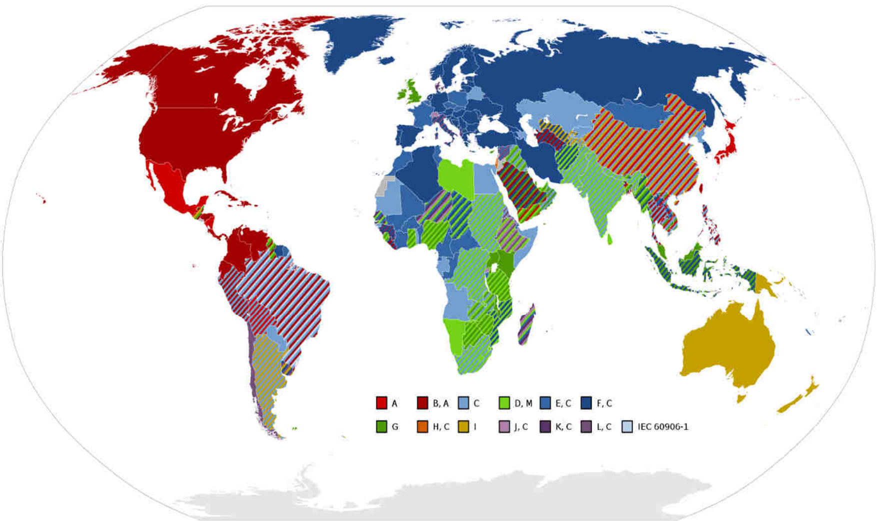
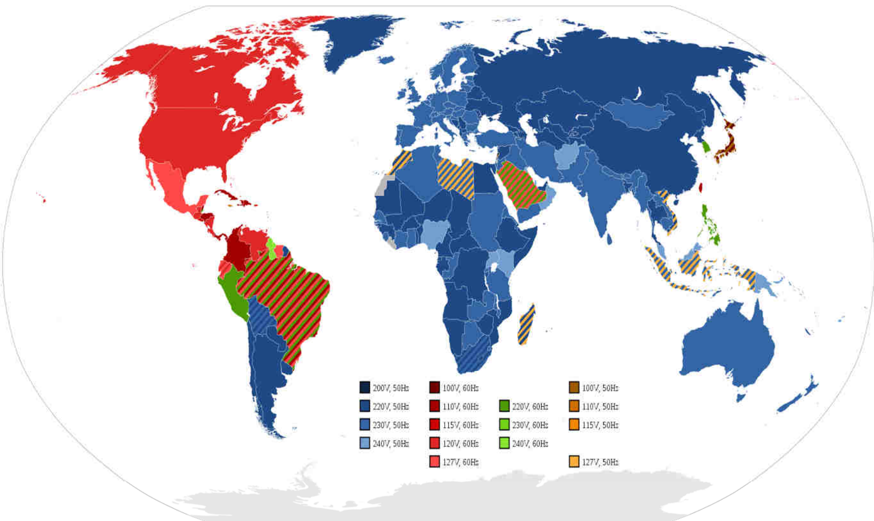
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 220 – Maggio 2017 – Anno Diciannovesimo





Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM218 ha diffuso 3'184 copie e il 07/05/2017 per Google eravamo in 7'830 pagine.

Abbiamo aspettato il numero centocinquanta per festeggiare il centocinquantenario dell'Unità d'Italia. Ci pare giusto, in questo numero, celebrare tutti i voltaggi (e le prese) de Mondo (immagine da Wikipedia).

1. Contro Archimede

""Il quadro di Klee intitolato "Angelus Novus" mostra un angelo che sembra sul punto di allontanarsi da qualcosa che sta guardando fissamente. Ha gli occhi sbarrati, la bocca aperta, le ali spalancate. È così che ci si figura l'Angelo della Storia: con il volto rivolto al passato. Là dove noi vediamo una catena di eventi, lui riconosce una singola catastrofe che accumula disastri su disastri e glieli scaglia davanti. L'angelo vorrebbe rimanere, risvegliare i morti, ricostruire tutto dai pezzi infranti, ma c'è una tempesta che spira dal Paradiso; lo ha preso, impigliandolo nelle sue stesse ali con una tale violenza che l'angelo non può più batterle e volare. La tempesta lo trasporta irresistibilmente verso il futuro, verso cui lui volge la schiena, mentre il cumulo di rovine di fronte a lui continua crescere verso il cielo. La tempesta è quel che noi chiamiamo progresso."

(Walter Benjamin, "Angelus Novus", Einaudi[1] 2014)

Il saggio più famoso di Walter Benjamin è "*L'opera d'arte nell'epoca della sua riproducibilità tecnica*"[2], che si può serenamente definire come un caposaldo della filosofia estetica del XX secolo.

Per quanto sia stato scritto più di ottant'anni fa, è davvero impressionante il senso di modernità che vi ritrova ancora oggi. In parte, per la sua valenza politica; uno dei temi principali che Benjamin tratta nel suo saggio è quello del rischio di una *estetizzazione della politica*, che i regimi totalitari possono mettere in atto grazie alla possibilità – appunto tecnica – di utilizzare forme d'arte al fine di rendere emozionalmente più gradevole la propria immagine pubblica.

Essendo stato scritto da un ebreo tedesco nel 1936, è naturale che il totalitarismo che fa da riferimento al saggio sia quello della Germania nazista, e che la "riproducibilità tecnica" si riduca sostanzialmente alla fotografia e alla cinematografia degli Anni Trenta del Novecento; ciò nondimeno viene abbastanza spontaneo, seppur con il senno di poi, considerare quanto sia stato profetico l'allarme del filosofo e come il rischio paventato sia proliferato oltremisura, fino a diventare la norma anche in forme politiche democratiche.

Politica a parte, Benjamin dibatte a lungo sul concetto di autenticità, che lui tende ad attribuire solo alle opere d'arte che sono, anche fisicamente, uniche: la copia di un quadro non è l'opera originale, e non può trasmettere le medesime emozioni; una foto o un film, invece, non hanno questa distinzione cruciale, per la banale ragione che l'originale non esiste, esistono solo le copie.

Non è il caso di avventurarsi ulteriormente, in questa umile e incompetente sede, su considerazioni di estetica filosofica; ma confessiamo di essere incuriositi da una minuzia del tutto accidentale e minore (anzi proprio minima), in merito alla fruizione delle opere d'arte riprodotte, e ci chiediamo se sia stata presa in considerazione da Benjamin. La risposta è verosimilmente positiva, ma in ogni caso la "minuzia" è certamente più invadente oggi, nel regno della "riproducibilità in Rete", di quanto lo fosse nel 1936.

Per rendere più chiaro il dubbio, invitiamo a considerare due opere: la cosiddetta "madre di Rembrandt", o più correttamente "Vecchia che prega", dell'artista olandese, e di

[1] Il libro pubblicato da Einaudi è un'antologia di scritti di W.B. I traduttori di Einaudi sono indubbiamente più bravi di noi, e perciò è opportuno specificare che il celebre aforisma messo in apertura non è stato tradotto da loro, ma da noi poveri cialtroni di RM (e da una versione inglese, poi…). Se vi ritrovate qualche bestialità, per favore, non prendetevela con loro, ma con noi.

[2] "Das Kunstwerk im Zeitalter seiner technischen Reproduzierbarkeit"

metterla a confronto con le "Nozze di Cana", di Paolo Caliari, più noto con il nome di Paolo Veronese.

1 ***Rembrandt, "Betende alte Frau", Residenzgalerie, Salisburgo (1629-1630)***

Si tratta di due opere molto diverse, quasi sotto ogni punto di vista, nonostante le separi un arco di tempo di neanche settant'anni. Forse l'unico (remoto) aspetto in comune è la matrice religiosa, visto che il soggetto ritratto da Rembrandt è in preghiera e il tema del quadro del Veronese è un episodio del Vangelo. Per il resto le differenze, non solo artistiche e stilistiche, sono abbastanza evidenti: d'altronde i due quadri sono stati scelti esplicitamente per marcare una diversità.

Diversità che, in onore alla specializzazione di questa Prestigiosa Rivista, è una differenza dal sapore matematico; ma appena appena, e della matematica più evidente e banale.

Il ritratto della "*Vecchia che prega*" non è stato pubblicato così grande, rispetto allo standard delle pagine di questa rivista, per poter evitare di scrivere troppe parole e raggiungere ugualmente un numero di pagine accettabile per gli standard dei "compleanni"[3]; il segreto obiettivo era quello di mostrarlo in scala 1:1, insomma a

[3] Quantomeno, "non solo" per quello.

dimensioni reali. Il quadretto, davvero impressionante per la precisione delle pennellate, è infatti un rettangolo di appena 12,2x15,5 centimetri, e quindi grosso modo della grandezza con cui è stampato sulla pagina di quest'articolo[4].

2 ***Paolo Veronese, "Le Nozze di Cana", Louvre, Parigi (1563)***

Le "*Nozze di Cana*" misurano invece 677x944 centimetri, e forse sarebbe il caso di cambiare unità di misura, specialmente se si deve passare a prendere in considerazione l'intera superficie coperta da colore, insomma l'area vera e propria del dipinto. Il quadro del Veronese ha infatti la superficie di un piccolo appartamento: supera i 67 metri quadrati[5]. Per tappezzarlo con copie del quadretto di Rembrandt, bisognerebbe procurarsene ben più di tremila.

La differenza nelle dimensioni è sorprendente: non tanto nel senso delle prestazioni da record verso il minimo o il massimo, perché esistono certo quadri ancora più piccoli di quello di Rembrandt e più grandi di quello del Veronese, ma proprio per la fruizione abituale, che al giorno d'oggi è veicolata innanzitutto tramite "riproduzioni tecniche", che normalmente riproducono in scala.

Il fruitore d'arte poco esperto difficilmente si sofferma, prima di andare di persona al museo, a notare le dimensioni effettive dell'opera che intende ammirare; per quanto non esista quasi un catalogo degno del nome che non riporti coscienziosamente altezza e larghezza delle tele rappresentate, è improbabile che il lettore medio le registri per visualizzare mentalmente l'opera che vede fotografata. Così, rimarrà verosimilmente stupito a Salisburgo, quando si accorge che è necessario fare la fila per ammirare il ritratto della vecchia genitrice di Rembrandt van Rijn, anche se i presenti in sala sono solo tre o quattro; e rischierà invece di sentirsi quasi assalito da Guernica, quando ci finirà di fronte al museo Reina Sofia di Madrid.

Per un quadro o una scultura, le dimensioni fisiche sono cruciali, identitarie. Non sono certo la caratteristica più importante, anzi; ma non possono non essere tenute nella giusta considerazione, così come altri elementi apparentemente accessori, seppur non

[4] Sempre che lo abbiate stampato su carta A4… o (cosa assai più probabile) che lo stiate guardando a video con lo zoom del video fermo al 100%. Tutte precisazioni oggi necessarie, e che il povero Walter Benjamin non si è mai neppure sognato, per sua fortuna.

[5] Se non avete voglia di fare i calcoli esatti, ecco il risultato: 672'938 centimetri quadrati.

insiti nell'opera: quali la luce con cui sono illuminati o, più semplicemente ancora, la posizione in cui sono collocati. L'effetto della Nike di Samotracia sarebbe ben diverso la vittoria acefala e alata se fosse sistemata nell'angolo di una sala, piuttosto che vederla trionfare in cima al maestoso scalone del Louvre.

3 ***Nike di Samotracia – Louvre, Parigi (circa 180 a.C.)***[6]

È in realtà abbastanza curioso come l'esperienza umana oscilli sensibilmente nei confronti dell'importanza delle dimensioni: per restare nel campo dell'arte, non è difficile registrare casi in cui la stessa definizione di dimensione non ha neppure senso. Nonostante questo, l'approssimazione dei linguaggi che siamo riusciti a costruire nel corso dei millenni fa un uso universale di quelle che sono ormai metafore consolidate: una "grande opera" è un capolavoro, un prodotto magistrale e ammirevole, anche se si tratta di una miniatura; mentre se un critico bolla come "minore" l'ultima fatica di un artista, è verosimile che l'artista rimarrà assai deluso del giudizio. "Grande" significa buono, bello, ammirevole; "piccolo" è, se non proprio cattivo e brutto, quanto meno poco importante, trascurabile, dimenticabile. Si tratta certo solo di metafore entrate nell'uso comune, certo; ma devono comunque essere significative, se sono diffuse quasi in tutte le lingue del mondo.

Come sempre, nei significati traslati le metafore rischiano di apparire misteriose, ad occhi ipoteticamente alieni o fintamente ingenui: come fa una sinfonia ad essere "grande"? Cosa rende "gigantesca" la figura di un poeta? In che misura Eleonora Duse può essere chiamata "la più grande attrice teatrale italiana"?

Più ancora delle metafore linguistiche, però, è proprio il rapporto tra le dimensioni fisiche e la comune esperienza cognitiva dell'uomo comune ad essere stupefacente. Non c'è virtualmente alcuna disciplina scientifica che possa esimersi dall'avere una metrica ben definita, e in quasi tutti i casi si tratta di una metrica oggettiva, reale, basata sulla misurazione di grandezze. Ciò nondimeno, la scarsa consapevolezza delle dimensioni fisiche del mondo in cui viviamo da parte dell'uomo comune è tristemente sorprendente. Un astronomo assai difficilmente riesce a trasmettere compiutamente la vastità dell'Universo conosciuto ad un pubblico che non sia stato preventivamente edotto in qualche maniera. Sono più o meno maneggevoli i numeri fino a cento, mille, poi il senso comincia a perdersi ineluttabilmente: è ben chiara a tutti la differenza tra tre euro e trecento, e probabilmente viene sentita come più significativa di quella che c'è tra un milione e un miliardo, ma oltre questi termini, i successivi perdono quasi istantaneamente di significato: così, provare a comunicare le dimensioni dell'Universo è impresa quasi impossibile, a chi ha come riferimento di lunghezza spaziale al più il chilometro, che è in pratica del tutto inutile anche solo per uscire dal sistema solare.

