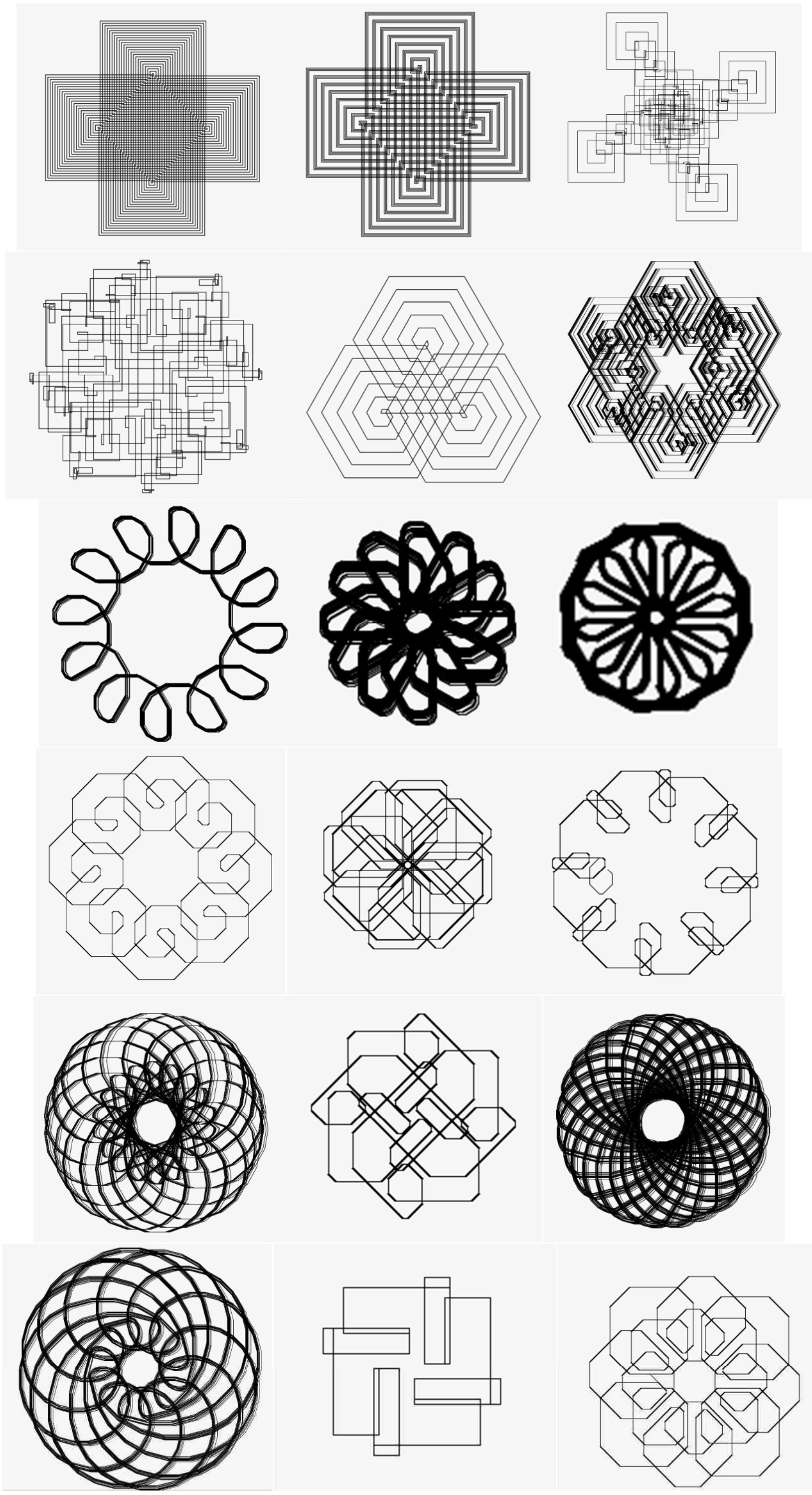
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 216 – Gennaio 2017 – Anno Diciannovesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM214 ha diffuso 3'139 copie e il 15/01/2017 per Google eravamo in 8'430 pagine.

Queste ***Valter*** ce le aveva mandate già a novembre, ma vi avevamo promesso per dicembre quelle natalizie. Fatte da un programma che ha scritto lui quando (sicuramente per sbaglio) ha letto il PM.

1. Horror vacui

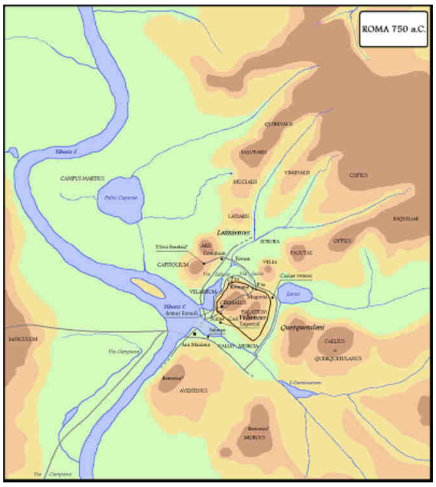
"Stimo che sarà pur troppo nauseato dalla temeraria opinione de' suddetta Teologi, e dal costume suo costante di meschiar subito le cose di Dio ne' ragionamenti naturali, dove che quelle dovrebbono con maggior rispetto, e riverenza esser trattate."
(lettera del 18 giugno 1644)

La prima somiglianza arriva dalla geometria.

È certo una somiglianza naturale: quale mai potrà essere la figura geometrica più semplice, più facile agli occhi di uomini che devono disegnarla per terra, scavarla nel suolo, con il proposito ben preciso di delimitare l'area di una nuova città?

Non ci sono poi troppi candidati in lizza: nulla è geometricamente più immediato di un cerchio, figura che ha anche un metodo costruttivo molto semplice, come ricordano tutti i sussidiari[1] delle scuole primarie: si pianta un paletto in terra, gli si lega attorno una corda, e l'altro capo, armato di opportuno piccolo strumento atto a scavare, potrà disegnare un cerchio perfetto di raggio pari alla lunghezza della corda. Non per niente abbondano le costruzioni primitive a pianta rotonda.

Bisogna però tener conto che questa operazione è viziata da un paio di significative debolezze implicite: la prima è che il metodo va benissimo per cerchi ragionevolmente piccoli, ma comincia ad essere un po' laborioso quando l'area che si vuol contenere sul terreno ha le dimensioni di una città. La seconda, probabilmente ancora più importante, è di nuovo puramente geometrica; pur con tutta la sua eleganza e semplicità, il cerchio non è l'ideale quando si vogliano contenere oggetti parimenti semplici ed eleganti: un cerchio non è tassellabile da cerchi più piccoli, resta un sacco di spazio non utilizzato. Se la natura aborrisce il vuoto, anche la geometria a fini edilizi non è poi tanto da meno. Inoltre, è anche facile assai perdere l'orientamento in una città circolare costituita da edifici a pianta circolare, e magari disposti lungo circonferenze.



1 *Probabile area della "Roma quadrata"*

Se si deve rinunciare al cerchio, è quasi inevitabile ripiegare sul quadrato o sul rettangolo. Ci sono certo altri poligoni che sono regolari, tassellabili ed eleganti: chiedetelo alle api, che sono maestre nell'erigere costruzioni a pianta esagonale; ma gli uomini hanno imparato la geometria molto dopo gli insetti, ed è facile immaginare che gli angoli diversi dai retti li spaventassero un bel po': quindi, scartati i triangoli equilateri per antipatia verso i 60°, non restano che rettangoli e quadrati a farla da padroni nei cantieri primitivi: un rettangolo è magnificamente riempibile con altri rettangolini, e perfino le vie che si intersecheranno tra un edificio e l'altro potranno essere annoverati come rettangoli particolarmente lunghi e stretti. Ma se i rettangoli spopolano per la loro versatilità, è certo che se si vuole ammantare di sacralità – o quantomeno di eleganza – una costruzione destinata a scopi nobili ed evocativi, il quadrato sarà la prima scelta.

Certo, questo vale solo nel platonico mondo delle idee, poi entra in gioco l'eterna semplificazione a cui si va incontro quando si passa dalla teoria alla pratica: Euclide e

[1] Ma esistono ancora i sussidiari?

tutti i suoi virtuali discendenti possono ancora alzare un sopracciglio sdegnato, ma certo anche loro sono abituati a sentir chiamare "quadrato" qualsiasi forma vagamente quadrilatera, anche se rabberciata con lati che sono ben lontani dall'essere uguali e rettilinei, e con angoli che solo con molta fantasia possono essere considerati retti. E, se è davvero esistita (come del resto gli studiosi sono propensi a credere) la "Roma quadrata", è verosimile che quello scavato sulle rive del Tevere fosse un quadrato di questo genere; una zona delimitata da quattro lati più curvi che rettilinei e che solo con molta approssimazione potevano essere immaginati di uguale lunghezza. Un "quadrato" che racchiudeva grosso modo il solo colle Palatino.

Un'area davvero piccola, ma tutto sommato compatibile con le esigenze "urbane" d'un piccolo villaggio di contadini dell'Italia dell'ottavo secolo a.C. Anzi, a dire il vero, c'è anche chi pensa che il quadrato originario fosse ancora più piccolo: giusto della dimensione di un tempio, o addirittura solo di un altare. Dimensioni invero troppo esigue per giustificare l'appellativo di "città" anche per quei tempi remoti: ma in qualche modo comunque possibili, perché il concetto di "città" veicolato dalla "Roma Quadrata" non era assimilabile a quello moderno, ovvero come un agglomerato di abitazioni e di edifici istituzionali e di servizio; la città veniva sostanzialmente identificata solo con il suo "pomerio", che è un concetto senza il quale è difficile capire almeno un paio di episodi cruciali della storia e della tradizione mitologica di Roma.

Il pomerio è il cuore sacro delle città: è il luogo dove risiede idealmente – ma anche legalmente e formalmente – l'essenza della città-stato. La tradizione che racconta del solco scavato dal fondatore Romolo per delimitare i confini di Roma è facilmente malintesa: più che delimitare lo spazio da riservare alle abitazioni dei nuovi abitanti, quello che Romolo traccia è il pomerio. In esso vengono riposti i simboli religiosi e vigono una gran quantità di proibizioni atte a mantenere intatta la sacralità del luogo, tant'è vero che nei tempi più remoti all'interno del pomerio non si poteva abitare e neppure semplicemente passare, salvo nei casi previsti per officiare le funzioni religiose. È solo acquisendo il significato del pomerio che può interpretarsi l'episodio – leggendario o storico che sia – dell'uccisione di Remo da parte di Romolo. Il più severo dei divieti che riguardano il pomerio è quello che impedisce di entrare armati al suo interno, perché in un certo senso questo gesto è assimilabile al recare un attacco al cuore dell'Urbe: e le narrazioni più antiche e complete del mitologico fratricidio specificano bene che Remo varcò il sacro solco armato di tutto punto. La reazione di Romolo è di conseguenza ben lungi dall'essere un crudele atto di ripicca per essere stato disobbedito: è piuttosto la messa in atto della punizione capitale che spetta a chi si dimostra essere un nemico dello stato.

