Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 218 – Marzo 2017 – Anno Diciannovesimo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM217 ha diffuso 3'180 copie e il 12/03/2017 per Google eravamo in 7'460 pagine.

Alan Bennett è riuscito a costruire tre bottiglie di Klein una ~~dentro fuori vicino sopra l'altra~~. Insomma, ha fatto tre bottiglie di Klein insieme.

1. Pronubica

"Sembra sempre
impossibile, finché
non è fatto"
(Nelson Mandela)

{*Si vede benissimo che ha una voglia matta di sapere cosa ci sia dietro quella porta.*

Del resto, come non capirlo? La casa avrà in tutto meno di settanta metri quadrati calpestabili: appena si varca l'uscio, sulla destra c'è la porta della cucina, in cui un tavolo da quattro persone entra solo se lo si schiaccia contro la parete; tre passi lungo l'ingresso e questo già finisce nella stanza che forse adesso si chiamerebbe "living", ma allora si chiamava solo "sala", e ospitava nel suo approssimato rettangolo di tre metri per quattro sia il tavolo per i pasti, sia la televisione, sia un divano-letto, che solo da poco tempo aveva sostituito un lettuccio a una piazza. A fianco della sala si apriva la camera matrimoniale di mamma e papà, poi il bagno (niente doccia, solo la vasca: e di quelle corte, con dentro lo scalino, che allungarsi in vasca era lusso consentito solo ai minori di otto anni), e infine sulla sinistra della porta d'ingresso, l'altra camera, nota nel lessico famigliare come "cameretta".

Casa popolare, operaia: casa piccola, specie per una famiglia canonicamente composta da cinque persone, che ai quei tempi tre figli erano quasi uno standard. La si poteva vedere tutta restando nel centro del piccolo ingresso, perché le porte restavano sempre rigorosamente aperte, anche quella del bagno. Spesso era aperta anche la porta d'ingresso; e se non lo era, aveva comunque le chiavi perennemente infilate nella toppa esterna, così si poteva entrare come e quando si voleva, senza rompere le scatole a chi era in casa. Per questo una porta chiusa era già un mistero da indagare.

Mio cognato (che non era ancora mio cognato) me lo ricordo come fosse un adulto già in grado di possedere il mondo e dirigersi a passo deciso verso il futuro, ma oggi mi rendo conto che allora era solo poco più che un ragazzino. Doveva avere meno di venticinque anni e addosso tutta la normale curiosità e l'intraprendenza caratteristica di quell'età: e forse pure la timidezza, diamine; era da poco che era "fidanzato in casa", come si diceva, e da poco calpestava i pavimenti d'orrida e proletaria graniglia dei suoi futuri suoceri. Mia sorella (che invece era già mia sorella) era attraversata da emozioni al tempo stesso simili e complementari. Mio cognato faceva l'università, era figlio di un maestro, ci teneva ad apparire sempre in forma e ben vestito; insomma, quasi borghesia medio-alto, dal nostro punto di vista; lei, innamoratissima, voleva fare (e far fare alla famiglia tutta) la migliore impressione possibile. Quindi, la porta della cameretta doveva restare chiusa, per forza. Assolutamente chiusa, e sì che l'avverbio "assolutamente", ormai così frusto, a quei tempi non si spendeva facilmente.

Così, il canonico copione si stava ripetendo ancora una volta: il campanello del portone che annuncia l'arrivo, mia sorella che scatta a velocità comparabile a quella della zampa d'un gatto diretta verso la preda e corre a chiudere la porta della cameretta, quindi si precipita alla porta d'ingresso. Tutto in meno di quattro secondi, giusto quelli che servono al fidanzato per superare i nove scalini che separano la strada dall'uscio. Poi lui chiede permesso, entra, saluta mia madre che forse sta preparando le fettuccine sulla spianatoia; e subito viene guidato da mia sorella verso la sala, dove probabilmente io sto occupando il tavolo per fare i compiti di terza media e mio padre sta su una sedia a guardare la televisione o a *leggere un libro. È nei citati tre passi dell'ingresso che gli si legge in faccia la curiosità generata dalla porta chiusa della cameretta: curiosità che ha per complemento, per contrappasso, per reazione di newtoniana memoria gli occhi sbarrati di mia sorella, che troveranno pace solo quando riuscirà a farlo sedere in sala, al sicuro.*

Ma un giorno – era inevitabile – l'inevitabile accade. Il rito si stava ripetendo come al solito, e forse già il secondo passo nell'ingresso era stato completato, quando dalla porta del bagno esce mio padre. Neanche il tempo di salutare il futuro genero che i suoi occhi azzurri colgono la curiosità in quelli neri del giovanotto. Le due coppie d'iridi maschili si riconoscono e si intendono, gettando nella più cupa disperazione quelle femminili, azzurre e bellissime, di mia sorella: "Oh, giusto te! Vieni, dai… voglio farti vedere una cosa", dice allegro mio padre, mentre la sua mano già stringe la maniglia della cameretta. Mia sorella precipita nel terrore, si dispera, si dimena, lancia mute suppliche e gesticola in silenziosi affanni, pregando il genitore di non farlo: ma è evidentemente troppo tardi. La porta della cameretta si apre, le spalle di mia sorella crollano di mezza spanna: ogni difesa è ormai caduta, la porta è aperta, e adesso lui certo capirà, non potrà non capire, che la sua famiglia è infestata dalla pazzia. Del resto come altro giustificare lo spettacolo che si apre davanti agli occhi del suo ormai-forse-non-più promesso sposo? Là, nel centro esatto della stanza, campeggia enorme, trionfale, arrogante e impudente il marchingegno che avrebbe forse acceso l'entusiasmo di Tesla e magari mosso persino Faraday al sorriso: la "rota".

Il termine andrebbe forse nobilitato dalla grafia "rôta", alla toscana, ma non vale la pena di cercare quarti di nobiltà: era parola dialettale, centroitalica, e non stava a significare nulla di più di "ruota". Ma era bella, bella davvero, per dirla come una vecchia canzone; bella soprattutto ai miei occhi di tredicenne, che forse la vedevano più grande di quel che era in realtà, più magica, più scientifica. Due robustissimi cavalletti in metallo sostenevano ognuno dei pannelli di truciolato o compensato molto spesso, sui 7 o 8 centimetri, di forma quadrata, circa un metro e mezzo di lato: un robusto asse montato su cuscinetti a sfera passava per il centro dei pannelli ed era sostenuto dai cavalletti. Asse rotante che era il cuore della parte mobile, della "rota" vera e propria; un cerchio sempre dello stesso legno dei pannelli, di raggio attorno ai 70 centimetri, fissato all'albero centrale e solidale con esso, e quindi libero di ruotare. Ma questa era solo la struttura passiva, meccanica, della rota: quello che la rendeva misteriosa e affascinante erano le placche composte da centinaia, forse migliaia di piccoli magneti fissi applicati sui pannelli, e i dodici (o più probabilmente sedici) elettromagneti montati con precisione artigianale sul cerchio mobile; e soprattutto le centinaia di fili elettrici che correvano su ogni componente del marchingegno.

Ero molto affezionato a quei fili, perché contenevano il mio unico contributo fattivo alla rota: ero stato incaricato di contrassegnarli uno a uno, all'inizio e alla fine. Mio padre e miei zii mi avevano dato una serie di piccoli anelli di plastica con una cifra sopra: io dovevo comporre un numero e infilarlo a un capo del filo, e poi ripetere l'operazione, e ovviamente il numero, all'altro capo. Non saprei dire quanti fossero, ricordo solo che alcuni richiedevano anche tre cifre, e che questo infilare numeri sui cavi elettrici, quasi come le mie coetanee infilavano perline nel filo, mi riempiva d'orgoglio.

Il risultato finale era qualcosa che non sfigurerebbe, oggi, sul set di un film steampunk, anche se non si vedeva un filo di vapore; assemblata, la ruota era alta quanto una persona, e altrettanto larga: gli elettromagneti che coronavano la parte mobile erano grandi e pesanti: per ognuno di essi, una gran quantità di filo di rame avvolgeva un nucleo di lamelle di materiale ferromagnetico, e il tutto era tenuto insieme da nastro isolante nero. Il risultato finale era un blocco grande come un piccolo ananas da cui uscivano almeno quattro fili di rame, pesantissimo, probabilmente attorno ai due chili. Per quello che oggi mi sembra un tempo molto *lungo (ma forse non lo era: il tempo dei ragazzi è meravigliosamente dilatato), mio padre assemblò questi elettromagneti di sera: prendeva il numero opportuno di lamelle, e le avvolgeva di spire e spire d'uno spesso filo di rame, che a me sembrava durissimo da piegare. In seguito, dopo che il grande cerchio di legno fu opportunamente sagomato, i tre fratelli li sistemarono sulla rota.*

Non ho mai saputo dove avessero trovato i soldi per il materiale: né mio padre, né i suoi fratelli erano famosi per avere soldi da spendere. Ricordo però la soddisfazione e l'orgoglio di papà quando riuscì a farsi regalare le lamelle di metallo che costituivano il cuore degli elettromagneti: era materiale di scarto dell'acciaieria dove lavorava, e alla quale le aveva chieste. L'azienda gliele concesse (misteriosamente; mi chiedo spesso come avrà giustificato la richiesta mio padre, e come sarà stata la faccia del funzionario che acconsentì) e mio padre le portò a casa con molti viaggi in bicicletta. Non era stupito tanto d'averle ottenute, quanto piuttosto del documento di consegna, forse solo una bolla d'accompagnamento, con cui l'acciaieria aveva ufficializzato la transazione. Quel pezzo di carta ufficiale lo inorgogliva.

A costruzione ultimata, i fili si inseguivano attraverso il grande disco; non ricordo dove finissero, né come funzionassero i contatti con la parte fissa, né altro. Forse qualche elettromagnete era fissato anche nei pannelli, non ricordo neanche questo: ma di certo ricordo che i pannelli fissi erano pieni zeppi dei miei giochi di costruzione preferiti, la calamitine.