Le dimensioni degli atomi sono parimenti prive di significato: scrivere che l'universo ha dimensioni attorno a 10^{30} centimetri è cosa che non supera la soglia della comprensibilità media, figurarsi come possa essere presa l'informazione che la lunghezza di Planck sia circa pari a 10^{-37} centimetri, dove l'incomprensibile esponente è perfino negativo… la settantina di ordini di grandezza necessari ad una (molto grossolana) definizione della spazialità complessiva è lontanissima dall'essere anche solo immaginata; più

[6] Nel caso non l'abbiate ancora vista, date retta a Benjamin: non fidatevi delle riproduzioni, prenotate un giretto sulla riva destra della Senna.

verosimilmente, la consapevolezza spaziale media non va oltre una decina di potenze di dieci, e la stima rischia di essere ottimistica.

Ancora più curioso e sorprendente, però, è il luogo comune che prevede che il professionista più adatto e carrozzato per muoversi nella selva numerica degli esponenti che disegnano il mondo sia il matematico: come se sussistesse una ineluttabile sorta di attrazione fatale tra la parola "numeri" e "matematico". Non si può dire che sia un luogo comune del tutto ingiustificato, per carità: la quasi totalità dei matematici adora i numeri, e ci sono persino quelli che dedicano l'intera loro vita ad esplorarne i misteri; ma se i numeri sono espressioni di grandezze misurate, l'interesse del matematico è solitamente molto, molto inferiore. Sono i fisici quelli che sono profondamente interessati a misurare il mondo; i matematici, sotto sotto, pensano quasi sempre che del mondo potrebbero fare serenamente a meno.

Anzi, lo sport nazionale dei matematici sembra spesso essere quello di fare a meno dei numeri, e forse questa cosa dovrebbe essere messa più in risalto nell'educazione scolastica, altrimenti i ragazzi delle elementari e delle medie inferiori (e forse anche buona parte di quelli delle superiori) rischiano di rimanere ineluttabilmente invischiati nella supposta identità matematica = numeri. Lo si vede bene quando, dovendo risolvere un problema, corrono innanzitutto a cercare i dati ("Dato un cerchio…" – "Di che raggio?" – "Non importa…" – "Come sarebbe a dire che non importa?") e soprattutto dallo shock inevitabilmente causato dall'introduzione del calcolo letterale[7], dopo tanto sudore apparentemente sprecato sulle tabelline[8].

I matematici adorano le generalizzazioni e aborriscono i calcoli. Specialmente i geometri: adorano le figure coerenti come i cerchi, i quadrati, i triangoli equilateri e tutta la famiglia dei poligoni regolari non tanto per l'estetica immediata delle forme, quanto per quella, più profonda e universale, dell'unicità: nella matematica che generalizza le dimensioni, non esistono infiniti cerchi, ma solo uno: il cerchio, che assurge all'idea platonica di sé stesso. E quelle figure meno pure, quelle che condividono il nome pur non essendo automaticamente tutte simili (e quindi, in ultima analisi, uniche), vengono descritte non da numeri assoluti, ma da rapporti. Rapporti numerici, certo: ma per il geometra è comunque un tentativo di numericidio che si mette in atto: non raccontategli di rettangoli di lati 10 e 4, o 15 e 6, o 75000 e 30000, sono tutti lo stesso rettangolo. Così, un geometra sarà verosimilmente assai meno scandalizzato di quanto avrebbe potuto esserlo Walter Benjamin, se avesse avuto l'occasione di vedere il modo barbaro in cui abbiamo riprodotto i quadri di Rembrandt e di Veronese: anche se il secondo è 3380 volte più grande del primo, egli avrebbe probabilmente notato come più significativa la quasi identità tra i rapporti dei lati, essendo il primo un rettangolo di rapporto 1,27 che non è poi troppo diverso dal valore 1,39 proprio del secondo.

Il rapporto – stavolta in senso più ampio di relazione – tra arte e matematica ha segnato almeno in parte la vita di uno studioso italiano. Se negli annali della storia dell'arte alla

[7] Nel mondo adulto ed extrascolastico, si vede invece di solito al ristorante, quando ci si aspetta che sia "il matematico del gruppo" a farsi carico di dividere il conto totale della pizzeria per il numero dei convitati. Abitudine che, da quando ogni telefonino ha al suo interno la calcolatrice, da normale esibizione di capacità di calcolo si è trasformata in un aberrante "Vediamo chi fa prima, se tu o il telefono…".

[8] Tanti anni fa, nell'ottobre del 2003 (RM57), scrivevamo una nota a piè di pagina che vale la pena riportare per intero:

A tale proposito, l'aneddoto più celebre è forse quello che riguarda una lezione di Ernst Eduard Kummer, uno dei maggiori algebristi tedeschi. Mentre scriveva alla lavagna, gli capitò di dover calcolare 7x9, *e cominciò a mugugnare nel tentativo di ricordare il risultato. Uno studente suggerì "*61*", e Kummer scrisse* 61. *Allora un altro studente protestò, asserendo che* 7 *per* 9 *faceva* 69, *e non* 61. *Kummer si spazientì e osservò: "Per favore, signori! Non possono essere entrambi; o è l'uno o è l'altro*".

Se fosse possibile mettere in atto una rivoluzione scolastica su scala mondiale, l'idea di abbandonare il sistema decimale in favore di quello binario potrebbe essere accolta, soprattutto se si facesse presente a tutti gli studenti che non sarebbe più necessario imparare a memoria le tabelline.

voce "Veronese" si ritrova inevitabilmente il soprannome di Paolo Caliari, in quelli di storia della matematica è ben più probabile ritrovare il cognome[9] di Giuseppe.


4 ***Giuseppe Veronese***

Giuseppe Veronese nasce a Chioggia il 7 maggio 1854, da papà Giovanni Antonio e da mamma Elisabetta Ottavia Duse, cugina della celeberrima Eleonora[10].

Giuseppe, da bambino, aveva le idee abbastanza chiare: gli piaceva disegnare, adorava l'arte pittorica. Vi si dedicò fin dai primi anni con impegno e passione, ma la sua famiglia, seppur dotata di parenti famosi, era ben lontana dal navigare nell'oro. È in qualche modo comprensibile, pertanto, che il padre non si sentisse pronto a sostenere i desideri del figlio, e lo indirizza infatti verso un Istituto Tecnico, ben consapevole, tra l'altro, di non potersi permettere il costo di futuri studi universitari di Giuseppe.

All'Istituto Tecnico di Venezia insegna Pietro Cassani, un matematico di tutto rispetto, interessato alla geometria a più dimensioni. Forse la passione per la pittura, forse l'entusiasmo che il professore gli trasmette nel fargli immaginare molte dimensioni lo rendono uno studente brillante e attento. Paradossalmente, all'esame finale sbaglia proprio la prova di matematica, ma questo non fa dimenticare le sue eccellenti capacità, al punto che il preside dell'Istituto si adopera per fargli trovare subito un buon posto di lavoro.

Giuseppe Veronese si ritrova così, diciottenne appena diplomato, a lavorare a Vienna[11], presso uno studio incaricato di controllare lo stato del Danubio. Il lavoro sembra dargli soddisfazione: riesce anche a coltivare la sua antica passione, tornando a disegnare proprio in occasione dell'esposizione Universale di Vienna del 1873. Ma è anche evidente che sente il suo percorso formativo ancora incompleto se, non ancora ventenne, decide di iscriversi al Politecnico di Zurigo, il celebre ETH[12].

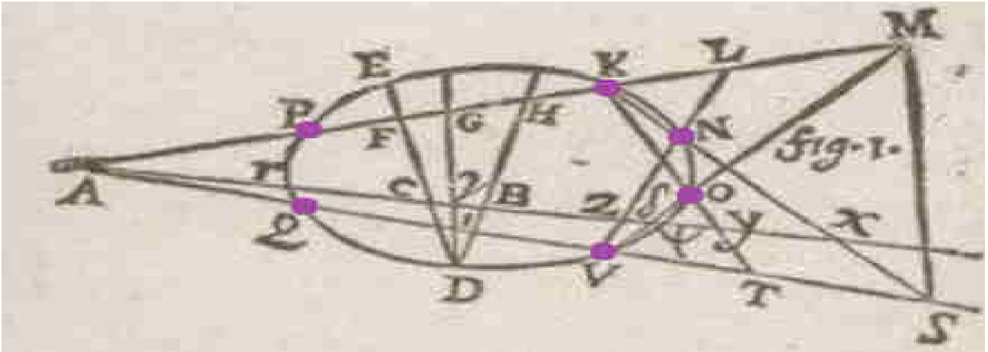
Non che, in un annetto di lavoro, fosse riuscito a risolvere i suoi problemi economici al punto di potersi permettere di pagarsi gli studi in una così prestigiosa università: più semplicemente, ebbe la fortuna di trovare nel conte Niccolò Papadopoli, senatore e numismatico di Venezia, un mecenate che decise di finanziare la sua istruzione.

[9] Non avrete mica creduto che si sia scelto un grande quadro del Veronese per caso, no?

[10] …e non crederete mica che la Duse sia stata citata per pura combinazione, poche righe fa…

[11] Corre l'anno 1872, Giuseppe Veronese è a malapena diciottenne, e soprattutto Venezia è entrata a far parte del regno d'Italia solo sei anni prima, quando l'Austria la cede dopo la Terza Guerra di Indipendenza (quella vinta dall'Italia nonostante vi abbia perso praticamente tutte le battaglie…). Si tenderebbe a pensare che i veneti vedessero come fumo negli occhi l'Austria e la sua capitale, a quel tempo, ma forse non era così, a giudicare dalla facilità di muoversi da parte di un ragazzino appena diplomato; la storia è sempre molto più complicata di come appare ad una lettura frettolosa e distratta. O forse, più semplicemente, già allora c'erano i cervelli in fuga.

[12] Eidgenössische Technische Hochschule: citato molte volte nei compleanni di RM, a dimostrazione del meritato prestigio della grande scuola.



5 ***Hexgrammum mysticum***[13]

Il senatore, del resto, poteva essere soddisfatto delle sue azioni: Giuseppe Veronese mostra di essere adatto agli studi. Appena ventenne pubblica *Teoremi e costruzioni di Geometria Proiettiva*, che è opera in grado di essere notata dai suoi insegnanti. Iscritto inizialmente alla sezione di Meccanica, sull'onda del suo primo lavoro teorico fa il gran salto e passa direttamente alla Sezione di Matematica, continuando ad interessarsi soprattutto di geometria proiettiva.

Comincia anche a lavorare su quello che sarà l'argomento della sua tesi di laurea, l'*Hexgrammum mysticum*[14] di Blaise Pascal[15], e su questo comincia un epistolario con Luigi Cremona, che insegnava a Roma. Sarà proprio quest'ultimo a consigliargli di trasferirsi a Roma per completare il suo ultimo anno di studi: Veronese si laurea infatti all'università La Sapienza, con la tesi preannunciata[16], che l'anno successivo sarà anche pubblicata dall'Accademia dei Lincei. Giuseppe Veronese si sente ormai a tutti gli effetti un geometra: diventa assistente alla cattedra di Geometria Proiettiva, poi inizia percorsi di perfezionamento che lo porteranno prima a Berlino e poi a Lipsia, dove insegna Felix Klein. Pubblica il risultato dei suoi studi[17], e quando torna in Italia vince i concorsi per l'assegnamento delle cattedre sia a Catania che a Padova, dove decide di rimanere[18]. Il resto della sua vita è una ordinaria vita di successo accademico, sociale e politico: Veronese, di umili origini, finirà con lo sposare una baronessa e a diventare senatore del Regno d'Italia per meriti scientifici.

Quel che rende l'opera di Giuseppe Veronese abbastanza peculiare nel panorama della matematica del suo tempo può forse essere meglio compreso se si tiene a mente il suo giovanile e originale interesse per l'arte. Già nel 1880 approccia la geometria a più dimensioni, e pone soprattutto l'accento sulla geometria n-dimensionale *proiettiva*, quasi volesse esplorare le tecniche generalizzate della prospettiva: si dedica con passione alla ricerca di "visualizzazioni", cercando di capire come dovrebbe proiettarsi nell'usuale spazio tridimensionale una superficie anche "semplice" di natura multidimensionale[19].

[13] In tempi come i nostri, oltre alle figure si possono, volendo, avere a disposizione anche dei filmati, decisamente più esplicativi: https://www.youtube.com/watch?v=sR7sXCcgDho

[14] Avete presente il teorema di Pappo? Ecco, uguale, solo con le coniche al posto delle rette.

[15] "I lati di Dio", RM053, Giugno 2003.

[16] *Nuovi teoremi sull'Hexgrammum mysticum (di Pascal).*

[17] *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens*

[18] Virtualmente tutte le notizie biografiche su Giuseppe Veronese sono state proditoriamente sottratte dall'articolo di Paolo Freguglia, pubblicato sul sito Edizione Nazionale Mathematica Italiana del centro Ennio De Giorgi della Scuola Normale Superiore di Pisa: http://mathematica.sns.it/autori/1302/. Di Freguglia vi si può anche trovare "I fondamenti della geometria secondo Giuseppe Veronese" (http://mathematica.sns.it/opere/141/), scritto molto meglio di come potremmo scopiazzarlo noi.

[19] Tanto per darne un'idea: "*La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*" (*Mem. R. Acc. dei Lincei*, (3), 19, (1883-84). Sì, anche questo riferimento lo abbiamo rubato a P. Freguglia.

Si tratta di un approccio in fondo naturale, quasi istintivo: e proprio per questo originale. Certi tipi di indagine venivano portati avanti dai matematici di fine Ottocento essenzialmente per la sola via analitica, senza avanzare significativi tentativi di "visualizzazione": in questo approccio analitico, un lavoro precedente portato avanti da Cayley resta uno dei più famosi.