In epoca storica, gran parte del significato sacrale e religioso del pomerio viene perso o mutato, ma il divieto di portare armi continua ad essere rispettato a lungo: ad esempio, le fonti tengono a precisare che l'omicidio di Cesare avvenne comunque al di fuori del pomerio. E anche se il senso è certo più politico che religioso, un certo sentore del divieto di entrare armati nel territorio cittadino è ancora molto forte durante i periodi della repubblica e dell'impero. I generali che hanno il comando delle legioni devono sottostare al rigoroso divieto di restare sempre al di fuori del "territorio di Roma", anche quando questo territorio diventa vasto abbastanza da comprendere tutta l'Italia peninsulare: la causa ultima è certamente quella di garantire la protezione del Senato e dell'Urbe contro possibili colpi di stato militari, ma è indubbio che permanga anche un aspetto religioso, sacrale, nel divieto. Quando Giulio Cesare varca il Rubicone pronuncia "il dado è tratto" perché sa bene che ormai ha commesso un gesto formalmente irreparabile, avventurandosi in una partita che può facilmente costargli la vita: il piccolo fiume romagnolo è un simbolo cruciale, perché segna il confine territoriale tra le terre provinciali e il territorio sacro e inviolabile di Roma, oltre il quale un generale non può accedere al comando delle sue legioni. Cesare invece lo varca in armi, e nel farlo dichiara di fatto guerra a Roma, o quantomeno a coloro che al tempo erano i formali rappresentanti del potere romano.

Il pomerio è tradizionalmente definito a partire dall'incrocio di quelle che sono (o saranno) le due vie principali della città, che si intersecano inevitabilmente ad angolo retto. È quindi immaginabile che la forma quadrata non fosse poi particolarmente originale, nei tempi antichi: perlomeno quando le condizioni del territorio lo consentono e una città viene premeditatamente "pianificata" dal nulla, cosa tutt'altro che insolita nei tempi in cui le città-stato fondavano, appena possibile, le proprie colonie. In tempi più recenti, le fondazioni ex-novo sono meno frequenti, e di solito assai meno regolamentate dai vincoli simbolici o sacrali: Brasilia è città pianificata modernamente, con un attento studio preventivo del territorio, ma non sembra proprio che il progetto si sia sentito vincolato a seguire forme geometriche obbligate; e anche le città edificate sui territori bonificati dell'Agro Pontino, che pure portano nell'impianto originario ancora i segni d'una certa regolarità geometrica[2], non sembrano essere state pianificate con rigore euclideo.

Eppure una città rigorosamente quadrata è stata concepita e fondata quasi 2500 anni dopo Roma, segnando una sorta di "somiglianza originaria" con essa. Somiglianza che peraltro non resterà la sola, e che non è detto che fosse del tutto casuale.

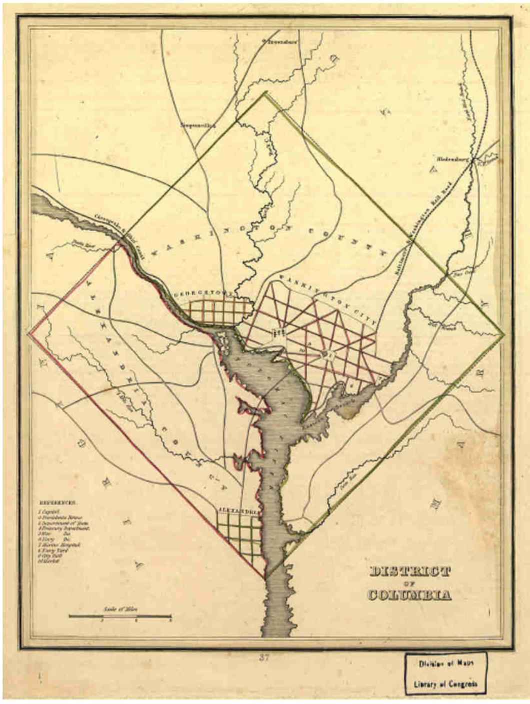
La parola "federazione" discende da un termine caro proprio agli antichi abitanti di Roma, che furono tra i primi ad usare un tale sistema politico: viene da "*foedus*", che significa "patto, accordo". Se due o più entità si federano, significa che ognuna mantiene la sua propria identità caratteristica, ma condivide con le altre un certo numero di obblighi, diritti e interessi. Non fu certo il caso di Roma, che organizzò ai tempi della Repubblica una federazione che era comunque ben lontana dal poter essere considerata paritaria tra tutti i componenti; ma è evidente che se la parità formale tra i confederati deve essere garantita l'arbitro chiamato a dirimere eventuali contese dev'essere un elemento terzo, esterno ai contendenti e, almeno per alcune questioni, dotato di poteri superiori a quelli dei litiganti.

Quando le Tredici Colonie si rendono indipendenti dalla corona inglese, sono certo tutte ben allineate all'idea di confederarsi come "Stati Uniti d'America", ma permane anche un chiaro sentimento di reciproca indipendenza statale, cosa che peraltro resiste in buona parte ancora oggi. La Dichiarazione di Indipendenza degli Stati Uniti viene sancita nel 1776, ma il Congresso degli USA esiste dal 1774: tra il 1774 e il 1800 le città che ospitano il Congresso – e che pertanto a buon diritto possono vantarsi di essere state, seppur temporaneamente, capitali degli USA – sono ben otto[3]. La massima istituzione federale americana vaga senza una sede stabile per più di quarto di secolo da uno stato all'altro, e capita anche che il potenziale conflitto di interessi tra la politica federale e quella dei singoli stati si coaguli in incidenti piuttosto gravi, come nel caso dell'Ammutinamento della Pennsylvania.

Nel 1783, mentre si trova a Filadelfia, il Congresso viene assediato da circa quattrocento soldati che protestano chiedendo la paga per il servizio militare svolto durante le guerre rivoluzionarie contro l'Inghilterra. Il governo locale, sotto la guida del suo presidente John Dickinson, si rifiuta di intervenire contro quei soldati che sono naturalmente cittadini della Pennsylvania, lasciando così a repentaglio la sicurezza dell'organo federale. Il presidente americano, George Washington, è costretto ad inviare 1500 soldati per sedare la protesta e liberare il Congresso, che ovviamente si affretta ad abbandonare per sempre Filadelfia. Diventa così palese la necessità che il nuovo stato federale si doti di una capitale stabile, e che questa debba essere edificata in un'area su cui non valga la giurisdizione nazionale di nessuno dei tredici stati degli USA.

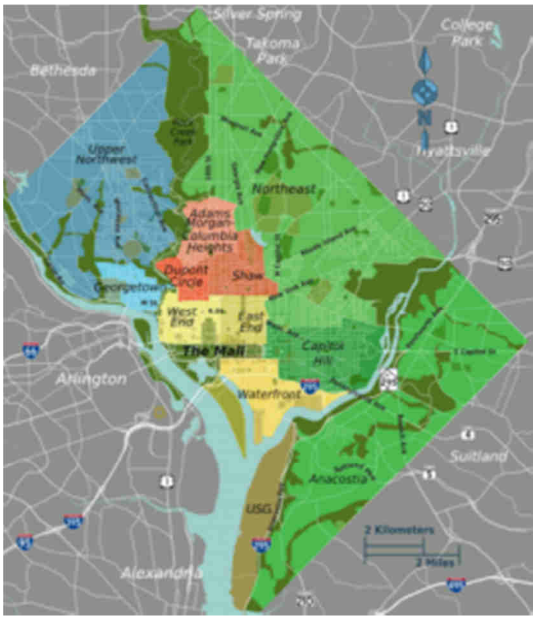
[2] Ad esempio il centro "storico" di Latina mostra una pianta grossomodo ottagonale. Abbastanza curiosamente, però, la sua prima pietra fu ufficialmente posata in quella che ancora oggi si chiama "Piazza del Quadrato".

[3] Filadelfia, Baltimora, Lancaster, York, Princeton, Annapolis, Trenton e New York.



2 *Il progetto del Distretto di Columbia*

La nuova capitale prenderà il nome proprio dal primo presidente degli Stati Uniti, quel George Washington che sarà anche l'unico presidente americano della storia che non riuscirà a governare dalla città di Washington. Il territorio su cui la nuova capitale viene edificata sarà un distretto federale, non appartenente a nessuno stato, e verrà chiamato Distretto di Columbia[4]. Perché il distretto sia effettivamente "non appartenente" a nessuno stato, è necessario che qualche stato doni alla federazione una porzione del suo territorio: e in effetti la donazione ci sarà, con ben due stati donatori, il Maryland e la Virginia. C'è una ben precisa legge che regolamenta i termini della creazione del distretto e della capitale, il Residence Act, del 16 luglio 1790: stabilisce il luogo di edificazione sul fiume Potomac, e ovviamente ne definisce i forma e confini; si tratta di un perfetto quadrato le cui diagonali sono orientate lungo le direttrici dei punti cardinali e i cui lati misurano esattamente 10 miglia. Cento miglia quadrate: la Roma americana nasce quadrata come l'originale, anche se su dimensioni chiaramente più grandi. Il fiume Potomac segna il confine tra Maryland e Virginia, così è semplice capire, consultando una mappa, quali siano le terre donate alla capitale dai due stati: la parte nordorientale, la più grande, che costeggia la riva sinistra del Potomac, è il dono del Maryland; la sezione sudoccidentale, ben più piccola, è quanto proviene dallo stato virginiano.



3 *Il District of Columbia oggi.*

La geometria è però impotente, nei confronti della politica: la perfezione del quadrato del District of Columbia ha vita breve, perché la Virginia ci ripensa, e richiede indietro il suo territorio. Le ragioni del ripensamento sono una curiosa miscela di natura economica, politica e sociale: sulla riva virginiana del Potomac c'è la città di Alexandria, il cui porto è uno dei maggiori mercati per il commercio degli schiavi; il Congresso degli Sati Uniti è invece prevalentemente abolizionista. La vicinanza tra due entità così culturalmente diverse potrebbe deprimere la vita commerciale della zona, peraltro già messa duramente alla prova dalla crisi economica degli anni Trenta del diciannovesimo secolo. Così, dopo nemmeno cinquant'anni, il distretto si ritrova con il Potomac come confine, e non più parte integrante del suo territorio. Sull'altra riva sorge Arlington, città che oggi è più che strettamente legata ai destini della capitale federale americana, con la quale condivide ormai servizi urbani, trasporti, logiche e meccanismi cittadini,

[4] "Columbia" era (e forse è ancora) un termine poetico e aulico per indicare l'America.

salvo la giurisdizione formale: Washington D.C. non fa parte di nessuno dei 50 stati, Arlington è un pezzo di Virginia.

Oltre al quadrato di fondazione, sono molte le somiglianze che si possono trovare tra Roma e Washington; e buona parte di esse sono esplicite citazioni. La grande cupola che ospita l'edificio del Congresso ricorda non solo nella forma l'architettura monumentale romana, ma anche palesemente nel nome: Capitol e Campidoglio sono le traduzioni precise, una in inglese, l'altra in italiano, del latino Capitolium. Ed è solo un esempio tra i molti che si potrebbero fare, se solo si volesse giocare alla ricerca delle somiglianze.