*Mai avuti i Lego, da piccolo. Nemmeno i Plastic City, o altri mattoncini simili. Ma avevo le calamitine, perdinci. Centinaia di calamitine: parallelepipedi che avevano proporzioni non troppo lontane da quelle che Arthur C. Clarke scelse per il monolite di "*2001 *Odissea nello spazio",* 1-4-9, *anche se le dimensioni erano diverse. Il lato più lungo era tra i due e i tre centimetri, e la faccia più grande aveva un perfetto foro al centro di tre millimetri di diametro, o giù di lì. Mi crearono perfino qualche problema a scuola, perché nei libri di testo i magneti erano sempre delle barrette (spesso bicolori, rosse e blu), con il polo nord e il polo sud ben collocati nelle facce più piccole del poliedro, e si comportavano di conseguenza: solo che i miei sembravano disubbidire agli esempi del libro, e mi ci volle un bel po' prima di capire il perché. I poli Nord e Sud delle mie calamitine era piazzati sulle facce più grandi, e questo cambiava parecchio. La distonia tra i sacri libri di scuola e il comportamento della natura che osservavo sul tavolo della cantina dove giocavo mi procurò un'acuta crisi kuhniana, per fortuna risolta senza troppe rivoluzioni, grazie ad un'indagine indipendente condotta a scuola con compagni di classe e professore messi alla caccia del mistero.*

La cantina era il laboratorio di papà. Tra le molte altre cose, c'erano anche alcuni piccoli dischi di vetro, una ventina di centimetri di diametro, con sopra incollate singole calamitine. Opportunamente montati, risultavano essere una sorta di modello in piccolo della rota, ma senza fili né elettromagneti: solo vetro e calamite. Dei tre fratelli, mio padre era quello che avrebbe voluto basare tutto e solo sulla geometria: mi faceva vedere il disco mobile di vetro con sopra incollate le calamite, incastrato fra due dischi fissi, che pure avevano calamite incollate, naturalmente con i poli rivolti verso quelli (identici) del disco mobile. Provando a far girare il disco, le calamite facevano resistenza, ma forzando un po' il disco scattava in avanti, quando la forza magnetica diventava non più nemica, ma facilitatrice della rotazione imposta. "Basterebbe riuscire a vincere la resistenza iniziale, e poi forse, con l'abbrivio…" mi diceva. E poi incastrava una calamitina come companatico fra due altre, con i poli identici a contatto: poi allentava un po' la pressione, e il magnete centrale scappava via sul tavolo, percorrendo un bel tratto. "Possibile che non si possa imbrigliare tutta quest'energia"', diceva. E quindi tornava a cercare la giusta posizione geometrica su come incollare le calamite.

Inutile negarlo, i tre fratelli cercavano il moto perpetuo.

Moto perpetuo che il mio genitore cercava per via geometrica, attrezzato di strumenti come quelli del mio traforo, seghetti da compensato e colla Artiglio; lo zio torinese andava invece per via teorica – almeno secondo lui – perché lui credeva nei "vortici", un po' come Cartesio. Ma forse quello più preparato teoricamente era invece lo zio francese, insomma quello che era emigrato da anni in Francia: erano gli anni in cui le capsule Apollo andavano e tornavano dalla Luna, e mi capitò di chiedergli qualcosa sull'assenza di gravità che provavano gli astronauti, o sul fatto che la Luna non cadesse, o sugli oggetti che galleggiavano nel vuoto. Mi rispose di non dar retta alla televisione, che non c'era mai assenza di gravità, e che non era vero che la Luna non cadesse: anzi, mi disse che Luna e astronauti non facevano altro che cadere, cadere continuamente, attorno alla Terra. Mi ci è voluto un po' prima di capire che la risposta che mi dette frettolosamente era molto più esatta di quanto raccontavano mediamente giornali e telegiornali.

Non li avevo mai visti tutti insieme, prima, i tre fratelli. Forse era anche la prima volta che vedevo lo zio francese, in quella primavera in cui costruirono la rota. Tra l'Umbria, Torino e Bordeaux, i lati del triangolo erano troppo lunghi e costosi da percorrere, a quei tempi. Ma quella volta c'erano tutti, e la costruirono nel solo luogo possibile: la mia cameretta. Grandiosa e futurista, pesante e misteriosa, la rota rendeva la stanza un luogo stupendo, anche se molto, molto disordinato. Era anche la sustanziazione di un'innocua vena di follia familiare, forse, ma a me piaceva moltissimo.

Si può però ben capire il terrore di mia sorella, quando infine la porta della cameretta si spalancò, mostrandosi al suo fidanzato in tutta la sua arroganza scientifico-proletaria. E lui spalancò gli occhi, e forse anche la bocca; mentre lei si nascondeva il volto fra le mani, lui entrò nel sancta-sanctorum, e rimase affascinato come solo uno studente di Lettere Moderne poteva rimanere affascinato da cotanto marchingegno. Gli girò intorno, fece domande, ebbe risposte. "Ma funziona?", chiese poi alla fine.

"È difficile a dirsi…", rispose mio padre. Provò forse a spiegare qualcosa, poi decise che era più semplice passare all'azione. Attaccò due grossi cavi ad una voluminosa batteria da automobile – qualche scintilla di prammatica brillò al contatto – e infine dette un colpo alla rota per farla partire.

E la rota girò. Girava, girava forte, spaventosa e terribile. I cavalletti vibravano, i mobili vibravano, e quasi sempre vibravano forte anche le corde vocali di mia madre: "Ma insomma! Ancora???"

Girava e girava, mettendo in crisi le riunioni di condominio e gli infissi di casa, e adesso mi piacerebbe davvero tanto ricordare, sapere come fosse davvero organizzata, strutturata, costruita. Ma non ricordo niente di più che quel poco che ho detto.

> *"Difficile a dirsi," diceva papà, "perché per farla funzionare dobbiamo dargli un po' d'energia tramite la batteria, sennò non riusciamo a superare l'opposizione magnetica."*
>
> *Alla fine, qualcuno dei fratelli riuscì a convincere un paio di ingegneri dell'acciaieria a venirla a vedere. Non ero presente, ma dicono che gli ingegneri rimasero parecchio incuriositi, e ragionevolmente stupefatti. Parlarono a lungo, e alla fine emisero il verdetto: non c'era moto perpetuo, certo no; e quello che i tre fratelli avevano costruito altro non era (seppur decisamente originale, e con un'architettura quanto mai insolita) che un grosso motore elettrico. Non so se parlarono poi di rendimento, ma ne dubito: alla fin fine, per abbattere l'attrito dell'albero rotante mio padre e i miei zii non esitavano ad usare l'olio d'oliva, in mancanza di meglio. E oggi, ripensandoci, immagino che la batteria doveva scaricarsi assai in fretta.*
>
> *Ma la storia finì comunque bene: quello che ancora non era mio cognato, ancorché accusare gli ascendenti e i parenti di mia sorella di manifesta follia, si entusiasmò e si affezionò al futuro suocero, e qualche anno dopo imbastì il migliore dei matrimoni della storia della mia famiglia. Io dormii in compagnia della rota ancora un bel po', finché non venne il momento di smontarla. Finì a pezzi in cantina, dove a lungo ritrovavo calamitine, bobine, e fili elettrici con i numeretti di plastica che vi avevo infilato.*
>
> *La mia carriera di fisico sperimentale finì così, a tredici anni; quella di fisico teorico, non è mai cominciata; ma quando incontro qualcuno che dice che la fisica è noiosa, beh… non posso che pensare che sfortuna abbia avuto, lui, a non avere una rota in camera, da ragazzino.}*

Quasi tutte le regole dei "compleanni" di RM sono state brutalmente violate. Da che mondo è mondo (e da che RM è RM), gli articoli della Prestigiosa Rivista devono appunto spacciarsi per tali, prestigiosi, insomma. Non per niente usiamo un font ricercato ed elegante, un'impaginazione che vanta innumerevoli tentativi di imitazione e nugoli di note a piè di pagina: gli articoli prestigiosi è così che fanno, e così facciamo noi da anni, pur di sembrare seri e autorevoli. I compleanni, poi, in qualità di articoli d'apertura e con tutte le responsabilità che da questa posizione derivano, sono tenuti ad evitare come la peste peccati mortali quali la scrittura in prima persona singolare, le deviazioni dalla narrazione saggistica e impersonale, e soprattutto qualsivoglia abominio autobiografico. Ebbene, non si può certo dire che i sacri comandamenti siano stati sempre rispettati, ma stavolta si è evidentemente esagerato.

Ma ormai il guaio è fatto – e fatto alla grande – quindi non ha senso tentare di rimediare: anzi, tanto vale a questo punto perseverare nella violazione, etichettare il compleanno presente come del tutto anomalo, e continuare come si è cominciato, aggrappandosi alla tenue speranza che l'eccezione, per quanto mastodontica, faccia la brava e si dia da fare per confermare la regola.

Gli è che il tempo è tiranno, come diciamo spesso (anche se, di solito, garbatamente extra-testo, o al massimo in nota a piè di pagina) ma, ancor più che tiranno, è soprattutto dannatamente scarso. La primavera è foriera non solo di cieli azzurri e primule, ma anche di una gran quantità d'ordinario lavoro, cosa che mette regolarmente in crisi i tre redattori di RM. Nello specifico, Marzo è arrivato un po' a tradimento, quando il tapino estensore di queste note aveva imprudentemente seguito l'irragionevole impulso di scrivere un pezzo autobiografico per Medium[1]. Una volta egoisticamente soddisfatto

[1] Qualora non lo conosciate, Medium (www.medium.com) è un posto per grafomani: sberleffando la logica twitteriana del "più corto è meglio è", denuncia nel nome la disponibilità ad ospitare articoli di media lunghezza. Soprattutto, ci scrive gente in gamba come Peppe Liberti, Popinga e PuntoMauPunto, per non parlare di altri; così, un po' per accidenti e un po' per invidia, siamo caduti in tentazione. A margine: il pezzo scritto su Medium è sostanzialmente identico a quello con cui abbiamo ammalorato le prime pagine di questo compleanno: lì è un po' più lungo solo perché, per pudore, abbiamo emendato in questa versione per la Prestigiosa Rivista i nomi, i

l'impulso, quel che rimaneva era un ritardo abominevole sulla deadline di consegna del compleanno. E l'unica via possibile per ridurre almeno un po' il ritardo era provare a riciclare il pezzo per trasformarlo in una sorta di mezzo (se non addirittura tre quarti) di compleanno.

Esistono almeno un paio di agganci, nel raccontino, per provarci: uno vergognosamente esplicito, uno un po' meno, anche se probabilmente più significativo. Quello esplicito è che il protagonista di questo compleanno viene citato nella storiella di famiglia, il secondo è invece quello che giustifica il titolo di quest'articolo.

Il matrimonio è davvero difficile da definire. I vocabolari italiani[2] solitamente restituiscono come prima voce "Unione legittima tra un uomo e una donna…", o qualcosa di simile, in cui compaiono comunque i termini "unione", "uomo", "donna" e aggettivi o avverbi che ne ribadiscono la legittimità; taluni si spingono a specificare che la legittimazione può essere d'origine civile o religiosa, e altri esplicitano anche la procreazione come scopo primario dell'unione. In inglese, il Collins usa una prudenza maggiore, figlia dei tempi: permane il concetto di unione e il connotato della legalità, ma tra generiche "two people". Analoga prudenza usa il Webster ("married persons", "individuals"), mentre il francese Larousse si pone a mezza via grazie ad una parentesi, definendolo "atto solenne attraverso il quale un uomo e una donna (o, in certi paesi, tra due persone dello stesso sesso) stabiliscono fra loro un'unione…".