Il tentativo di Veronese ebbe grande influenza sulla scuola geometrica italiana: tra i suoi allievi più celebri (anche se non necessariamente suoi "seguaci" dal punto di vista delle ricerche affrontate), figurano due tra i nomi più prestigiosi della matematica italiana: Guido Castelnuovo e Tullio Levi-Civita[20].

6 ***Fondamenti di Geometria***

Più in generale, Giuseppe Veronese sembra essere attratto, durante tutta la vita, da ricerche dirette verso territori poco battuti, dove forse poteva lasciar sfogare al meglio la sua immaginazione. Dopo le proiezioni delle superfici n-dimensionali, si dedica a fondare diverse geometrie non-archimedee, ovvero quelle che non rispettano l'Assioma di Archimede: in termini un po' rozzi e approssimati, potremmo definirle come quelle geometrie che rigettano sia gli infiniti che gli infinitesimi. Ricerche che gli valsero l'aspra critica di Giuseppe Peano[21], scandalizzato soprattutto dalla mancanza di rigore che Veronese mostrava nelle sue opere.

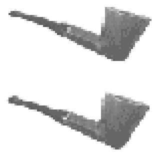
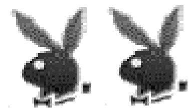
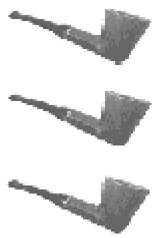
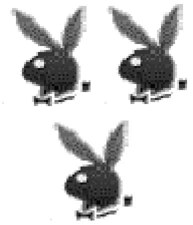
La matematica, da sempre, ha il duro compito di coniugare due aspetti apparentemente distanti: la capacità immaginifica e il rigore dimostrativo. Sono cruciali entrambi, e in Veronese, probabilmente, il secondo cedeva un po' troppo il passo nei confronti della prima. Ma scrisse anche delle bellissime opere di didattica, libri di testo a lungo apprezzati, come ad esempio "*Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare. Lezione per la Scuola di Magistero in Matematica"*.

Forse, con la sua sfrenata immaginazione, riusciva meglio di altri a trasmettere le sue passioni: e anche questa, rigore o meno, è una dote assai preziosa, sia in matematica, sia in ogni altro campo.

[20] Di lui si parla in "Tolleranza Zero", RM098, Marzo 2007.

[21] "Sineddochi", RM067, Agosto 2004.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Allargare l'aiuola			
(Non) Basta con il "Filetto"!			

2.1 (Non) Basta con il "Filetto"!

Ci pare di aver detto almeno tre volte che avevamo trovato il "problema definitivo" sul Filetto (o Tria, o Tic-Tac-Toe, o come vi pare) e, di sicuro, almeno un'altra volta lo abbiamo pensato (ma non detto a nessuno, visto che non avevamo ancora una Prestigiosa Rivista su cui concionare). Bene, adesso la prendiamo un filino più calma e mettiamo il dubitativo "non" davanti. Anche perché il problema ci pare imparentato, ma si tratta di un'impressione nostra.

Rudy e Doc, con la consueta imperizia che li contraddistingue, hanno costruito un poliedro: considerano già una grande vittoria il fatto che il poliedro sia *convesso* e che in ogni vertice si incontrino sempre solo tre facce: impresa dal loro punto di vista non da poco, visto che le facce sono più di cinque; tendono a sorvolare cambiando discorso sul fatto che non hanno assolutamente chiaro quante siano le facce e che il concetto di "regolare" sia bellamente ignorato in tutte le sue forme e declinazioni.

Certi che sia assolutamente inutilizzabile come fermaporta, appurato (hanno ritrovato un vecchio Q&D) che non è utilizzabile per costruire una macchina a moto perpetuo, definito che come decorazione sul tavolino è probabilmente il miglior modo per cacciare gli ospiti, decidono di lanciarsi in un gioco.

Uno di loro sigla una faccia, poi il secondo sigla un'altra faccia (scelta tra quelle libere) e avanti in questo modo; quando (e se) un giocatore riesce ad avere la propria firma sulle tre facce che concorrono in un vertice, ha vinto.

E adesso, arrivano le domande. Supponendo (siamo nel Regno dell'Incredibile) che entrambi giochino in modo assolutamente razionale, un giocatore ha una strategia vincente?

E sin qui, il problema: speriamo siate d'accordo con noi nel definirlo "simile al Filetto", visto che buona parte delle espansioni che ci sono venute in mente vertono su questo punto.

Prima, una generalizzazione che ci risulta raramente affrontata in giochi di questo tipo: e se si giocasse in tre?

Poi, un paio di domande più correlate alla Teoria dei Giochi. Abbiamo detto "...e se...". Ma esiste la patta? E sulla versione *misère*, che ci dite?

Poi, un vago ricordo... Da qualche parte, nei cinque polverosi neuroni dello scrivente, esiste il concetto di un gioco con le stesse regole del filetto ma che viene giocato su un foglio a quadretti "grande" (insomma, non avete un'area 3x3, ma un quadrato NxN); ora, lo scrivente non ricorda di preciso se qui si faccia "punto" quando se ne mettono in fila tre o quattro (mi pare quattro, ma non sono sicuro...), ma il problema è un altro: come va a finire questo gioco se, anziché su un piano, lo si gioca su qualcosa di diverso? Su una sfera? Su un anello di Moebius? Su un toro? Su una bottiglia di Klein? Esistono delle strategie?

Come sempre, da "...e sin qui, il problema...", noi non sappiamo nulla: sono semplici elucubrazioni di (almeno) una mente malata.

2.2 Allargare l'aiuola

Confessiamo sin da subito che i VaDLdRM sono felicissimi che non si sia trovato prima questo problema: conoscendoci, sanno perfettamente che non avremmo resistito al titolarlo con un qualcosa come "Brufolo Maximo" o cose del genere. Avendo comunque noi ormai raggiunto un'età nella quale la presa per i fondelli diventa un esercizio intellettuale (e loro una stazza tale da suonarcele facilmente), cincinnatamente (esiste? Ci riferiamo a Cincinnato) ci ritiriamo in campagna e applichiamo il problema a più innocue aiuole. E no, non parliamo di tiro con l'arco. Scaramanticamente, continuiamo a sperare di praticarlo, anche se Rudy al momento si ritrova un "gomito del tennista" mica da ridere[22].

Bene, abbiamo un'aiuola perfettamente circolare di centro *O*. Volendo espanderla (ma non troppo), l'idea è di tirare una corda *AB* del cerchio "aiuolico" e, tracciato il raggio perpendicolare alla corda, centrando nel punto di intersezione tra raggio e corda (sia esso *D*, giusto per essere fantasiosi nei nomi) tracciamo l'arco di cerchio da *A* a *B* (quello esterno al cerchio: stiamo *allargando* l'aiuola). Giacché ci siamo, prolunghiamo il raggio passante per *D* e sia *C* l'incrocio con il nostro arco di cerchio.

Ora, date le idee grandiose delle signore sulle aiuole (sì, l'idea è loro. As usual), la loro richiesta è che la distanza *OC* sia la massima possibile, quindi ci chiedono di trovare *AB* tale che venga massimizzata questa distanza. Essendo intenzionati a ritardare il lavoro il più possibile, abbiamo improvvisamente dimenticato praticamente tutta la matematica relativa, quindi ci rivolgiamo a voi: quale deve essere *AB* per massimizzare questa distanza?

...e sin qui, come al solito, il problema. Il guaio è che le signore stanno pensando in grande, e si chiedono come si comporti non *OC*, ma *l'area aggiunta*: come varia, questa, in funzione della scelta di *AB*?

Oh, mi raccomando, con calma. Che più tardi arriva la soluzione, meno dobbiamo lavorare[23].

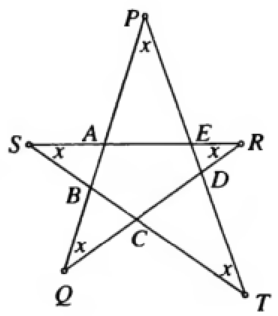
3. Bungee Jumpers

Il perimetro del pentagono stellato PQRST è pari a 1, ossia è:

$$PQ + QR + RS + ST + TP = 1.$$

Noto che i cinque angoli interni del pentagono in P, Q, R, S, T indicati in figura con x sono uguali tra loro, calcolare il perimetro del pentagono convesso ABCDE interno al pentagono stellato.

La soluzione, a "Pagina 46"



[22] Rudy è mancino e il dolore è al braccio destro. Non solo, ma non ha *mai* giocato a tennis, visto che non gli piace.

[23] Ecco, questa potrebbe diventare un'ottima scusa per il ritardo abituale di uscita della rivista...

4. Soluzioni e Note

Maggio!

Finalmente è uscito il nostro nuovo libro, in edicola ed in libreria. L'intero maggio sarà dedicato ad attività promozionali, e abbiamo persino pensato a spettacoli teatrali. Non vi immaginate neppure quanto siamo sfrontati, i miei compari (che sono molto più attraenti di me) compariranno addirittura su schermi televisivi. Trovate strombazzamenti delle attività promozionali sul nostro sito ed ovviamente sulla nostra pagina facebook.

Come ben potete immaginare non ci sono altre notizie che possono superare un tale momento di narcisismo, per cui la sezione di note è qui solo per ricordarvi che non siete obbligati a comprarvi il nostro libro, ma ci farebbe molto piacere se lo faceste.

Ed ora passiamo a voi.

4.1 [218]

4.1.1 Passeggiata in città

Questo problema, ignorato il mese passato, ha trovato la salvezza dal dimenticatoio grazie a uno dei nostri eroi, ***trentatre***. Ma vediamo prima il testo, riportandolo praticamente come era scritto, capirete poi dai riferimenti nella soluzione perché:

> *Nella città in cui ci troviamo solo le piazze hanno un nome e in ogni piazza c'è una statua raffigurante il tizio che dà il nome alla piazza. È una smart city: le vie che congiungono le piazze sono le più brevi possibili.*
>
> *Il nostro giro turistico inizia in Piazza Abel, nella quale ci troviamo, che è congiunta da due vie alle Piazze Bourbaki e Cartesio (che sono congiunte tra di loro da una terza via); sulla via tra Piazza Bourbaki e Piazza Cartesio c'è Piazza Monge, e ci stiamo chiedendo se sia più comodo raggiungerla passando da Piazza Cartesio o da Piazza Bourbaki.*
>
> *La cosa interessante è che tra Piazza Cartesio e Piazza Bourbaki esiste Piazza Diofanto, posizionata in modo tale che "non conviene passare da lì" per andare da Piazza Abel a Piazza Monge: per capirci, se Piazza Diofanto è tra Piazza Cartesio e Piazza Monge, allora sarà conveniente passare da Piazza Bourbaki, e viceversa. Non solo, ma le Piazze Eulero e Fermat giocano lo stesso ruolo di Piazza Monge nei confronti della partenza, rispettivamente, dalle piazze Bourbaki e Cartesio*
>
> *La vostra guida adesso vi fa notare che le vie congiungenti rispettivamente le piazze Abel e Diofanto, le piazze Bourbaki e Eulero e infine le piazze Cartesio e Fermat si incontrano tutte in Piazza Nepero, che è un luogo importante della città (ma non vi spiega il perché, lasciando che lo capiate da soli).*
>
> *Proseguendo la nostra passeggiata, scopriamo che la via (rettilinea) che unisce Piazza Gauss a Piazza Nepero ha nel mezzo una piazza, intitolata a Ipazia; non che questa via sia molto importante, visto che in tutto è lunga 200 metri; la cosa interessante è che la distanza in linea d'aria di Piazza Ipazia dalle vie che uniscono rispettivamente Piazza Abel e Piazza Bourbaki, Piazza Bourbaki e Piazza Cartesio, Piazza Cartesio e Piazza Abel è sempre la stessa, il che la trasforma in un luogo importante della città (e anche qui, la guida si tace: deve essere francese, convinta che tutti sanno tutto della Francia).*
>
> *Se ora ci rechiamo in Piazza Hilbert, troviamo una strada che, proseguendo dritta oltre Piazza Gauss, ci porta in Piazza Ostrogradskj il nostro passo è ragionevolmente regolare, e scopriamo che per andare da Piazza Hilbert a Piazza Gauss impieghiamo il doppio del tempo che per andare da quest'ultima a piazza Ostrogradskj. Notiamo che le vie che uniscono questa piazza alle piazze Abel, Bourbaki e Cartesio sono di ugual lunghezza. Anche se l'abbiamo introdotta con nonchalance, Piazza Hilbert è anch'essa un luogo importante della città.*
>
> *Ma ormai cominciate ad essere stanchi, e state considerando quale distanza vi separa dall'albergo; noto che la via congiungente Piazza Ostrogradskj e Piazza*

Ipazia è lunga 400 metri, che distanza dovrete percorrere per andare da Piazza Hilbert a Piazza Newton?

Bene, diamo immediatamente la parola a ***trentatre***:

Il problema non ha ricevuto soluzioni, penso a causa dei numerosi errori e incongruenze della "ambientazione"; ne indico alcuni con *. Cercando di estrarre dal meta-problema il succo geometrico ho ricavato

Il quartiere di Montpellier è un triangolo Δ, le piazze sono punti, le vie rette fra questi

Abel, Bourbaki, Cartesio = *A*, *B*, *C*: vertici del triangolo

Ostrogradskj = *O*: circocentro

Ipazia = *I*: incentro

Hilbert = *H*: ortocentro

Gauss = *G*: baricentro

**Monge* = *M*: punto di mezzo di *BC* (?)

Diofanto = *D*: punto su *BC* a distanza uguale (percorsa lungo i lati) dal vertice *A*

Eulero = *E*, *Fermat* = *F*: idem per i vertici *B*, *C*

*(quindi *E*, *F* non sono analoghi di *M* ma di *D*)

Nepero = *N*: intersezione di *AD*, *BE*, *CF*.

