto sette anni fa, perché altrimenti in questi giorni avrebbe potuto spegnere ottanta candeline. Ha avuto la fortuna di nascere in una famiglia dalla lunga tradizione scientifica, cosa che – unita a quella che lo stesso Arnol'd chiamava "grande tradizione matematica russa", che faceva sì che anche tra le famiglie meno privilegiate ci fosse l'abitudine di porre ai bambini problemi di matematica – lo indirizzò ad interessarsi di matematica fin dalla più tenera età[9]. Forse questo non basta a classificarlo come "bambino prodigio", ma di certo Vladimir può essere qualificato quantomeno come "ragazzo prodigio"; fa il suo ingresso all'Università di Mosca già nel 1954, e non ha ancora compiuto vent'anni, nel 1957, quando risolve il Tredicesimo Problema di Hilbert[10]. C'è da chiedersi cosa deve aver pensato il suo professore quando ha visto l'imberbe studente risolvere uno dei grandi quesiti matematici del secolo: ma, visto che quel professore era il grande Andrey Kolmogorov[11], c'è da aspettarsi che si sia limitato ad un largo sorriso di soddisfazione. Anche perché Vladimir, ovviamente, deve ancora laurearsi: lo farà due anni dopo, nel 1959, proprio avendo Kolmogorov come relatore e per commissione esaminatrice un gruppo di matematici che hanno lasciato il loro nome nella storia della matematica.

Vladimir è professore di Meccanica e Matematica all'Università di Mosca già nel 1965; nel 1986 diventerà direttore dell'Istituto Steklov di Matematica, sempre a Mosca, e pochi anni dopo sarà nominato anche professore all'università Paris-Dauphine in Francia. Nel 2001 gli viene assegnato il Premio Wolf, ma è solo il più prestigioso degli onori che raccoglie durante la sua carriera.

Più ancora che la soluzione del Tredicesimo Problema di Hilbert, il suo contributo maggiore alla matematica è verosimilmente il cosiddetto Teorema KAM sulla stabilità dei sistemi hamiltoniani integrabili: Vladimir inserisce la A iniziale del suo cognome nell'acronimo, mentre la K segna il contributo di Kolmogorov e la M quello di Jürgen Kurt Moser. Ma anche tenendo conto dell'importanza cruciale del teorema KAM, sarebbe assai riduttivo pensare che l'opera matematica di Arnol'd possa essere ristretta ai suoi due risultati più famosi: non c'è quasi sezione della matematica in cui non abbia lasciato traccia o memoria, lungo i suoi quarantacinque anni di carriera accademica.

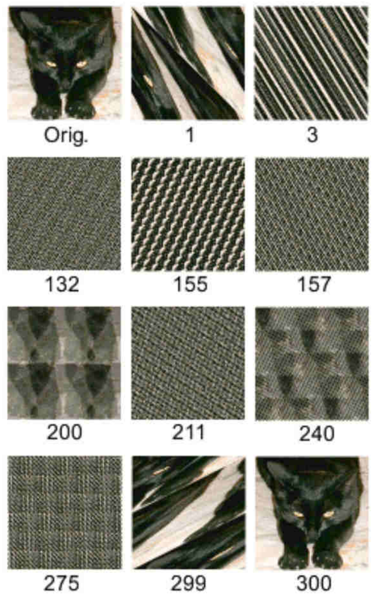
[9] Nel caso vogliate cimentarvi con un o dei problemi che appassionò Arnold da piccolo, provate con questo che impegnò il nostro per un'intera giornata: Due vecchie signore partono all'alba e camminano a velocità costante: una va da A a B, l'altra da B ad A. Si incrociano a mezzogiorno, e continuano il cammino senza fermarsi. La prima arriva a B alle 4 del pomeriggio, l'altra giunge ad A alle 9 di sera. A che ora è sorto il sole, in quel giorno?

[10] Risoluzione di equazioni di settimo grado usando funzioni algebriche a due parametri.

[11] Di lui abbiamo parlato nell'Aprile 2012, RM159, in "Collegio matematico numero 18".

Una menzione speciale va certo data a due delle sue caratteristiche più peculiari, che restano in qualche modo interconnesse l'una all'altra: la sua straordinaria capacità di critica ricca di ironia (la citazione in apertura a quest'articolo ne è un buon esempio) e l'altrettanto straordinaria capacità didattica. Specialmente negli ultimi anni di vita, non risparmiò critiche severe al sistema didattico americano, che sembrava diretto a rimuovere dal curriculum degli studenti "fatti scientifici non necessari" a favore di informazioni più blande e meno scientifiche. D'altro canto, non risparmiò neppure l'eccesso di astrazione del sistema didattico francese, citando di aver sentito un ragazzino delle elementari rispondere alla domanda "che cos'è 3+2?" con l'affermazione "è 2+3, perché l'addizione è commutativa".

La sua dedizione alla didattica, comunque, non era riservata ai ragazzini, ma a studenti universitari brillanti: Arnol'd ha scritto una gran quantità di testi universitari, e per anni ha tenuto dei celebri "seminari" destinati ai giovani ricercatori. Erano seminari certo difficili, e tutt'altro che prevedibili: di solito, si incentravano su problemi ancora aperti, e sollecitavano gli studenti ad affrontarli attraverso tutti gli approcci possibili. Prendendo a prestito un termine classico della radioattività, sosteneva che l'emivita, insomma il "tempo di dimezzamento", di un problema matematico era pari a circa sette anni e mezzo, che è un periodo di tutto rispetto per una vita umana, e che pertanto il futuro ricercatore dovesse porre attenzione nella scelta, lasciandosi guidare anche dalla passione, proprio come quando deve scegliere la futura moglie.



6 *Il gatto di Arnol'd*

Il suo gatto, poco noto al di fuori dei ristretti circoli matematici, è un bel gatto nero dagli occhi gialli[12]. Si è assunto il compito di mostrare che in una geometria toroidale una mappa caotica, dopo un certo numero di iterazioni, riesce a tornare allo stato iniziale, pur attraversando delle fasi in cui l'ordine iniziale sembra davvero ridotto peggio di un gomitolo di lana passato attraverso gli artigli di una nidiata di micetti.

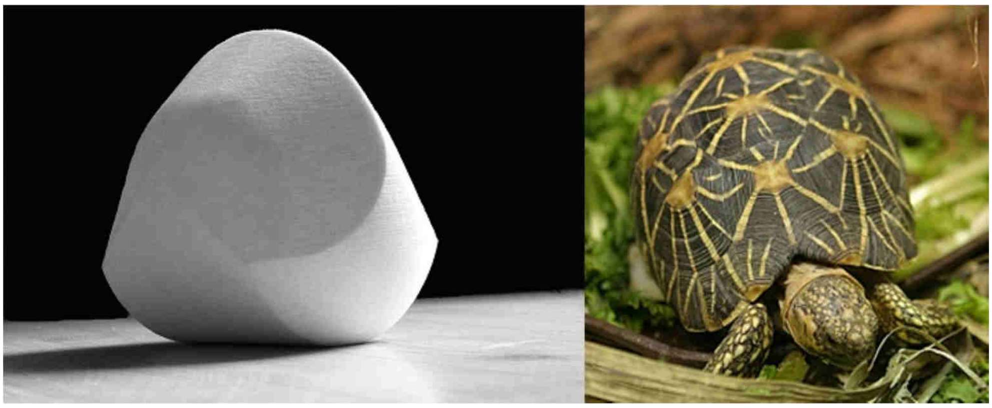
Al pari del Gatto di Schrödinger, ci si può domandare perché mai i gatti sembrano essere così cari agli esempi scientifici. Per certi versi, si potrebbe persino notare una certa predisposizione alla mania: se Wiener poteva davvero usare qualsiasi altro oggetto, anche inanimato, per il suo esempio, a ben vedere Erwin Schrödinger avrebbe potuto, più razionalmente, proporre un topo: i poveri roditori sono animaletti che, per loro disgrazia, frequentano assai spesso dei laboratori, sono assolutamente abituati ad essere rinchiusi dentro scatole, e soprattutto contano un tal numero di caduti che un "Topo di Erwin" che avesse dovuto assumersi il compito di essere ad un tempo mezzo morto e mezzo vivo avrebbe probabilmente accettato la scommessa con entusiasmo e riconoscenza.

Allo stesso modo, quella che serviva ad Arnol'd, in verità, non era altro che un'immagine qualunque: perché proprio un gatto? Non era più naturale, in un ambiente in cui verosimilmente i ricercatori erano ancora in prevalenza giovani maschi, usare la foto di una bella fanciulla?[13]

[12] Voci non confermate asseriscono che piaccia molto ad un'altra micia nera matematica (ma assai meno celebre), nomata Gaetanagnesi.

[13] Non è un caso che, cercando su Internet, si trovino spesso delle spiegazioni della mappa del Gatto di Arnol'd in cui l'originale micio nero è sostituito da un sorridente volto di ragazza.

Ci sono certo casi in cui non vi è libertà di scelta: sempre Vladimir Igorevič Arnol'd, ad esempio, tra le mille altre cose ha anche teorizzato il Gömböc[14], un solido a densità uniforme che ha un solo punto di equilibrio stabile e uno solo di equilibrio instabile. Tecnicamente, è un solido che viene definito "Mono-monostabile", che significa che comunque lo si appoggi su un piano finisce col posizionarsi da solo nell'unica posizione stabile d'equilibrio[15].



7 *Il Gömböc teorico e quello pratico (e biologico)*

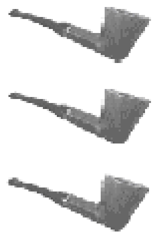
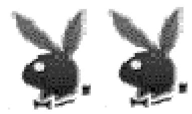
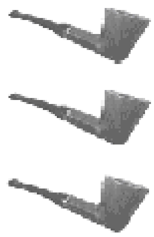
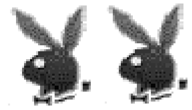
È una dote, questa, che torna indubbiamente assai utile a certi tipi di animali, e in natura si trovano infatti delle tartarughe (come la stellata indiana riprodotta nella foto rubata – come al solito – a Wikipedia) che si sono affidate a Darwin per ottenere quanto Arnol'd aveva teorizzato.