Non è certo il caso di indagare oltre: le lingue sono figlie dei tempi e specchi delle culture, e si potrebbe parlare a lungo su come possano adattarsi – e separarsi nei significati – in funzione della storia e della geografia. Virtualmente tutti gli elementi che concorrono alle varie definizioni della parola "matrimonio" possono essere passibili di variazioni o eliminazioni: lo mostrano le cronache recenti in merito all'elemento cruciale del sesso dei contraenti, ma si potrebbe parimenti aprire una vasta concione sul concetto di "legale", visto che con ogni probabilità qualcosa di assimilabile al matrimonio esisteva già prima dell'istituzione del diritto, o anche sul numero stesso dei protagonisti, che è quasi immancabilmente ricondotto a due, ma che potrebbe essere sottoposto a critica da qualche cultura di tradizione poligamica.

In realtà, l'aspetto che si vorrebbe indagare è semplicemente quello dell'utilizzo della parola "matrimonio" come metafora, e in particolare come metafora scientifica. In tutte le definizioni concorre infatti il concetto di "unione", e quasi inevitabilmente tutte le lingue indugiano nell'usare il termine "matrimonio" come sinonimo di "unione stretta". Nella scienza si ricorre raramente a una tale similitudine, e quando lo si fa è perché si ritrovano dei connotati davvero fortemente simili tra due concetti che in precedenza sembravano profondamente distinti. Ancora più spudoratamente, in genere accade quando la relazione, più che di somiglianza, è esplicitamente di identità, forse perché le scienze esatte sono aduse ad operare prevalentemente con delle equazioni.

I fisici indagano il mondo, e certo ognuno di essi sarebbe felice di trovare le spiegazioni per ogni fenomeno possibile: ciò nondimeno, se per magia ottenessero un insieme di formule (una dozzina, o cinquantatré, o trecentosette) in grado di fornire una spiegazione completa dell'universo, probabilmente la loro incontenibile gioia sarebbe comunque viziata da un piccolo tarlo, quello di non poterle ricondurre ad un'unica, sola equazione (e preferibilmente semplice ed elegante). I grandi risultati della fisica sono infatti, quasi immancabilmente, riconduzioni ad un unico modello di sezioni inizialmente ritenute distinte: la gravitazione universale di Newton ha nell'attributo "universale" la sua connotazione più pregnante, perché riconduce ad una sola teoria la natura dei fenomeni terrestri e quella dei fenomeni celesti, che a quei tempi venivano ancora, aristotelicamente, ritenuti separati; le equazioni di Maxwell demoliscono definitivamente

cognomi, le date e qualche spurio dettaglio famigliare; non vale certo la pena di andare a cercarlo, è praticamente identico a quanto ingabbiato dentro le due parentesi graffe.

[2] Non possiamo certo generalizzare, la ricerca è stata tutt'altro che scientifica. Il termine è stato rapidamente consultato sul dizionario Sabatini-Coletti, sull'Hoepli, sul Treccani e sul dizionario Pianegiani. Tutti nella versione online.

la distinzione tra fenomeni elettrici e magnetici, e come buon peso inseriscono la teoria della luce nello stesso contenitore; la rivoluzione einsteiniana parte da un titolo apparentemente molto specifico, l'elettrodinamica dei corpi in movimento, per giungere a ridefinire i concetti fondamentali di spazio e tempo, correggere la dinamica gravitazionale e, quasi come occasionale side-effect, dimostrare l'identità tra massa e energia; Dirac fa da officiante al matrimonio tra meccanica quantistica e relatività, e in quasi tutti i laboratori del mondo si sta ancora cercando di far convolare a giuste nozze la gravità con il Modello Standard.

Per i matematici, questa pulsione a porsi come pronubi di teorie distinte appare meno esasperata, ma in realtà è solo apparenza. Se i fisici possono, almeno in teoria, dedicarsi a studiare una certa classe di fenomeni senza per questo avere una conoscenza approfondita di altri campi di indagine, i matematici hanno meno libertà di scelta. È indubbio che i campi di ricerca matematica sono ormai tanti e tali da non poter neanche immaginare che un singolo individuo sia in grado di essere esperto di tutti, ma resta il fatto che l'oggetto dello studio del matematico ha dei vincoli di coerenza interna che altri studiosi non hanno allo stesso grado. Per contrappasso e per bilanciamento, i fisici devono costantemente fare i conti con il risultato degli esperimenti, mentre per i matematici la parola "esperimento" è quasi senza significato professionale.

Nonostante le cruciali distinzioni testé elencate, anche i matematici sono talvolta attori e testimoni di unioni solide e durature, imprevedibili e prolifiche. È probabile che la più eclatante di queste sia quella che venne celebrata in Francia, nel diciassettesimo secolo, tra l'algebra e la geometria.


1 *René Descartes (insomma, Cartesio)*

René Descartes nasce il 31 marzo 1596 in una cittadina che allora si chiamava La Haye[3] en Touraine, e che oggi si chiama Descartes in onore del suo celeberrimo figlio.

Oltre a regalare il nome alla sua città d'origine, Descartes è uno di quegli uomini la cui grandezza gli ha riservato un nome in forma latina (Renatus Cartesius) e soprattutto un'aggettivazione, "cartesiano", che palesa la fondamentale importanza della sua opera.

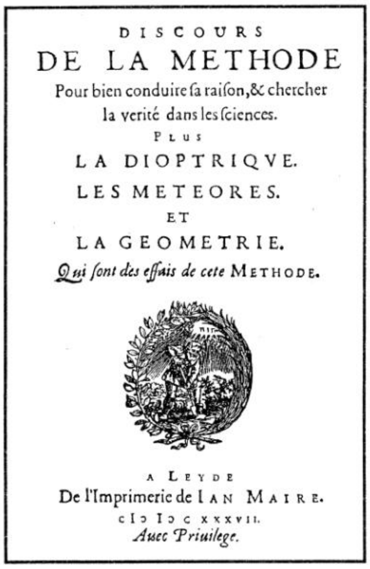
Perse la madre in tenerissima età e, come talvolta accade in casi così tristi, mostrò quasi per reazione alla disgrazia una precocità intellettuale fin da giovanissimo. Entrò in collegio a undici (o forse addirittura solo a nove) anni, e vi rimase fino ai diciotto. Se la sua intelligenza appariva subito forte e solida, non era certo lo stesso per la sua salute: in particolare, sembrava avere dei sintomi di debolezza tali che oggi si tende ad ipotizzare che fosse fin dalla più tenera età affetto da tubercolosi. Al collegio di La Flèche in Anjou i padri gesuiti che governavano la scuola gli concessero di rimanere a letto fino a tardi, a differenza dei suoi compagni: in tarda età, non ricevette lo stesso privilegio da parte di Cristina di Svezia, e forse la cosa gli risultò fatale.

Nonostante i problemi di salute, Cartesio ebbe una vita assai piena e avventurosa, specialmente per quei tempi. Si laurea in legge a Poitiers nel 1616, ma già prima di aver conseguito il titolo ha capito che non sarà il diritto l'interesse che guiderà la sua vita. Passerà la giovinezza tra corti ed eserciti, frequentando studiosi e uomini di scienza,

[3] Nome che suona proprio come "L'Aia", per dirla in italiano, e che ha quantomeno una grossa concorrente, dal punto di vista del nome, con la più celebre consorella olandese.

insomma costruendo un patrimonio di conoscenze e frequentazioni che – certo erroneamente – non si pensa che possano formare il terreno di coltura ideale per un filosofo.

Perché è questo che Descartes è senza dubbio, prima d'ogni altra cosa: un filosofo che si interroga sul mondo e sulla leggi del pensiero. E come succedeva a quei tempi, non era neppure immaginabile che un filosofo di autentica grandezza potesse non interessarsi alla matematica. Ma erano anche tempi in cui le idee scientifiche potevano mettere a rischio l'incolumità fisica di chi le presentava: Descartes per lungo tempo lavora ad un'opera, ("*Le Monde, ou Traité del la Lumiére*") in cui descrive le sue idee sul mondo fisico ma, spaventato da quanto accade proprio in quel periodo a Galileo, decide di non procedere alla pubblicazione dell'opera.



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIƆ IƆ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Per fortuna sua e soprattutto nostra, nel 1637 non eviterà però di pubblicare una grande opera dal titolo lungo e articolato, come era d'uso a quei tempi: "*Discorso del metodo per condurre la propria ragione e cercare la verità nelle scienze*", la cui introduzione passerà poi alla storia con il più sintetico nome di "Discorso sul Metodo". È l'atto che sublima una rivoluzione ormai in atto da tempo, quella che propone di cercare la verità non più sulla base di opinioni o credenze personali o condivise, ma essenzialmente sulla ragione: da quel momento, l'aggettivo "cartesiano" sarà utilizzato sempre più spesso come sinonimo di razionale.

Ma se l'introduzione è celeberrima, non sono da meno le tre parti che costituiscono il corpo dell'opera, soprattutto l'ultima; Descartes stesso descrive l'idea che ha guidato la stesura: "*Ho cercato di dare evidenza che il metodo è superiore a quello tradizionale nelle parti 'La Diottrica' e 'Le Meteore', e ho dimostrato il tutto in 'La Geometria'*".

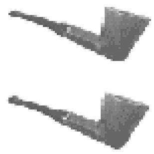
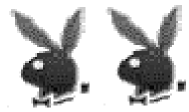
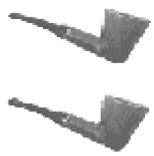
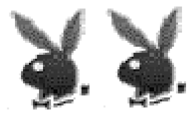
Ed è proprio nel suo "*La Géométrie*" che Cartesio si erige a officiante nuziale, unendo in matrimonio algebra e geometria, e gettando le basi della geometria analitica. Di tutto quanto egli abbia poi prodotto, non il caso di discutere in questa sede; della sua grandezza come filosofo, che lo fa ancora restare pietra miliare nella storia del pensiero moderno; delle sue teorie fisiche che, come quella citata dei vortici, non possono non sembrare ingenue a giorni nostri, pur mantenendo un certo fascino immaginifico[4]; e più in generale dell'impatto che il suo pensiero ha avuto sull'avanzamento della conoscenza.

Perché basta e avanza solo questo, per chi ha a cuore la matematica: questa stupefacente capacità di costringere l'infinita estensione di una retta euclidea – mai pienamente disegnabile – nei confini dei pochi segni di un'equazione di primo grado; o nel dar forma alle curve di Apollonio per mezzo della sintesi di una ics elevata ad un'esponente diverso da uno.