Ce n'è una, ad esempio, che probabilmente non ha un gran significato recondito, e che in verità non è nemmeno così precisa e storicamente calzante come potrebbe sembrare a prima vista, ma di cui vale forse la pena di parlare. Entrambe le città – che sono fin dall'inizio della loro storia maiuscoli centri di potere politico – sembrano pervicacemente refrattarie all'idea di delegare questo loro potere al genere femminile. In verità, si tratta di somiglianza condivisa con una pletora di altri centri di potere: più che di strana coincidenza, sarebbe forse più corretto parlare di banale omologazione al criterio quasi universale che relega le donne in una storica condizione di sudditanza rispetto alla prepotenza maschile. Basti pensare al preciso significato della parola "re" rispetto all'ambiguità connessa al termine "regina", che può indicare sia il monarca plenipotenziario di sesso femminile sia – con maggior frequenza negli annali della storia – più semplicemente "consorte ufficiale del re".

Ciò nondimeno, nei due secoli della sua ancor breve storia, Washington ha ospitato un bel numero di "first ladies" ma si è guardata bene dall'aprire l'Ufficio Ovale ad una donna. La sconfitta di Hillary Clinton alle elezioni dell'autunno 2016 è probabilmente ascrivibile soprattutto a ragioni diverse dall'intolleranza di genere, ma la resistenza all'idea di avere un presidente USA femmina è stato comunque un fattore non trascurabile; e questo, in pieno XXI secolo e nel paese che si propone come guida, non solo economica e politica ma anche culturale, di tutto il pianeta non è certo un segnale positivo.

Il caso di Roma è più evidente, anche se in qualche senso più specifico. L'Europa è probabilmente il continente che ha prodotto il maggior numero di celebri regine, qualunque sia il significato che si voglia dare all'anfibio termine; Inghilterra, Francia, Spagna, Austria, al pari di svariate decine di altre nazioni europee, avrebbero serie difficoltà nel riscostruire la loro storia se volessero non tener conto delle loro femminee teste coronate. La Città Eterna invece, nonostante quasi tre millenni di storia, farebbe molta fatica ad individuare qualche degno nome del titolo di "regina di Roma": se si escludono le consorti[5] dei sovrani di casa Savoia che per una settantina d'anni, dal 1870 al 1946, si mostravano sorridenti dai balconi del Quirinale, non c'è quasi traccia di potere femminile sui Sette Colli.

L'età regia di Roma è quasi più mitologica che storica, e comunque la condizione femminile per tutta la storia antica di Roma è monotonamente drammatica[6]: se certo qualche donna di carattere è riuscita a lasciare un segno negli annali, in generale le femmine, dal punto di vista politico, non possono far altro che tessere intrighi, anche quando sono di rango e natali elevati. Per non parlare del fatto che durante la repubblica l'accusa di "voler farsi re" era la peggiore che si potesse rivolgere a un magistrato romano, figuriamoci come potesse essere considerata l'idea di una "regina". Il lungo periodo dell'Impero, da Ottaviano a Romolo Augustolo, abbonda di donne manovratrici, ma non esiste neppure la parvenza del concetto di "imperatrice". Dopo di che non resta altro che il

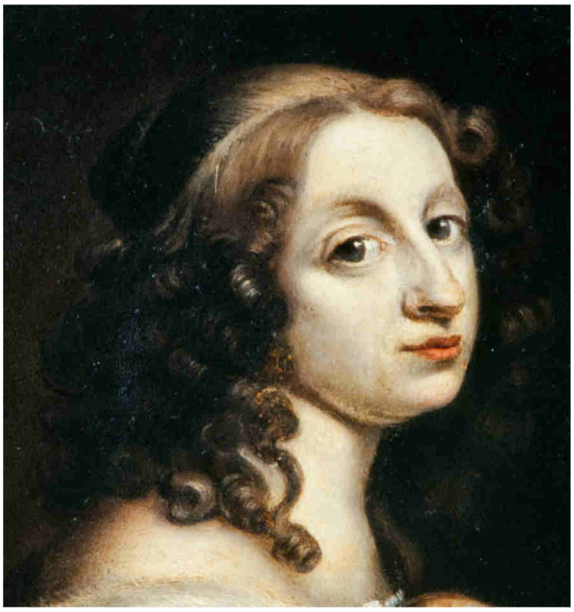
[5] Che sono peraltro in numero davvero esiguo: se si esclude Maria José del Belgio, moglie di Umberto II che ha regnato per un solo mese nel 1946 (non per niente il suo regale consorte è ancora ricordato come "il re di Maggio"), l'elenco termina in fretta dopo le sole Margherita di Savoia, moglie di Umberto I, e Elena del Montenegro, consorte di Vittorio Emanuele III.

[6] Basti ricordare che non avevano praticamente neppure diritto a un vero e proprio nome, ma ereditavano quello del padre. Messalina, tanto per fare un esempio, significa semplicemente "figlia di Messala".

lungo periodo del potere temporale pontificio, e l'inevitabile chiusura programmatica anche alla sola idea del potere femminile[7].

Nonostante tutto, però, Roma è stata per lungo tempo la città di adozione e di residenza di una vera e propria regina, un monarca di sesso femminile, a cui la nascita regale aveva integralmente consegnato il destino della sua nazione: e si trattava di una delle nazioni più potenti di Europa.

La più tormentata tra le guerre di religione europee devasta il continente dal 1618 al 1648: le date ne fissano il nome in Guerra dei Trent'anni, ma in realtà si tratta di serie ininterrotta di conflitti diversi, anche se indubbiamente strettamente connessi l'uno all'altro, al punto che la storiografia vi riconosce abitualmente più "fasi". Le ultime due parti vengono chiamate "fase svedese" e "fase franco-svedese", a sottolineare il ruolo cruciale che la Svezia ha rivestito durante gran parte del conflitto. Dopo aver letteralmente spopolato buona parte dell'Europa settentrionale per i contrasti sollevati dalla diversa visione del mondo che avevano i protestanti e i cattolici, la guerra termina ufficialmente con la pace di Vestfalia del 1648. È abbastanza curioso notare che la firma svedese in calce a uno dei trattati di pace più importanti della storia sia quella di una donna, una regina con pieni poteri che mai li divise con un consorte, e che per ironia della storia di lì a poco cambierà religione e rinuncerà al trono.



4 *Cristina di Svezia (dipinta da David Beck)*

Cristina di Svezia è indubbiamente un personaggio singolare, fin dalla nascita, quando inizialmente viene presa per un maschietto[8]. Del resto, la sua inquieta sessualità caratterizzerà tutta la sua vita: avrà passioni intense sia per uomini che per donne, che un carattere forte e deciso unito alla fortuna d'una nascita regale le consentirà di coltivare e difendere dagli inevitabili pettegolezzi e sprezzanti commenti.

Più ancora dei suoi amori, è la sua personalità che sconvolge e imbarazza la corte svedese: a differenza di quanto il protocollo prevede per le principesse, Cristina disdegna le tradizionali attività femminili e mostra fin dall'infanzia interessi diversi. Adora cavalcare, e lo fa alla maniera dei maschi: le piace la caccia, l'attività fisica, e mostra un particolare interesse anche per l'arte e le scienze. E poi Cristina non resta principessa a lungo: ha solo sei anni quando suo padre Gustavo Adolfo muore in battaglia a Lutzen. Anche se ovviamente non reggente, Cristina è pertanto già sovrana fin da bambina; e in molti sensi lo resterà per tutta la vita, anche dopo l'abdicazione al trono.

Quel che Cristina davvero non sopporta è l'idea del matrimonio, ma rinunciare alle nozze e alla discendenza è una delle poche cose che è più facile per la gente comune che per i sovrani. Quando nel 1644, ormai diciottenne, entra nel pieno possesso dei suoi poteri regali, Cristina comincia a rendere la sua corte una tra le più rinomate dal punto di vista culturale, al punto che Stoccolma si meriterà il soprannome di "Atene del Nord": accoglie

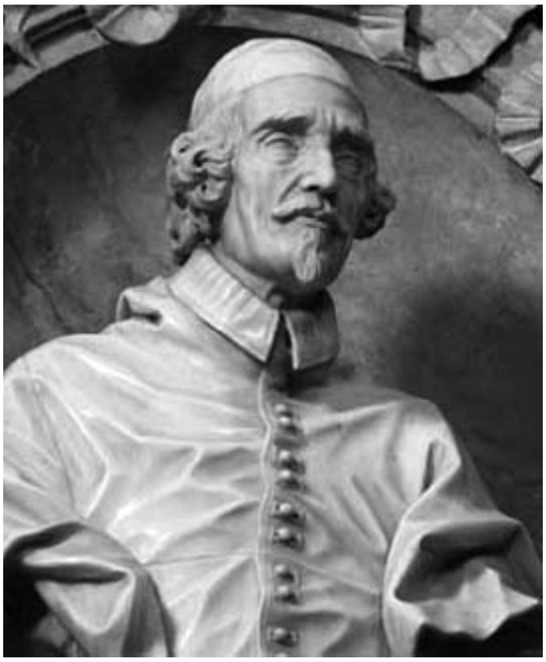
[7] La "papessa Giovanna", che si narra abbia seduto sul trono di san Pietro dal 853 al 855, è probabilmente solo leggendaria.

[8] Secondo le sue memorie, l'errore fu causato dall'essere "nata con la camicia", ovvero con residui del sacco amniotico che al momento del parto ne coprivano il sesso. Molti studiosi pensano che più probabilmente la neonata sovrana avesse una forma di ipertrofia clitoridea, una patologia abbastanza comune che usualmente scompare con la pubertà.

filosofi, artisti, scrittori e uomini di scienza. Basterà ricordare il nome di René Descartes, che proprio a Stoccolma morirà, probabilmente stroncato dal rigido clima scandinavo a cui il filosofo francese non era abituato.

Le insistenze dei notabili svedesi affinché prendesse marito, una tormentata storia d'amore con la dama di corte Ebba Sparre e soprattutto la decisione di convertirsi al cattolicesimo (cosa invero inaudita in un regno protestante vittorioso in una guerra contro i cattolici) portano infine Cristina alla decisione di rinunciare al trono pur di conservare la libertà di decidere del proprio destino: "*ubbidire a nessuno è meglio che comandare al mondo intero*", scrive, e nel 1654 lascia il trono svedese a suo cugino che regnerà con il nome di Carlo X di Svezia. Così Cristina abbandona la sua patria e si dirige verso la città che è il cuore stesso del cattolicesimo: Roma.

Papa Alessandro VII la accoglie con entusiasmo e con tutti gli onori; del resto, in tempi di Controriforma, non c'è ospite migliore possibile del sovrano di una potenza protestante che abiura la riforma luterana e torna all'ovile di santa romana chiesa, anche se per farlo deve rinunciare alla corona. Ed è una rinuncia che deve costarle molto, perché Cristina non riesce a non essere regina: rimarrà a Roma fino alla morte, e nell'Urbe costituirà di fatto una sorta di corte regale, circondandosi di artisti, sapienti così come aveva fatto a Stoccolma, e, soprattutto, manterrà intatto il suo carisma e carattere regale, sia negli aspetti migliori che in quelli meno auspicabili[9]. Intrecciò una relazione con il cardinale Decio Azzolino, intrigò con il cardinale Mazarino (che era già il primo ministro del regno di Francia) per ottenere il trono di Napoli o di Polonia, ma senza successo.