Ne segue che *D*, *E*, *F* sono i punti di contatto con i lati degli excerchi (e simmetrici, rispetto ai punti di mezzo dei lati, dei punti di contatto dell'incerchio); per definizione *N* è allora il punto di Nagel.

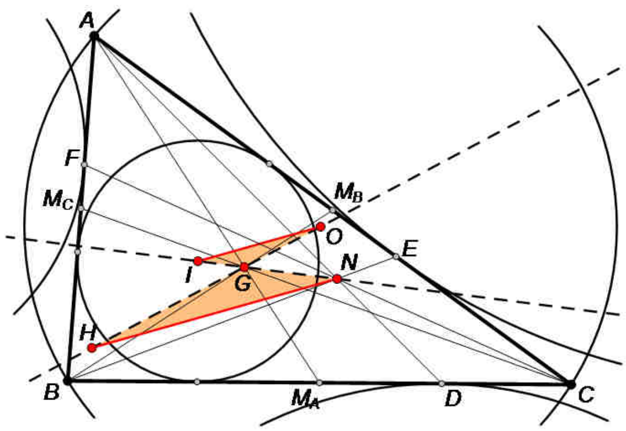
* si dice che in mezzo a *GN* c'è *I*, con $\overline{GN} = 200$ ma questo è falso; infatti *I*, *G*, *N* sono, in ogni triangolo, allineati in questo ordine, con $2 \cdot \overline{IG} = \overline{GN}$; i dati forniti $\overline{IG} = 100$, $\overline{GN} = 200$ sono coerenti ma la geometria no.

È invece vero che *O*, *G*, *H* sono allineati (sulla retta di Euler, che non è l'*Eulero* di prima) con $2 \cdot \overline{OG} = \overline{GH}$.

* alla fine compare un misterioso signor *Newton* (che sia *Nepero*, cioè *Nagel*?)

* la distanza data sopra $\overline{IG} = 100$ è compatibile con $\overline{OI} = 400$ solo per triangoli molto particolari (che escludo).

In figura il risultato, in fondo semplice, e forse corretto.



Per i rapporti citati $2 \cdot \overline{IG} = \overline{GN}$ e $2 \cdot \overline{OG} = \overline{GH}$ i due triangoli in colore sono simili, uno il doppio dell'altro. Da $\overline{OI} = 400$ si ricava $\boxed{\overline{HN} = 800}$.

Come si vede dall'abbondanza degli asterischi, il problema era *chiarissimo*. Andiamo avanti.

4.2 [219]

4.2.1 "*Probabilmente*" non piace ad Alice

Da come il titolo comincia avete già capito che non la tirerò lunga con i commenti. Vediamo il testo del quesito:

> *1. Alice ha tracciato un n-agono regolare.*
>
> *2. Doc sceglie tre vertici (distinti) a caso (distribuzione uniforme tra i restanti dopo la scelta) e traccia il triangolo avente le tre scelte come vertici.*
>
> *3. Rudy si accorge che ci sono esattamente il* 50% *di probabilità che il triangolo sia ottusangolo.*
>
> *La domanda è: quanto vale n?*

Cominciamo con ***Alberto R.***, che è stato velocissimo:

> Generalizziamo.
>
> È dato un N-agono regolare (N>4 per evitare casi banali) ed un triangolo formato da 3 suoi vertici A,B,C scelti a caso. Si chiede la prob che il triangolo sia acutangolo/rettangolo/ottusangolo.
>
> Consideriamo la circonferenza circoscritta all'N-agono e usiamo l'ennesima parte di essa come unità di misure delle lunghezze.
>
> Il triangolo ABC sarà acutangolo, rettangolo o ottusangolo a seconda che la misura del più lungo dei tre archi AB, BC, CA sia minore, uguale o maggiore di N/2.
>
> Vediamo alcuni esempi.
>
> PENTAGONO (che risolve il problema specifico)
>
> La circonferenza, lunga 5, può essere spezzata in tre parti in due modi
>
> 1+1+3 che genera triangoli ottusangoli perché 3>5/2
>
> 1+2+2 che genera triangoli acutangoli perché 2<5/2
>
> Il primo spezzamento può realizzarsi in tre modi diversi (le tre permutazioni 1+1+3, 1+3+1, 3+1+1), ma anche il secondo ha tre permutazioni sicché acutangolo o ottusangolo sono equiprobabili (prob 3/6), mentre è impossibile che si formi un triangolo rettangolo, come è ovvio dato che 5 è dispari.
>
> ESAGONO
>
> La circonferenza, lunga 6, può essere spezzata in tre parti in tre modi
>
> 1+1+4, ottusangolo perché 4>6/2, (3 permutazioni)
>
> 1+2+3, rettangolo perché 3=6/2, (6 permutazioni)
>
> 2+2+2, acutangolo perché 2<6/2, (1 permutazione)
>
> Quindi le prob di ottenere un triangolo acutangolo, rettangolo, ottusangolo sono rispettivamente 1/10 , 6/10 , 3/10
>
> EPTAGONO
>
> La circonferenza, lunga 7, può essere spezzata in tre parti in quattro modi
>
> 1+1+5 ottusangolo [il perché ormai lo si è capito], (3 permutazioni)
>
> 1+2+4 ottusangolo, (6 permutazioni)
>
> 1+3+3 acutangolo, (3 permutazioni)
>
> 2+2+3 acutangolo, (3 permutazioni)
>
> Quindi le prob di ottenere un triangolo acutangolo o ottusangolo sono rispettivamente 6/15 e 9/15
>
> OTTAGONO
>
> La circonferenza, lunga 8, può essere spezzata in tre parti in 5 modi
>
> 1+1+6 ottusangolo, (3 permutazioni)
>
> 1+2+5 ottusangolo, (6 permutazioni)

1+3+4 rettangolo, (6 permutazioni)

2+2+4 rettangolo, (3 permutazioni)

2+3+3 acutangolo, (3 permutazioni)

Quindi le prob di ottenere un triangolo acutangolo, rettangolo, ottusangolo sono rispettivamente 3/21 , 9/21 , 9/21

EPTADECAGONO

Con analoghi calcoli si ottiene una prob 36/120 a favore del triangolo acutangolo e una prob 84/120 per l'ottusangolo. Tra i poligoni regolari con "molti" lati ho generosamente scelto quello con 17 perché il malfidente che volesse fare una verifica grafica di quanto affermo è facilitato (!) dal fatto che può costruirlo con riga e compasso (!)

IN GENERALE

I denominatori delle frazioni che calcolano le suddette probabilità valgono sempre (N–1)(N–2)/2. Invece, per quanto riguarda i numeratori, occorre distinguere il caso che N sia dispari (lo indicheremo con D) o pari (lo indicheremo con P)

NumOttusi(D) = 3(D – 1)(D – 3)/8

NumOttusi(P) = NumOttusi(P – 1)

NumRetti(D) = 0

NumRetti(P) = 3(P/2 – 1)

NumAcuti(D) = (D^2 – 1)/8

NumAcuti(P) = (P – 2)(P – 4)/8

Per pudore non vi racconto come ho ottenuto queste formule.

DUE OSSERVAZIONI

Per N che tende a infinito (in pratica tre punti scelti a caso su una circonferenza) la prob di ottenere un triangolo rettangolo tende a zero e quelle di ottenere un triangolo acutangolo o ottusangolo tendono rispettivamente a 1/4 e 3/4

Il problema è parente stretto di quello più noto che chiede di calcolare la prob di poter costruire un triangolo con i tre pezzi ottenuti spezzando random un segmento. Infatti, come osservato all'inizio, per ottenere un triangolo acutangolo occorre che il maggiore dei tre archi AB, BC, CA sia minore di N/2, in altre parole l'arco più grande deve essere minore della somma degli altri due. Si tratta dunque della stessa condizione necessaria e sufficiente perché tre pezzi di una curva, rettificati, diventino tre segmenti idonei a costruire un triangolo.

Ottimo lavoro come al solito, anche se non siamo sicuri che cosa sia nascosto dal pudore di ***Alberto***. Vediamo la versione di ***trentatre***:

Il triangolo Δ formato da tre vertici distinti di un n-agono si può indicare con le distanze di ogni vertice dal successivo, misurate in senso circolare lungo il poligono, cioè con la terna (a,b,c), $a+b+c=n$.

Ordiniamo i tre numeri in modo non decrescente, cioè consideriamo le terne

[1] (a,b,c), $a \le b \le c$, $a+b+c=n$.

Le terne diverse sono tutte le partizioni di n in tre interi non decrescenti, e ognuna rappresenta l'insieme di <u>tutti i Δ simili</u> (per rotazione o ribaltamento) ottenibili dal poligono.

In figura i triangoli corrispondenti a [1], disegnati a partire da un vertice fisso del poligono, per n = 4,5,6,7. Con P centro del poligono, il triangolo è di tipo

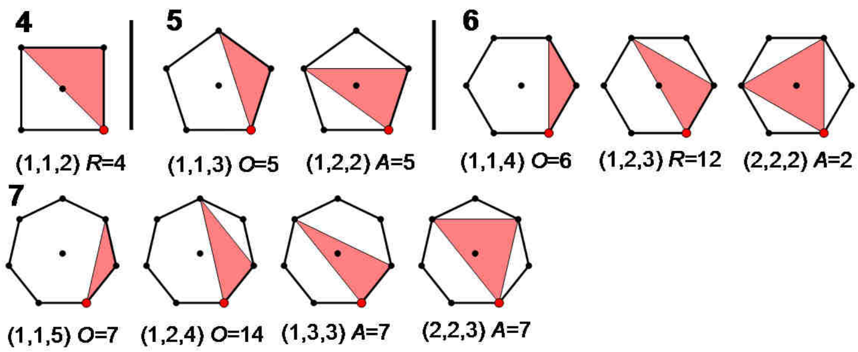
- O: ottusangolo se non contiene P - vale $a+b<c$
- R: rettangolo se un lato passa per P - vale $a+b=c$ (possibile solo se n pari)
- A: acutangolo se contiene P - vale $a+b>c$.

Il numero k di Δ diversi presenti nel poligono ma simili ad (a,b,c) è

- $k = n$ se Δ è isoscele : due valori a, b, c sono uguali
- $k = 2n$ se Δ è scaleno : a, b, c tutti diversi
- $k = n/3$ se Δ è equilatero : a, b, c tutti uguali (possibile solo per n multiplo di 3) .

In figura è anche indicato il tipo O, R, A dei triangoli e il loro numero k .

P.es. $n = 6 : (1,1,4)$ isoscele e ottusangolo, genera 6 Δ diversi per rotazione, $(1,2,3)$ scaleno e rettangolo, genera 12 Δ diversi per rotazione e ribaltamento, $(2,2,2)$ equilatero e acutangolo, genera 2 Δ diversi per rotazione.



Estendendo il calcolo fino a n = 10, con $T(n), O(n), A(n)$: numero di Δ totali, ottusangoli, acutangoli si ha

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T(n)$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
$O(n)$	0	0	5	6	21	24	54	60	110	120
$A(n)$	1	0	5	2	14	8	30	20	55	40

[2] .

Le tre successioni precedenti sono riportate in *OEIS* (*http://oeis.org/*) rispettivamente con le sigle A000292, A060423, A060422. Vengono anche date le formule (che si possono ricavare dai valori in tabella)

[3] $T(n) = n(n-1)(n-2)/6$

[4] $O(n) = n(n-1)(n-3)/8 \; se \; n \; dispari$, $O(n) = n(n-2)(n-4)/8 \; se \; n \; pari$

[5] $A(n) = n(n+1)(n-1)/24 \; se \; n \; dispari$, $A(n) = n(n-2)(n-4)/24 \; se \; n \; pari$.

Dato n, la probabilità che un triangolo scelto a caso sia ottusangolo è data dal rapporto $O(n)/T(n)$ cioè

- $n \; dispari$: $\dfrac{3(n-3)}{4(n-2)}$ che vale 1/2 solo per n = 5
- $n \; pari$: $\dfrac{3(n-4)}{4(n-1)}$ che vale 1/2 solo per n = 10 .

I valori per cui $O(n)/T(n) = 50\%$ sono quindi $\boxed{n = 5, 10}$.

Analogamente per i Δ acutangoli $A(n)/T(n) = 50\%$ solo per $n = 5$.

Spero che non vi aspettiate arguti commenti sulle differenze tra le precedenti soluzioni, piuttosto ve ne passo ancora qualcuna. Per esempio quella di ***Valter***:

Mi pare che n debba valere 5.

Provo a giustificarlo.

Numero in sequenza i vertici da 0 a n.

Traccio il diametro al cerchio in cui è inscritto il poligono partendo dal vertice 0.

Considero tutti i triangoli che posso formare con tale vertice.

Per simmetria tali triangoli devono essere per metà ottusangoli per avere il 50% di probabilità.

In totale ci sono n su 3 binomiale triangoli.

Quindi: (triangoli costruibili sul vertice 0) * (numero di vertici) / 3 = (n su 3 binomiale).

Considero il diametro perpendicolare al precedente.

Questi 2 diametri suddividono il cerchio in 4 quadranti (si potrà dire …?).

Numero i quadranti da 1 a 4 partendo da quello a sinistra del vertice 0 e procedendo in senso orario.

Conteggio i triangoli formati sul vertice 0 del poligono.

I triangoli rettangoli sono quelli con:

a. i restanti 2 vertici su uno dei 2 diametri

I triangoli ottusangoli sono quelli con:

b. 2 vertici a destra/sinistra del diametro sul vertice 0 (quadranti 1-4/2-3),

c. i restanti 2 vertici alternati nei 2 quadranti sopra il diametro perpendicolare (quadranti 1,2); vale a dire quelli attraversati al più da uno dei 2 diametri.

I triangoli acutangoli sono tutti gli altri, cioè quelli con:

d. i restanti 2 vertici alternati su 2 quadranti in diagonale tra loro (quadranti 1,3/2,4),

e. i restanti 2 vertici alternati nei 2 quadranti sotto il diametro perpendicolare (quadranti 3,4); vale a dire quelli attraversati da ambedue i diametri.