Basta e avanza, per vedersi riconosciuta la migliore approssimazione possibile al concetto di immortalità.

[4] … e che, con un po' di fantasia e un certo ammontare di spudoratezza, potrebbero quasi vedersi come un poetico antesignano della Teoria delle Stringhe.

2. Problemi

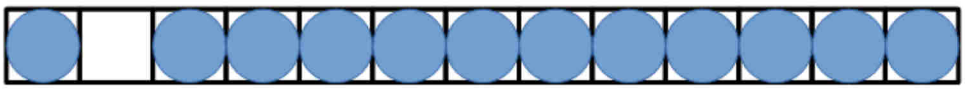
	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Un gioco veloce			
Passeggiata in città			

2.1 Un gioco veloce

Abbiamo notato un interesseccante[5] fenomeno.

Quando ci capita di presentare un problema (anche relativamente semplice) in un PM, il massimo della considerazione si ha da chi è capitato lì per sbaglio, che ci invia dieci minuti di pensieri; quando il problema (anche assolutamente complesso) viene presentato qui, si assiste a un (fortunatamente incruento) evisceramento di ogni minimo dettaglio.

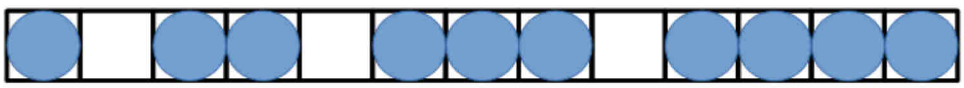
Questa volta, abbiamo piazzato i VAdLdRM di fronte a questo problema:



L'idea è che Fred e Al (gioca Fred per primo) debbano ad ogni turno prendere gettoni; possono prenderne *uno* o *due adiacenti*, a loro scelta.

Bene, chi vince?

Dopo questo veloce riscaldamento, con le stesse regole, lo Statico Duo decide di affrontarsi su un altro problema:



Qui, secondo voi, cosa succede?

Le generalizzazioni le inventate voi, non sono difficili (allungate la stringa, cambiate la disposizione... Insomma, ne avete, da esplorare). Ma se mi dite come si chiama (tipo "*ho-trovato-l'origine-del-gioco*"), mi arrabbio. Cribbio, ve lo avevo raccontato, vi avevo detto il nome e vi avevo spiegato come fare!

2.2 Passeggiata in città

Bene, visto che siamo nelle rimembranze, ricorderete sicuramente che a Montpellier esiste un quartiere (insomma, una zona… non è molto ampia) dove tutte le vie hanno nomi di fisici. Quindi, la descrizione della città qui sotto, con l'eccezione di due strani vezzi (uno relativo al fatto che solo le piazze hanno un nome, l'altro al fatto che in ogni

[5] No, non è un typo.

piazza c'è una statua raffigurante il tizio che dà il nome alla piazza) non dovrebbe sembrarvi particolarmente surreale. Ah, dimenticavo: siccome è una *smart city* (e vorrei vedere, con quei nomi), le vie che congiungono le piazze sono le più brevi possibili.

Il nostro giro turistico inizia in Piazza Abel, nella quale ci troviamo, che è congiunta da due vie alle Piazze Bourbaki e Cartesio (che sono congiunte tra di loro da una terza via); sulla via tra Piazza Bourbaki e Piazza Cartesio c'è Piazza Monge, e ci stiamo chiedendo se sia più comodo raggiungerla passando da Piazza Cartesio o da Piazza Bourbaki.

La cosa interessante è che tra Piazza Cartesio e Piazza Bourbaki esiste Piazza Diofanto, posizionata in modo tale che "non conviene passare da lì" per andare da Piazza Abel a Piazza Monge: per capirci, se Piazza Diofanto è tra Piazza Cartesio e Piazza Monge, allora sarà conveniente passare da Piazza Bourbaki, e viceversa. Non solo, ma le Piazze Eulero e Fermat giocano lo stesso ruolo di Piazza Monge nei confronti della partenza, rispettivamente, dalle piazze Bourbaki e Cartesio

La vostra guida adesso vi fa notare che le vie congiungenti rispettivamente le piazze Abel e Diofanto, le piazze Bourbaki e Eulero e infine le piazze Cartesio e Fermat si incontrano tutte in Piazza Nepero, che è un luogo importante della città (ma non vi spiega il perché, lasciando che lo capiate da soli).

Proseguendo la nostra passeggiata, scopriamo che la via (rettilinea) che unisce Piazza Gauss a Piazza Nepero ha nel mezzo una piazza, intitolata a Ipazia; non che questa via sia molto importante, visto che in tutto è lunga 200 metri; la cosa interessante è che la distanza in linea d'aria di Piazza Ipazia dalle vie che uniscono rispettivamente Piazza Abel e Piazza Bourbaki, Piazza Bourbaki e Piazza Cartesio, Piazza Cartesio e Piazza Abel è sempre la stessa, il che la trasforma in un luogo importante della città (e anche qui, la guida si tace: deve essere francese, convinta che tutti sanno tutto della Francia).

Se ora ci rechiamo in Piazza Hilbert, troviamo una strada che, proseguendo dritta oltre Piazza Gauss, ci porta in Piazza Ostrogradskj il nostro passo è ragionevolmente regolare, e scopriamo che per andare da Piazza Hilbert a Piazza Gauss impieghiamo il doppio del tempo che per andare da quest'ultima a piazza Ostrogradskj. Notiamo che le vie che uniscono questa piazza alle piazze Abel, Bourbaki e Cartesio sono di ugual lunghezza. Anche se l'abbiamo introdotta con *nonchalance*, Piazza Hilbert è anch'essa un luogo importante della città (OK, ormai della guida non ci frega più niente: lo scopriremo da soli).

Ma ormai cominciate ad essere stanchi, e state considerando quale distanza vi separa dall'albergo; noto che la via congiungente Piazza Ostrogradskj e Piazza Ipazia è lunga 400 metri, che distanza dovrete percorrere per andare da Piazza Hilbert a Piazza Newton?

Scripsit: Anno diciottesimo, Ultimo giorno di Carnevale.

3. Bungee Jumpers

A', B', C' sono i punti di contatto dei cerchi exiscritti al triangolo ABC rispettivamente sui lati BC, CA, AB. Dimostrare che il centro del cerchio circoscritto al triangolo A'B'C' è sul cerchio circoscritto al triangolo ABC se e solo se il triangolo ABC è rettangolo.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Marzo.

Dalla testata si vede chiaramente, che scriviamo queste righe da qualche tempo, e un marzo dietro l'altro, porta dietro sempre un po' di incredulità. Il Grande Capo Rudy, fondatore e mente dietro a tutto quello che pubblichiamo, l'unico che rilegge tutto, ma proprio tutto, quello che scriviamo, l'unico – dicevamo – che tiene duro e manda i suoi pezzi sempre in orario, sì proprio lui, celebra un bel compleanno rotondo quest'anno.

Noi ci proviamo, a far uscire RM in tempo per il suo compleanno, speriamo bene.

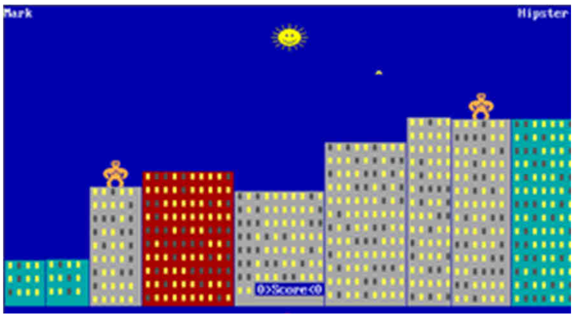
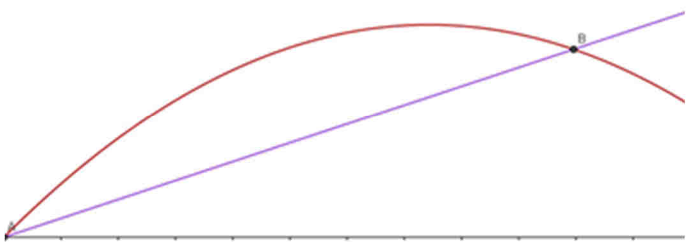
4.1 [217]

4.1.1 Applicazione scaramantica

A parte scaramanticamente sperare di poter tirare con l'arco, il problema qui presentato è un bell'esercizio di balistica:

> *Doc si è posto ai piedi di una collina di pendenza uniforme, ha alzato l'arco in modo tale da mandare la freccia il più lontano possibile sul fianco della collina e l'ha scoccata alla velocità di* 54 *metri al secondo verso la cima. La freccia ha "centrato la collina" ad una distanza di* 207,5 *metri dal punto di tiro. Qual è la pendenza della collina?*

Quando si tratta di usare le leggi della fisica, sono in pochi quelli che si fidano delle loro abilità, chissà perché. Vediamo le soluzioni giunte a noi cominciando con ***Emanuele***, proprio perché ci è piaciuta la sua introduzione:

> Questo mese la mia attenzione è caduta sul quesito relativo al lancio della freccia, ma ancora prima della freccia nella mia testa ho visualizzato le banane scagliate dai due gorilla del programma in Basic in cui i due primati antagonisti si lanciano le banane appunto che sotto la forza di gravità simulata descrivevano delle parabole. Inoltre, l'altro motivo per cui mi sono buttato a capofitto su questo problema, giusto qualche settimana prima della pubblicazione del vostro quesito stavo leggendo Mathemathican Miscellany di J.E. Littlewood, e vi era proprio il racconto di un aneddoto collegato alla balistica, branca della matematica applicata a cui Littlewood dovette applicarsi suo malgrado (fu arruolato dall'esercito per questo), taluni (in particolare il suo grande amico e collega G.H.Hardy) dissero per renderla più interessante, ma senza successo. Comunque nonostante la lettura sopra citata, il mio percorso di risoluzione è stato lungo e tortuoso, come sempre, scoprendo più di una volta che avendo interpretato male il quesito avevo intrapreso strade sbagliate.
>
> 
>
>
> Dopo questo pistolotto, perdonatemi se potete, ma mi piace scrivere di matematica e, quelle poche volte che mi riesce, di soluzioni di problemi matematici, vi scrivo circa i miei ragionamenti.
>
> Quest'ultimi si svolgono su di un piano in cui la collina diviene una semiretta che parte dall'origine con un angolo positivo (α), l'arciere (la cui altezza non viene presa in considerazione) è posto all'origine e scaglia un punto (la freccia) ad una velocità iniziale V con una angolazione (Φ).
>
> 
>
> Inizialmente ho frainteso il quesito posto, infatti avevo pensato che l'arciere avesse raggiunto la massima distanza ottenibile, sul fronte della collina, da una freccia scagliata alla velocità V. Con questa convinzione nella testa ho scoperto (dopo

svariati tentativi) che avevo interpretato male il quesito, infatti dopo aver "scoperto" che la condizione $\tan(\Phi) = 2\tan(\alpha)$ (questo risultato ve lo devo scrivere altrimenti il mio orgoglio va ai minimi termini visto che per raggiungerlo ho sprecato una marea di carta) era necessaria per raggiungere la distanza massima su una collina, ho anche scoperto che i vari tentativi di far quadrare i conti fallivano miseramente, quindi ho capito che in realtà l'arciere ha scagliato il punto in un punto al di sotto delle sue possibilità.