5 *Michelangelo Ricci*

Veniva chiamata dal popolo "la regina di Roma", e in molti sensi l'appellativo era meritato. A palazzo Farnese, dove si insediò, erano molti gli uomini di scienza che trovavano in lei una protettrice e un'ammiratrice.

Michelangelo Ricci[10] era tra questi. Nato a Roma il 30 gennaio 1619, non si può dire che abbia natali fortunati: la sua famiglia è modesta, e la sua salute è lontana dall'essere ottima. Michelangelo resta soggetto per tutta la vita ad attacchi epilettici. In compenso ha una gran bella testa e genitori che, per quanto tutt'altro che ricchi, si industriano per farlo studiare. Sono ricompensati dai risultati del figliolo, che rapidamente mostra di eccellere negli studi classici e di avere un'autentica passione verso le materie scientifiche.

All'università di Roma, matematica e fisica erano insegnate da (Antonio[11]) Benedetto Castelli, un monaco benedettino che era stato il successore sulla cattedra di Galileo Galilei all'Università di Pisa. È un insegnante capace e intriso di spirito galileiano: il

[9] Trattava i sottoposti con regale severità, mantenendo verso di loro un potere assoluto. Arrivò a macchiarsi della messa a morte del marchese Gian Rinaldo Monaldeschi, suo vecchio amante, accusato di spiare la sua corrispondenza e di complottare a suo danno. L'azione, pur legittima per l'epoca, le alienò parte delle grandi simpatie di cui era fatta oggetto.

[10] Ricci è forse il cognome italiano che più spesso ricorre negli annali della storia della matematica. Abbiamo già celebrato Matteo Ricci in "Li Madou", RM141, Ottobre 2010, ma ci manca ancora Giovanni Ricci, e soprattutto Gregorio Ricci-Curbastro.

[11] Nato Antonio, prende il nome di Benedetto quando riceve gli ordini monacali.

migliore dei suoi allievi, colui che lo sostituisce alla cattedra quando è costretto ad assentarsi dalle lezioni, si chiama Evangelista Torricelli.

Michelangelo Ricci e Evangelista Torricelli sono pertanto compagni di scuola, e diventano rapidamente molto amici; anche René de Sluze è a quel tempo uno studente alla Sapienza di Roma, e sebbene indirizzato agli studi giuridici, condivide con Ricci e Torricelli la passione per la matematica: i tre rimarranno in contatto e si influenzeranno reciprocamente per tutta la vita.

L'epilessia che affligge Michelangelo è verosimilmente la causa che gli impedisce di intraprendere una normale carriera ecclesiastica: ma anche senza prendere gli ordini, è al servizio della chiesa cattolica che lavora per tutta la vita. Ricopre prima il ruolo di segretario della sacra congregazione per le Indulgenze e le Reliquie, poi anche come consulente della sacra congregazione dell'Inquisizione romana e universale. Impegni che comunque non gli impediscono di occuparsi di scienza: allievo di Castelli e amico di Torricelli, Michelangelo è un galileiano convinto, e opera discretamente – ma con successo – al fine di moderare il rifiuto preconcetto della Chiesa nei confronti della "*nova scientia*" di Galileo.

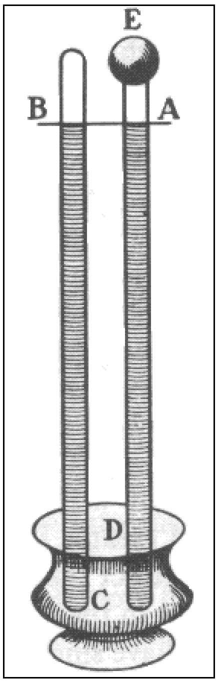
Pubblica una sola opera di matematica, peraltro molto breve, di neanche venti pagine: la "*Exercitatio geometrica – de maximis et minimis*", che basta peraltro a riservargli un posto stabile nella storia della disciplina, non tanto per i risultati contenuti, che sono comunque notevoli[12], quanto per il fatto che Ricci sembra introdurre, nelle sue dimostrazioni, il concetto di induzione matematica. E poi i suoi tempi non sono quelli in cui la valentia di uno scienziato può misurarsi con le sole pubblicazioni: Michelangelo intrattiene una cospicua corrispondenza con i grandi del suo tempo, conosce l'opera di Viete, è amico di Vincenzo Viviani, fondatore dell'Accademia del Cimento, della quale lo stesso Ricci sarà a lungo il corrispondente romano. È attraverso la corrispondenza, è tramite le lettere che viaggia la scienza, nel Seicento.

A quel tempo, uno dei maggiori problemi della fisica verteva sulla possibilità dell'esistenza del vuoto. Suona strano ad orecchi del XXI secolo, abituati all'idea di un universo in cui il vuoto la fa da padrone quasi ovunque, ma è sufficiente fare mente locale per comprendere come sia in verità difficile, con gli strumenti e le conoscenze del XVII secolo, poter fare un'esperienza diretta del vuoto. L'aristotelica affermazione che la natura aborrisce il vuoto potrà oggi apparire ingenua, ma per gran parte della storia dell'Uomo è stato impossibile confutarla, per il semplice fatto che il vuoto è difficilissimo da incontrare, finché si resta ancorati alla superficie del nostro pianeta e immersi nella sua atmosfera.

Evangelista Torricelli viene spesso ricordato come l'inventore del barometro, ed è un'etichetta certo corretta, ma indubbiamente riduttiva. Che il barometro sia strumento utilissimo, e non solo per quanto concerne le previsioni del tempo, è assolutamente indubbio; ma restringere la scoperta torricelliana alla costruzione di uno strumento di misura non rende oggettivamente la rivoluzione culturale, oltre che scientifica, che questa comporta. Torricelli cancella una convinzione profondamente radicata, discussa non solo tra gli scienziati ma anche (forse soprattutto) tra i filosofi, i teologi, e tutta la comunità intellettuale dell'epoca. Nel costruire il suo strumento, Torricelli regala al mondo una capsula di vuoto, un oggetto semplicemente mai visto prima, e della cui possibilità di esistenza quasi tutti dubitavano. Ancora più drammaticamente, nel costruire la sua piccola capsula di vuoto Torricelli compie un'altra impresa apparentemente impossibile, che è quella di pesare l'aria in cui sia immersi: il barometro di Torricelli è in fondo una bilancia a piatti, su cui il geniale romano[13] pone da una parte l'atmosfera del pianeta, dall'altra l'opportuna quantità di mercurio, che è indubbiamente più semplice da pesare anche con altri mezzi.

[12] Tra le altre cose, determina il massimo della funzione $x^m(a-x)^n$ e le tangenti di $y^m = kx^n$.

[13] Si è pensato a lungo che la città natale di Torricelli fosse Faenza; solo nel 1987 si è appurato (a quanto ne sappiamo noi, almeno) che in realtà è nato a Roma.



6 *Barometro disegnato da Torricelli nella lettera a Ricci del 11 giugno 1644*

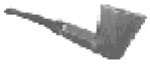
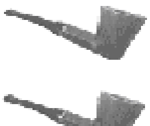
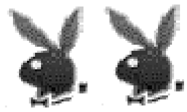
Ma creare il vuoto è rischioso: c'è chi anche chi crede che la "naturale" aberrazione del vuoto sia in qualche modo la testimonianza dell'universale presenza di Dio, e chi la pensa così non può che leggere la creazione del vuoto come una abominevole bestemmia.

Torricelli annuncia la sua scoperta proprio scrivendo a Michelangelo Ricci, uomo di chiesa, pur se ancora privo di ordini. E Ricci gli risponde con la frase riportata in testa a quest'articolo, mostrando una consapevolezza della cultura scientifica che molti teologi ancora sono lontani dal possedere. Ed è forse proprio questa sua ammirevole apertura mentale, unita alla sua opera diplomatica e di divulgazione fra i suoi molti e potenti corrispondenti a dover essere ricordata. In qualità di corrispondente dell'Accademia del Cimento – oltre che naturalmente personaggio profondamente inserito nella vita culturale della Santa Sede – Ricci dialoga non solo con Cristina di Svezia, ma anche con Leopoldo de' Medici, granduca di Toscana, per conto del quale partecipò anche alla fondazione del Giornale dei Letterati.

E, naturalmente, era in contatto con i pontefici che si succedevano sul trono di san Pietro. L'ultimo sotto cui servì, papa Innocenzo XI, decide di farlo cardinale; era il settembre 1681, Michelangelo aveva già superato i sessant'anni e non aveva mai preso gli ordini: l'elevazione al rango di principe della chiesa forse lo coglie di sorpresa, forse lo intimidisce, al punto che proclama con energia la sua indegnità alla porpora cardinalizia. Ma non servirà a molto: papa Innocenzo ha deciso, e Michelangelo Ricci, che peraltro morirà appena nove mesi dopo, vivrà i suoi ultimi giorni come porporato.

Se non la natura, forse sono le regole degli uomini ad aborrire il vuoto: e poter lasciar vacante un seggio è cosa talvolta consentita ai sovrani, ma non ai loro sottoposti.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Fred's Flying Magic Wands			
Lo facciamo facile			

2.1 Fred's Flying Magic Wands

Nel senso che il VadLdRM più giovane come hobby martirizza percussioni: mica scherzi, siamo ormai al livello che gli offrono almeno *un'intera cena* per suonare, e non solo a lui, ma a tutta la banda[14]. Come al solito, l'altro VAdLdRM ha commentato sprezzantemente: "Una cena per suonare, due per smettere". Tutta invidia per la quarantina di fan che lo seguono con entusiasmo.

Recentemente (mica tanto, era estate), era stato offerto loro di tenere uno spettacolo in un ampio spazio pianeggiante[15]: vitto, alloggio, e tecnico del suono forniti dalla società organizzatrice; nulla da eccepire sul vitto (concerto associato a sagra paesana), qualcosa da eccepire sull'alloggio ("meno male che abbiamo portato la tenda"), molto da eccepire sul tecnico del suono, come andremo a spiegare.

Infatti, gli stadi terminali dell'impianto di amplificazione (aka "i tromboni", anche se si trattava di altoparlanti omnidirezionali) erano posti ai vertici di un triangolo equilatero: pienamente compresi nell'espletazione del loro compito, eruttavano onde approssimativamente sinusoidali (beh, uno suona la cornamusa) alla potenza richiesta. La quale potenza, soggiacendo alle usuali leggi della fisica, raggiungeva l'orecchio della vittima ad un livello inversamente proporzionale al quadrato della distanza: tutto bene, quindi?

Mica tanto.

Infatti, lo smodato interesse per la sperimentazione delle sostanze psicotrope che affliggeva il *soi-disant* tecnico del suono (fornito, vi ricordiamo, dagli organizzatori: quindi, una volta tanto, non era colpa di Fred), faceva sì che uno dei tre mucchi di tromboni buttasse fuori ad una potenza *quattro volte* quella richiesta (gli altri due altoparlanti, essendo conservatori moderati, si tenevano sulle più prudenti posizioni concordate).