In casi come questi, un gatto non fa certamente alla bisogna: le sue posizioni di equilibrio stabile sono quasi infinite, basta osservarne uno qualunque mentre dorme. Ma per quasi ogni altro ruolo, specialmente per quelli di divulgazione scientifica, il *Felis catus* sembra davvero non avere rivali.

[14] Dall'ungherese: significa semplicemente "sferoidale". E la lingua è ungherese e non russo perché, anche se è stato teorizzato da Arnol'd, a realizzarlo sono stati due giovanotti di Budapest, Gábor Domokos e Péter Várkonyi.

[15] I lettori meno giovani potranno forse ricordare un desideratissimo gadget di coloro che negli anni Sessanta erano bambini: Ercolino Semprinpiedi, un pupazzo gonfiabile che aveva una base riempita d'acqua, e che pertanto poteva essere preso a pugni ripetutamente senza speranza di mandarlo al tappeto. A differenza del Gömböc, la sua densità era però tutt'altro che uniforme.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Numeri (ma anche parole) incrociati			
Altro schema!			

2.1 Numeri (ma anche parole) incrociati

OK, parliamo d'altri. Nel senso che vi racconto una cosa su Doc.

Nell'ormai lontano millenovecentosettantotto, il Nostro ha letto un libro[16].

Siccome non resisto più di due righe senza parlare di me, sappiate anche che stavo per arrabbiarmi con voi: infatti, avevo trovato un problema carino, che però richiedeva la ricerca di una ben precisa citazione che ero convinto di trovare su *Solitari con le carte e altri solitari* di Giampaolo Dossena: cerca che ti cerca, non riuscivo a trovare il libro: "*Ma è possibile che ogni volta che devo scrivere un problema e cerco un libro, quel libro non si trova? Certo, che se i lettori si accontentassero di una formulazione più razionale e asettica, non dovrei fare tutte 'ste ricerche...*". Alla fine, sono riuscito a trovarlo[17].

Trovato il libro, evidentemente non trovavo la citazione, che infatti era sul Dossena-Rinaldi, *A che gioco si gioca?*. Quello, per fortuna, ben in vista.

Comunque, nel pezzo dove Dossena parla di "farsi da soli le parole incrociate", c'era il pezzo che cercavo:

...bisogna aver raggiunto lo stadio in cui non si risolvono più, mai più, mai mai più, gli schemi facili; si fanno soltanto (e bene, e alla svelta) gli schemi più difficili (per intenderci, sulla Settimana Enigmistica*, gli Incroci Obbligati.*

Doc (torniamo a lui) risolve solo quelli.

A penna.

'Na rabbia... Io, festeggio quando riesco a fare le "Senza Schema" a matita in meno di tre ore. Va detto che adesso festeggio piuttosto sovente... eh, quando c'era Lui[18]...

Comunque, non ci risulta che Doc abbia mai disegnato uno schema di parole crociate. Quindi, abbiamo deciso che *voi* dovete dargli una mano; ma siccome questa è una rivista di matematica ricreativa, le regole che ci diamo sono strettamente matematiche, e anche questa prima parte, nel subdolo modo tipico di molti teoremi, contiene un'informazione

[16] Sì, certo, dopo ne ha letti anche altri. E qualcuno lo ha letto mentre lo scriveva, mentre almeno uno lo ha scritto senza leggerlo. Su, fate i seri.

[17] Si nascondeva dietro la copia del 1992 del Wisden, la Bibbia del Cricket.

[18] Bartezzaghi. Padre. Il figlio è più bravo dietro una cattedra.

importante: si tratta di *disegnarlo*, non di *compilarlo*; quindi, le parole non dovete metterle voi (oeu, Doc, datti da fare!).

Lo schema che dovete disegnare deve contenere *meno caselle nere che caselle bianche* e, per un dato n, deve poter ospitare, tra verticali e orizzontali:

Una parola di lunghezza n.

Due parole di lunghezza $n–1$.

Tre parole di lunghezza $n–2$.

… … …

n parole di lunghezza 1.

Ammettiamo che per l'estetica enigmistica l'ultima riga non sia una meraviglia, ma quella matematica la impone. Comunque, sia ben chiaro che "k parole di lunghezza j" significa "k **e solo** $\boldsymbol{k}$ parole di lunghezza j".

Evidentemente, $n \geq 2$ e schema non necessariamente quadrato, ma la domanda che ci poniamo è se sia sempre possibile, visto la regoletta delle nere in numero minore delle bianche...

Oh, se poi volete mettervi lì a costruire la griglia e cominciare una gara tra di voi a chi ce l'ha (lo schema) più piccolo, prendetelo pure come un Summer Contest e ne riparliamo a settembre...

2.2 Altro schema!

Ma almeno questa volta abbiamo delle certezze: è un quadrato, tutte le caselle sono bianche ed è pieno di zeri.

Quella che ci manca è l'ambientazione, ma il problema ci piace molto e quindi ne facciamo a meno: se riuscite a trovarne una *non troppo illogica*, mandate pure, pubblicheremo (e, spudoratamente, riutilizzeremo).

Dunque, avete questa scacchiera $N\times N$, e uno zero per ogni casa; avete anche un altro quadrato, questa volta di lato $(N - 1)\times(N - 1)$: evidentemente, se volete coprire un numero intero di case, il vostro quadrato andrà appoggiato in un angolo della scacchiera.

Ma ogni volta che appoggiate il quadrato, succede una cosa strana: *a vostra scelta per ogni singola casella coperta* si aggiunge 1 o si toglie 1: nel senso che, ad esempio, potete decidere che lo posate in un certo modo e dalla prima casella coperta togliete 1, alla seconda aggiungete 1, alla terza aggiungete 1,... e avanti così per tutto il quadrato; indi, sollevate il quadrato e lo posate in un altro angolo della scacchiera a vostra scelta, e ricominciate: questa volta decidete che alla prima casella aggiungete 1, dalla seconda togliete 1,... insomma, totale libertà di cambiare le operazioni. Ah, evidentemente potete anche avere dei valori negativi, sulla scacchiera.

Il vostro scopo è di ottenere (non necessariamente in ordine) sulla scacchiera tutti i valori da 1 a N^2.

Si può? Se sì, per quali valori di N? Se no, perché? Ma, soprattutto, come lo si potrebbe ambientare?

3. Bungee Jumpers

Provate che in un triangolo rettangolo, se entrambi i cateti sono ruotati con centro nel loro vertice non retto sino a sovrapporsi sull'ipotenusa, essi si sovrappongono per un segmento pari al diametro del cerchio inscritto.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giugno.

Il livello di ritardo ha raggiunto estremi mai visti. Avete già capito, andiamo avanti.

4.1 [219]

4.1.1 "Editor in Chef" (e non è un typo)

Ebbene sì, a volte ritornano. Il mese scorso avevamo pubblicato le soluzioni di ***Valter***, ***Franco57*** e ***trentatre***. Vediamo il testo del quesito:

> *Un certo numero di RMers è seduto intorno ad un tavolo perfettamente circolare. Doc è in ritardo, e Alice provvede alla distribuzione dei cioccolatini: inizia da Rudy, e salta una persona, dà un cioccolatino, e salta due persone, dà un cioccolatino, e salta tre persone... e avanti in questo modo. Alice fa alcuni giri, e l'ultimo cioccolatino tocca a Rudy: Rudy (e alcuni altri) hanno quattro cioccolatini, alcuni altri ne hanno ricevuti due e tutti gli altri sono a bocca asciutta.*
>
> *A questo punto arriva Doc e si siede tra due persone. Alice tira fuori un altro sacchetto di cioccolatini (con esattamente lo stesso numero di cioccolatini del primo) e inizia la distribuzione secondo le stesse regole precedenti ma, questa volta, partendo da Piotr. Qui, data la differenza nel numero di persone, tutti quanti ricevono o uno, o due cioccolatini.*
>
> *Quanti eravamo e quanti cioccolatini aveva Alice?*

Ci ha scritto ***Franco57***:

> Cari amici, invio in allegato una correzione ad una mia dimostrazione un po' fallace (un po' come dire una donna un po' incinta) pubblicata nel numero di Maggio ed un'altra dimostrazione più semplice, tutte relative al 2° quesito problema del numero di Aprile "Editor in Chef" (e non è un typo).

Beh, con una premessa così, come non pubblicare il resto?