La formula per calcolare il numero dei triangoli nel caso di n = 2 MOD4 è:

- a.: $n - 2$
- b.: (($n - 2$) / 2) su 2 binomiale
- c./d./e.: $((n - 2) / 4)^2$

Si ottiene quindi che i triangoli acutangoli sono maggiori di quelli ottusangoli. Gli altri poligoni con numero di vertici pari hanno ancora più triangoli ottusangoli. Sul vertice 0 infatti il triangolo con gli atri 2 vertici sul diametro perpendicolare è rettangolo.

Provo a verificare con alcuni casi.

Per n = 6:

- 4 triangoli rettangoli
- 1 (quadranti 2-3/3-4): triangoli ottusangoli
- 1 (quadranti 1, 2): triangoli ottusangoli
- 1 (quadranti 1, 3/2, 4/3, 4): triangoli acutangoli

Totale triangoli acutangoli: 4 + 1*3 = 7.

Totale triangoli ottusangoli: 1*2 + 1 = 3.

Totale triangoli sul vertice 0: 7 + 3 = 10.

Verifica corrispondenza col numero totale triangoli del poligono:

- da formula binomiale: 6 su 3 binomiale = 20.
- da quelli sul vertice 0: 10 * 6 / 3 = 20.

Per n = 10:

- 8 triangoli rettangoli
- 6 (quadranti 2-3/3-4): triangoli ottusangoli
- 4 (quadranti 1,2): triangoli ottusangoli
- 4 (quadranti 1,3/2,4/3,4): triangoli acutangoli.

Totale triangoli acutangoli: 8 + 4*3 = 20.

Totale triangoli ottusangoli: 6*2 + 4 = 16.

Totale triangoli sul vertice 0: 20 + 16 = 36.

Verifica corrispondenza col numero totale triangoli del poligono:

- da formula binomiale: 10 su 3 binomiale = 120.

- da quelli sul vertice 0: 36 * 10 / 3 = 120.

Per poligoni con n dispari il calcolo è assimilabile basta sostituire "n – 2" con "n – 1" (non dettaglio, ho già annoiato troppo …).

Da una verifica mi pare che solo per n = 5 il numero di triangoli ottusangoli corrisponda agli acutangoli.

La scarsa convinzione di ***Valter*** ci lascia sempre impressionati. Ma ***Emanuele*** non è da meno, tanto che abbiamo eliminato le sue premesse questa volta, tanto nel testo si annidano le stesse premesse:

Essendo il poligono regolare, per ipotesi, possiamo scrivere:

N = numero lati (o vertici) del poligono A = angolo interno al poligono compreso tra due lati consecutivi A = ((N – 2)*pi)/N). Infatti N – 2 sono i triangoli in cui possiamo scomporre un poligono, in ogni triangolo euclideo la somma degli angoli fa pigreco moltiplichiamo il tutto e poi divisiamo per N e otteniamo A.

Ora teniamo presente che il poligono regolare può sempre essere inscritto in un cerchio passante per tutti i suoi vertici.

Ogni coppia di vertici adiacenti forma, assieme al centro del cerchio circoscritto al poligono, un triangolo isoscele che ha per lato opposto al vertice (il centro del cerchio) una corda, che poi è il lato del poligono.

L'angolo al centro, rispetto al lato/corda del poligono, ha quindi una ampiezza di 2*pi/N.

Ora prendiamo un vertice V e uniamolo con gli altri (N – 2) vertici non adiacenti a V. Otterremo N – 2 triangoli, ognuno dei quali ha il lato opposto a V, lato che corrisponde al lato del nostro poligono, quindi da V abbiamo un angolo alla circonferenza rispetto al lato del poligono il quale forma un angolo al centro (con il centro della circonferenza) di 2*pi/N.

L'angolo alla circonferenza, secondo un ben noto teorema, è la metà esatta dell'angolo al centro, quindi possiamo scrivere:

B = pi/N

Ora tutti gli angoli di ampiezza B che hanno V come vertice, se sommati assieme, danno esattamente A, l'angolo "caratterizzante" il poligono per così dire.

Tutti i vertici (essendo il poligono regolare posso fare questa supposizione) si "comportano" alla stessa maniera e possiamo notare che tutti i triangoli formati unendo tre vertici avranno gli angoli che per forza devono essere multipli interi di B, la cui somma (ovviamente) dovrà essere pi. Caratterizziamo questi tre vertici come i*B, j*B, h*B, dove i, j, h sono degli interi, possiamo scrivere:

i*B+j*B+h*B = pi

(i+j+h)*B = pi

(i+j+h)*(pi/N) = pi

i+j+h=N

Quanti triangoli posso tracciare con 3 vertici qualsiasi?

Subito mi è venuto in mente il coefficiente binomiale (N 3) = N!/(3!*(N–3)!) ma siccome non sono ferratissimo nell'arte combinatoria (come se fosse l'unica lacuna...) ho cercato un altro modo di calcolarmeli, ed in effetti ho trovato che se abbiamo un angolo, nello specifico A che è compreso tra due lati, e lo dividiamo in N–2 parti, che sappiamo essere ognuna ampia B, avremo che possiamo creare T(N–

2) angoli diversi, dove T(x) altro non è che il numero triangolare di x cioè $x*(x+1)/2$. Ad ogni angolo così identificato da un vertice corrisponderà un triangolo "condiviso" con altri due vertici. Quindi dapprima Moltiplichiamo T(N–2) per N e poi lo dividiamo per 3 e troveremo l'esatto numero di triangoli ottenibili unendo 3 vertici distinti... e guarda caso il risultato è lo stesso di (N 3). Quindi, anche se è solo servito a me per capire se il ragionamento era giusto abbiamo questa identità:

$$(T(N-2)*N)/3 = (N\ 3)$$

Ora la dimostrazione da me fatta di questa identità è del tipo "per induzione incompleta" ... d'altronde se andava bene ai tempi di Diofanto non vedo perché non possa andare bene per me oggi!?

Quanti triangoli di questi sono ottusi?

Parto dalla considerazione che $(i+j+h)*B = pi$ e che uno solo dei tre può essere ottuso, quindi, sempre ragionando intanto con un unico vertice, pongo:

$$i*B > pi/2$$

$$i*pi/N > pi/2$$

$$i > N/2$$

Per superare l'ostacolo di determinare il numero di angoli ottusi che si possono formare ho proceduto chiedendomi quanti angoli Y posso formare raggruppando G angoli assieme, scegliendoli da (N – 2) angoli, con G che varia da 1 a N – 2? Ho proceduto un po' empiricamente tracciando delle tabelline, riporto un esempio per l'ottagono: N = 8, N – 2 = 6

G	Y
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

ora per determinare quanti di questi siano ottusi devo tenere presente:

$$i > N/2$$

$$N/2 = 4$$

$$i > 4$$

Quindi il numero di triangoli ottusi ottenibili partendo da un vertice è la somma delle Y corrispondenti ai gruppi da 5 e 6

$$1 + 2 = T(2) = 3$$

Il parametro immesso nella funzione T corrisponde a (N – 2) – INT(N/2) dove con INT(x) si intende la funzione che restituisce il più grande intero inferiore a x quindi il numero totale di triangoli ottusi ottenibili è:

$$T(N-2-INT(N/2))*N$$

siccome il vertice scelto è ottuso e gli altri due non lo saranno sicuramente, non devo "dividerlo" con altri vertici. Ora la probabilità che un evento accada è (numero di eventi favorevoli)/(Numero di eventi totali) quindi:

$$T(N-2-INT(N/2))*N /((T(N-2)*N)/3)$$

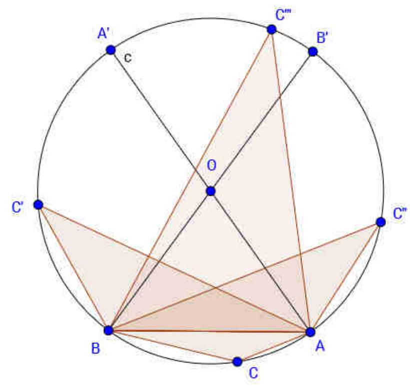
Ho preso la mia formula e l'ho messa su un foglio di calcolo... Grande è stata la mia delusione quando ho scoperto che sono 2 i possibili poligoni: il pentagono con 10 triangoli possibili e 5 ottusi e il decagono con 120 e 60.

Dove avrò sbagliato?

E perché deve essere sbagliato per forza? I problemi con la probabilità sono normalmente malposti e malrisolti, e volendo a tutti i costi giocarci, probabilmente tutte le soluzioni trovate sono corrette sotto una qualche costellazione di premesse… Eppure c'è ancora una soluzione che vi piacerà senz'altro, quella di ***Franco57***:

Non è difficile accorgersi che i 10 possibili triangoli sui vertici di un pentagono regolare sono di due tipi: 5 acutangoli e 5 ottusangoli, ma per sapere se questa è l'unica soluzione affronto il problema in generale.

Prima di tutto, fissati due vertici A e B su una circonferenza (quella nella quale è iscritto il nostro poligono regolare), vediamo dove un terzo punto C sulla circonferenza rende ottusangolo il triangolo ABC e dove no. Se A è opposto a B rispetto al centro O della circonferenza allora il triangolo è sempre retto.



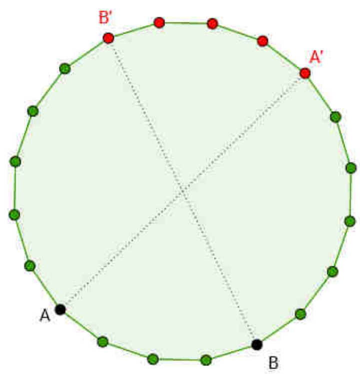
Altrimenti, se C è all'interno dell'arco piccolo AB ($A\hat{O}B < \pi$) allora $A\hat{C}B$ è ottuso, perché è la metà dell'*esplementare* (così pare si chiami il complementare all'angolo giro) del suddetto $A\hat{O}B$.

Tracciamo adesso i diametri da A e B che incontrano la circonferenza rispettivamente in A' e B'.

Se C' sta nell'arco interno BA' allora per analogo motivo il triangolo ABC' è ottuso in B; se C'' sta nell'arco interno $B'A$ allora il triangolo ABC'' è ottuso in A; se infine C''' sta all'interno dell'arco interno $A'B'$ allora ABC''' è acutangolo, essendo tutti gli angoli la metà di angoli al centro inferiori a π.

Su questa base allora si può calcolare la probabilità P che dati tre punti a caso A,B,C su una circonferenza il triangolo che formano sia acutangolo. Fissando A e facendo variare B tale che l'angolo $A\hat{O}B$ valga α tra 0 e π (fissiamo ad esempio il senso orario, visto che *per evidenti ragioni di simmetria* nel senso opposto la probabilità è la stessa): $P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\alpha \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\alpha^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{4}$. Cioè il triangolo sarà ottusangolo con una probabilità 3/4 (chiaramente che sia retto è nulla), che sarà il valore di probabilità limite al tendere a ∞ del numero di vertici del nostro poligono regolare.

Per calcolare la probabilità P_n che il triangolo sia ottusangolo al variare di n conviene separare i casi n pari, $n = 2k$, da n dispari, $n = 2k+1$.



Caso $n = 2k$. Fissato un vertice A, se B è uno dei qualsiasi altri $2k-1$ vertici ed è a distanza $d < k$ oraria o antioraria da A (d=4 antioraria nella figura), ci sono esattamente $d+1$ vertici tra i possibili rimanenti $n-2$ (in rosso in figura) tra A' e B' (che sono sempre i simmetrici di A e B rispetto al centro) tali che, se e solo se C è tra questi, il triangolo è acutangolo o retto. Dunque in questo caso la probabilità che ABC sia ottusangolo vale $1 - \frac{d+1}{n-2}$. Se $d = k$, B è all'opposto di A e il triangolo ABC è sempre rettangolo, quindi questa probabilità non la contiamo perché vale 0. Riassumendo:

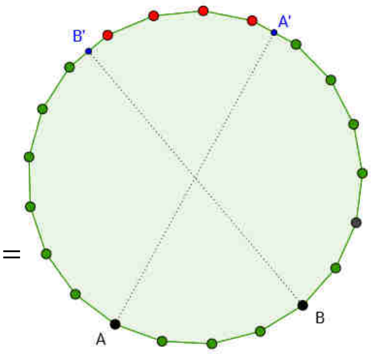
$$P_{2k} = \sum_{1\le d<k} \frac{2}{2k-1}\left(1-\frac{d+1}{2k-2}\right) = \frac{2}{2k-1}\left((k-1)-\frac{2+3+\cdots+k}{2k-2}\right) =$$

$$= \frac{2}{2k-1}\left((k-1)-\frac{1}{2(k-1)}\frac{(k+2)\cdot(k-1))}{2}\right) =$$

$$\frac{2}{2k-1}\cdot\frac{4k-4-k-2}{4} = \frac{3k-6}{2(2k-1)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{k-2}{2k-1}$$

Caso $n = 2k+1$.

Poiché n è dispari, all'opposto di A e di B non ci sono dei vertici ma dei lati. Per semplicità ho disegnato A' e B' come punti di mezzo dei lati opposti, tanto quello che conta è la posizione dei vertici rispetto alla retta per il centro.



Abbiamo che se B dista da A per d vertici, solo nei d vertici (rossi in figura) tra A' e B' il triangolo ABC è acutangolo. Negli altri casi è ottusangolo.