All'inizio concerto, quando il tecnico era "ormai fumato" e il pubblico "non ancora fumato", quest'ultimo si era correttamente posizionato al centro del triangolo: volendo però

[14] No, non facciamo nomi. Ma se il batterista, incurante della temperatura esterna, si ritrova a torso nudo prima della metà spettacolo, potrebbero essere loro. O degli epigoni.

[15] Alla voce "ampio", i più sgamati di voi avranno capito come mai questo problema non è ambientato nell'usuale Campo dei Chinotti.

ricevere nelle orecchie la stessa potenza da ciascuno degli altoparlanti, tutti hanno cominciato a vagare per il prato (che, vi ricordiamo, è molto ampio e molto piano) alla ricerca dei punti nei quali il *segnale* di ciascuno degli altoparlanti avesse la stessa potenza; quello che vi si chiede, a parte sottrarre le sostanze non autorizzate al tecnico e passarcele in un luogo buio, è di trovare i punti nei quali verranno a radunarsi gli spettatori.

A titolo di espansione (il che significa "non abbiamo la soluzione"), sapete benissimo che Rudy è stonato come una campana (rotta), quindi delle sue misure c'è poco da fidarsi: supponendo che un altoparlante "spari" ad una potenza non necessariamente pari a quattro volte quella degli altri (ma comunque diversa da quella di questi), come si comporterebbe il pubblico (no, non verso il tecnico del suono: come transumanza verso il punto equipotenziale)?

2.2 Lo facciamo facile

Questo problema stava durando un paio di pagine solo come introduzione ma poi Rudy si è stufato e ha deciso di tagliare per i campi. Per tranquillizzare i nostri filologi, statuiamo comunque che prima o poi pubblicheremo tutto il gossip relativo su un'insignificante rivistucola dedicata alla divulgazione scientifica. Qui, però, ci limitiamo all'essenziale: chi vedrà entrambe le versioni, sappia che tutto il resto rispetto a quanto compare qui è farina di Doc, che non solo "allunga il brodo", come amiamo dire, ma aggiunge sempre roba che arriva da due pacchetti, e solo su uno c'è scritto "glutammato di sodio".

Ma veniamo al problema.

Questa volta, abbiamo a disposizione tre linee che, non essendo nessuna di loro parallela ad un'altra, formano un ampio triangolo "quasi" qualsiasi (per il momento ignorate il "quasi": verrà – forse – interessante dopo); quello che vi si chiede è di trovare il luogo dei punti per cui la *somma* delle distanze dalle tre linee è minima.

Il nostro consiglio è di non partire da casi particolari, ma di cercare le soluzioni più generali possibili: in seguito (da cui il "quasi" di cui sopra) potrebbe essere interessante vedere come le soluzioni generali "collassano" nei casi particolari. Oh, se qualcuno vuole esplorare altre opzioni oltre a quella della "somma", liberissimo. No, noi non ci abbiamo neanche provato.

3. Bungee Jumpers

> *Euclide ha mostrato che con "riga e compasso" si possono fare un mucchio di cose.*
>
> *Mascheroni ha mostrato che molte cose si possono fare con il solo compasso.*
>
> *Solo con la riga, si possono fare ben poche cose, ma… se aggiungessimo qualche altro strumento?*

Mostrate come sia possibile bisecare un segmento con l'uso di una riga e uno strumento in grado di trisecare qualsiasi segmento.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio, e siamo già a metà mese quando queste righe vengono scritte, chissà dove saremo quando le leggerete.

È cominciato un nuovo anno che sentiamo già porterà molta fortuna a tutti noi, anche se noi alla fortuna non crediamo.

Bene, vediamo di offrirvi uno sguardo sulle soluzioni arrivate nel mese passato.

4.1 [214]

4.1.1 "Animatoreee!"

Continua la revisione dei problemi non risolti in modo non algebrico da parte di ***trentatre***. Questo era il testo:

Abbiamo tre volontari, Anna, Bruno e Carla, cinque dadi e abbiamo distribuito soldi del Monopoli ad A, B e C, i quali ne possono puntare dieci ciascuno per ogni partita. Lanciamo i dadi e facciamo il prodotto dei valori dei dadi:

1. *Se il valore è divisibile per 10 ma non per 24, Anna prende il piatto.*
2. *Se il valore è divisibile per 24 ma non per 10, Bruno prende il piatto.*
3. *Se il valore è divisibile sia per 24 che per 10, Carla prende il piatto.*
4. *Se il valore non è divisibile né per 10 né per 24, il piatto resta sul piatto.*

Che cosa succede giocando dieci, venti o anche cinquanta partite? Come finisce?

La soluzione del mese scorso era di ***Alberto R.***, ma era basata su "forza bruta", e ***trentatre*** si è dato da fare:

Le probabilità richieste dal problema sono già calcolate da ***Alberto R.*** con un programma su pc, e ho usato anch'io questa scorciatoia per verificare i calcoli seguenti. Resta il problema di arrivare al risultato in modo algebrico. La "formulaccia" di ***Alberto R.*** (con la somma estesa fino a **5**) si sviluppa in

$$[1]\quad \sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{5-k}\right)=(6^5-3^5-5^5+2^5)/6^5=4440/7776=0.570988\cdot$$

Questo suggerisce di trattare il numero di lanci L (in questo caso 5) come una variabile. Il prodotto di L lanci è un numero $1 \le N \le 6^L$ del tipo $N = 1^a \cdot 2^b \cdot 3^c \cdot 4^d \cdot 5^e \cdot 6^f$ con $a+b+c+d+e+f=L$; poiché N contiene solo i numeri primi 1,2,3,5 si può scrivere

$$[2]\quad N = 1^a \cdot 2^{b+2d+f} \cdot 3^{c+f} \cdot 5^e = 2^m 3^n 5^k .$$

Gli N possibili sono 6^L, siano

$(p)_L$: il n° di valori N <u>divisibili</u> per p , $(p')_L$: idem per gli elementi <u>non divisibili</u> per p

- (p) sta per una condizione generica p.es. $(3',8')_L$: elementi non divisibili per 3 e non divisibili per 8

Ogni condizione p estrae dall'insieme degli N un sottoinsieme e (p) è il numero di elementi.

Valgono, per qualsiasi L, le formule di natura insiemistica

$$[3.1]\quad (p)+(p')=(1)$$

- le proprietà p e p' sono complementari; (1) sta per 6^L: tutti i termini sono divisibili per 1

$$[3.2]\quad (p',q')=(1)-(p)-(q)+(p,q)$$

$$(p',q',r')=(1)-(p)-(q)-(r)+(p,q)+(q,r)+(r,p)-(p,q,r)\ \text{ecc.}$$

- principio di inclusione/esclusione - si ottiene dal diagramma di Venn sugli insiemi

[3.3] $(p,q)+(p,q')=(p)$; si dimostra da [3.1] - p.es. $(10,24')+(10,24)=(10)$

$$[3.4]\quad (p,q)=(r)\ \text{con}\ r = \text{mcm}(p, q)$$

- se N è divisibile per p e per q lo è anche per r e viceversa - p.es. $(6,15)=(30)$.

Il problema si può trattare con una funzione generatrice; sostituiamo i primi (2,3,5) con le variabili (X,Y,Z) e definiamo il polinomio a 6 termini

$$[4]\quad Q = 1 + X + Y + X^2 + Z + XY$$

- dove i lanci (1,2,3,4,5,6) sono scritti in forma di variabili

- lo sviluppo di $Q^L = (1+X+Y+X^2+Z+XY)^L$ comprende 6^L termini che, tornando ai valori numerici, sono tutti i possibili N nella forma [2] per L lanci.

Da Q^L si possono ottenere i valori $(p')_L$ con le fasi

(a) i $(p), (p')$ vanno ridotti con le [3] alle forme con apice (p') con $p = 2^m 3^n 5^k$

- nel caso di (p', q') p e q devono essere coprimi

(b) si tolgono da Q^L i termini con $X^u \cdot Y^v \cdot Z^w$ con $u \geq m, v \geq n, w \geq k$ (divisibili per p)

- nel caso di (p', q') si tolgono separatamente i termini divisibili per p e quelli per q.

(c) si contano i termini riamasti ponendo $X = Y = Z = 1$ (ogni termine diventa uguale a 1)

- se una variabile, p.es. X, non compare in p si può porre $X = 1$ già nella fase (b).

Spiego il processo con qualche caso

- cerchiamo $(10)_L$ - da [3.5], [3.2] si ha

$(10)_L = (2,5)_L = (1)_L - (2')_L - (5')_L + (2',5')_L$ nelle forma voluta

$(2')_L = 3^L$: in Q^L va posto X = 0 (i termini pari scompaiono) e Y = Z = 1 (per contare i termini)

- in sintesi $Q^L \to (1+Y+Z)^L \to 3^L$

$(5')_L = 5^L$: in Q^L va posto Z = 0, e poi X = Y = 1 cioè

$$Q^L \to (1+X+Y+X^2+XY)^L \to 5^L$$

$(2',5')_L = 2^L$: in Q^L va posto X = Z = 0, e poi Y = 1 cioè $Q^L \to (1+Y) \to 2^L$

- e quindi $(10)_L = 6^L - 3^L - 5^L + 2^L$ e per L = 5 $\boxed{(10)_5 = 6^5 - 3^5 - 5^5 + 2^5 = 4440}$ cioè la [1] .

Aggiungo i casi simili (serviranno dopo)

$$(3')_L = 4^L \to \boxed{(3')_5 = 1024},\ (3',5')_L = 3^L \to \boxed{(3',5')_5 = 243}\ .$$

I dati richiesti dal problema sono (con L = 5)

Anna : $A = (10, 24')$, Bruno : $B = (10', 24)$, Carla : $C = (10, 24)$, piatto : $P = (10', 24')$

- per [3.3] e [3.1] valgono le

$$A + C = (10),\ A + P = (24'),\ B + C = (24),\ B + P = (10'),\ A + B + C + P = (1)$$

- basta conoscere $C = (10, 24)$ per avere

$$[5]\ \ A = (10) - C,\ B = (24) - C,\ P = (1) - (24) - (10) + C\ .$$

- occorrono quindi (24) e $C = (10, 24)$, che vanno ridotti alle forme (p') e (p', q') con

$$(24) = (8,3) = (1) - (8') - (3') + (8',3')$$

$$(10,24) = (120) = (8,3,5) = (1) - (8') - (3') - (5') + (8',3') + (3',5') + (5',8') - (8',3',5')\ .$$

I valori non ancora calcolati sono quelli che contengono 8' ; riporto in dettaglio solo il calcolo di (8'), le fasi sono

- 3,5 non compaiono : Y = Z = 1 cioè $Q^L \to Q^* = (3 + 2X + X^2)^L$

- per togliere da Q^* i termini con potenze maggiori di X^3 e porre X =1 si sviluppa Q^* in serie di Taylor fino al 2° termine in X, cioè

$$(8')_L = \left(Q^* + \frac{dQ^*}{dX} + \frac{1}{2}\frac{d^2Q^*}{d\,X^2} \right)_{X=0} = (L+1)\cdot 3^L + 2L(L-1)\cdot 3^{L-2}$$

da cui $\boxed{(8')_5 = 2538}$.