> Vorrei ritornare su questo quesito, perché ho due osservazioni riguardo alla proprietà "se e solo se il numero dei commensali è una potenza del 2 allora tutti ricevono almeno un CSP a testa (se ce ne sono abbastanza)" contenuta nella mia soluzione (ma anche in quella del bravissimo ***Trentatre***) pubblicata nel numero 220 della Prestigiosa Rivista.
>
> La prima: la mia dimostrazione che se i commensali sono una potenza del 2 allora tutti ricevono un CSP a testa (se ce ne sono abbastanza) è poco chiara e comunque sbagliata (ohibò, sembra che tenti di affermare che se un prodotto contiene un fattore dispari, allora non può essere un multiplo di una potenza del 2). Una consolazione: il ragionamento è comunque la via giusta per una vera dimostrazione.
>
> La seconda: come già avevo immaginato, si può dimostrare che se i commensali non sono una potenza del 2 allora non tutti ricevono un CSP a testa, seguendo una via più semplice di quella da me seguita, che non è frutto del mio ingegno ma dell'eccezionale amico Gratin, al quale sottopongo solo i quesiti più ardui.
>
> Abbiamo già visto che se i commensali sono in numero dispari, diciamo $n = 2k+1$, quelli che ricevono il cioccolatino sono al più $k+1$, cioè sicuramente $k-1$ non lo ricevono.
>
> Abbiamo anche visto che se i commensali sono in numero pari, diciamo $n = 2k$, allora il ciclo di assegnamento che si ripete è lungo $2n$:
>
> $$C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_{n-2} \quad C_{n-1} \quad C_{n-1} \quad C_{n-2} \quad \cdots \quad C_2 \quad C_1 \quad 0 \quad 0$$
>
> con i C_i non necessariamente distinti, dove con C_i indico il commensale che riceve lo i-esimo cioccolatino, dunque $C_1 = 1$ e $C_i = C_{i-1} + i \pmod{n}$.
>
> Premesso tutto questo, ecco la dimostrazione corretta della proposizione 1: se i commensali sono $n = 2^p$ tutti ricevono un CSP a testa (avendone abbastanza).
>
> In questo caso, infatti, la sequenza $C_1 = 1, C_2, \ldots, C_{n-2}, C_{n-1}$ è tutta di persone diverse tra loro e diverse da 0.

Infatti, se invece fosse $C_\alpha = C_\beta$ con $1 \le \alpha < \beta < n$ dovrebbe essere

$$(1+2+\cdots+\beta)-(1+2+\cdots+\alpha)=(\alpha+1)+(\alpha+2)+\cdots+\beta=\frac{((\alpha+1)+\beta)\cdot(\beta-\alpha)}{2}\equiv 0 \pmod{n}\cdot$$

Vediamo perché ciò è impossibile.

Notiamo che i fattori $\beta-\alpha$ e $(\alpha+1)+\beta$ hanno sempre parità differente. Inoltre $\frac{(\alpha+1)+\beta}{2} \le \frac{((2^p-1)+1)+(2^p-1)}{2} = 2^p - \frac{1}{2}$, in particolare quindi non è divisibile per $n = 2^p$.

Se $\beta-\alpha$ è dispari, abbiamo il prodotto dei due interi $\frac{(\alpha+1)+\beta}{2}\cdot(\beta-\alpha)$ di cui il secondo è dispari e il primo non è divisibile per $n=2^p$.

Se $\beta-\alpha$ è pari, abbiamo il prodotto dei due interi $((\alpha+1)+\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}$, di cui il primo è dispari e il secondo è chiaramente inferiore a $n=2^p$, quindi anche questa volta non può essere divisibile per $n=2^p$.

In ogni caso sarà sempre $C_\alpha \ne C_\beta$. E sarà sempre anche $C_\alpha \ne 0$ poiché il ragionamento vale anche per la somma $1+2+\cdots+\alpha$.

Ed ecco la dimostrazione più snella della proposizione 2: se i commensali non sono una potenza del 2 allora non tutti ricevono un CSP a testa.

Se n è dispari si è già visto. Basta dimostrarlo per n pari, quindi $n = 2^p \cdot d$ con $d > 1$ dispari e $p > 0$. Visto il ciclo di assegnazione, è sufficiente mostrare che esistono ripetizioni tra le prime $n-1$ assegnazioni di CSP:

$$C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_{n-2} \quad C_{n-1}$$

Sempre con $1 \le \alpha < \beta < n$, posto $\delta = \beta - \alpha$ e indicando S_i la somma $1+2+\cdots+i$, per non confonderla con C_i che ha lo stesso valore ma modulo *n*, abbiamo

$$S_\beta - S_\alpha = (\alpha+1)+(\alpha+2)+\cdots+(\alpha+\delta) = \alpha\cdot\delta + \frac{\delta\cdot(\delta+1)}{2} = \delta\cdot\left(\alpha+\frac{\delta+1}{2}\right).$$

Per trovare due assegnamenti di CSP allo stesso commensale, cerco α e β tali che $S_\alpha \equiv S_\beta \pmod{n}$. Il segreto è scegliere $\delta = d$ e l'unico α in $\{1,2,\ldots,2^p\}$ tale che sia l'inverso di $\frac{\delta+1}{2}$ modulo 2^p, cioè $\alpha+\frac{\delta+1}{2}$ multiplo di 2^p. Occorre però verificare che β sia ammissibile, cioè $\beta < n$, e ciò è vero, infatti $\beta = \alpha + d \le 2^p + d < 2^p \cdot d$, poiché l'ultima diseguaglianza equivale a $d > \frac{2^p}{2^p-1} = 1 + \frac{1}{2^p-1}$.

A questo punto risulta che $S_\beta - S_\alpha = d\cdot\left(\alpha+\frac{d+1}{2}\right)$ è divisibile sia per d che per 2^p, cioè è divisibile per n. Ciò significa $C_\alpha = C_\beta$ cioè abbiamo trovato tra i primi $n-1$ cioccolatini un commensale che ne riceve più di uno, sia il cioccolatino α che il cioccolatino β.

Bene, ci fa sempre piacere vedere come i nostri lettori e solutori si ispirano a vicenda. Procediamo.

4.2 [220]

4.2.1 (Non) Basta con il "Filetto"!

La capacità del Capo di tirare fuori nuovi quesiti da vecchi oggetti è inenarrabile. Per non parlare del numero di nomi che conosce in tutte le lingue per lo stesso gioco. Ma non facciamoci distrarre dalle risorse di Rudy, e vediamo di che cosa si trattava questa volta:

> *Rudy e Doc hanno costruito un poliedro convesso, per cui in ogni vertice si incontrano sempre solo tre facce, che sono più di cinque. Uno di loro sigla una faccia, poi il secondo sigla un'altra faccia (scelta tra quelle libere) e avanti in questo modo; quando (e se) un giocatore riesce ad avere la propria firma sulle tre facce che concorrono in un vertice, ha vinto. Supponendo che entrambi giochino in modo assolutamente razionale, un giocatore ha una strategia vincente?*

Molte soluzioni questo mese (e con il nostro ritardo, voglio vedere). Partiamo con ***Valter***:

> Provo a rispondere solo alla prima domanda. Non vado oltre perché mi viene troppo facile e probabilmente sbaglio già in partenza. Inoltre temo di lanciarmi già in farneticazioni e non voglio perseverare. Ho cominciato con una serie di ragionamenti per poi partorire il classico topolino.
>
> Uso i consueti simboli per facce, spigoli e vertici: F, E e V.
>
> Ricordo inoltre la formula di Eulero: $V - E + F = 2$.
>
> Dato che devono incontrarsi tre F in un V si dovrebbe avere: $V = 2*E/3$ (un E è su due F).
>
> Da ciò si deduce (essendo valori interi): $V \equiv 0$ MOD2, $E \equiv 0$ MOD3.
>
> Ora indico con L la media dei lati nei poligoni di tutte le F.
>
> Si dovrebbe avere: $L = 2*S/F$ (se tutti le F hanno stesso numero di lati tale numero è L).
>
> Da tutto ciò e dalla formula di Eulero si ha che il tetraedro è l'unico ad avere F di soli triangoli.
>
> I solidi Platonici con V di sole tre F sono: tetraedro, cubo e dodecaedro.
>
> Gli altri solidi con sempre solo tre F in un V si ottengono ricorsivamente da quelli Platonici (qui farnetico alla grande, cerco chi mi smentisce per capire dove sbaglio):
>
> - tagliando sui V dei tetraedri (il solido che rimane guadagna 1 F, 3 S, 3 V e perde 1 V: i conti dovrebbero tornare)
>
> - tagliando su una diagonale di due F opposte il cubo: +1 e –2 F, +2 e –5 S, –2 V (ottengo il prisma triangolare e da questo deduco i successivi: quadrato, pentagonale, …).
>
> Se taglio un tetraedro passando per un S e dividendo due F ottengo altri due tetraedri.
>
> Discorso analogo per il prisma triangolare ottenuto dividendo le due F triangolari.
>
> Per gli altri prismi tagliando su 2 V dei due poligoni uguali e opposti ho due prismi minori (p.e. per quello esagonale ottengo un prisma triangolare e uno pentagonale o 2 quadrati).
>
> Con il tetraedro risulta immediato verificare che si arriva ad una patta.
>
> Ora se, a parte il tetraedro, gli altri hanno almeno un F con $L > 3$; come posso sfruttare ciò?
>
> Se il primo sigla una F con $L > 3$ dovrebbe vincere (almeno mi pare).
>
> Il secondo, per proteggersi, dovrebbe scegliere una F adiacente.
>
> Anche così però il primo ha almeno 3 L della F scelta a disposizione.

Se sceglie la F adiacente a una L delle 3 (o più) e non adiacente alla F del secondo vince (il secondo può solo siglare una sola delle 2 F sui 2 V in cui il primo può fare filetto).

Chissà se si capisce qualcosa …

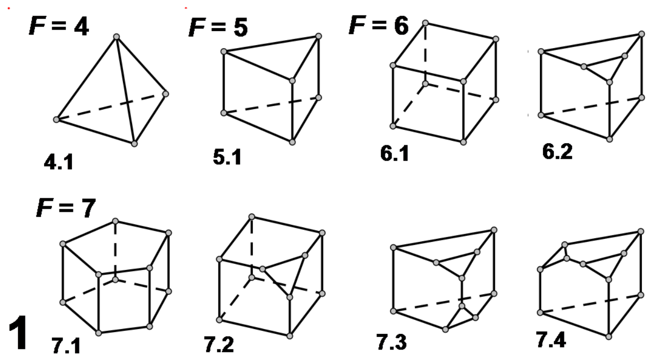
Non saremo certo noi a dirlo. Lo stile di ***Valter*** è ormai apprezzato da tutta la Redazione, così come quello, inimitabile, di ***trentatre***:

Parto dalla geometria. I poliedri – abbrevio con ***P*** – devono essere (a) convessi, (b) avere tre spigoli in ogni vertice. Agli effetti del problema contano solo le relazioni di appartenenza fra vertici, spigoli e facce, e non le proprietà *metriche*. La condizione aggiuntiva di *non essere regolari* (che vuol dire con *lati e angoli congruenti*) è una condizione metrica, che tralascio, e così per la condizione di avere almeno 5 facce (che esclude solo il tetraedro). Includo quindi i poliedri platonici che rispettano (a) e (b): tetraedro, cubo, dodecaedro.