In modo analogo calcoliamo

$$P_{2k+1} = \sum_{1\le d\le k} \frac{2}{2k}\left(1-\frac{d}{2k-1}\right) = \frac{2}{2k}\left(k-\frac{1+2+\cdots+k}{2k-1}\right) =$$

$$= \frac{2}{2k}\left(k-\frac{1}{2k-1}\frac{k(k+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{2k}\cdot\frac{4k^2-2k-k^2-k}{2(2k-1)} = \frac{1}{k}\frac{3k^2-3k}{2(2k-1)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{k-1}{2k-1}$$

Con queste formule ricaviamo tutti i casi chiesti $P_{2k} = \frac{3}{2}\cdot\frac{k-2}{2k-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k=5 \Rightarrow n=10$ e $P_{2k+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{k-1}{2k-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k=2 \Rightarrow n=5$, quindi oltre al pentagono anche il decagono regolare dà il 50% di ottusangoli.

Semplici disequazioni–$P_{2k} < P_{2(k+1)}$ e $P_{2k+1} < P_{2(k+1)+1}$–mostrano che P_{2k} e P_{2k+1} sono funzioni crescenti e la tecnica classica di divisione per k di numeratore e divisore conferma che il loro limite è 3/4 come aspettato, cioè $P_{2k} \uparrow \frac{3}{4}$ e $P_{2k+1} \uparrow \frac{3}{4}$.

Altri casi simili nei quali poligoni regolari diversi danno la stessa probabilità per i triangoli ottusangoli, dovranno quindi necessariamente essere uno con numero pari di vertici e uno dispari. Li ricaviamo da

$P_{2k} = P_{2h+1} \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{k-1}{2k-1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{h-1}{2h-1} \Rightarrow k = 3h-1$. Perciò che per ogni poligono regolare dispari ne troviamo uno pari con la stessa probabilità per gli ottusangoli, ma non viceversa. Tra i più semplici troviamo ad esempio $P_{11} = P_{28} = \frac{2}{3}$.

Il Capo chiede di generalizzare e loro lo fanno. Eccezionale, se solo non dovessero usare tutte quelle probabilità. Ma adesso basta, vediamo l'altro problema.

4.2.2 "Editor in Chef" (e non è un typo)

Per farsi perdonare il precedente problema, il Capo si dedica a una serie di complimenti sulla mia abilità come cuoca e importatrice di cioccolata svizzera. Vediamo il testo del problema:

> *Un certo numero di RMers è seduto intorno ad un tavolo perfettamente circolare. Doc è in ritardo, e Alice provvede alla distribuzione dei cioccolatini: inizia da Rudy, e salta una persona, dà un cioccolatino, e salta due persone, dà un cioccolatino, e salta tre persone... e avanti in questo modo. Alice fa alcuni giri, e l'ultimo cioccolatino tocca a Rudy: Rudy (e alcuni altri) hanno quattro cioccolatini, alcuni altri ne hanno ricevuti due e tutti gli altri sono a bocca asciutta.*
>
> *A questo punto arriva Doc e si siede tra due persone. Alice tira fuori un altro sacchetto di cioccolatini (con esattamente lo stesso numero di cioccolatini del primo) e inizia la distribuzione secondo le stesse regole precedenti ma, questa volta, partendo da Piotr. Qui, data la differenza nel numero di persone, tutti quanti ricevono o uno, o due cioccolatini.*
>
> *Quanti eravamo e quanti cioccolatini aveva Alice?*

Cominciamo con ***Valter***:

> Sbaglierò di sicuro perché la mia soluzione non soddisfa tutte le condizioni richieste ma ci provo.
>
> A mio avviso eravate in 15 commensali prima dell'arrivo di Doc.
>
> Alice aveva 28 cioccolatini nel primo sacchetto e 31 nel secondo (è qui che non soddisfa).
>
> Indico con "c" l'ennesimo cioccolatino distribuito.
>
> Ipotizzo ci siano ∞ commensali in fila numerati in sequenza iniziando da 1 .
>
> Da come sono distribuiti i cioccolatini si nota che il cioccolatino "c" viene dato al commensale: c * (c +1) / 2.
>
> I commensali sono però in numero finito e posti in circolo.
>
> Detto "n" tale numero devo quindi ragionare MOD n per risolvere il problema.
>
> Per quanto detto e con un qualche calcolo verifico quanto segue (almeno penso …).
>
> Con "n" dispari commensali:
>
> - il "$n – 2$"-esimo cioccolatino viene data al commensale 1
> - il "$n – 1$"-esimo cioccolatino viene data al commensale n
> - l' "n-esimo" cioccolatino viene data al commensale n
> - il "$n + 1$"-esimo cioccolatino viene data al commensale 1 (e da qui i cioccolatini vengono distribuiti nello stesso ordine di partenza)
> - il "$2*n – 1$"-simo cioccolatino viene data al commensale 1
>
> Quindi per "n" commensali dispari:
>
> - non è possibile che i cioccolatini possano essere dati a tutti i commensali (dopo "n" cioccolatini si ripetono gli stessi e il commensale "n" ne riceve almeno 2 dei primi "n" cioccolatini)
> - al "$2*n – 1$"-simo cioccolatino il commensale 1 né ha ricevuti almeno 4 e gli altri un numero pari.
>
> Con "n" pari commensali:
>
> - dopo "$n – 1$" cioccolatini i successivi sono distribuiti in ordine inverso (il cioccolatino "n" è dato al commensale che ha ricevuto l' "$n – 1$", l' "$n + 1$" allo stesso dell' "$n – 2$", …)
> - dopo "n" cioccolatini il ciclo di distribuzione si ripete invertito

Quindi è necessario che dopo "n – 1" cioccolatini i successivi "n" siano distribuiti tutti a commensali diversi (per quanto detto anche i primi "n – 1" cioccolatini sono distribuiti tutti a commensali diversi).

Da tutto ciò mi pare che la soluzione sia quella che ho indicato.

Allego l'immagine di uno schema che mi è servito per le verifiche. I commensali sono numerati 0 a "n – 1" (per lavorare in MOD "n" il commensale "n" l'ho indicato con 0). Per passare da un commensale al seguente sommo MOD "n" il numero del commensale al numero del cioccolatino successivo (p. e. con "n" = 16 per passare dal commensale 2 che ha ricevuto il cioccolatino 20 al successivo sommo 2 + 21 MOD 16 = 7).

La tabella era illeggibile già nella mail, ma abbiamo deciso di allegarla comunque, magari funziona con la spiegazione. Soprassediamo per questa volta sulla soluzione di ***Emanuele***, anche se sia il programma allegato sia il ragionamento erano molto interessanti, e passiamo a ***Franco57***:

Poiché la conta è in circolo usiamo l'aritmetica modulo n, dove n sono le persone a tavola, sia per determinare la persona che riceve il cioccolatino sia per il numero di persone da saltare, cioè è equivalente dire che se ne saltano prima 2, poi 3, … poi n – 2 (o equivalentemente 2 in senso opposto), poi n – 1 (o una in senso opposto), poi si riassegna un cioccolatino alla stessa (siamo al salto di n), ancora si assegna alla successiva (equivalente di n + 1) e si ricomincia saltandone 2, etc. fino a che non sono terminati i cioccolatini.

Numero perciò i commensali a partire da 1 che è quello da cui comincio (Rudy nel primo turno, Piotr nel secondo) fino ad arrivare al numero 0 che è quello che precede il primo ed indico con C_i il commensale che riceve lo i-esimo cioccolatino, dunque $C_1 = 1$ e $C_i = C_{i-1} + i \pmod n$.

Si scopre che, distribuendo un numero sufficiente di CSP, gli assegnamenti si ripetono ciclicamente.

In particolare per n dispari $n = 2k+1$ il ciclo di assegnamento dei CSP è lungo n ed è del tipo:

$$C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_{k-2} \quad C_{k-1} \quad C_k \quad C_{k-1} \quad C_{k-2} \quad \dots \quad C_2 \quad C_1 \quad 0 \quad 0$$

infatti nell'aritmetica modulo n $C_{k+1} \equiv C_k + k + 1 \equiv C_k - k \equiv C_{k-1}$, poi $C_{k+2} \equiv C_{k+1} + (k+2) \equiv C_{k-1} - (k-1) \equiv C_{k-2}$ e così via fino a $C_1 = 1$ dal quale bisogna scorrere $n-1$ nella direzione o equivalentemente scorrere in senso inverso di 1; infine scorriamo di n (o meglio rimaniamo dove siamo) sulla persona 0 riassegnandogli subito un altro cioccolatino e si ricomincia. Ovviamente non tutti tra $C_1, C_2, \dots, C_k$ sono necessariamente distinti.

Esempio per n=7:

CSP#	1	2	3	4	5	6	7
ricevente	1	3	6	3	1	0	0

Il ciclo individuato non può avere sotto-cicli perché due 0 consecutivi o in generale due assegnazioni consecutive alla stessa persona sono possibili per la prima volta solo alla n-esima assegnazione.

È interessante notare che in questo caso i commensali ricevono il cioccolatino sono al più k+1, cioè sicuramente k – 1 non lo ricevono.

Analogamente per n pari il ciclo è $C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_{n-2} \quad C_{n-1} \quad C_{n-1} \quad \dots \quad C_2 \quad C_1 \quad 0 \quad 0$ e questa volta è lungo $2n$.

Infatti $C_n \equiv C_{n-1} + n \equiv C_{n-1} - n \equiv C_{n-1}$, $C_{n+1} \equiv C_n + (n+1) \equiv C_{n-1} - (n-1) \equiv C_{n-2}$ etc. Ancora una volta i commensali $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ non sono necessariamente distinti (nell'esempio sì perché n è una potenza del 2 … poi vediamo).

Anche in questo caso il ciclo individuato non può avere sotto-cicli perché due 0 consecutivi o in generale due assegnazioni consecutive la prima volta si hanno allo n-esimo cioccolatino, quindi avremmo $C_{n-1} = 0$, ma un ciclo di n comporterebbe $C_{n-2} = C_1 = 1$ e $C_{n-1} = C_{n-2} + (n-1) = n-1$.

Si nota che in questo caso i commensali non possono ricevere tutti almeno un cioccolatino se non ce ne sono almeno $2n-1$, perché fino a $2n-2$ assegnazioni hanno ricevuto il cioccolatino al più $n-1$ persone.

Esempio per n=8:

CSP#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ricevente	1	3	6	2	7	5	4	4	5	7	2	6	3	1	0	0

Adesso vengo al quesito specifico che però pare descrivere una situazione impossibile. Infatti nella seconda distribuzione tutti ricevono almeno un cioccolatino, perciò con Doc i commensali non possono essere in numero dispari (che come si è visto scontenta almeno quasi la metà). Di conseguenza senza di lui, quindi nella prima distribuzione, invece sono dispari, diciamo n. Si inizia da Rudy che è servito per primo e poi ancora con i CSP numero $n-2$, $n+1$ e $2n-2$ (se ce ne sono a sufficienza). Comunque sia nella prima distribuzione il 4° cioccolatino a Rudy arriva al CSP numero $2n-2$ o prima. Ma i primi $2n-2$ cioccolatini nella seconda turnata sono $2m-4$, fatto $m = n+1$ il numero dei commensali con Piotr, e come si è visto non bastano a servire tutti come richiede il quesito (ne servirebbero almeno $2m-1$).

Concludo con la cosa più carina che ho scoperto: **se e solo se il numero dei commensali è una potenza del 2 allora tutti ricevono almeno un CSP a testa, se ce ne sono abbastanza**; esattamente 2 cioccolatini a testa con $2n$ da distribuirne, come nell'esempio per n=8.

In questo caso infatti la sequenza $C_1 = 1, C_2, \dots, C_{n-2}, C_{n-1}$ è tutta di persone diverse, poiché se fosse $C_\alpha = C_\beta$ con $1 \le \alpha < \beta < n$ dovrebbe essere $(1+2+\dots+\beta) - (1+2+\dots+\alpha) = (\alpha+1) + (\alpha+2) + \dots + \beta = 0$ mod n. Ma ciò è impossibile, infatti se la somma è composta dal solo addendo β allora è minore di n e perciò non vale 0 (mod n). Se è composta da più addendi si può scrivere come il prodotto di due interi $\frac{(\alpha+1)+\beta}{2}(\beta-\alpha)$ se il numero di addendi $\beta-\alpha$ è dispari, oppure come $((\alpha+1)+\beta)\frac{\beta-\alpha}{2}$ se il numero di addendi è pari e in questo ultimo caso è $(\alpha+1)+\beta$ ad essere dispari e maggiore di 1 perché il primo e l'ultimo addendo hanno parità diversa. In ogni caso sarà sempre $C_\alpha \ne C_\beta$. E sarà sempre anche $C_\alpha \ne 0$ poiché $1 \le C_\alpha < n$. Se ne conclude che se n ha il solo fattore 2, la sequenza di distribuzione trovata per n pari assegna due CSP ad ogni commensale.

Che la condizione n potenza del 2 sia anche necessaria per assegnare a tutti un cioccolatino è stato per me arduo da dimostrare (vediamo se qualche lettore ha trovato una via più semplice), ma infine l'ho spuntata e riporto sotto le mie dimostrazioni che ho spezzato definendo e dimostrando due lemmi in cascata.

Lemma 1: per ogni k intero, p intero maggiore di 1, tutti i 2^p numeri della sequenza

$$k,\quad k+1,\quad 3\cdot(3k+1),\quad 3\cdot(3k+2),\quad 5\cdot(5k+2),\quad 5\cdot(5k+3),\quad \ldots$$
$$\ldots\quad (2^p-1)\left((2^p-1)\cdot k+(2^{p-1}-1)\right),\quad (2^p-1)\left((2^p-1)\cdot k+2^{p-1}\right)$$

più formalmente $\left\{x\cdot\left(xk+\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right),\quad x\cdot\left(xk+\left\lceil\frac{x}{2}\right\rceil\right):\quad x\quad dispari,\quad 0<x<2^p\right\}$

sono diversi tra loro modulo 2^p.

Dimostrazione per induzione su p.

Se $p=1$ la proprietà diventa $k\equiv k+1 \pmod{2}$ è sempre falso, il che è evidente perché uno dei due tra k e $k+1$ è pari e l'altro è dispari.