Dopo altri svariati tentativi, falliti, che coinvolgevano due lanci con differenti angolazioni per raggiungere lo stesso punto sulla collina ho raggiunto il nirvana... si vabbè sono riuscito a risolvere un problema a cui Alice ha dato una sola Birra.

Valori conosciuti:

L = 207.5 m

V = 54 m/s

g = 9.81 m/s^2 (valore assoluto accelerazione di gravita)

La generica formula per il calcolo parametrico (t=tempo) della traiettoria del punto scagliato è:

$$y(t) = \mathrm{V}\,\mathrm{Sin}(\Phi)\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$x(t) = \mathrm{V}\,\mathrm{Cos}(\Phi)\, t$$

Si può fare una crasi delle due formule parametriche sostituendo a t il corrispettivo valore di t in funzione di x:

$$t(x) = x/(\mathrm{V}\,\mathrm{Cos}(\Phi))$$

$$y(x) = \mathrm{V}\,\mathrm{Sin}(\Phi)\, (x/(\mathrm{V}\,\mathrm{Cos}(\Phi)) - (1/2)g\, (x/(\mathrm{V}\,\mathrm{Cos}(\Phi)))^2$$

$$y(x) = \tan(\Phi)\, x - (1/2)gx^2\, (1/(\mathrm{V}\,\mathrm{Cos}(\Phi))^2)$$

ora $(1/(\mathrm{V}\,\mathrm{Cos}(\Phi))^2) = (1+(\tan(\Phi))^2)$ e per scrivere più asciutto pongo $K = g/(2\mathrm{V}^2)$ quindi riscrivendo il tutto:

$$y(x) = \tan(\Phi)\, x - K(1+(\tan(\Phi))^2)\, x^2$$

Nel quesito era scritto circa l'angolazione di scoccata: "... in modo tale da mandare la freccia il più lontano possibile sul fianco della collina ..." questa frase parrebbe dire che l'arciere, conoscendo l'angolo α di pendenza della collina abbia fatto i suoi conti e abbia scagliato la sua freccia con un angolo Φ tale che $\tan(\Phi) = 2\tan(\alpha)$ in modo tale che l'apice del moto parabolico corrisponda esattamente con il fronte della collina. Come vi ho anticipato ho fatto un bel po' di calcoli e mi è sempre risultato che i sistemi di equazione finali (o quasi) nel tentativo di cercare un rapporto tra i due angoli mi risultavano impossibili nel campo reale. Ora posso anche sbagliarmi (come spesso accade) ma probabilmente dovevo interpretare la frase come "... l'angolo di lancio è quello che permette la massima gittata..." ... quindi 45°.

Proseguendo con questo ragionamento abbiamo che:

$$\Phi = 45° \Rightarrow \tan(\Phi) = 1$$

quindi:

$$\mathrm{P}(x) = x - 2Kx^2$$

la riscrivo semplicemente scambiando i termini (solo questione estetica rispetto alle potenze di x):

$$\mathrm{P}(x) = -2Kx^2 + x$$

che corrisponde alla funzione della parabola tracciata dalla freccia lungo il suo percorso. Il fronte della collina lo possiamo identificare con una retta la cui funzione sarà:

$$\mathrm{C}(x) = \tan(\alpha)\, x$$

le due funzioni si incontreranno in un paio di punti, il primo dei quali è l'origine (0,0) il secondo (x_0, y_0) rappresenterà il punto di impatto della freccia con la collina.

Altra condizione da soddisfare è la distanza L dell'origine dal punto di impatto (x_0, y_0), che possiamo ricavare con l'onnipresente teorema di Pitagora:

$$y_0^2 + x_0^2 = L^2$$

poniamo P(x) = C(x)

$$-2Kx^2 + x = \tan(a)\ x$$

porto il termine a destra sulla sinistra e moltiplico per (–1):

$$2Kx^2 - x + \tan(a)\ x = 0$$

$$x\ (2Kx - 1 - \tan(a)) = 0$$

$$x\ (2Kx - (1 + \tan(a))) = 0$$

le cui soluzioni sono:

$x_0 = 0$: come anticipato, questa è la soluzione banale (ho sempre desiderato scriverlo ... sin da quando ho letto degli zeri non banali di Riemann)

$x_0 = (1 + \tan(a)) / (2K)$: questa è la soluzione che prenderò in considerazione; mi ricavo y_0 sostituendo x_0 alla x della P(x):

$$y_0 = -2K\ (1 + \tan(a) / 2K)^2 + (1 + \tan(a)) / (2K)$$

$y_0 = (-2K\ (1 + \tan(a))^2 + 2K\ (1 + \tan(a))) / (4K^2)$ divido sopra e sotto per $2K$ e raccolgo $(1 + \tan(a))$:

$$y_0 = (-\tan(a)\ (1 + \tan(a))) / (2K)$$

Ora ho le espressioni di x_0 e y_0 in funzione di a, o meglio di tan(a), quindi posso continuare con l'uguaglianza:

$$y_0^2 + x_0^2 = L^2$$

$$((-\tan(a)\ (1 + \tan(a))) / (2K))^2 + ((1 + \tan(a)) / (2K)) = L^2$$

$$(-\tan(a)\ (1 + \tan(a)))^2 / 4K^2 + (1 + \tan(a))^2 / 4K^2 = L^2$$

$$(\tan(a))^2 + 2\ (\tan(a))^3 + (\tan(a))^4 + 1 + 2\tan(a) + 2(\tan(a))^2 - 4K^2L^2=0$$

$$(\tan(a))^4 + 2\ (\tan(a))^3 + 2\ (\tan(a))^2 + 2\tan(a) + 1 - 4K^2L^2=0$$

pongo $w = \tan(a)$

$$w^4 + 2w^3 + 2w^2 + 2w + 1 - 4K^2L^2=0$$

Ora ho abbastanza vergogna ad ammetterlo ma dopo aver cercato di capire come si risolvono le equazioni di quarto grado e aver fatto alcuni tentativi "manuali", ho ceduto e ho inserito i vari coefficienti su un risolutore online, che mi ha restituito due soluzioni reali e due immaginarie, quella che mi serve è una delle due reali:

$$w_1 = -0.33885$$

$$w_2 = -1.40482$$

Non avendo altre frecce nella mia faretra ed essendo esausto non ho approfondito, matematicamente parlando, quale delle due soluzioni fosse quella che a me serviva, potevo fare delle ipotesi sulla pendenza, ma ho optato per un try and error immettendo su geogebra i miei risultati scegliendo quello che mi sembrava corretto. una cosa mi è ancora scura, cioè non mi spiego come mai la restrizione L^2 restituisca comunque due soluzioni reali, quando mi aspettavo che tale restrizione dovesse restituirmi un solo valore reale.

Comunque il valore di cercato è w_1 (–0.33) siccome $w = \tan(a)$ siccome w è negativo, facendo arcotangente(w) ho un angolo negativo, il che è impossibile (la collina ha angolo positivo) quindi percorro un'altra strada e metto w al posto di tan(a) nelle espressioni di x_0 e y_0:

$$K = g/(2V^2) = 0.001682099$$

$$x_0 = (1 + \tan(a)) / (2K)$$

$$x_0 = (1 - 0.33885) / (2K) = 196.525$$

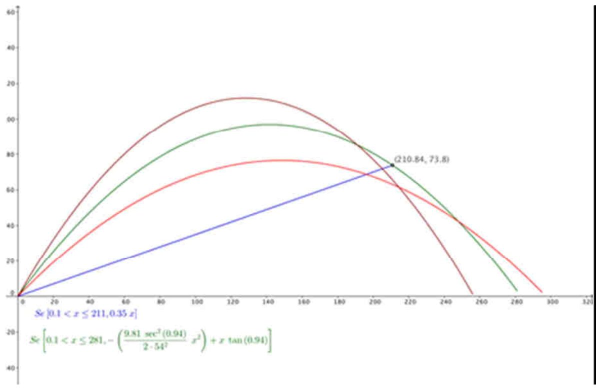
$$y_0 = (-\tan(a)\ (1 + \tan(a))) / (2K)$$

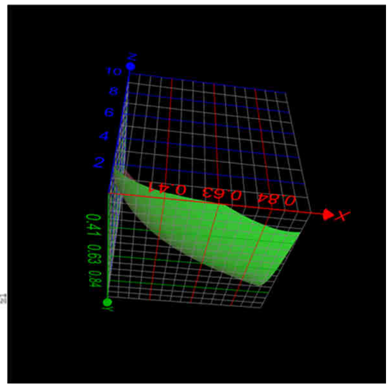
$$y_0 = (0.33885\ (1 - 0.33885)) / (2K)$$
$$y_0 = 66.592$$

ora abbiamo $\tan(\alpha) = y_0/x_0 = 0.33885$ ... esattamente $-w_1$ che corrisponde $\alpha = 18.71°$

Bene, come vedete – malgrado i dubbi – ***Emanuele*** è giunto a una conclusione. Vediamo la versione di ***Valter***, con tanto di disclaimer iniziale:

> Questo tipo di problemi sono per me quasi impossibili da risolvere perché la mia preparazione scolastica sulle leggi della fisica è praticamente nulla. Ci ho provato lo stesso andando a studiare un po' in rete. Penso di aver fatto solo della confusione comunque provo a mettere giù quanto ho capito. Anche se avesse qualche senso immagino che vi è un modo più semplice per risolvere in quanto penso che i valori di velocità e distanza non sono stati dati a caso ma potrebbero avere qualcosa a che fare con la soluzione. Sono partito da quella che mi pare aver capito essere la funzione della traiettoria della freccia:
>
> $$y = -\left(g \sec(\theta)^2 / (2\,\nu^2)\, x^2\right) + (x\,(\tan(\theta)) \text{ dove:}$$
>
> - θ è l'angolo di lancio della freccia (che è una delle 2 incognite assieme alla pendenza della collina)
> - ν è la velocità della freccia (cioè 54 ms)
> - g è l'accelerazione di gravità.
>
> Ho letto quindi che dati: R_s = distanza raggiunta dalla freccia (207.5m), **R** = distanza che raggiungerebbe la freccia se il terreno fosse orizzontale, α = angolo di inclinazione della collina, θ = angolo di lancio della freccia, vale la relazione:
>
> $$R_s/R = (1 - \cot(\theta)\tan(\alpha))\sec(\alpha)$$
>
> Sempre nella pagina a di wikipedia vedo che $R = \nu^2 \sin(2\theta)\ / g$. Ho messo tutto assieme e mi e venuta l'equazione (non ridete di me …):
>
> $$z = (207.5/(54^2 \sin(2x) / 9.80665)) - (1 - \cot(x)\tan(y))\sec(y)$$
>
> Ho letto da qualche parte (chissà se ci ho capito qualcosa ...) che gli zeri di una funzione a due incognite si possono trovare esaminando i punti critici delle sue derivate prime parziali (ma per me è troppo ...). Ho quindi dato il tutto in pasto a un calcolatore grafico 3D e mi sono cercato tali punti. Ho trovato per α circa 0.33 (cioè una pendenza di circa il 35% che dovrebbe essere la tangente di tale valore se anche qui ci ho capito qualcosa) e per θ circa 0.94.
>
> Come controprova mi sono fatto calcolare:
>
> $((54^2 \sin(2\cdot 1.276) / 9.80665) / 207.5) - (1 - (1/\tan(1.276)) \tan(0.5256)\ (1/\cos(0.5256)))$
>
> e viene effettivamente 0 con una approssimazione di 3 decimale.
>
> Con geogebra ho poi disegnato la parabola della freccia (con la funzione di cui sopra) e la retta con l'inclinazione della collina (usando il parametro della pendenza = 35, chissà se è giusto …).
>
> La distanza raggiunta dalla freccia che mi da geogebra non è proprio 207.5 ma nemmeno troppo diversa (potrebbe essere un problema di arrotondamenti del 3D e di geogebra in quanto noto che quest'ultima mi arrotonda ai 2 decimali e il primo mi da gli 0 per molti valori prossimi fra loro).
>
> Come ulteriore controprova ho verificato con inclinazioni della freccia di poco discostanti, sempre con geogebra, che effettivamente per tale velocità e pendenza della collina quella ottenuta e l'inclinazione ottimale.
>
> Sempre sulla pagina di wikipedia, se ho capito, parla di una "Rifleman's rule" che per valori piccoli della due incognite semplifica il calcolo ma alla verifica mi pare non fosse applicabile al nostro caso.
>
> Scusate se mi ripeto con i miei dubbi, è che notando la "sicumera" come dice yop con cui vengono fatte affermazioni non vorrei dare la stessa impressione.
>
> Allego immagini di geogebra e 3D:





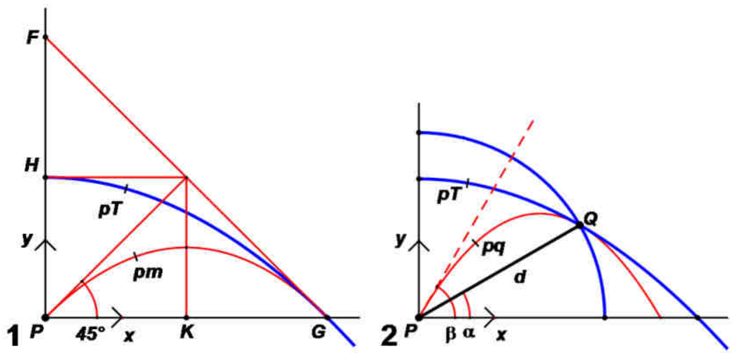
Per quanto ci riguarda, noi non siamo mai sicuri di niente. Però, ecco, di *qualcuno* siamo sicuri, per esempio ***trentatre***:

I dati del problema sono la velocità iniziale della freccia $v = 54 \ m/sec$, la distanza raggiunta $d = PQ = 207.5\,m$, l'accelerazione di gravità $g = 9.81 \ m/sec^2$. Con questi si può costruire il valore adimensionale

$$[1] \ \ k = \frac{v^2}{2g\,d} = \frac{54^2}{2\times 9.81\times 207.5} = 0.7163\,.$$

Il risultato, la pendenza della collina scritta come tangente, è funzione solo di k

$$[2] \ \ \boxed{\tan\alpha = \frac{2k-1}{2\sqrt{k-k^2}} = 0.48037} \text{ da cui } \alpha = 25°.658\,.$$



La [2] si può ricavare in modo prevalentemente geometrico, con un limitato uso di geometria analitica.

La freccia segue una parabola che parte da P con velocità v; al variare dell'angolo di lancio, tutte le parabole sono tangenti alla *parabola di sicurezza o di Torricelli* ***pT*** disegnata in fig. 1, definita da

a) vertice H: il punto raggiunto da un lancio verticale con $PH = v^2/(2g) = k\,d$

- si ottiene dal bilancio dell'energia cinetica con quella potenziale

b) punto G: $PG = 2PH = 2k\,d$

- la massima distanza orizzontale si ha con la parabola ***pm*** con angolo di lancio di 45°

- in un segmento retto di parabola le tangenti agli estremi si incontrano in un punto ad altezza doppia del vertice; da cui la costruzione in figura. La equazione di ***pT*** è dunque

$$[3] \ \ y = k\,d - x^2/(4k\,d)\,.$$

Dato un punto Q su $\boldsymbol{pT}$ (fig. 2) la parabola tangente a $\boldsymbol{pT}$ in Q (indicata con $\boldsymbol{pq}$) descrive sulla retta PQ <u>la massima distanza</u>; infatti tutte le altre parabole sono interne a $\boldsymbol{pT}$ e incidono sulla retta in un punto più vicino a P.

Poiché $d = PQ$ è nota, Q è la intersezione della [3] con il cerchio $x^2 + y^2 = d^2$ e le sue coordinate sono

$$[4] \quad x_Q = 2d\sqrt{k-k^2}\,, \ y_Q = d\,(2k-1)$$

- la pendenza della collina è $\tan\alpha = \frac{y_Q}{x_Q} = \frac{2k-1}{2\sqrt{k-k^2}}$ cioè la [2] .

NB. deve essere $0 \le k \le 1$; per $k < 1/2$, α è negativo e la “collina” è in discesa.

Tracciare la parabola $\boldsymbol{pq}$ non è necessario per il problema; in ogni modo la sua equazione è

$$y = k\cdot\frac{x}{s} - \frac{1}{4d}\cdot\left(\frac{x}{s}\right)^2 \text{ con } s = \sqrt{k-k^2}$$

- l’angolo di lancio di $\boldsymbol{pq}$ è quindi dato da $\tan\beta = k/s = \sqrt{k/(1-k)} = 1.5898$ da cui $\beta = 57°.829$

- questo corrisponde a scrivere $k = \sin^2\beta$ che inserito nella [2] dà $\tan\alpha\cdot\tan(2\beta) = -1$ da cui $\boxed{2\beta = \alpha + 90°}$ che vale per ogni punto Q su $\boldsymbol{pT}$.

Bene. A voi la decisione se approfondire ulteriormente la discussione con le effettive conclusioni: dopotutto il Doc non lancia poi tanto male, oppure è tutta una questione di pesi e gravità? Noi andiamo avanti con il secondo problema.

4.1.2 L’ufficio disorganizzativo del convegno

Questa volta nel sommario il problema è rimasto praticamente uguale a quello che ha scritto il Capo, per evitare di eliminare dati importanti…

Ad un convegno di storia della matematica, sei conferenzieri avevano preparato le rispettive conferenze su alcuni matematici e il nome del matematico (quello oggetto della conferenza) spiccava sul loro cartellino identificativo. I cartellini però sono mescolati in modo tale che nessuno ha sul bavero l’oggetto della propria conferenza.

Il tizio che avrebbe dovuto parlare di Abel ha chiesto al conferenziere che portava il cartellino di Boole: “Sei tu che parli di Carroll?”

“No; perché me lo chiedi? Il tuo cartellino non indica ‘Carroll’. Ma chi parla di Carroll dovrebbe scambiare il proprio cartellino con chi parla di Field per fare in modo che uno di loro porti il cartellino corretto. E, posto che ti interessi, io non parlerò di Dudeney”

“Per nessuna coppia di conferenzieri è possibile dire ‘Scambiamoci i badge, così entrambi avremo quello giusto’!”

“Almeno, possiamo dividerci in due gruppi in modo tale che i cartellini debbano essere scambiati solo all’interno del gruppo. Non solo, ma chi parla di Abel è in un gruppo mentre chi parla di Erdős è nell’altro”.

I conferenzieri salgono sul palco nell’ordine dei cartellini Abel, Boole, Carroll, Dudeney, Erdős, Field. In che ordine si sono svolti gli interventi?

Un bel pasticcio da farsi con solo sei conferenzieri e sei matematici! Ma i nostri lettori sono all’erta e pronti all’azione. Cominciamo con ***Valter***:

Provo a schematizzare per poi proporre la mia soluzione.

Chiamo: A,B,C,D,E,F “chi parla di …” e: a,b,c,d,e,f "chi porta il cartellino di …”.

Le condizioni imposte dovrebbero essere:

- not Cb —> ... chiesto al conferenziere che portava il cartellino di Boole: "Sei tu che parli di Carroll?" No

- not Ac —> Il tizio che avrebbe dovuto parlare di Abel … Il tuo cartellino non indica 'Carroll'

- (Cf xor Fc) —> chi parla di Carroll scambiare il proprio cartellino con chi parla di Field ... uno di loro porti il cartellino corretto

- not Db —> conferenziere che portava il cartellino di Boole … io non parlerò di Dudeney

- …nessuna coppia di conferenzieri è possibile dire 'Scambiamoci i badge, così entrambi avremo quello giusto'!"

- … due gruppi in modo tale che i cartellini debbano essere scambiati solo all'interno del gruppo

- not A. stesso gruppo E.

Ho fornito ad un "boolean algebra calculator" trovato in rete quanto ho potuto (ovvero tutto tranne le ultime tre condizioni: aggiungendo la terzultima non ho trovato in rete niente che reggesse il numero di variabili). Ho ottenuto poche soluzioni possibili nella tavola di verità che mi ha fornito (mi pare 5).

Confrontandole con le ultime condizioni è rimasto un unico abbinamento "chi parla di …" / "chi porta il cartellino di …". (E. & O. E.):

Da, Ab, Ec, Bd, Fe, Cf.

Bene, questo è l'ordine per ***Valter***, vediamo quello di ***trentatre***:

Si chiede di trovare la relazione fra a) i cartellini che ognuno porta sul bavero e b) gli argomenti che ognuno deve trattare. La soluzione è una permutazione $P = \downarrow\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$ dove i cartellini a) sono nella riga in alto, e gli argomenti b), da determinare, sono i segnaposto $\times$ nella riga in basso. Anticipo la soluzione

$$[1] \quad \boxed{P = \downarrow\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ C & E & F & B & D & A \end{pmatrix}}$$

- che si può rappresentare con i suoi *cicli* cioè con $\boxed{P = (ACF)\,(EDB)}$

- per il *ciclo* (XYZ) uso anche la notazione $(X \to Y \to Z)$ dove la freccia collega l'elemento a) e quello b); nel *ciclo*, come dice il nome, si intende $Z \to X$.