Fra il numero di Vertici, Spigoli, Facce di un poliedro vale la formula di Euler $V - S + F = 2$. La condizione (b) implica $3V = 2S$ e i tre valori dipendono da uno solo, cioè dato *F* si ha

[1] $V = 2F - 4, S = 3F - 6$.

Ad ogni valore di *F* corrisponde un gruppo di ***P*** diversi, disegnati in fig. 1 per $F = 4,5,6,7$.



Tutti i ***P*** si possono ottenere a partire dal tetraedro con l'aggiunta di uno spigolo che divide una delle facce senza passare dai vertici; questa operazione aggiunge una faccia. P.es. $5.1 \to 6.1 \to 7.1$ si ha dimezzando un quadrato. Così $4.1 \to 5.1 \to 6.2 \to 7.3, 7.4$ con l'aggiunta di uno spigolo fra due lati adiacenti di una faccia (che equivale a togliere un tetraedro da un vertice).

Dato un ***P*** con le facce numerate da 1 a *F*, indicando con ***A*** il primo giocatore e con ***B*** il secondo, una partita, <u>se ***A*** e ***B*** giocano in modo ottimale</u>, è data dalla sequenza di mosse (f_k è la *k*-esima faccia toccata)

[2] $\boldsymbol{s} = (f_1, f_2, f_3, \dots f_m)$, dove l'ultima mossa f_m <u>produce tre facce con un vertice comune</u>.

Indico con

- <u>adiacenti</u> due facce di ***P*** con uno spigolo comune
- <u>libera</u> una f_k <u>non adiacente</u> a nessuna delle *f* precedenti nella sequenza [2].

Per la natura del problema

i. $f_1, f_2, f_3, \dots f_{m-2}$ sono facce <u>libere</u>

ii. f_{m-1} <u>non è libera</u>

- infatti la prima *f* non libera produce due facce adiacenti e la successiva ne produce tre (basta scegliere la terza adiacente alle prime due)

iii. vince ***A*** se *m* dispari, ***B*** se *m* pari (i giocatori si alternano e vince chi gioca f_m)

iv. ogni giocatore deve, finché possibile, scegliere facce libere

- se un giocatore non può farlo, vince l'avversario alla mossa successiva

v. se ***A*** e ***B*** giocano in modo ottimale il risultato dipende solo dalla prima mossa f_1

- la scelta iniziale, se le mosse di ognuno sono ottimali, determina il risultato.

Nei ***P*** di fig. 1, dispone di una strategia vincente il giocatore

[3] $\boxed{\boldsymbol{A} \text{ nei casi } 4.1, 5.1, 6.2, 7.3, 7.4, \boldsymbol{B} \text{ nei casi } 6.1, 7.1, 7.2}$.

Ho verificato anche i ***P*** per $F = 8$ (sono 8 in tutto) e risultano tutti di tipo ***B***.

Un caso a parte sono i *prismi* come 5.1, 6.1, 7.1. Ho trovato che per tutti i prismi con *F* da 8 a 15 si ha

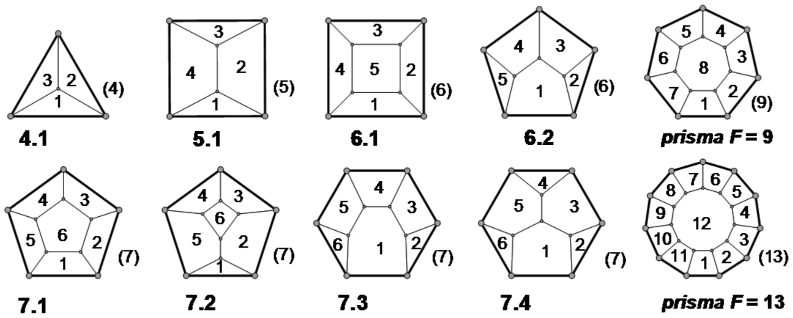
[4] $\boxed{\text{sono } \boldsymbol{A} \text{ solo i casi } F = 9{,}13}$ – non so se per $F > 15$ ce ne sono altri.

Infine, per curiosità, nel dodecaedro platonico vince ***B***.

Bastano questi casi per vedere che i ***P*** hanno un comportamento non uniforme, e non esiste in generale una strategia per uno dei due giocatori.

dimostrazioni

Per numerare in modo chiaro le facce dei ***P*** e verificare quelle adiacenti ho usato la rappresentazione piana di fig. 2, dove, scelta una faccia, si proiettano su di essa le altre. Il contorno della figura rappresenta la faccia nascosta.



2

I risultati [3] si ottengono da queste figure

- costruendo la sequenza ***s*** e verificando ad ogni passo la presenza di facce libere

- ogni f_k toglie dalle facce libere tutte le sue adiacenti

- le facce rimase libere dopo ogni passo sono elencate con $\{n, n', ...\}$

- le f_k sono in grassetto se giocate da ***A***

- *x*, *y* indicano le facce finali f_{m-1}, f_m quando non ci sono più facce libere

- il n° totale di mosse dispari o pari decide se vince ***A*** o ***B***.

In dettaglio

4.1 (tetraedro): tutte le *F* sono adiacenti fra loro ed equivalenti $\boldsymbol{s} = 1, x, y$: vince ***A***

5.1: (il 3-prisma) f_1 non può essere 1 altrimenti $\boldsymbol{s} = 1\{3\} \Rightarrow 1, 3, x, y$: ***B***

- quindi $\boldsymbol{s} = 2, x, y$: ***A***

6.1 (cubo o 4-prisma): le facce 1,2,3,4 sono equivalenti $\boldsymbol{s} = 1\{3\} \rightarrow 1, 3, x, y$ *opp.* $\boldsymbol{s} = 5\{6\} \rightarrow 5, 6, x, y$: ***B***

6.2: $\boldsymbol{s}=1,x,y\ :\boldsymbol{A}$

7.1 (il 5-prisma): le facce 1,2,3,4,5 sono equivalenti $\boldsymbol{s}=1\{3,4\}\to 1,3,x,y\ :\boldsymbol{B}$

7.2: le facce (2,5), (3,4) sono equivalenti, le alternative sono

$\boldsymbol{s}=1\{3,4,6\}\to 1,3,x,y\ :\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{s}=2\{4\}\to 2,4,x,y\ :\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{s}=3\{1,5\}\to 3,1,x,y\ :\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{s}=6\{1,7\}\to 6,1,x,y\ :\boldsymbol{B}$

- per qualsiasi mossa iniziale di ***A*** vince ***B***

7.3: $\boldsymbol{s}=1,x,y\ :\boldsymbol{A}$

7.4: $\boldsymbol{s}=7,x,y\ :\boldsymbol{A}$.

Risultati [4] – per tutti i prismi vale

- se f_1 è una delle basi, f_2 (l'unica libera) è l'altra base, si chiude in 4 mosse e vince ***B***

- ***A*** può vincere solo se f_1 è uno degli $F-2$ lati del prisma, equivalenti fra di loro

- f_1 toglie tre facce libere e l'anello dei lati diventa un blocco di $F-5$ facce libere.

- proseguendo il blocco si può anche spezzare in blocchi separati, ma ogni mossa può togliere 2 facce libere (se al bordo di un blocco) oppure tre facce libere (all'interno di un blocco).

- questo ricorda in qualche modo RM218 2.1 *Un gioco veloce*.

Con le notazioni precedenti (v. fig. 2)

- prisma $F=9$: con $f_1=1$ si ha $\boldsymbol{s}=1\{3,4,5,6\}$

- le mosse ***B*** successive possono essere (per simmetria) 3,4 cioè

$\boldsymbol{s}=1,3\{5,6\}\to 1,3,5,x,y\ :\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{s}=1,4\{6\}\to 1,4,6,x,y\ :\boldsymbol{A}$

- prisma $F=13$: con $f_1=1$ si ha $\boldsymbol{s}=1\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$

- le mosse ***B*** successive possono essere (per simmetria) 3,4,5,6 cioè

$\boldsymbol{s}=1,3\{5,6,7,8,9,10\}\to 1,3,5\{7,8,9,10\}\to 1,3,5,7\{9,10\}\to 1,3,5,7,9,x,y\ :\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{s}=1,4\{6,7,8,9,10\}\to 1,4,8\{6,10\}\to 1,4,8,6\{10\}\to 1,4,8,6,10,x,y\ :\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{s}=1,5\{3,7,8,9,10\}\to 1,5,8\{3,10\}\to 1,5,8,3\{10\}\to 1,5,8,3,10,x,y\ :\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{s}=1,6\{3,4,8,9,10\}\to 1,6,8\{3,10\}\to 1,6,8,3\{10\}\to 1,6,8,3,10,x,y\ :\boldsymbol{A}$

Notato che sia ***Valter*** sia ***trentatre*** sono partiti dalla stessa formula? Incredibile ma vero c'era anche un commento di ***trentatre*** alla propria soluzione:

> Non so niente di teoria dei giochi e non mi piacciono i problemi su "chi vince e chi perde" (la condizione migliore per non risolvere il problema). Ma l'aspetto geometrico è carino, e ci provo lo stesso.

Che ne dite di questo tentativo? Non ci pensate troppo a lungo, le soluzioni del secondo problema incombono.