Passo a dimostrare la proprietà per p assumendola valida per $p-1$. Sui primi 2^{p-1} numeri della sequenza, ho, per ipotesi induttiva, che sono diversi $\pmod{2^{p-1}}$ quindi lo sono anche $\pmod{2^p}$.

Se $x+y=2^p$ con x e y dispari tra 0 e 2^p allora $x\cdot\left(xk+\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right)\equiv y\cdot\left(yk+\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil\right) \pmod{2^{p-1}}$. Infatti si ha $x+y\equiv 0 \pmod{2^{p-1}} \Rightarrow x\equiv -y \pmod{2^{p-1}} \Rightarrow x^2\equiv y^2 \pmod{2^{p-1}}$ e inoltre $\frac{x+y}{2}=2^{p-1}\Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}=2^{p-1}\Rightarrow \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil=2^{p-1}\Rightarrow \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\equiv-\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil \pmod{2^{p-1}}$.

Perciò:

$$x\cdot\left(xk+\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right)=x^2\cdot k+x\cdot\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\equiv y^2\cdot k+(-y)\cdot\left(-\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil\right)=y\cdot\left(yk+\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil\right) \pmod{2^{p-1}}$$

Poiché se $x+y=2^p$ e x sta nella prima metà dell'insieme cioè $1\le x<2^{p-1}$ allora y sta nella seconda metà e viceversa, cioè $0<x<2^{p-1}\Leftrightarrow 2^{p-1}<y<2^p$ e $0<y<2^{p-1}\Leftrightarrow 2^{p-1}<x<2^p$, per l'eguaglianza appena vista anche nella seconda metà tutti i numeri sono diversi tra loro modulo 2^{p-1} e quindi anche modulo 2^p e l'unica cosa che rimane da dimostrare è che è falso che $x\cdot\left(xk+\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right)\equiv y\cdot\left(yk+\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil\right) \pmod{2^p}$.

Se invece fosse vero avremmo $x^2\cdot k+x\cdot\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\equiv y^2\cdot k+y\cdot\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil \pmod{2^p}$ che in virtù del fatto che $x\equiv -y \pmod{2^p}$ si semplifica in $x\cdot\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\equiv -x\cdot\left\lceil\frac{y}{2}\right\rceil \pmod{2^p}$. Ora ricordando che nell'aritmetica a $\pmod{n}$ hanno inverso tutti e soli i numeri primi rispetto a n, tutti i dispari sono invertibili in $\pmod{2^p}$ perciò possiamo ulteriormente semplificare, dividendo per x, in

$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \equiv -\left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil \pmod{2^p}$ che diventa $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{y}{2} \right\rceil = 2^{p-1} \equiv 0 \pmod{2^p}$ che è un'evidente contraddizione.

QED Lemma 1.

<u>Lemma 2</u>: dato un numero pari *n* che non sia una potenza del 2, esiste un intero *m*, $1 < m \le n$ tale che $\binom{m}{2}$ sia un multiplo di *n*.

(Nota: non è vero se *n* è una potenza del 2, ad esempio nessuno tra 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 è un multiplo di 8).

Dimostrazione: ponendo $2^p \cdot d$ con *d* dispari maggiore di 1, e *p* intero maggiore di 1, il coefficiente $\binom{k}{2}$ candidato va cercato nell'insieme

$$I = \left\{ \binom{d}{2}, \binom{d+1}{2}, \binom{3d}{2}, \binom{3d+1}{2}, \cdots \binom{(2^p-1)\cdot d}{2}, \binom{(2^p-1)\cdot d+1}{2} \right\},$$

più formalmente $I = \left\{ \binom{xd}{2}, \binom{xd+1}{2} : \quad x \quad dispari, \quad 0 < x < 2^p \right\}$.

Posto $d = 2k+1$ con $k > 1$, $\forall x \quad dispari, \quad 0 < x < 2^p$ e xd è dispari, perciò possiamo scrivere $xd = 2z+1$ con quindi $z = \frac{xd-1}{2} = \frac{x(2k+1)-1}{2} = kx + \frac{x-1}{2}$ da cui $z = kx + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ e $z+1 = kx + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$. Allora riscrivo

$$\begin{cases} \binom{xd}{2} = \frac{xd\cdot(xd-1)}{2} = \frac{xd\cdot 2z}{2} = xzd = x\cdot\left(kx + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)\cdot d \\ \binom{xd+1}{2} = \frac{xd\cdot(xd+1)}{2} = \frac{xd\cdot(2z+2)}{2} x(z+1)d = x\cdot\left(kx + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil\right)\cdot d \end{cases}$$

Applicando il Lemma 1 ai coefficienti $x\cdot\left(kx + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right)$ e $x\cdot\left(kx + \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil\right)$ abbiamo che uno (e uno solo) di questi è congruente a 0 modulo 2^p e di conseguenza uno dei numeri dell'insieme *I* è congruente a 0 modulo $n = 2^p \cdot d$, cioè ne è un multiplo.

QED Lemma 2.

Possiamo così concludere che se *n* è pari ma non una potenza del 2, poiché $C_i \equiv 1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2} \pmod{n}$, per il Lemma 2, uno tra $C_1 \equiv \binom{2}{2}, C_2 \equiv \binom{3}{2}, \cdots, C_{n-1} \equiv \binom{n}{2}$ deve essere 0 e siccome oltre a questi compare nel ciclo solo lo 0, in questo caso almeno un commensale deve per forza rimanere senza cioccolatino.

Ci sono mancate le sue soluzioni, è bello averne di nuovo in abbondanza. Concludiamo con il grande ***trentatre***.

Con N : n° iniziale dei posti a tavola numerati da 1 a N, K : n° di *CSP* numerati da 1 a K, i *CSP* sono distribuiti linearmente (senza tener conto del tavolo rotondo) con la sequenza

$$\boldsymbol{s} = s_1, s_2, s_3, \ldots = 1,3,6,10,15,21,28,36,45,\ldots \text{, dove } s_k = 1+2+3+\ldots+k = k(k+1)/2.$$

Nel tavolo rotondo con N posti, il k-esimo *CSP* è assegnato al posto $p_k = 1 + (s_k - 1) \bmod N$, da cui la sequenza

$$\boldsymbol{p}_N = p_1, p_2, p_3, \ldots .$$

Rudy (posto 1) riceve un *CSP* ad ogni occorrenza di 1 in $\boldsymbol{p}_N$; poiché riceve il 1° e il K° e ne riceve 4, K è il posto del 4° numero **1** in $\boldsymbol{p}_N$, cioè <u>K dipende solo da N</u> .

P.es.

$N = 7$ - $\boldsymbol{p}_7 = (\mathbf{1},3,6,3,\mathbf{1},7,7,\mathbf{1},3,6,3,\mathbf{1}),7,7,1,3,6,3,1,7,\ldots$ da cui $K = 12$

- aggiungendo un posto a tavola, assegnando il posto 1 a Doc, e distribuendo 12 *CSP* si ha

$N+1 = 8$ - $\boldsymbol{p}_8 = (1,3,6,2,7,5,4,4,5,7,2,6),3,1,8,8,1,3,6,2,7,5,4,\ldots$.

Il problema impone a N le condizioni

(a) in $\boldsymbol{p}_N$ limitata a K termini ogni numero $(1,2,3,\ldots N)$ compare 0 opp. 2 opp. 4 volte

(b) in $\boldsymbol{p}_{N+1}$ limitata a K termini ogni numero $(1,2,3,\ldots N+1)$ compare 1 o 2 volte.

Nell'esempio precedente $N = 7$ soddisfa (a), ma $N+1 = 8$ non soddisfa (b) - infatti nei primi K termini manca il posto 8 (quello prima di Doc), che non riceve niente. Quindi $N = 7$ <u>non è la soluzione</u>.

Analizzando le sequenze $\boldsymbol{p}_N$ si ricava (le dimostrazioni sono lunghe e non le riporto)

i. ogni $\boldsymbol{p}_N$ è <u>periodica</u>, con periodo $L_N = N / 2N$ se $N : disp / pari$

- nella sequenza estesa $\boldsymbol{p}_N$ sono quindi presenti solo i numeri del periodo

ii. per ogni N, il periodo $\boldsymbol{p}_N*$ (i primi L_N termini di $\boldsymbol{p}_N$) ha la forma

$\boldsymbol{p}_N* = \boldsymbol{m}, N, N$ con $\boldsymbol{m}$ sequenza <u>palindroma</u> di lunghezza $(L_N - 2)$ - dai casi precedenti

$N = 7$, $L_7 = 7$, $\boldsymbol{p}_7* = (1,3,6,3,1),7,7 = \boldsymbol{m},7,7$

$N = 8$, $L_8 = 16$, $\boldsymbol{p}_8* = (1,3,6,2,7,5,4,4,5,7,2,6,3,1),8,8 = \boldsymbol{m},8,8$.

iii. per qualsiasi N e qualsiasi numero K di *CSP*, esiste sempre un posto che non riceve nulla, salvo per

$N = 2,4,8,16,\ldots = 2^m$; in questi casi il periodo comprende due volte tutti i posti $(1,2,\ldots N)$ e $\boldsymbol{m}$ non contiene N

- vedi $\boldsymbol{p}_7*$ dove mancano $(2,4,5)$ e $\boldsymbol{p}_8*$ dove ci sono tutti, e gli 8 sono solo quelli finali.

Quindi solo gli $(N+1)$ di questa forma potrebbero rispettare (b), ma questo non avviene

- infatti per $N = 7,15,31,\ldots$ *dispari* si ha $\boldsymbol{p}_N = \boldsymbol{m}, N, N, \boldsymbol{m}, N, N, \ldots$ e ci sono almeno quattro **1** (due per ogni $\boldsymbol{m}$) nella parte $\boldsymbol{m}, N, N, \boldsymbol{m}$ di lunghezza $2N-2$ da cui $K \le 2N-2$

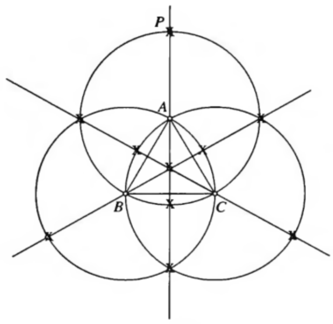
- in $(N+1) = 2,4,8,16,...$ *pari* il periodo è $\boldsymbol{m}, N+1, N+1$, con $\boldsymbol{m}$ di lunghezza $2N$ e i K termini non coprono nemmeno questa parte, quindi $N+1$ (assente in $\boldsymbol{m}$) è escluso e (b) non vale.

In definitiva il problema non ha soluzione.

E questa è una delle cose che avrebbe scoraggiato chiunque, ma si sa, i nostri lettori sono fatti della stessa materia di cui sono fatti i sogni, e proprio per questo ci permettono di continuare a sognare. Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Sia ABC un triangolo equilatero, e P un punto del piano tale che i triangoli PAB, PBC e PCA siano isosceli. Quante posizioni sono possibili per il punto P?

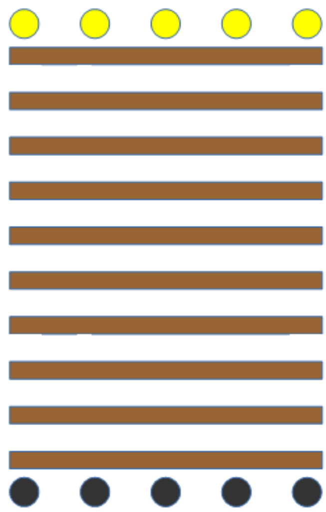


*Con riferimento alla figura, il triangolo PAB sarà isoscele se PA = PB, ma lo sarà anche se PA = AB o se PB = AB. Ricordando che il triangolo è equilatero, ci sono **dieci** punti possibili per il punto P.*

6. Zugzwang!

Questa volta, se la cosa è poco chiara prendetevela con A&S: secondo noi, lo hanno spiegato malissimo.

6.1 Puluc



Questo gioco arriva dagli indiani Ketchi, che come tutti voi sanno popolano il Guatemala.

I ***giocatori*** sono due, e sin qui tutto chiaro: poi, cominciano i guai.

La ***scacchiera*** è una qualsiasi zona divisa in undici settori da dieci linee (i due "fondi", dove ci sono i giocatori, non ci pare necessario delimitarli), e vi servono, come ***pezzi***, cinque "pedine": secondo noi, più sono grandi più il gioco è divertente, anche se (v. dopo, "cattura") sconsigliamo i pezzi viventi con maschietti contro femminucce, peccato, sarebbe un bel gioco da spiaggia per l'estate.

La ***disposizione iniziale*** la trovate nella figura a fianco. I colori ve li spieghiamo dopo, ma sappiate che dove sono posizionate le pedine è, per il rispettivo giocatore, il "villaggio".

Il ***turno di gioco*** (no, A&S non ci hanno detto che colore comincia per primo) consiste nel lanciare quattro monete, e nel contare le "teste". E qui, cominciano le cose strane.

Se ottiene ***zero*** teste, muove una propria pedina di quattro caselle. Se ottiene ***una*** testa non fa nulla (e il suo turno è finito), per qualsiasi altro valore muove una pedina del numero di teste ottenuto.

Piccola pausa, con la spiegazione dei colori: visto che si gioca per terra, le "caselle" sono, tradizionalmente, definite da bastoncini, quindi da questo potete capire il color "legno" delle righe. Quello che ci ha divertito di più comunque è il fatto che *non si usano delle monete*, ma dei chicchi di mais con due facce bruciacchiate e due "sane": non esistono "testa" o "croce", ma ogni giocatore considera "testa" il *proprio colore*. Abbastanza divertente, anche se è facile barare[24].

[24] Ci sarebbe da scrivere un libro, su "I sostituti dei dadi in attesa di raggiungere la precisione dovuta per farne uno decente". Ecco, a proposito di libri... dimenticato niente, questo mese?