Gli analoghi risultati per gli altri termini sono

$\boxed{(8',3')_5 = 272}$ da $Q^* = (2 + X + X^2)^L \rightarrow (8',3')_L = (L+1)\cdot 2^L + L(L-1)\cdot 2^{L-3}$

$\boxed{(5',8')_5 = 592}$ da $Q^* = (2 + 2X + X^2)^L \rightarrow (5',8')_L = (L+1)\cdot 2^L + L^2 \cdot 2^{L-1}$

$\boxed{(8',3',5')_5 = 21}$ da $Q^* = (1 + X + X^2)^L \rightarrow (8',3',5')_L = 1 + L(L+3)/2$.

Dai risultati precedenti $\boxed{(24)_5 = 4486,\ (10,24)_5 = 2175}$.

In definitiva dalle [5] si hanno i dati richiesti dal problema

$$\boxed{A = 2265, B = 2311, C = 2175, P = 1025}.$$

Le rispettive probabilità si hanno dividendo per 7776.

E – per quanto poco contento sembrasse lo stesso ***trentatre*** di aver ricavato dei numeri già noti in modo complicato – continuano ad arrivare in redazione valanghe di complimenti per le sue soluzioni (in particolare il mese scorso da parte di ***Valter***).

Comunque anche il nostro ***Franco57*** si è impegnato a mettere in bella la sua soluzione, così ve la proponiamo qui sotto:

La probabilità $P(k,n)$ che il prodotto del lancio di $n > 1$ dadi sia divisibile per k si può calcolare ricorsivamente sulla base delle sotto-probabilità restanti visto il risultato del primo dado. La formula è

$P(k,n) = \frac{1}{6}\sum_{1\le i\le 6} P\left(\frac{k}{MCD(k,i)}, n-1\right)$ e le condizioni al contorno $P(k,0) = 0$ per $k > 1$ e $P(1,0) = 1$.

Infatti per il primo dado se esce la faccia i, $1 \le i \le 6$, nel valore di i ci possono essere alcuni fattori (qui intesi con la loro molteplicità cioè con il loro esponente) che coprono in tutto o in parte quelli presenti in k. I fattori rimanenti sono quelli in k meno quelli in comune con i cioè quelli in $\frac{k}{MCD(k,i)}$ poiché il Massimo Comun Divisore contiene per definizione esattamente i fattori in comune.

La formula ricorsiva consente abbastanza facilmente di calcolare i valori utili alla soluzione del quesito che sono quelli evidenziati (vista la mia patologica imprecisione nei calcoli mi sono fatto aiutare da un foglio elettronico):

		FATTORI (k)														
		2	3	4	5	6	8	10	12	20	24	15	30	40	60	120
TIRI (n)	0	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
	1	50,0000%	33,3333%	16,6667%	16,6667%	16,6667%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
	2	75,0000%	55,5556%	41,6667%	30,5556%	41,6667%	13,8889%	16,6667%	19,4444%	5,5556%	5,5556%	11,1111%	5,5556%	0,0000%	0,0000%	0,0000%
	3	87,5000%	70,3704%	62,5000%	42,1296%	61,5741%	33,3333%	33,3333%	42,1296%	19,4444%	21,2963%	25,0000%	19,4444%	6,9444%	9,7222%	2,7778%
	4	93,7500%	80,2469%	77,0833%	51,7747%	75,2315%	52,0833%	46,7593%	61,0340%	35,0309%	40,3549%	38,2716%	34,4136%	19,9074%	24,8457%	13,2716%
	5	96,8750%	86,8313%	86,4583%	59,8122%	84,1178%	67,3611%	57,0988%	74,7299%	48,7397%	57,6903%	49,7685%	47,4537%	34,7865%	40,0592%	27,9707%
	6	98,4375%	91,2209%	92,1875%	66,5102%	89,7955%	78,6458%	65,0849%	83,9570%	59,6579%	71,3413%	59,2936%	58,0033%	48,5854%	52,9750%	42,7834%

Infatti il prodotto di n lanci è divisibile per sia per 10 che per 24 se è divisibile per mcm(10,24)=120. Perciò, indicando per semplicità $P(k)$ per $P(k,n)$, vince:

Anna con probabilità $\frac{P(10) - P(120)}{P(10) + P(24) - P(120)}$;

Bruno con probabilità $\dfrac{P(24)-P(120)}{P(10)+P(24)-P(120)}$;

Carla con probabilità $\dfrac{P(120)}{P(10)+P(24)-P(120)}$.

		Anna	Bruno	Carla
		div x 10	ndiv x 10	div x 10
		ndiv x 24	div x 24	div x 24
TIRI	1			
	2	75,0000%	25,0000%	0,0000%
	3	58,9286%	35,7143%	5,3571%
	4	45,3501%	36,6771%	17,9728%
	5	33,5506%	34,2320%	32,2174%
	6	23,8155%	30,4967%	45,6878%
	7	16,2855%	26,4444%	57,2701%

dove naturalmente il denominatore è la probabilità che il piatto non resti sul piatto.

Ho evidenziato le probabilità maggiori per numero di lanci. Si osserva che fino a 4 lanci la favorita è Anna, con 5 il vantaggio, molto risicato, è di Bruno, ma da 6 lanci in poi il pronostico è decisamente favorevole a Carla.

È confortante che le percentuali calcolate corrispondano a quelle ottenibili dai conteggi ottenuti col metodo della forza bruta di ***Alberto R.*** e pubblicati nel numero 215 (dicembre 2016).

Anna	divisibili per 10 e non per 24	2265	33,5506%
Bruno	divisibili per 24 e non per 10	2311	34,2320%
Carla	divisibili sia per 10 che per 24	2175	32,2174%

Una volta risolto il problema in questo modo, ho cercato, senza riuscirvi, una formula esplicita per calcolare $P(k,n)$ e in effetti, con fatica, ci si riesce fissato il valore di k, ma una formula classica in k ed n temo non esista (più avanti mostro perché).

L'idea è di calcolare la probabilità per sottrazione: intendo dire ad esempio che un prodotto è divisibile per 10, cioè è divisibile sia per 2 che per 5 se non è vero che non è divisibile né per 2 né per 5. Sottintendendo che sto lavorando con n dadi quindi scrivo

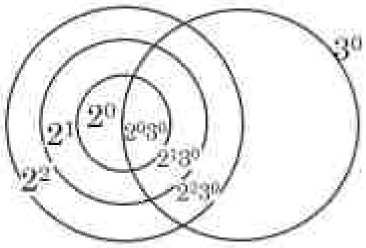
$$P(10)=1-P[2^0]-P[5^0]+P[2^0 5^0]$$

dove $P[2^0]$ è la probabilità che il prodotto ottenuto abbia 0 come esponente del fattore 2 (cioè sia dispari), $P[5^0]$ analoga per il fattore 5 e $P[2^0 5^0]$ è la probabilità che abbia 0 come esponente del 2 e 0 come esponente del 5. Quest'ultimo l'ho sommato in quanto sottratto due volte in $-P[2^0]-P[5^0]$.

$P[2^0]=P\left[\{1,3,5\}^n\right]=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ dove $\{1,3,5\}^n$ rappresenta una sequenza di n risultati dispari; analogamente $P[5^0]=P\left[\{1,2,3,4,6\}^n\right]=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ e $P[2^0 5^0]=P\left[\{1,3\}^n\right]=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Dunque $P(10)=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ e questo è il caso semplice.

Calcolare $P(24)$ è più complicato a causa degli esponenti in $24=2^3\cdot 3$. Mi aiuto con un diagramma di Venn.



Risulta:

$$P(24) = 1 - P[2^0] - P[2^1] - P[2^2] - P[3^0] + P[2^0 3^0] + P[2^1 3^0] + P[2^2 3^0] .$$

Qui il calcolo delle componenti si fa più complesso, ad esempio:

$$P[2^1] = P\left[\{2,6\} \times \{1,3,5\}^{n-1}\right] = \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

dove con $\{2,6\} \times \{1,3,5\}^{n-1}$ indico una sequenza di risultati che contiene un 2 o un 6 <u>in qualsiasi posizione</u> e i restanti $n-1$ sono nell'insieme {1,3,5}. Più aumenta l'esponente più complesso è il calcolo, ad esempio:

$$P[2^2 3^0] = P\left[\{2\}^2 \times \{1,5\}^{n-2}\right] + P\left[\{4\} \times \{1,5\}^{n-1}\right] = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{6} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} .$$

Alla fine (dopo molti errori di calcolo corretti) ottengo

$$P(24) = 1 - \left(1 + \frac{7}{9} n + \frac{2}{9} n^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(1 + \frac{7}{8} n + \frac{1}{8} n^2\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

e da

$$P(120) = 1 - P[2^0] - P[2^1] - P[2^2] - P[3^0] - P[5^0] + P[2^0 3^0] + P[2^1 3^0] + P[2^2 3^0] +$$
$$+ P[2^0 5^0] + P[2^1 5^0] + P[2^2 5^0] - P[2^0 3^0 5^0] - P[2^1 3^0 5^0] - P[2^2 3^0 5^0]$$

l'ancora più disgustoso

$$P(120) = 1 - \left(\frac{7}{9} n + \frac{2}{9} n^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(2 + \frac{15}{8} n + \frac{5}{8} n^2\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(1 + \frac{3}{2} n + \frac{1}{2} n^2\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

che ho comunque verificato essere tutti corretti con la formula ricorsiva.

Un altro esperimento per $P(5^t)$ mi porta a disperare di avere una formula generale:

$$P(5^t) = 1 - \sum_{0 \le k < t} P[5^k] .$$

Poiché $P[5^k] = P\left[\{5\}^k \times \{1,2,3,4,6\}^{n-k}\right] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{5^k} \left(\frac{5}{6}\right)^n$

abbiamo $P(5^t) = 1 - \left(\sum_{0 \le k < t} \binom{n}{k} \frac{1}{5^k}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Ma $\sum_{0\le k<t}\binom{n}{k}\frac{1}{5^k}$ è un polinomio di grado $t-1$ in n che è lo sviluppo parziale dei primi t addendi del binomio $\left(1+\frac{1}{5}\right)^n$ per il quale immagino non esista una formula esplicita in t ed n.

Niente male vero? Anche lui non sembra molto soddisfatto. Ma ora passiamo alle soluzioni del mese scorso.