4.2.2 Allargare l'aiuola

Per una serie di motivi la parola "aiuola" prende presto posto tra le conoscenze dei bambini fin dalla tenera età. Cominciando dal fatto che la versione plurale contiene tutte le vocali, e continuando con i primi problemini di geometria, dove aiuole e appezzamenti terreni hanno forme diverse e parti da calcolare. Non stupisce che il Capo non scordi mai di ricordare questi oggetti magici:

> *Abbiamo un'aiuola perfettamente circolare di centro O. Volendo espanderla (ma non troppo), l'idea è di tirare una corda AB del cerchio "aiuolico" e, tracciato il raggio*

perpendicolare alla corda, centrando nel punto di intersezione tra raggio e corda (sia esso D, giusto per essere fantasiosi nei nomi) tracciamo l'arco di cerchio da A a B (quello esterno al cerchio: stiamo allargando l'aiuola). Prolunghiamo il raggio passante per D e sia C l'incrocio con il nostro arco di cerchio.

La richiesta è che la distanza OC sia la massima possibile, quindi occorre trovare AB tale che venga massimizzata questa distanza. Quale deve essere AB per massimizzare questa distanza? Come varia l'area aggiunta in funzione della scelta di AB?

Cominciamo con ***Emanuele***:

Andiamo a incominciare con le definizioni:

AB= lunghezza della corda A-B da applicare all'aiuola su cui verrà costruito il semicerchio di allargamento

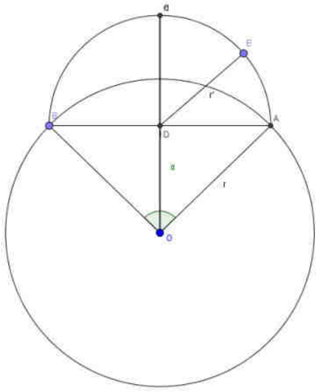
OD= lunghezza segmento tra centro dell'aiuola e corda il punto di incontro è D

OC= lunghezza segmento tra il centro dell'aiuola e il punto di incontro C del semicerchio di allargamento con il prolungamento del segmento OD (verso D)

r = raggio aiuola

r'= raggio del semicerchio di allargamento

α = angolo al centro della corda AB tesa nell'aiuola



Guardando la costruzione possiamo scrivere agevolmente:

OD = r*cos(α/2)

AB = 2*r*sin(α/2)

r'= AB/2

quindi:

r'= r*sin(α/2)

Sempre dal disegno:

OC = r' + OD

OC = r*sin(α/2) + r*cos(α/2)

OC = r(sin(α/2) + cos(α/2))

Definisco la funzione f(α) il cui valore dipende da α, tale funzione non sarà altro che il valore di OC in funzione di α:

f(α) = r(sin(α/2) + cos(α/2))

Periodo di f(α): togliendo la costante r possiamo calcolare il periodo di sin(α/2) + cos(α/2):

periodo di sin(α/2) = T1 = 2*π/(1/2) = 4*π

periodo di cos(α/2) = T2 = 2*π/(1/2) = 4*π

mcm(4, 4) = 4

Quindi:

periodo di $f(\alpha) = T = 4*\pi$

Ora mi calcolo la derivata di $f(\alpha)$, in modo da cercare i minimi e i massimi all'interno dei valori possibili (dominio) di $\alpha = \{0..\pi\}$

$f'(\alpha) = r(\cos(\alpha/2)/2 - \sin(\alpha/2)/2)$

Ricerca dei massimi e dei minimi:

$f'(\alpha) = 0$

$r(\cos(\alpha/2)/2 - \sin(\alpha/2)/2) = 0$

r è sempre positivo e posso semplificare moltiplicando per 2 a destra e sinistra:

$\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2) = 0$

$\cos(\alpha/2) = \sin(\alpha/2)$

La cosa è vera per il valore di:

$\alpha/2 = \pi/4 \Rightarrow \alpha = \pi/2 + 2k\pi$ (k intero)

quindi i valori che mi interessano saranno per k=0 e k=1, in quanto altri valori "sforano" il dominio che mi sono imposto:

$\alpha 1 = \pi/2$

$\alpha 2 = \pi/2 + 2*\pi = (5/2)*\pi$

Ora per capire se siano di massimo o di minimo mi calcolo la derivata seconda di $f(\alpha)$, se nella soluzione trovata il valore è negativo, vuol dire che è un punto di massimo, se positivo un punto di minimo:

$f''(\alpha) = r(-\sin(\alpha/2)/4 - \cos(\alpha/2)/4)$

$\alpha=\alpha 1 \Rightarrow f''(\alpha) = (r/4)*(-\sin(\pi/4)-\cos(\pi/4)) = (r/4)*(-\mathrm{sqrt}(2)/2-\mathrm{sqrt}(2)/2)= -(r/4)*\mathrm{sqrt}(2)$ ==> punto di massimo

$\alpha=\alpha 2 \Rightarrow f''(\alpha) = (r/4)*(-\sin(5\pi/4)-\cos(5\pi/4)) = (r/4)*(\mathrm{sqrt}(2)/2+\mathrm{sqrt}(2)/2)= (r/4)*\mathrm{sqrt}(2)$ ==> punto di minimo

quindi con $\alpha = \pi/2$ abbiamo che OC raggiunge il suo massimo.

Quindi proseguendo per calcolarci la lunghezza della corda:

$AB=2*r*\sin(\alpha/2) = 2*r*\mathrm{sqrt}(2)/2 = r*\mathrm{sqrt}(2) \sim 1{,}41*r$

Ora che ho risolto la parte più facile (banale per chi è veramente del mestiere) cercherò di cimentarmi nel quesito da voi posto, come varia l'area aggiunta in funzione di AB ?

Innanzitutto devo trovare l'area del segmento circolare (fantasiosamente lo chiamo Q) delimitato dalla corda e dall'arco superiore (nella figura) dell'aiuola, la quale è la differenza di area del settore circolare (S) dell'aiuola il cui angolo è α e il triangolo isoscele (T) delimitato dalla corda e i due raggi che ne congiungono le estremità con il centro dell'aiuola, quindi:

Poniamo $ß = \alpha/2$

$T=(r*\sin(ß) *2* r*\cos(ß))/2 = r^2*\sin(ß)*\cos(ß)$

$Q=(2*ß*r^2)/2 = ß*r^2$

$S=Q-T \Rightarrow ß*r^2 - r^2*\sin(ß)*\cos(ß)$

Ora per calcolare l'area M dello spicchio di luna (non trovate anche voi che assomigli un po' all'effige sulla bandiera araba ?) che è l'"Aggiunta" che verrà fatta all'aiuola, basterà sottrarre l'Area S trovata all'area del semicerchio (A) di raggio r':

$A=(AB/2)^2*\pi/2 = \pi*r^2*\sin(ß)^2$

$M=A-S=\pi/2*r^2*\sin(ß)^2-ß*r^2 + r^2*\sin(ß)*\cos(ß)=r^2*(\pi/2*\sin(ß)^2-ß + \sin(ß)*\cos(ß))$

Possiamo scrivere la funzione M(ß) la quale esprime l'area aggiunta in funzione dell'angolo ß (e quindi α), sì lo so... avevate chiesto in funzione di AB ma mi venivano formule troppo brutte con cotagenti e arcoseni, mi sono spaventato, quindi spero apprezzerete lo sforzo lo stesso 8):

M(ß) = r^2*(π/2*sin(ß)^2–ß + sin(ß)*cos(ß)) come prima mi calcolo M'(ß) per trovare i massimi e i minimi (la faccio corta):

M'(ß) = r^2*(2*π/2*sin(ß)*cos(ß) – 1 + cos(ß)*cos(ß) – sin(ß)*sin(ß))

M'(ß) = r^2*(π*sin(ß)*cos(ß) – 1 + cos(ß)^2–sin(ß)^2) aggiunto e tolgo sin(ß)^2:

M'(ß) = r^2*(π*sin(ß)*cos(ß) – 1 + cos(ß)^2–sin(ß)^2+sin(ß)^2–sin(ß)^2)

cos(ß)^2+sin(ß)^2=1

quindi:

M'(ß) = r^2*(π*sin(ß)*cos(ß) – 2*sin(ß)^2)

M'(ß) = r^2*sin(ß)(π*cos(ß) – 2*sin(ß))

ora poniamo:

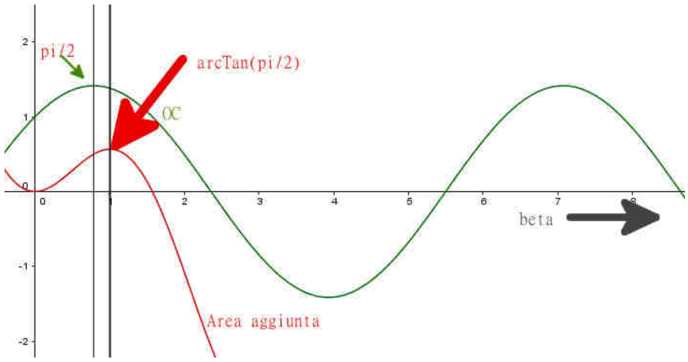
M'(ß) = 0, considerando che ß può da 0 a π/2 abbiamo uno zero banale per ß = 0 quello che ci interessa di più è quando:

π*cos(ß)–2*sin(ß) = 0 il che implica che π*cos(ß)=2*sin(ß) cioè:

π/2=tan(ß) => ß = atan(π/2) =~ 1.00 radianti => α =~2.00 radianti:

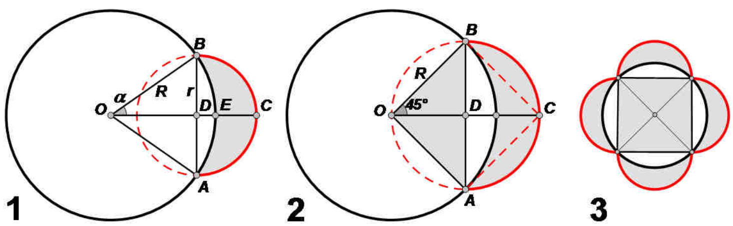
AB = r*1.68

con OC =~ 1.38



Alla fine per trovare il massimo OC bisogna moltiplicare il raggio dell'aiuola * 1,41 per avere la corda AB con cui ottenere il massimo OC possibile, ma siccome 1.41 è un numero "strano" e per di più risultato di un troncamento, potete sempre dire alle vostre dame di prendere il raggio dell'aiuola ed aggiungere altri 4/10 dello stesso per onorare la vostra buona volontà di completare l'opera di allargamento.