Le informazioni nascoste nel testo sono

1 *nessuno ha sul bavero l'oggetto della propria conferenza* $\Rightarrow$ non esistono cicli $(\times)$ di un solo elemento

2 *per nessuna coppia è possibile scambiarsi i badge per averli entrambi giusti* $\Rightarrow$ non esistono cicli $(\times\,\times)$ di due elementi.

Dal dialogo fra il tizio (x) e l'interlocutore (y) si ricava

3 x e y sono persone distinte (intendo *separate* !) $\Rightarrow$ $\boxed{x \neq y}$

<u>domande di (x)</u>

4 *il tizio* (x) *che avrebbe dovuto parlare di Abel* $\Rightarrow$ $\boxed{x = A}$

5 *ha chiesto a* (y) *che portava il cartellino di Boole* $\Rightarrow$ $\boxed{B \to y}$

<u>risposte di (y)</u>

6 *"sei tu che parli di Carrol ?" No* $\Rightarrow$ $\boxed{y \neq C}$

7 *il tuo cartellino non indica Carrol* $\Rightarrow \neq C \to x$ e da **4** $\boxed{\neq C \to A}$

8 *ma chi parla di Carrol dovrebbe scambiare il cartellino con chi parla di Field perché uno di loro porti il cartellino corretto* $\Rightarrow$ esiste una delle coppie $\boxed{C \to F}$, $\boxed{F \to C}$

9 *posto che ti interessi, io non parlerò di Dudeney* $\Rightarrow$ $\boxed{y \neq D}$

10 *possiamo dividerci in due gruppi in modo da scambiarsi i cartellini solo all'interno del gruppo* $\Rightarrow$ per **1** e **2** possono esserci solo gruppi (o cicli) di 3 elementi, cioè 2 gruppi del tipo $(\times\times\times)$

- *a quanto vedo chi parla di Abel è in un gruppo mentre chi parla di Erdos è nell'altro* $\Rightarrow$ i due cicli sono $\boxed{\boldsymbol{a} = (A \times \times)}$, $\boxed{\boldsymbol{b} = (E \times \times)}$.

Da **4** abbiamo $x = A$; combinando le precedenti ed eliminando la variabile (y)

11 da **8** si ha che C ed F sono collegati e stanno in un ciclo, e nell'altro stanno B e D

12 da **3**, **6**, **9** $y \neq (A, C, D)$ e da **5**, $B \to \neq (A, C, D)$, restano per B solo i casi $\boxed{B \to E}$ opp. $\boxed{B \to F}$

- ma per **11** B ed F sono in cicli diversi e quindi $B \to F$ è proibito

- resta $B \to E$ da cui per **10** $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{b} = (EDB)}$ $\Rightarrow$ quindi C ed F sono in $\boldsymbol{a}$, ma **7** proibisce (AFC) $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{a} = (ACF)}$.

In definitiva $P = (ACF)(EDB)$ e l'ordine degli argomenti presentati è (C, E, F, B, D, A) come in [1].

Ora, forse avrete già notato che le due soluzioni non coincidono. No, non abbiamo intenzione di dirvi "qual è il risultato giusto", e lo sapete già: riguardate i ragionamenti, trovate un metodo alternativo. Le strade matematiche sono tante, e a noi i percorsi sono sempre piaciuti più delle destinazioni.

Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Trovate tutte le soluzioni intere dell'equazione $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

L'unica soluzione intera è (0, 0, 0).

Supponiamo esista una soluzione diversa dal triplo zero per cui $|x|^3 + 2|y|^3 = 4|z|^3$ *viene minimizzato. Dovendo x essere pari, poniamo* $x = 2w$*; questo ci dà* $8w^3 + 2y^3 = 4z^3$*, ossia* $(-y)^3 + 2z^3 = 4w^3$*, ossia* $(-y, z, w)$ *è anch'essa soluzione diversa dal triplo zero, e deve valere:*

$$|-y|^3 + 2|z|^3 + 4|w|^3 = \frac{|x|^3 + 2|y|^3 + 4|z|^3}{2},$$

che è una contraddizione. Quindi, l'unica soluzione è (0, 0, 0).

***

In questo caso la soluzione di ***Valter*** *era più quick: "le 3 incognite mi pare debbano essere = 0 MOD8. Posso quindi semplificare dividendo per* 8 *sino a che una delle* 3 *diventa dispari. A quel punto si dovrebbe dedurre che non vi sono soluzioni (a parte con tutte e* 3 = 0*)".*

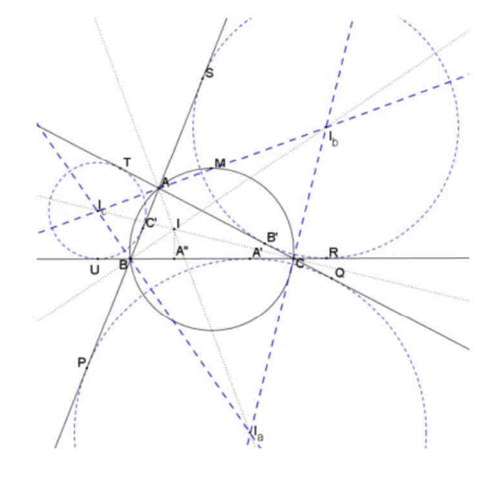
6. Pagina 46

Statuiamo alcune proprietà che ci saranno utili nel seguito.

Dato un triangolo ABC di lati BC = a, CA = b, AB = c, il semiperimetro vale $s = (a + b + c) / 2$.

Con riferimento alla figura a fianco, indichiamo con:

- I_a, I_b, I_c i centri dei cerchi exinscitti associati rispettivamente agli angoli A, B, C.
- A', B', C' i punti di contatto dei suddetti cerchi con i lati BC, CA, AB.
- P, Q, R, S, T, U i punti di contatto degli stessi cerchi con i prolungamenti degli altri due lati del triangolo ABC.
- M il punto medio dell'arco di cerchio passante per B e C che contiene anche A.
- A" il punto di contatto del cerchio inscritto al triangolo ABC con il lato BC.



2 *Premesse.*

Si hanno, quindi, le seguenti relazioni:

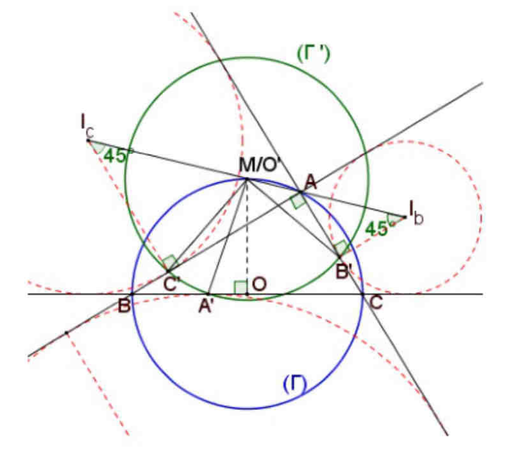
$$BC'=CB'=(-a+b+c)/2=s-a \qquad BR=BS=BC+CR=BC+CB'=s$$
$$CA'=AC'=(a-b+c)/2=s-b \qquad AP=AQ=AB+BP=AB+BA'=s$$
$$AB'=BA'=(a+b-c)/2=s-c \qquad CT=CU=CB+BU=CB+BC'=s$$

e la relazione

$$BA' = CA''$$

E si deduce che i punti I_c, A, M, I_b sono allineati.

Consideriamo la proposizione: **Se il triangolo** ABC **è rettangolo, allora il centro** O' **del cerchio circoscritto Γ' al triangolo** A'B'C' **si trova sul cerchio Γ circoscritto al triangolo** ABC. Dimostriamo che il punto medio M dell'arco BC del cerchio **Γ** coincide con il punto O' centro del cerchio Γ'.



3 *Prima proposizione.*

I triangoli IAC' e IAB' sono rettangoli isosceli.

Essendo i punti I_c, A, M allineati, si ha:

$$I_b I_c=\sqrt{2}\cdot(AC'+AB')=a\sqrt{2}$$

Da cui si ha $I_cM = a\sqrt{2}/2$ e

$$MC'^2 = I_cC'^2 + I_cM^2 - \sqrt{2}\, I_cC'\, I_cM =$$
$$= (s-b)^2 + a^2/2 - a\,(s-b)$$

Nello stesso modo, si ottiene:

$$MB'^2 = (s-c)^2 + a^2/2 - a\,(s-c)$$

Esprimendo i due membri in termini di a, b, c si verifica che è:

$$(s-b)^2 - a\,(s-b) = (s-c)^2 - a\,(s-c)$$

Da cui, MB' = MC'.

Essendo O il punto medio di BC, si ha $MA'^2 = MO^2 + OA'^2$, e quindi:

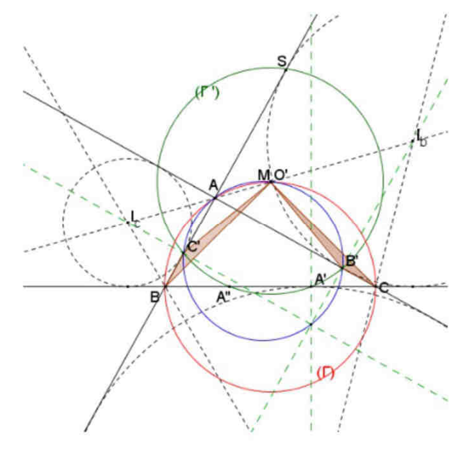
$$MA'^2=\frac{a^2}{4}+\left(\frac{a}{2}-(s-c)\right)^2=(s-c)^2+\frac{a^2}{2}-acdot(s-c)=MC'^2$$

E quindi M, trovandosi alla medesima distanza dai punti A', B', C', è il centro O del cerchio Γ'', che è quanto richiesto di dimostrare.

Consideriamo ora la proposizione: Se i**l centro** O' **del cerchio Γ' circoscritto al triangolo** A'B'C' **è sul cerchio Γ circoscritto al triangolo** ABC**, allora** ABC **è rettangolo**.

Supponiamo, senza perdere in generalità, che O' (su Γ') si trovi sullo stesso lato di A rispetto a BC. Essendo O'B' = O'C', BC' = B'C (si vedano, in merito, le premesse) e essendo gli angoli ABO' e ACO' uguali tra di loro, si ha che i triangoli O'BC' e O'B'C sono uguali, e quindi O'B = O'C: O' quindi coincide con M.