4.2 [215]

4.2.1 Elezioni!

Il Capo sta provando ogni possibile trucco per farvi andare a rivedere i suoi pezzi sulle elezioni, ma io il problema lo riduco all'osso e non si vede più:

> *Abbiamo scelto* 20 *tra i lettori di RM, e li abbiamo invitati a ordinare per preferenza Alice, Piotr e Rudy. Ogni possibile combinazione dei tre è presente tra le schede ricevute. Inoltre, si è visto che* 11 *votanti preferiscono Alice a Doc (e quindi,* 9 *preferiscono Doc a Alice), mentre* 12 *persone preferiscono Rudy ad Alice. Inaspettatamente* 14 *persone preferiscono Doc a Rudy. Quante prime scelte ha ricevuto ognuno?*

Cominciamo con la soluzione di ***Alberto R.***:

> Posto (con ovvio significato dei simboli):
>
> ADR = X1
>
> ARD = X2
>
> DAR = X3
>
> DRA = X4
>
> RAD = X5
>
> RDA = X6
>
> Abbiamo il seguente sistema diofanteo:
>
> $1 \le X \le 15$
>
> $\Sigma X = 20$
>
> X1 + X2 + X5 = 11
>
> X4 + X5 + X6 = 12
>
> X1 + X3 + X4 = 14
>
> Che ha una sola soluzione:
>
> ADR = X1 = 6
>
> ARD = X2 = 1
>
> DAR = X3 = 1
>
> DRA = X4 = 7
>
> RAD = X5 = 4
>
> RDA = X6 = 1
>
> Quindi le prime scelte sono 8 per Doc, 7 per Alice e 5 per Rudi.
>
> Se si andasse al ballottaggio Doc, che ha vinto al primo turno, sarebbe battuto da Alice 11 a 9, mentre con il metodo Borda (per ogni scheda 2 punti al primo, 1 al secondo, 0 al terzo) tornerebbe a vincere Doc con 23 punti, seconda Alice con 19, ancora ultimo Rudi con 18.

Vedete che ***Alberto*** è stato attento quando Rudy raccontava i metodi di valutazione delle elezioni? Vediamo la versione di ***Valter***:

> Chiamo A, D e R i nostri 3 amici per comodità.

Noto che ci sono:
- 11 A > D e 14 D > R
- 14 D > R e 12 R > A
- 12 R > A e 11 A > D.

Siccome i votanti sono 20 ci sono almeno:
- 5 A > D > R
- 6 D > R > A
- 3 R > A > D

in quanto sommando i 2 casi nelle 3 liste precedenti ottengo valori > di 20 quindi le eccedenze sono sovrapposizioni (p.e. 11 A > D e 14 D > R fa 25 quindi 5 di questi casi devono coincidere in uno dei 20 voti). Mi rimangono perciò:
- 6 voti
- e da soddisfare:
  - 3 A > D
  - 3 D > A
  - 3 A > R
  - 3 R > A
  - 3 D > R
  . 3 R > D.

È gioco facile capire che i 6 voti restanti sono:
- 3 A > D > R
- 3 R > D > A.

Riassumendo i voti sono:
- 8 A > D > R
- 6 D > R > A
- 3 R > A > D
- 3 R > D > A.

Le prime scelte di ognuno sono quindi:
- 8 per A
- 6 per D
- 6 per R.

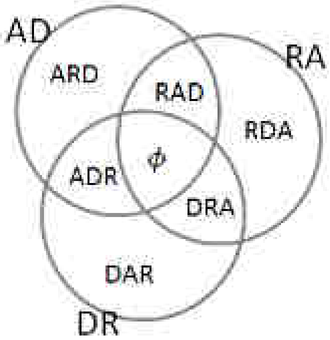
Se assegno un punteggio di 3 al primo scelto, 2 al secondo e 1 al terzo otterrei un totale di punti:
- 39 per A
- 43 per D
- 38 per R

(con questa legge elettorale vincerebbe D). Non ho trovato una regola per far vincere Rudy (p.e. se si scegliesse la migliore seconda o terza scelta …); forse però pensandoci bene la regola potrebbe proprio essere questa (ma allora vince se non vi è nessun regolamento che lo possa far vincere … aiuto!!! …). Dove è andato finire però il mio voto A > R > D :) ?

Comincio a capire perché il Capo ha cominciato subito ad elencare tutti i lavori che toccavano al vincitore… Proviamo ora a vedere l'approccio di ***Franco57***:

Indicando con V l'insieme dei votanti, con AD quelli che hanno preferito Alice a Doc, con ADR quelli che hanno votato in ordine di preferenza Alice, Doc, Rudy, con Axx quelli che hanno messo Alice in testa alle preferenze e così via, abbiamo che i dati del quesito sono:

#V = 20; #AD = 11; #RA = 2; #DR = 14; #ADR, #ARD, #DAR, #DRA, #RAD, #RDA tutti positivi e che si cercano #Axx, #Dxx, #Rxx.



Rappresentiamo gli insiemi con un diagramma di Venn per facilitare i calcoli. Si vede facilmente che:

#DAR = #V −#AD −#RA + #RAD = 20 −11 −12 + #RAD = #RAD −3

e poiché #DAR > 0 abbiamo #RAD > 3.

Inoltre #V −#DR = #ARD + #RAD + #RDA, cioè 6 = #ARD + #RAD + #RDA.

Osserviamo che 6 come somma di tre numeri positivi può essere ottenuto solo in tre modi differenti e relative permutazioni: 1+1+4, 1+2+3, 2+2+2, ma solo in un caso può essere #RAD > 3, perciò

#RAD = 4; #ARD= 1; #RDA = 1.

Da qui per differenze si calcolano facilmente le cardinalità delle altre combinazioni:

#ADR = #AD −#ARD −#RAD = 11 −1 −4 = 6;
#DRA = #RA −#RAD −#RDA = 12 −1 −4 = 7;
#DAR = #DR −#ADR −#DRA = 14 −6 −7 = 1;

e per somma le prime scelte:

#Axx = #ARD + #ADR = 1 + 6 = 7;
#Dxx = #DAR + #DRA = 1 + 7 = 8;
#Rxx = #RAD + #RDA = 4 + 1 = 5.

Notate che i diagrammi di Venn spiegano la situazione piuttosto bene? Non lasciatevi confondere se le soluzioni non hanno tutte lo stesso risultato (questa è però uguale a quella di ***Alberto R***), è il procedimento che conta! Concludiamo con la versione di ***Balthazar***:

Poniamo in rigoroso ordine alfabetico ADR = a, ARD = b, DAR = c, DRA = d, RAD = e, RDA = f.

Ne segue il seguente sistema:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=20 \\ a+b+e=11 \\ d+e+f=12 \\ a+c+d=14 \\ c+d+f=9 \\ a+b+c=8 \\ b+f+e=6 \end{cases}$$

Dal fatto che le 6 variabili devono essere tutte ≥ 1 e dal sistema seguono banalmente le seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} 1 \leq a \leq 6 \\ 1 \leq b \leq 4 \\ 1 \leq c \leq 6 \\ 1 \leq d \leq 7 \\ 1 \leq e \leq 4 \\ 1 \leq f \leq 4 \end{cases}$$

Con semplici sostituzioni si ottiene $-b+d=6$, ora dato che $b \geq 1$ e $d \leq 7$ si deduce che l'unica soluzione intera è:

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 7 \\ e = 4 \\ f = 1 \end{cases}$$

Dichiaro eletto Doc.

Va bene. Doc: ti toccano tutti i lavori che hai fatto fino ad oggi, in più per favore prendi in mano qualcuna delle nostre rubriche.

4.2.2 "Quasi primavera"

Un bel problemino geometrico per i nostri amanti di Geogebra:

Abbiamo una serie di quadrilateri convessi ABCD tutti diversi tra loro. Si definisce per ogni quadrilatero, un punto P al suo interno tale che i triangoli ABP, BCP, CDP e DAP siano tutti di area uguale. Esiste una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del punto P?

Questo il problema. Si cercava un criterio veloce, ed è con la velocità che Valter si è buttato:

La butto giù veloce senza pensarci troppo su (se va va):

- da un vertice V traccio un segmento S all'interno del quadrilatero
- considero S il lato comune di due triangoli contigui che costruirò
- da V creo una retta perpendicolare a S
- dai vertici contigui a V faccio partire 2 rette P1/P2 parallele a S
- cambio inclinazione a S e di conseguenza a R e P1/P2 sino a che la distanza da V a P1 e P2 sia uguale
- tutti i triangoli che costruisco su qualunque punto di S avranno la stessa area avendo stessa base e altezza
- faccio lo stesso su un vertice contiguo a V ottenendo un secondo segmento
- il punto di incontro dei due segmenti è il punto P cercato
- se non è soddisfatta la costruzione anche per l'altro vertice contiguo a V il quadrilatero va eliminato.

Secondo voi va? Anche Matteo non è convintissimo, ma scrive una bella spiegazione:

Dato un quadrilatero ABCD, è evidente che, se si vuole fare in modo che risulti suddiviso in 4 triangoli di uguale area, bisogna fare in modo che le altezze di tali triangoli risultino inversamente proporzionali alle loro basi, in questo caso i lati del quadrilatero. Dunque, si dovrà certamente imporre, per esempio:

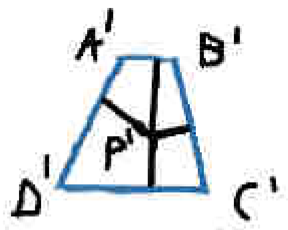
$$h_1 = \frac{\alpha}{l_1}$$

E questo per tutti e quattro i lati.

Potrebbe sembrare che α sia un'ulteriore variabile da calcolare, ma scopriremo presto che il suo valore è in realtà irrilevante. Pertanto, poniamola temporaneamente uguale ad 1 in attesa degli sviluppi, e calcoliamo la lunghezza che le altezze relative ai vari lati dovrebbero avere.

Determinato il modulo, è anche facile determinare la direzione che le altezze devono avere: perpendicolare ai lati del quadrilatero. Come verso, scegliamo quello che dall'interno del poligono si dirige verso il lato relativo all'altezza. Abbiamo così ottenuto quattro vettori altezza.

Ora dimentichiamoci temporaneamente del quadrilatero di partenza e disponiamo i quattro vettori in modo che partano tutti dallo stesso punto P'. A questo punto è facile costruire il quadrilatero a cui queste altezze dovrebbero corrispondere: basta tracciare le rette perpendicolari alle altezze e passanti per la loro "punta", vedere dove tali rette si intersecano, e determinare i punti A', B', C' e D' che andranno a costituire i vertici del quadrilatero finale. A titolo di esempio ho realizzato rudemente un'immagine che dovrebbe risultare esplicativa:



Adesso si comprende anche perché il parametro a era irrilevante: a meno di similitudini avremmo ottenuto lo stesso quadrilatero.

Si pongono ora due alternative: dal momento che, trascurando le dimensioni, il quadrilatero generato da quei vettori altezza deve avere quella forma, o il quadrilatero ABCD di partenza è simile ad A'B'C'D', oppure sarà impossibile aggiustare la quaterna di altezze all'interno di ABCD in modo da rispettare le proporzioni tra di esse e allo stesso tempo fare in modo che ciascuna tocchi il suo lato perpendicolarmente.

Dunque a mio avviso si può affermare quanto segue: il punto P esiste se e solo se ABCD è simile al quadrilatero A'B'C'D' costruito con il metodo descritto sopra.

Al di là della effettiva correttezza di quanto detto, sicuramente questo metodo si presta di più ad un approccio carta e penna che non ad uno studio analitico, anche se probabilmente con un po' di pazienza potrebbe anche essere implementato sul calcolatore. La cosa interessante, però, è che può essere esteso senza ritocchi a qualsiasi tipo di poligono convesso.

Sono in ogni caso curioso di sapere se secondo voi può funzionare.

Qualcosa di strano sta succedendo ai nostri lettori, sembrano tutti affetti da insicurezza. Prendete il nostro insuperabile ***Alberto R.***:

Questo è un esempio di come ragionerebbe un fantasioso ispettore di polizia e di come non dovrebbe ragionare un matematico serio.