Complimenti al nostro ***Emanuele***, che ha anche preparato la spiegazione per le signore. Vorremmo ora aggiungere la bella soluzione di ***Mr. Caesar***, ma ci è arrivata in formato non editabile, e con i nostri ritardi non è stato possibile copiarla. Sarà per la prossima volta, ci consoliamo con la soluzione di ***trentatre***:.



In fig. 1 la corda *AB* in posizione arbitraria con il rapporto dei raggi $r / R = \sin\alpha$. La distanza *OC* è

$OC = OD + DC = OD + DB = R(\cos\alpha + \sin\alpha)$, che si può scrivere

[1] $OC = \sqrt{2}R\sin(\alpha + 45°)$

- e non occorrono le derivate per vedere che il massimo si ha per $\alpha = 45°$.

Il risultato in fig. 2 è la *lunula di Ippocrate* (la prima e più semplice delle 5 lunule quadrabili); è facile dimostrare che le aree in grigio sono uguali cioè, con $R=1$, l'area della lunula è 1/2.

Naturalmente l'aiuola si può estendere anche nelle altre direzioni (fig. 3).

Per il secondo quesito riparto da fig. 1; con $R=1, r=\sin\alpha, \alpha$ *in radianti*, l'area S della lunula è la differenza fra le aree del semicerchio *ABC* e del segmento circolare *ABE*, cioè $S = S_1 - S_2$ con $S_1 = \pi/2 \cdot r^2 = \pi/2 \cdot \sin^2\alpha$, $S_2 = (2\alpha - \sin 2\alpha)/2 = \alpha - \sin\alpha\cos\alpha$, da cui

[2] $\boxed{S = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \pi/2 \cdot \sin^2\alpha - \alpha}$

- gli estremi di S si ottengono annullando la derivata, cioè $S' = \sin\alpha(\pi\cos\alpha - 2\sin\alpha) = 0$

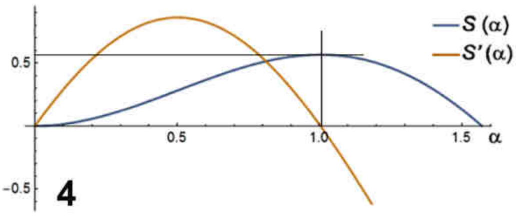
- a parte $\alpha = 0$ (dove la lunula è nulla) il massimo di S si ha con

[3] $\boxed{\tan\alpha = \pi/2 \rightarrow \alpha = \arctan(\pi/2) = 1^{rad}.00389 \equiv 57°.51836}$

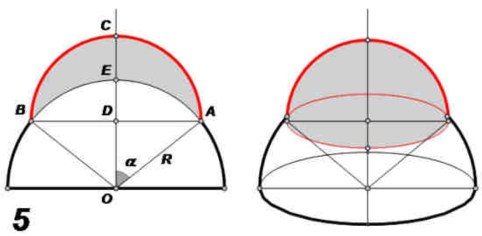
- sostituendo in [2] con $\sin\alpha = \tan\alpha / \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \pi/\sqrt{4+\pi^2}$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{4+\pi^2}$

[4] $\boxed{S_{max} = \pi/2 - \alpha = \pi/2 - \arctan(\pi/2) = 0.56691}$.

In fig. 4 il grafico di S, S'.



4



5

Poiché $\alpha = 57°.51836 < 60°$ si può ampliare l'aiuola come in fig. 3 ma solo su tre lati.

Estendo il secondo problema a tre dimensioni: data una semisfera (diciamo una serra anziché una aiuola) allarghiamola nello stesso modo (fig. 5). Con $R=1$, il volume V dell'allargamento (in grigio) è la differenza fra i volumi della semisfera *ABC* e della calotta sferica *ABE*, cioè $V = V_1 - V_2$ con $V_1 = 2\pi/3 \cdot \sin^3\alpha$, $V_2 = \pi/3 \cdot h^2(3-h)$, dove $h = 1-\cos\alpha$: altezza della calotta, da cui

[5] $\boxed{V = \pi/3 \cdot (2\sin^3\alpha - \cos^3\alpha + 3\cos\alpha - 2)}$

- derivando ed uguagliando a zero si ha $V' = \pi \cdot \sin^2\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$ cioè

[6] $\boxed{\tan\alpha = 2 \rightarrow \alpha = \arctan(2) = 1^{rad}.10715 \equiv 63°.43495}$

- sostituendo in [5] con $\sin\alpha = \tan\alpha / \sqrt{1+\tan^2\alpha} = 2/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$

[7] $\boxed{V_{\max} = 2\pi(1/\sqrt{5} - 1/3) = 0.71553}$.

Completando la sfera di fig. 5 si può aggiungere, senza intersezioni, solo un allargamento. Infatti dividendo la superficie della sfera in 4 triangoli sferici secondo i vertici di un tetraedro, ognuno di questi può ospitare solo un cerchio con angolo al centro di $54°.74 < 63°.43$.

Siete convinti? Speriamo di no, perché abbiamo altro materiale, per esempio la versione di ***Valter***:

Indico con:

- "R" il raggio del cerchio "aiuolico"
- "r" il raggio AD (o BD) dell'arco di cerchio costruito sulla corda (per costruzione direi che è un semicerchio).

Eseguo i calcoli disponendo le figure su coordinate cartesiane con:

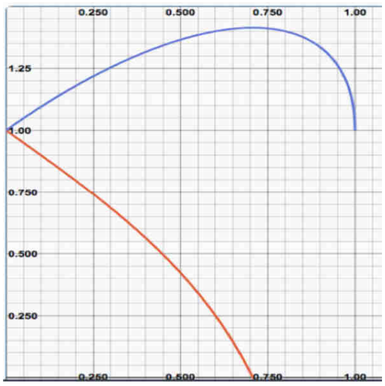
- R = 1
- Il centro del cerchio "aiuolico" O in coordinate (x,y) = (0,0).

Si ha quindi:

- $1 = x^2 + y^2 \rightarrow y = (1 - x^2)^{½}$
- $OC = x + y \rightarrow OC = x + (1 - x^2)^{½}$.

Devo quindi massimizzare OC cioè $f(x) = x + (1 - x^2)^{½}$.

Ne calcolo la derivata: $f'(x) = 1 - x/(1 - x^2)^{½}$.



Per trovare il punto di massimo trovo x per cui f'(x) = 0 (a seguire i passaggi "tagliando un po' per i prati …"):

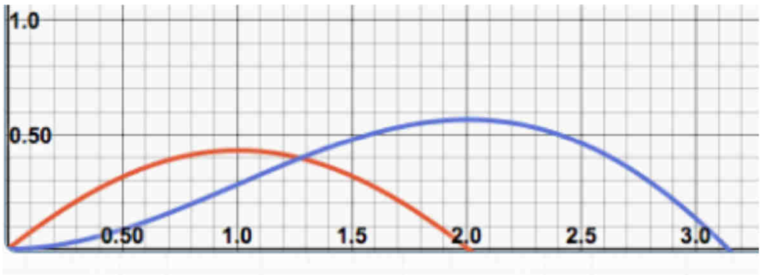
- $0 = 1 - x/(1 - x^2)^{½}$
- $x = (1 - x^2)^{½}$
- $x^2 = 1/2$
- $x = (1/2)^{½}$.

Quindi:

- $y = (1/2)^{½}$ (basta sostituire $x = (1/2)^{½}$ in $y = (1 - x^2)^{½}$)
- le coordinate (x, y) di D sono entrambe $1/2^{½}$
- Lunghezza $OC = x + y = 2/2^{½} = 2^{½}$.

Mi conforta che sia per x = 0 che per x = 1 f(x), cioè OC, dia 1 come deve essere (nel primo caso il semicerchio coincide con quello "aiuolico" nel secondo con il punto D).