D'altra parte, essendo (sempre dalle premesse) BA' = CA'', A'' risulta essere il simmetrico di A' rispetto al punto medio di BC e il punto A'' appartiene al cerchio Γ'.



4 *Seconda proposizione.*

I punti A, M, I_b sono allineati, MA è la bisettrice dell'angolo B'AS e AB' = AS. Da cui, risulta che MB' = MS e il punto S appartiene anch'esso alla circonferenza Γ'.

Da questo, si ha che BA' BA'' = BC' BS, che possiamo scrivere come:

$$(s-c)\,(s-b) = (s-a)\,s$$

che possiamo riscrivere come:

$$(a-b+c)\,(a+b-c) = (-a+b+c)\,(a+b+c)$$

che si riduce a:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ossia, il triangolo ABC è rettangolo in A, che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

Questa ve la raccontiamo.

Stavamo facendo una ricerca su un argomento piuttosto interessante, quando ci siamo accorti che non avevamo mai parlato di fondamentali. In modo serio. E, magari, con delle dimostrazioni. Abbiamo scoperto che la cosa è piacevolmente incasinata, e abbiamo intenzione di far partecipe di questo incasinamento anche la nostra linotype. Eravamo partiti da un articolo, ma buona parte di quanto segue arriva dalla messa insieme di svariate pagine di Wikipedia.

7.1 (Forse) Ci fermiamo ai Fondamentali

Il ***Teorema Fondamentale dell'Aritmetica*** statuisce che: *Ogni intero maggiore di* 1 *o è primo o è il prodotto di più numeri primi e, a meno dell'ordine dei fattori, questo prodotto è unico*. Certo, lo sanno tutti. E quindi, ne sapete di sicuro la dimostrazione, vero?

Non è difficile provare l'**esistenza** di questo prodotto, utilizzando il metodo induttivo:

2 è primo, e il suo sviluppo è unico.

Supponiamo ora vero il teorema per tutti i numeri k con $1 < k < n$, e dimostriamo che il Teorema è vero per n.

Se n è primo, il Teorema è dimostrato.

Se $n = ab$ $(1 < a \leq b < n)$, allora per l'ipotesi dell'induzione deve essere:

$$a = \prod_{i=1}^{j} p_i \quad , \quad b = \prod_{i=1}^{k} q_i \quad .$$

con p_i e q_i primi. Ma allora:

$$n = a \cdot b = \left(\prod_{i=1}^{j} p_i \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} q_i \right)$$

Il che prova l'esistenza.

Ben diverso il discorso dell'**unicità**: qui, ci ha sempre divertito il fatto che "qualcuno" (Euclide) abbia dimostrato un pezzo con un "Teorema del futuro" (beh, no – sappiamo tutti che Euclide era un tipo piuttosto serio – ma questa è, dicono, la via più semplice). Procediamo per assurdo: supponiamo un certo numero s>1 abbia due fattorizzazioni

$$s = \prod_{i=1}^{m} p_i = \prod_{j=1}^{n} q_j \quad .$$

e dimostriamo che, in questo caso, $m = n$ e che i p_i non sono altro che una permutazione dei q_i; ma per fare questo, ci serve prima il **Lemma di Euclide**: *Se p è un numero primo, e p divide il prodotto ab, allora p divide a o p divide b (o entrambi).*

Il quale Lemma, va dimostrato: e proprio per questo parlavamo di "Teorema dal futuro", visto che il modo più semplice utilizza l'**Identità di Bézout**[6]: *se a e b sono interi e d è il loro massimo comun divisore, allora esistono due interi x e y tali che ax + by = d.*

Sia d il più piccolo intero positivo esprimibile nella forma $ax + by$ e, in particolare, sia:

[6] Stiamo scrivendo queste note in grande ritardo, ma dovreste essere ancora in tempo a festeggiarne il compleanno: Étienne Bézout nasce infatti il 31 marzo 1730 a Nemours (dip. Seine-et-Marne) per morire il 27 settembre 1783 a Avon (dip. Ile-de-France).

$$d = as + bt$$
$$n = ax + by$$

con $n > d$. Se n non è divisibile per d, secondo la **Proprietà della divisione euclidea**,

> La dovremmo dimostrare, ma poi la linotype[7] si arrabbia per le indentazioni. Statuisce che dividere un intero positivo p per un intero positivo q dà un resto r maggiore o uguale a zero strettamente minore di q, ossia è $p = n\,q + r$, con $0 \le r < q$.

deve essere:

$$r = n - qd = ax + by - q\,(as + bt) = a\,(x - qs) + b\,(y - qt)$$

che è nella forma $ax + by$: ma $r < d$ viola la nostra richiesta iniziale che d sia il più piccolo numero esprimibile in questa forma, e quindi deve essere $r = 0$, ossia n è divisibile per d.

Potendo n essere qualsiasi numero nella forma $ax + by$, consideriamo i due casi:

$$n = 1a + 0b = a$$
$$n = 0a + 1b = b$$

da cui, d è un divisore comune di a e b.

Se esiste un altro divisore comune c di a e b, allora deve dividere anche d:

$$a = pc$$
$$b = qc$$
$$d = as + bt = (pc)\,s + (qc)\,t = c\,(ps + qt)$$

E quindi, se c divide d, deve essere $c \le d$.

Quindi, d è il massimo comun divisore di a e b.

Siano x e y due interi primi tra loro: esistono allora degli interi[8] r e s per cui:

$$rx + sy = 1$$

Siano ora a e n primi tra loro, e supponiamo che a divida ab. Per l'Identità di Bézout, esistono r e s tali che:

$$rn + sa = 1$$

Moltiplicando entrambi i membri per b, si ha:

$$rnb + sab = b.$$

Il primo termine è divisibile per n e il secondo è divisibile per ab che è divisibile per n; quindi la loro somma, b, deve essere divisibile per n; ma questa non è altro che una generalizzazione del Lemma di Euclide, che quindi è dimostrato.

Per il Lemma di Euclide, p_1 deve dividere uno dei q_j. Riordinando eventualmente questi ultimi, supponiamo divida q_1; ma se quest'ultimo è primo, allora deve essere $p_1 = q_1$, e quindi:

$$\frac{s}{p_1} = p_2 \cdots p_m$$
$$= q_2 \cdots q_n$$

Ragionando nello stesso modo rispetto a p_2, si ha:

[7] *Avete notato la meravigliosa ironia dedicata alla linotype che pervade l'articolo? Chissà quanti leggeranno questo piccolissimo ma rassegnatissimo commento… sappiate che i simboli persi sono comunque colpa mia [NdA – AKA linotype].*

[8] La cosa è evidente, ma preferiamo statuirla: *non abbiamo detto* "positivi", evidentemente.

$$\frac{s}{p_1 p_2} = p_3 \dots p_m$$
$$= q_3 \dots q_n$$

Procedendo in questo modo, si dimostra che, a meno di un riordinamento, $\forall p_j$, $p_j = q_j$. Che è la tesi.

Non sappiamo voi, ma ora noi ci sentiamo molto più tranquilli. L'aver basato anni di matematica su un "fondamentale" di cui non avevamo altro che una manciata di esempi (ogni divisione della nostra vita, per citare i più semplici) ci lasciava piuttosto ansiosi.

L'altro oggetto fondamentale che ci ha sempre lasciato perplessi *non è fondamentale* (oggi, almeno: una volta sì) e *non è algebrico* (o meglio, non ha una dimostrazione *puramente* algebrica). La cosa perplime, visto che stiamo parlando del **Teorema Fondamentale dell'Algebra**.

Che a noi fisici ricorda molto il Secondo Principio della Termodinamica, visto che potete dirlo in un mucchio di modi equivalenti:

1. Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi in una variabile ha almeno una radice complessa.
2. Il campo dei numeri complessi è algebricamente chiuso.
3. Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado n non nullo in una variabile ha, se si considerano le molteplicità, n radici complesse.

In realtà, a Rudy ricorda anche la Formula di Eulero (quella dei poliedri): bellissima, ma delle trenta dimostrazioni che ha recuperato ce ne fosse una esteticamente valida... Beh, *transeat*. Vorrà dire che, dopo gli eleganti formalismi dell'altro fondamentale, taglieremo un po' per i campi; qui le dimostrazioni non saranno trenta, ma se ne contano tre nell'analisi complessa, due in topologia, due in algebra (con inquinamenti analitici) e una geometrica; quest'ultima purtroppo è complessa ma abbastanza divertente nelle sue conclusioni: infatti si ha, tagliando molto per i campi, che se il TFA non è valido, allora ogni sfera ha curvatura zero, ossia la Terra è piatta.

Volendo però riportare almeno una dimostrazione, ne scegliamo una "complessa" in un altro senso: tanto, i momenti di volgarizzazione di concetti complicati non mancheranno comunque.

Dato il polinomio $p(z)$, sia R un numero tale che ogni radice di $p(z)$ ha valore assoluto minore di R.

Siccome ogni polinomio non costante di grado n ha al più n zeri, questo numero esiste di sicuro.

Per ogni $r > R$, si consideri il *numero*:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{p'(z)}{p(z)} \right) dz$$

dove l'integrale chiuso è svolto su un cerchio di raggio r centrato nell'origine e percorso in senso antiorario.

Dal *Teorema dei residui* (altrimenti noto come *Teorema di Cauchy* – e *Morera*, visto che C. ci sta antipatico), sappiamo che questo integrale è pari al numero N di zeri del nostro polinomio nella *sfera aperta* centrata in zero e di raggio r.

Una sfera aperta è una sfera senza la superficie esterna, ossia quell'insieme di punti per cui la distanza dal centro è (strettamente) minore del raggio. Avete presente un'arancia sbucciata?

Siccome però $r > R$, qui dentro ci sono *tutti* gli zeri del polinomio.

Sappiamo inoltre[9] che l'integrale lungo la stessa curva di n/z diviso per $2\pi i$ vale n; se sottraiamo questi due numeri tra di loro, abbiamo:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{p'(z)}{p(z)}-\frac{n}{z}\right)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{zp'(z)-np(z)}{zp(z)}\right)dz$$

Il numeratore del secondo membro dell'espressione ha grado al più $n-1$, mentre il denominatore (che è moltiplicato per z) ha grado $n+1$. Quindi, per R tendente a infinito, questo aggeggio tende a zero.

Ma siccome il suo valore (lo sappiamo dal primo membro) è $N-n$, deve essere $N = n$, che era l'obiettivo della nostra dimostrazione.

Adesso potremmo partire dai due fondamentali e andare avanti, ma ci teniamo il tutto per le prossime volte.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[9] ROSSETTI, Cesare: *Metodi Matematici per la Fisica*, pag. 31. È il primo punto dove compare la parola "esempio".