Una pedina (oh, tra l'altro: sono note come ***guerrieri***) muove sempre verso l'altro villaggio; se lo oltrepassa, torna al proprio villaggio (A&S non ci spiegano se "continua a muoversi" – come se si giocasse su un cilindro, per intenderci – o se si ferma e al prossimo tiro riparte. Noi preferiamo la prima ipotesi, ma per motivi unicamente geometrici[25]. Comunque, un guerriero si muove sempre in avanti, con un'eccezione.

Infatti, la ***cattura*** di un guerriero avviene quando un guerriero della parte avversa arriva, con un "tiro di mais", nella sua stessa casella: in questo caso, il guerriero catturato viene messo *sotto* il catturatore e il catturatore muove *all'indietro* verso il proprio villaggio *[Capito, perché sconsigliavamo maschietti contro femminucce?]*. Quando lo raggiunge (sia con tiro esatto che sovrabbondante), il guerriero catturando resta nel villaggio pronto a ricominciare, mentre il catturato esce dal gioco.

Esistono alcune ***situazioni particolari***: un guerriero non può occupare una casella già occupata da un proprio compagno, a meno che quel compagno sia catturato: nel qual caso, il nostro guerriero iniziale diventa catturatore e si "tira dietro" tutti quanti verso il proprio villaggio (sì, anche il compagno). Si noti ce questa "pila" può essere a sua volta catturata, e avanti in questo modo (in pratica, "comanda il guerriero di sopra"): quando finalmente arriva ad un villaggio, tutti i guerrieri di quel villaggio ricominciano, mentre tutti i guerrieri dell'altro sono eliminati dal gioco.

Beh, per passare mezz'oretta in compagnia di una birretta estiva, forse può anche andare bene… Se qualcuno poi vuole organizzarsi la scacchiera in mogano e acero, con pedine in nuance e dado opportuno, nulla in contrario, per carità.

Già, il dado… Uhmm...

7. Pagina 46

Essendo l'angolo in Q uguale all'angolo in R, il triangolo AQR risulta essere isoscele.

Quindi, essendo QAR = 180° – $2x$, si ha, per l'angolo esterno:

$$SAB = 180° - (180° - 2x) = 2x.$$

Ma se il triangolo SAB ha angoli interni x, $2x$, $2x$, allora questi devono valere 36°, 72°, 72°, e quindi il triangolo SAB è un triangolo aureo, e quindi il rapporto tra i cateti e la base del triangolo vale:

$$\phi = (1+\sqrt{5})/2,$$

e quindi SA = SB = ϕAB, ossia

$$SA + SB = 2\phi AB$$

e, nello stesso modo,

$$QB + QC = 2\phi BC$$

e similmente per tutti gli altri triangoli.

I primi membri delle cinque espressioni ricavabili, sommati al perimetro p del pentagono convesso ABCDE sono pari all'intero perimetro del pentagono stellato PQRST, e quindi:

$$1 = 2\phi\,(AB + BC + CD + DE + EA) + p = 2\phi p + p = p\,(2\phi + 1).$$

da cui,

$$p = \frac{1}{2\phi+1} = \frac{1}{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}-2$$

che è il valore cercato.

[25] Uhm... Potrebbe essere carino avere *un'altra* scacchiera... insomma, come se si giocasse su un cilindro, con i due villaggi agli antipodi uno dell'altro... No, forse è un'idea troppo matta anche per gli indiani "Ketchup"...

8. Paraphernalia Mathematica

...roba grossa, stavolta...

8.1 Le Leggi dei Numeri VERAMENTE Grandi [001] – I primi due passi

Andiamo veloci, che la strada è lunga. Quella del "milione, bilione, trilione... vingitilione" la sapete tutti, quindi ne parliamo dopo; per adesso, partiamo dal fatto che con questa non si arriva a niente, e sarebbe meglio mettere un po' di ordine.

Qui, a mettere ordine ci ha provato un Grande: nella fattispecie, ***Douglas Hofstadter***, in un articolo pubblicato nel 1982 SciAm, definiva i "livelli delle realtà percettive": nei reprint[26] cambiava il termine "livelli" in "classi", e noi (una volta tanto) siamo d'accordo con lui; non solo, ma quello che ci diverte maggiormente è che queste "classi", pur riconoscendone tutti l'esistenza, non possiamo definirle unicamente, visto che sono soggettive.

Partiamo da un esperimento: ho buttato alcune (poche, siamo poveri) monete da due euro sul tavolo. Senza *contarle espressamente*, vi accorgete che sono quattro. Bene, per voi "quattro" è un numero di ***Classe* 0**.

Adesso, pensate a un mucchio di cose. Nel senso di un sacchetto di biglie, un piatto di spaghetti, una manciata di graffette sulla scrivania, o cose del genere.

"Quanti sono?"

"Mah, un centinaio?"

"Potresti essere più preciso?"

… a questo punto, vorreste contarli. Liberi di farlo, ma *non potete muovervi voi e non potete muovere l'oggetto*. Insomma, riuscite a "maneggiarli con la testa". Questo "centinaio", per voi, è un numero di ***Classe* 1**.

Adesso, andiamo sul difficile.

Sapete come si scrive "un miliardo, duecentosettantanove milioni, trecentoquarantasettemila duecentododici"? E sapete scrivere "A", il numero di Avogadro[27]? O un Googol? O il numero dei protoni nell'universo[28]? OK, avete appena incrociato dei numeri di ***Classe* 2**.

Sia detto senza offesa: se a questo punto secondo voi è tutto chiaro, limpido e codificato, non avete capito niente. Già, perché anche solo qui, per ogni classe potete tirare fuori delle obiezioni mica da ridere:

In ***Classe* 0**, io arrivo fino a "6", mia moglie fino a "5" e uno dei miei figli (che non nominiamo per evitare che si vanti del fatto) fino a "8".

Sulla ***Classe* 1**, provate a pensare alla divisione di una cofanata di spaghetti in sei, e già avete trovato il problema.

In ***Classe* 1**, è tutta colpa di Peletier e Chuquet[29]: infatti, dovendo "dare un nome" a questi numeri, se ne partono a grandi balzi e definiscono:

$$1.000.000 = 10^6 = \textit{un milione}$$

$$1.000.000.000.000 = 10^{12} = \textit{un bilione}$$

$$1.000.000.000.000.000.000 = 10^{18} = \textit{un trilione}$$

[26] D.H. Hofstadter, *Methamagical Themas*, book collecting several articles from the Scientific American column of the same name, BasicBooks (1985), ISBN 0-465-04540-5.

[27] Approfittiamo del momento per una veloce barzelletta: 1 Guacamole = 1 mole / A [*Se non l'avete capita: fa una Mole-Cola, giusto per aggiungere un'altra battutaccia (l'avete assaggiata? Vale la pena. Opinione personale, sia chiaro). RdA*].

[28] 10^{80}. Non l'abbiamo specificato, ma la notazione scientifica "vale".

[29] Non evidenziati, così imparano a combinare guai. E proibiamo formalmente a Doc di scriverci un compleanno, su 'sti casinisti.

…

…e quelli in mezzo? Ve li manteniamo nella grafia originale perché è molto carina: si chiamano *un milliart*, *un billiart*, *un trilliart* e avanti: insomma "ion" e "iart" si alternano.

Nel caso voleste fare i raffinati, questa è nota come ***Long Scale*** (non abbiamo trovato una traduzione italiana decente). Il che, dovrebbe farvi porre la fatidica domanda: "…e come funziona (posto che esista) la ***Short Scale***?"

Esiste, tranquilli. E la conoscete. Qui, il *bilione* vale 10^9, il *trilione* 10^{12}, e avanti in questo modo; vi lasciamo ricavare (è matematica elementare) che cosa scrivere sul "quantilione" o il "qualcosardo", in funzione del numero di zeri. Insomma, una fa i "salti da sei", l'altra fa i "salti da tre" (zeri).

"Oeu, Rudy, guarda che a me i numeri me li conta il computer!" Ecco, e qui nasce un guaio. Infatti, il ***Sistema Internazionale*** prevede i prefissi *Kilo*, *Mega*, *Giga*, *Tera*, *Peta*, *Exa*, *Zeta*, *Yotta*, ma se passiamo all'informatica queste non rappresentano potenze di dieci, ma di due, forti del fatto che $2^{10} \approx 10^3$: ma quel "circa" rischia di indurre in errore, quindi per quanto riguarda l'informatica i prefissi corretti sono *Kibi*, *Mebi*, *Gibi*, *Tebi*, *Pebi*, *Exbi*, *Zebi*, *Yobi*. Con gli inevitabili impresentabili giochi di parole. Ma teneteli presenti, la prossima volta che comprate una chiavetta USB.

Quando la matematica comincia a somigliare al gomitolo della nonna dopo che è passato il gatto, avete due certezze.

La prima, è che ***Conway*** sta per dire la sua:

- Prendete la potenza di 10 cui volete dare un nome e sottraete 3
- Dividete per tre: se il resto è:
  - 0: mettete "1" all'inizio del nome
  - 1: mettete "10" all'inizio del nome
  - 2: mettete "100" all'inizio del nome
- Se il quoto è minore di dieci, utilizzate gli standard "milione, bilione, trilione,…, nonilione"
- Spezzate il quoto in unità, decine, centinaia e trovate il corrispondente termine per l'opportuno segmento nella seguente tavola *(attenzione agli oggetti tra parentesi: servono dopo).*

	1 (Unità)	10 (Decine)	100 (Centinaia)
0			
1	un	(n) deci	(nx) centi
2	duo	(ms) viginti	(n) ducenti
3	tre(*)	(ns) triginta	(ns) trecenti
4	quattuor	(ns) quadraginta	(ns) quadrigenti
5	quin	(ns) quinquaginta	(ns) quingenti
6	se (sx)	(n) sexaginta	(n) sescenti
7	septe (mn)	(n) septuaginta	(n) septigenti
8	octo	(mx) octoginta	(mx) octingenti
9	nove (mn)	nonaginta	nongenti

- Mettete assieme i termini: se tra due termini che unite assieme c'è una parentesi e dentro le parentesi c'è una lettera in comune, mantenete quella lettera, altrimenti ignoratela.
  - Caso particolare: nel caso di *tre* (dove c'è l'asterisco), inserite una "s" se concorda con una "s" o una "x".
- Rimuovete la vocale finale, se esiste.
- Aggiungete "il(l)ion(e)" *alla fine.*

Carino, vero? Ma come tutti i sistemi teoricamente arzigogolati, ha qualche "bachetto". Per esempio, il fatto che alcuni numeri clamorosamente distanti tra di loro abbiano dei nomi che si somigliano parecchio. Ad esempio, 10^{309}=du**o**centilione, mentre 10^{603}=ducentilione; i più divertenti, comunque, sono 10^{312} e 10^{903}, che coinvolgono anche una regola di fonetica italiana[30].

La seconda certezza (era ancora in sospeso: avete retto alla suspence?), è che se da qualche parte ci ha messo il naso Conway, prima o poi ce lo metterà anche Knuth: e infatti, ha inventato un modo di far di conto tutto suo andando contro, come d'uso per lui, la regola basilare.

I numeri non si contano più a gruppi di tre, ma a gruppi di quattro. Che, al loro interno, viaggiano a gruppi di due.

Quindi, 1957 si legge diciannovecento cinquantasette, abrogando il termine "mille"; quando arriviamo al "nostro" diecimila (che Knuth scrive come 1,0000), lo chiamiamo "miriade", e quindi 4309,8127 si legge quarantatrè cento nove miriadi ottantun cento ventisette.

Il bello del modo di Knuth è che al prossimo passo *cambiamo il segno di divisione* (e chiamiamo il numero "myllion": si legge un qualcosa del tipo "maillion" in italiano). Forti delle nostre conoscenze di finlandese, lingua nella quale la "y" si legge come una "u" chiusa, proponiamo la traduzione "mullione". Quindi, quelli che per noi sono cento milioni, per Knuth sono:

$$10^8 = 1;0000,0000 = \text{un mullione.}$$

...e avanti in questo modo, cambiando di nuovo il segno di divisione quando è il caso: quello dopo è il "duepunti", e quindi:

1844:6744,0737;0955,1616 = diciotto cento quarantaquattro bullioni sessantasette cento quarantaquattro miriadi sette cento trentasette mullioni nove centocinquantacinque miriadi sedici cento sedici.

Se l'avete letto tutto, vi siete accorti che all'interno di ogni blocco si segue una gerarchia (ci sono le "miriadi di mullioni", espressione bellissima che abbiamo intenzione di adottare), il che significa che *dovete usare un nome nuovo quando avete finito di nuovo quelli vecchi* (dove "nuovo" sta per "nome alla Knuth", con la "u", mentre "vecchio" sta per "nome secondo la Short Scale", quello con la "i"), ossia *ogni* [numero rappresentato da un]*nome nuovo è il quadrato del* [numero rappresentato dal] *nome precedente*. Per capirci, un mullione è il quadrato di una miriade, e un bullione è il quadrato di un mullione.

In questo modo, una cosina semplice come il vingitullione è già un aggeggio rispettabile come $10^{4194304}$, e siamo un pochino oltre quello che è abitualmente considerato il limite della Classe 2.

Già, stavamo parlando delle classi... Ecco, usando la notazione dell'accento circonflesso per indicare l'elevamento a potenza (comincia ad essere necessario), convenzionalmente si pongono i limiti superiori come:

Classe 0: 6^1

Classe 1: 10^6

Classe 2: 10^(10^6)

Il prossimo passo dovrebbe risultarvi immediato... ma ne parliamo un'altra volta.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

30 Il primo si chiama trescentilione, mentre il secondo trecentilione. Secondo gli inglesi "sc" si legge sempre come se fosse scritto "sk", mentre secondo gli italiani non ci sono eccezioni: davanti alla "e", si legge sempre come in "scena". E adesso scervellatevi pensando a quante volte avete sbagliato la parola "scervellarsi". La Crusca dice che anche questa non fa eccezione.