Dal grafico di f(x) e f'(x) si vede come f(x) cresca sino a che f'(x) = 0 per poi decrescere (in blue f(x) e in rosso la sua derivata):



Come vedete ci sono moltissimi modi per scrivere lo stesso numero. Adesso siamo quasi arrivati al fondo, ecco BR1:

> Torno a voi dopo lungo silenzio (però vi leggevo sempre, neh, e qualcuno dei vari quesiti l'avevo pure affrontato… Ed avrei anche qualche osservazione su alcuni di essi…).
>
> Ma tant'è; veniamo al "*Brufolo Maximo*": dalle istruzioni del quesito, il disegnino da cui partire dovrebbe essere quello in **Figura 1** qui sotto, ove è stato instaurato un conveniente sistema di assi cartesiani centrati nell'origine del "*cerchio aiuolico primigenio Blu*":

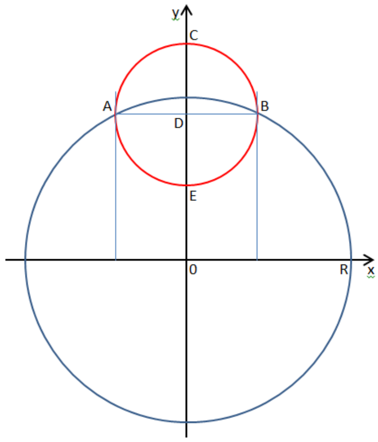


Figura 1: Lo scenario del "*Brufolo Maximo*"

> Diciamo che sia **R** il raggio del "*cerchio aiuolico primigenio Blu*"; ora, qui trasgredisco appena un po' rispetto alle dogmatiche prescrizioni del quesito. Mi scelgo arbitrariamente come variabile l'ordinata $\mathbf{d_y}$ del punto **D** anziché la "*distanza **A**-**B***"; ciò detto dovrà essere, per mantenere coerenza logica:

$$0 \le d_y \le R$$

> Quindi, il "*cerchio aiuolico primigenio Blu*" ha equazione:

$$C_B \rightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

> La retta passante per **A** e **B** ha poi equazione:

$$y = d_y$$

> Per trovare le coordinate dei punti **A** e **B** occorre cercare le intersezioni fra il cerchio di cui alla 2), e la retta di cui alla 3):

$$4)\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = d_y \end{cases}$$

> Dalle 4) si ricava:

$$5)\begin{cases} A\left(-\sqrt{R^2 - d_y^2}, d_y\right) \\ B\left(\sqrt{R^2 - d_y^2}, d_y\right) \end{cases}$$

> Il cerchio rosso $\mathbf{C_R}$ passa per **A** e **B**, ed ha centro in **D**; con qualche calcolo si perviene alla relativa equazione:

$$6) C_R \to x^2 + y^2 - 2d_y y + \left(2d_y^2 - R^2\right) = 0$$

Per trovare le intersezioni di **C_R** con l'asse **y**, basta imporre **x = 0** nella 6); si ottiene quindi:

$$7) y_{E,C} = d_y \pm \sqrt{R^2 - d_y^2}$$

Ci interessa solo il segno positivo nella 7), quando **C_R** interseca l'asse **y** in **C** "*al di fuori*" del "*cerchio aiuolico primigenio Blu*":

$$8) y_C = d_y + \sqrt{R^2 - d_y^2}$$

Ora, per rispondere alla prima parte del quesito ("*la loro richiesta è che la distanza **OC** sia la massima possibile*") occorre massimizzare la 8), cioè trovare il valore di **d_y** che annulla la derivata della 8):

$$9) \frac{d}{d(d_y)} y_c = \frac{d}{d(d_y)}\left[d_y + \sqrt{R^2 - d_y^2}\right] = 0$$

Dalla 9) si ottiene:

$$10) d_{y_{1,2}} = \pm R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La 10) fornisce due soluzioni; quella positiva rappresenta il "*Brufolo*" così come illustrato in **Figura 1**, la negativa è relativa ad un altro "*Brufolo*", da immaginare simmetricamente nella metà inferiore del "*cerchio aiuolico primigenio Blu*".

In entrambe i casi, il valore "***AB** tale che venga massimizzata questa distanza*" è, ricordando le 5):

$$11) b_x - a_x = 2\sqrt{R^2 - d_{y_2}^2} = R\sqrt{2}$$

● ● ● ●

E veniamo al secondo quesito; come varia "*l'area aggiunta*", **A_a**? Questa dovrebbe essere data da:

$$\begin{aligned} 12) (Area\ aggiunta) \\ &= (Integrale\ del\ cerchio\ rosso\ fra\ A\ e\ B) \\ &- (Integrale\ del\ cerchio\ blu\ fra\ A\ e\ B) \end{aligned}$$

Cioè, ricordando le 2), 5) e 6), e considerando i soli archi "*superiori*" dei cerchi:

$$13) A_a = \int_{-\sqrt{R^2-d_y^2}}^{\sqrt{R^2-d_y^2}} \left(d_y + \sqrt{R^2 - x^2 - d_y^2}\right) dx - \int_{-\sqrt{R^2-d_y^2}}^{\sqrt{R^2-d_y^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Dopo un po' di calcolucci (qui risparmiati all'"*attento lettore*"), si arriva a:

$$14) A_a = R^2 \left\{ \frac{d_y}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{d_y}{R}\right)^2} + \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{d_y}{R}\right)^2\right] - \sin^{-1}\sqrt{1 - \left(\frac{d_y}{R}\right)^2} \right\}$$

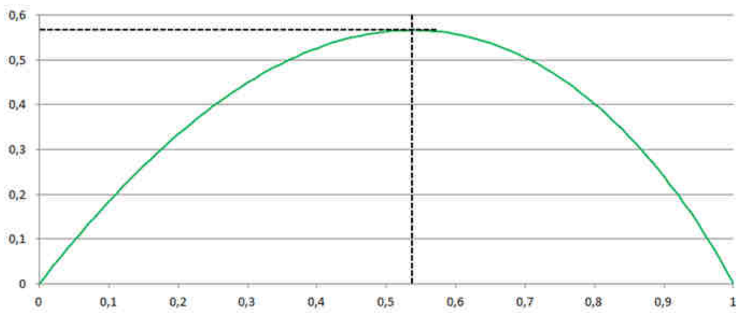


Figura 2: L'"*area aggiunta*" al variare di **d_y/R**

La **Figura 2** qui sopra mostra l'andamento di $\mathbf{A_a}$ al variare di $\mathbf{d_y}$ (avendo posto per comodità **R=1**); si verifica facilmente dalla 14) che:

$$15)\begin{cases} A_a(0) = 0 \\ A_a(R) = 0 \end{cases}$$

Per trovare la posizione del punto di massimo, occorre annullare la derivata della 14) ancora rispetto a $\mathbf{d_y}$, cioè:

$$16)\frac{d}{d(d_y)}A_a = R^2\frac{d}{d(d_y)}\left\{\frac{d_y}{R}\sqrt{1-\left(\frac{d_y}{R}\right)^2}+\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{d_y}{R}\right)^2\right]-\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{d_y}{R}\right)^2}\right\} = 0$$

Anche qui, dopo un po' di calcoli si ottiene:

$$17)d_{y_M} = \frac{2R}{\sqrt{\pi^2+4}} \cong 0{,}537R$$

La "*distanza **AB***" sarà in questo caso:

$$18)b_x - a_x = 2\sqrt{R^2 - d_{y_M}^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{4R^2}{\pi^2+4}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\pi^2+4}} \cong 1{,}687R$$

Poi, la corrispondente "*area aggiunta massima*" sarà, dalle 14) e 18):

$$19)A_{aM} = R^2\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2+4}}+\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{4}{\pi^2+4}\right]-\sin^{-1}\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2+4}}\right\}$$
$$= R^2\left\{\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}\right)\right\} \cong 0{,}567R^2$$

Quanto si è "*guadagnato*" in termini relativi di "*allargamento dell'aiuola*"? Rapportando la 18) all'area $\mathbf{A_{CB}}$ del "*cerchio aiuolico primigenio Blu*" si ha:

$$20)\frac{A_{aM}}{A_{CB}} = \frac{R^2\left\{\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}\right)\right\}}{R^2\pi} \cong 0{,}180$$

Cioè, circa il 18%; più o meno come in **Figura 3** qui sotto:

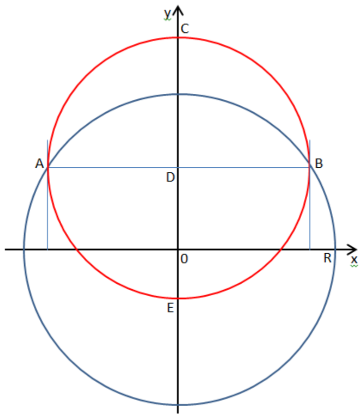


Figura 3: Il "*Brufolo Maximo*"

E per questa volta è tutto.

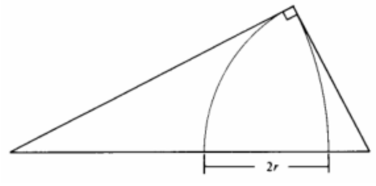
Ma come, non c'erano dei commenti a soluzioni passate? Aspettiamo fiduciosi, ecco. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

In un ipercubo n-dimensionale di lato k state giocando a *Kia* (o a *Kiletto,* ma il termine non ci piace), che sarebbe la versione della *Tria* o del *Filetto* in cui anziché "tre in fila" dovete metterne k. Quante sono le *Kie* possibili?

6. Pagina 46

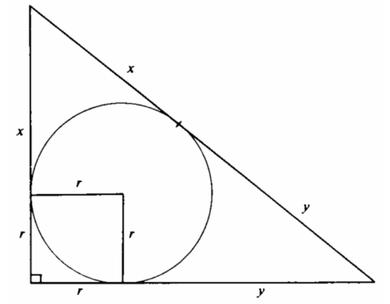
La tesi è mostrata nella figura a fianco.



8 *La tesi.*

Il raggio che congiunge il centro del cerchio inscritto con i punti di contatto sui due cateti proiettano il raggio sui due cateti; essendo i segmenti tra due punti di tangenza ad un cerchio e il loro punto di incrocio uguali tra loro, si ha, con riferimento alla figura successiva:

Somma dei cateti – Ipotenusa = $[(x+r) + (r+y)] - (x+y) = 2r$



9 *Alcune uguaglianze.*

La conclusione segue dalla semplice osservazione che portando i cateti sull'ipotenusa, portiamo un segmento lungo $x+r$ e un segmento lungo $y+r$ su un segmento lungo x+y; la parte che si sovrappone, quindi, deve essere il doppio del raggio del cerchio.

È interessante notare che da questa regola è facile dedurre un altro teorema riferito ai cerchi inscritti: se tracciamo l'altezza *BD* di un triangolo rettangolo retto in *B* con il piede in *D* sull'ipotenusa e tracciamo i tre cerchi inscritti (rispettivamente in *ABC* – il triangolo rettangolo originale – in *ABD* e in *BCD*), allora la somma dei tre raggi dei cerchi inscritti è pari all'altezza *BD* del triangolo originale.

7. Paraphernalia Mathematica

Incredibile. Una cosa che diceva che continua, continua sul serio.

7.1 La legge dei numeri VERAMENTE grandi [2] – Cose grosse

Attenti come siamo alle vostre coronarie, l'altra volta avevamo concluso smorzando il *climax* con la dichiarazione che il prossimo passo sarebbe stato insoddisfacente: bene, eccolo.

Secondo voi, quale dei due seguenti numeri è il più grande?

$$2^{7964117062016867382 2}$$
$$3^{50247984153525417450}$$

Insomma, questi numeri potete rappresentarli solo con un certo *margine di errore*, ad esempio ricordandovi che "duealladieci quasiuguale dieciallatre"; insomma, i valori esatti non sono computabili (e anche piuttosto inutili, visto che 'sti cosi me li sono appena inventati), ma stimabili.

E questi, li definiamo numeri di ***Classe*** **3**.

Se vi ricordate come si usano i logaritmi, partite dai logaritmi di 2 e 3, moltiplicate per gli esponenti, dividete per il logaritmo di 10, separate la caratteristica e usate la mantissa per determinare le prime cifre della risposta; nel nostro caso, con il valido aiuto di una buona calcolatrice, dovreste ottenere (in *mullioni di Knuth:*):

$$5.0760252191 \cdot 10^{2397:4381,2464;6376,2439}$$
$$5.0760252191 \cdot 10^{2397:4381,2464;6376,2439}$$

Il che dovrebbe inquadrare il problema (oltre a farvi ringraziare Knuth): i due numeri sembrano uguali, ma siamo sicuri che non lo sono, visto che il primo è una potenza di 2 (sempre pari) mentre l'ultimo è una potenza di 3 (sempre dispari).

Qui, a dare un nome ci ha provato ***Jonathan Bowers***: vi diciamo subito che la cosa non è una meraviglia: per evitarvi l'uso di un microscopio, esprimiamo le Power Tower[19] per mezzo dell'accento circonflesso e usiamo la "traduzione finlandese di Knuth" ($y \rightarrow u$, divisione in miriadi) per scriverli.

Un *murillione* = 10^3,0003

Un *micrillione* = 10^300,0003

Un *killillione* = 10^{3×{10^3000}+3}

Un *megillione* = 10^{3×{10^300,0000}+3}

Un *gigillione* = 10^{3×{10^30:0000,0000}+3}

…

Un *tedakillione* = 10^{3×10^{3×10^42}+3}

Notate che non solo utilizza i prefissi internazionali, ma li estende anche.

Qui ciascuno fa un po' quello che vuole, quindi qualcuno ha provato anche ad espandere la notazione di Chuquet, per fare qualche piccolo passo in questa zona. Non ci entusiasma, quindi sorvoliamo.

Con il prossimo passo, potreste avere un forte indizio per sospettare una generalizzazione (nel qual caso, avreste ragione).

Si definiscono numeri di ***Classe*** **4** quei numeri maggiori dei numeri di Classe 3 il cui logaritmo è un numero di Classe 3.

E il primo che chiede "In che base?", pulisce la lavagna dopo aver scritto il suddetto numero.

[19] Gran bel nome: starebbe bene dentro un romanzo fantasy, soprattutto visto il nome di alcuni di 'sti cosi.

Se pensate che l'unica attività da queste parti consista nel fumare roba trana e inventarsi dei numeri ragionevolmente ridicoli, siamo pronti a smentirvi: infatti, su un numero di Classe 4 (anzi, due...) a oggi ci stanno lavorando fior di matematici. Un po' di storia.

Gauss aveva stimato che il numero dei primi minori di un dato N fosse:

$$Li(N)=\int_2^\infty \frac{1}{\ln u}du \approx \frac{N}{\ln N - 1}$$

Calcoli del secolo scorso (l'*inizio* del secolo scorso) ci dicono che, almeno sin dalle parti di 10^{22}, questa formula *sovrastima* il valore reale. Il buon ***Littlewood*** ha mostrato che esiste un valore N per cui la funzione comincia a *sottostimare*, e che poi esiste un altro valore N per cui la funzione ricomincia a sovrastimare, e avanti in questo modo; nel 1933, ***Skewes*** ha dimostrato che *se l'Ipotesi di Riemann è vera*, allora il primo N deve essere minore di e^{e^{e^79}}: questo numero è di Classe 4, e la sua migliore stima al momento è:

$$10^{88,,5214:2197;5432,7060:6106,1004;5273,5038.55}$$

Che è un numero[20] di Classe 4; se lo volete scrivere in un modo più portatile, vale circa 10^{10^{10^34}}; la stima del Primo Numero di Skewes è stata di recente molto migliorata[21].

Il fatto che esista un "*Primo* Numero di Skewes" potrebbe farvi venire il dubbio che ne esistano altri: dubbio perfettamente giustificato, infatti *se l'Ipotesi di Riemann è falsa*, allora N deve essere minore di 10^{10^{10^1000}}. Siccome l'Ipotesi di Riemann è una cosa che buona parte dei matematici spera sia vera, su questo nessuno ci ha lavorato molto, e quindi resta in Classe 4.

Non vi definiamo la ***Classe 5***, preferendo passare alla definizione generalizzata: un numero è in ***Classe n*** se è maggiore dei numeri in *Classe n*–1 e se il suo logaritmo è esprimibile come un numero di *Classe n*–1.

...anche se la "Regola del 6" ha una sua bellezza:

Classe	Limite superiore	Cratteristiche
0	6	Contabile "inconsciamente"
1	10^6	Familiarità
2	10^{10^6}	Rappresentabile esattamente
3	10^{10^{10^6}}	X indistinguibile da X+1
4	10^{10^{10^{10^6}}}	X indistinguibile da 2X
5	10^{10^{10^{10^{10^6}}}}	X indistinguibile da X^2
6	10^{10^{10^{10^{10^{10^6}}}}}	log X indistinguibile da {log X}^2
7	10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^6}}}}}}	log{log X} indistinguibile da {log{log X}}^2

...e niente battute sul debito pubblico, please. Posto che la caratteristica della Classe 2 vi lasci qualche dubbio, un veloce calcolo a stima (50 righe, 80 colonne) ci dice che un numero di un milione di cifre "ci sta" in meno di trecento pagine A4 (...e conosciamo almeno un libro che è più interessante).

Esiste anche qualche matto che ha provato a formalizzare le cose:

Un ***Sistema di Rappresentazione*** è un qualsiasi sistema di cifre e simboli utilizzato per esprimere i numeri in un modo standard che permetta di distinguere immediatamente quale sia il maggiore.

A è ***Incomputabilmente Maggiore*** di *B* se *A*>*B* ma questa caratteristica non è immediata quando i due numeri sono espressi nello stesso Sistema di Rappresentazione.

[20] Notate che qui anche la notazione di Knuth va un po' alle corde: ci siamo dovuti inventare un simbolo, ma non siamo mica sicuri che sia giusto...

[21] Giusto per sbrodolare qualche nome: nel 1987 ***Riele*** toglie non "un po' di zeri al fondo", ma *due intere classi*, riducendolo a e^{e^{27/4}} ≈ 8.185×10^{370}, e nel 2005 ***Demichel*** ha trovato che deve esserci un cambio di segno dalle parti di 1.397...×10^{316}.

Due numeri sono detti ***Incomparabili*** (OK, I'm joking: "Non Comparabili") se non è noto un metodo per distinguere quale sia il maggiore dei due.

L'ultima definizione può lasciare qualche dubbio, ma ha una sua ragione d'essere: in funzione delle proprie necessità, ogni matemtico che tratta roba grossa si inventa un sistema di notazione, e un "numero" espresso in un sistema non è detto che sia noto come (o "interessante", o "possibile") passarlo nell'altro, quindi i due numeri non sono confrontabili.

So che non state più nella pelle dalla voglia di vedere un esempio (anzi, due): nel caso non vi interessi, saltate pure al mese prossimo, che poi chiudiamo.

Graham e ***Rothschild*** nel 1971 hanno scritto un articolo[22] in cui si chiedevano quale fosse la dimensione minima di un ipercubo tale che, se le rette che uniscono tutte le coppie di angoli fossero di due colori, dovesse obbligatoriamente esistere almeno un grafo *tutto sullo stesso piano* topologicamente equivalente a un tetraedro formato da rette tutte dello stesso colore[23]. Sarete felici di sapere che questo coso esiste e ha sicuramente meno dimensioni di F(F(F(F(F(F(F(12,3),3),3),3),3),3),3) (sono sette "F", giusto?). E la "funzione F" è definita come:

$$F(m,n)=\begin{cases} 2^n & m=1, n\geqslant 2 \\ 4 & m\geqslant 1, n=2 \\ F\left(m-1, F(m,n-1)\right) & m\geqslant 2, n\geqslant 3 \end{cases}$$

Moser, parlando d'altro (lo vediamo poi: non è una cosina facile come quella di Graham, e si è inventato una notazione impossibile da scrivere), si è trovato a fare i conti (pun intended) con una funzione di questo genere

$$SM(a,n,p)=\begin{cases} a^a & n=1, p=3 \\ SM(a,a,p-1) & n=1, p>3 \\ SM\left(SM(a,1,p), n-1, p\right) & n>1 \end{cases}$$

Pio, da bravo egocentrico, ha definito:

Un Mega = SM(2, 1, 5)

Un Megiston = SM(10, 1, 5)

Un Moser = SM(2, 1, Mega) = SM(2, 1, SM(2, 1, 5))

Allora, per la prossima volta stabilite se è più grande un Graham o un Moser.

Finito? Ma state scherzando? Abbiamo appena cominciato...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[22] Il quale attribuisce a Rothschild un Numero di Erdős pari a 2, almeno.

[23] Il grafo è noto come K_4. Problema da non dormirci la notte, vero?