Dato il generico quadrilatero ABCD di area S, trovare il punto P tale che sia:

- Area ABP = S/4
- Area BCP = S/4
- Area CDP = S/4
- Area DAP = S/4

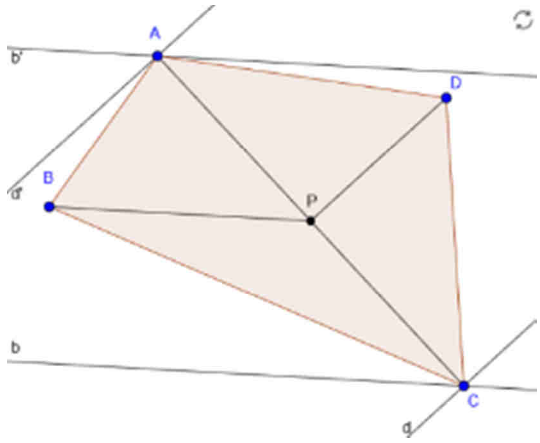
Il luogo dei punti P che soddisfano la prima condizione è una ben determinata retta r_1 parallela ad AB. Analogamente r_2 parallela a BC ed r_3 parallela a CD per la seconda e terza condizione. La quarta condizione può essere omessa perché conseguenza delle prime tre.

Poiché il quadrilatero è scelto a caso anche le tre rette r_1, r_2, r_3 sono random, quindi la probabilità che esse concorrano in un punto è praticamente zero.

Ne risulta che, in generale, il punto P non esiste salvo i casi eccezionali, costituiti dai parallelogrammi, che sono, appunto, una percentuale infinitesima del totale dei quadrilateri.

Vediamo ***Franco57***, se ci offre qualche certezza:

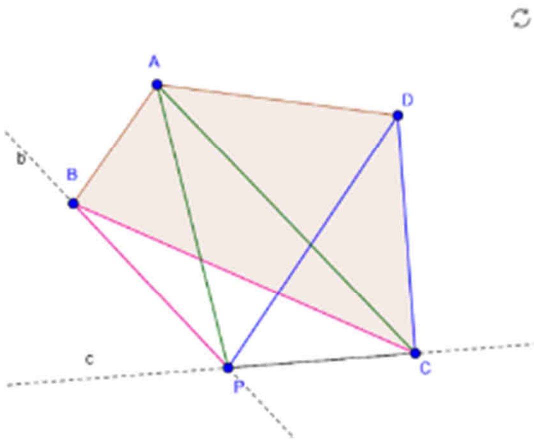
Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del punto P è che due vertici opposti equidistino dalla retta congiungente gli altri due.



La sufficienza è abbastanza semplice: supponiamo ABCD in ordine antiorario e siano B e D equidistanti dalla retta AB. Allora basta prendere P come punto medio di AB, infatti tutti e 4 i triangoli APB, APD, CPD e CPB hanno base uguale, AP o BP, e altezza uguale, distanza di D o di B dalla retta AC.

Per vedere che la condizione è necessaria supponiamo dapprima che P sia interno ed allineato a una coppia di vertici opposti, poniamo A e C. Dalla equivalenza di APD e APB deduciamo che B e D sono equidistanti dalla retta AC.

Se invece il punto P è interno al quadrilatero ABCD ma non allineato a due vertici opposti, poniamo B e D, poiché i triangoli PDA e PDC sono equivalenti e condividono la base PD, hanno la stessa altezza, cioè A dista dalla retta PD quanto C. Perciò se tracciamo le parallele d e d' a PD rispettivamente per C e per A, possiamo affermare che d si trasforma in d' per simmetria puntuale di P. Analogamente questa simmetria puntuale trasforma la parallela b a PB per C nella parallela b' a PB per A. Poiché PD e PB non sono paralleli non lo sono neanche d e b, che quindi hanno come punto di intersezione solo C. Analogamente A è l'unico punto di intersezione di d' e b'. Allora possiamo concludere che la simmetria puntuale di P porta C in A, cioè che P è il punto di mezzo del segmento AC e in particolare è allineato alla retta AC, quindi si ricade nel caso già esaminato.



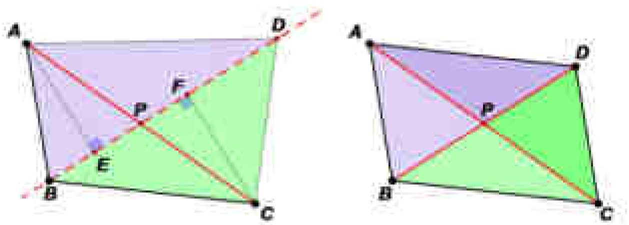
Per concludere la dimostrazione basta solo il caso di P esterno al quadrilatero. In questo caso si può dimostrare che esistono da P due rette (c e b in figura) che toccano in vertici diversi (rispettivamente C e B in figura) per cui tutto il quadrilatero sta su un unico semipiano diviso dalla retta. Considerando l'equivalenza dei triangoli PCB, PCA e PCD che condividono la base PC, si deduce che B, A e D sono allineati. Il ragionamento analogo applicato alla retta b porta a concludere che anche A ,D e C sono allineati. Perciò si tratta di un quadrilatero degenere che ha tutti i vertici allineati, per il quale effettivamente ogni punto P della retta che li contiene soddisfa la proprietà, ma anche in questo caso due vertici opposti equidistano dalla retta congiungente gli altri due.

Da notare che non abbiamo mai sfruttata l'ipotesi che il quadrilatero sia convesso infatti la proprietà vale per tutti i quadrilateri, convessi o no.

La copertura di un appezzamento con quadrilateri di questo tipo sembra un problema intrigante, ho anche qualche idea, ma ormai non più tempo.

Finalmente certezze! Ancora più sicuro ci è sembrato ***trentatre***, che si è lamentato della semplicità del problema:

> Dati a caso i due lati del quadrilatero *AB* e *BC*, sia *P* il punto medio di *AC* e si tracci la retta *BP*. Calando da *A* e *C* le ortogonali alla retta, i due triangoli rettangoli *APE* e *CPF* sono uguali perché sono simili e con uguali ipotenuse. Qualsiasi punto *D* sulla retta *BP* determina due triangoli *BAD* e *BCD* di area uguale, avendo uguali la base *BD* e le altezze *AE* e *FC*. Ma questo deve valere anche per l'altra diagonale *BD*, cioè deve essere *BP* uguale a *DP*. I quadrilateri cercati sono parallelogrammi (una proprietà fondamentale di questi è appunto che le diagonali si bisecano).



Non è un modo meraviglioso per cominciare l'anno? Scriveteci, scriveteci, scriveteci! Diteci quale soluzione vi è piaciuta di più e perché, se non avete voglia di mandarne di alternative! Il Doc risponde poco alle mail da quando ha vinto le elezioni, ma prima o poi risponde, non vi preoccupate! Grazie a tutti e alla prossima!

5. Quick & Dirty

Qualcuno di voi ricorda *Creature della Luce e delle Tenebre*, di Roger Zelazny? Uno dei personaggi era il Generale di Ferro, che aveva un cavallo in grado di fare il primo passo di un metro, il secondo di due metri, il terzo di quattro metri e avanti raddoppiando. In qualità di Stallieri del Cavallo del Generale di Ferro, vi viene chiesto di "portarlo a fare un giretto, ma di riportarlo esattamente qui.". Riuscite, con un'oculata scelta di passi avanti e indietro, a tornare "esattamente qui"?

> *No. Dopo n passi tutti in avanti vi ritrovate a* $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ *metri, e il prossimo salto da* $2n$ *metri, se fatto all'indietro, vi porta oltre il punto di origine. L'unico modo per tornare esattamente sul punto di partenza è resettare il cavallo.*
>
> *[Domanda di Rudy]: Se il CdGdF per i passi seguisse la regola* $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...\}$ *(la serie di Fibonacci) o la regola* $\{1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, ...\}$ *, allora potrebbe tornare al punto di origine. C'è una relazione col fatto che se usate questi due oggetti come base per la numerazione la notazione non è univoca, mentre lo è nel sistema binario?*

6. Zugzwang!

Allora, sarebbero due al prezzo di uno, ma il primo (molto bello non solo come gioco, ma anche come estetica di scacchiera) richiede un mucchio di lavoro tra scacchiera, pedine e organizzazione, mentre il secondo a estetica fa abbastanza senso. In compenso, il materiale ve lo potete procurare piuttosto facilmente (sono doppiamente facilitate, qui, le maestre elementari “diversamente giovani”); inoltre, a quanto ci risulta, anche se sul primo si sono sviluppate varie analisi, non ne conosciamo sul secondo, che ci pare tra l’altro più semplice.

E, in forza di questa ultima considerazione, nomineremo il primo solo nell’ultima frase, parlando quasi unicamente del secondo. A cominciare dal titolo.

6.1 Il Ponte

Per quanto riguarda la ***scacchiera***, vi basta un foglio a quadretti: noi consigliamo quelli a quadrettoni grandi, da *prima mignin* (questa è la prima facilitazione per le maestre), ma se volete andare su cose più piccole fate pure; comunque, come vedremo, la carta millimetrata è sconsigliata. Su questa base, disegnerete (nel senso di aspettare la fine della frase per farlo) un quadrato di un “certo numero” di quadretti; i Sacri Testi (il solito Angiolino-Sidoti, chi altri?) consigliano, o meglio, impongono, il 12x12, ma a noi non sembra fondamentale: potete cominciare con cose più piccole, passare poi a cose più grandi e vedere se un numero dispari dà un vantaggio a qualcuno. Il quadrato, comunque, deve avere i lati verticali di un colore e quelli orizzontali di un altro (avete aspettato a disegnarlo? Bravi, adesso fate pure).

E qui veniamo alla seconda facilitazione per le maestre, soprattutto per quelle che tra i ricordi scolastici hanno una di quelle bellissime “matite a due punte”, una *rossa* e una *blu*!

Nel senso che ogni giocatore gioca con un colore: certo, basterebbero due matite di colori diversi, ma Rudy, sua moglie e i VAdLdRM mentre sperimentavano hanno sviluppato una simpatica tecnica nella quale, dopo aver giocato la propria mossa, si punta la matita con fare vagamente minaccioso verso l’avversario (il suo colore verso di lui), il quale la prende e, con aggraziato gioco di dita, la mette in posizione di scrittura: soprattutto nelle partite “lampo”, questo veloce scambio ha un che di pittoresco.

Oibò, ci accorgiamo adesso che non vi abbiamo detto come si gioca: ogni giocatore traccia la diagonale (quella che vuole) di un quadretto libero, fermo restando che segmenti di colore diverso non si possono toccare neppure alle estremità (e, chiaramente, neanche sovrapporre, questo è vietato anche per i segmenti dello stesso colore).

Scopo di ogni giocatore è unire con una linea spezzata ma continua (il “ponte”, appunto) i due lati del suo colore. Sia ben chiaro che potete tirare segmenti dove vi pare, non dovete fare obbligatoriamente una linea continua sin dall’inizio.

Siamo sicuri che vi siete accorti di come la cosa sia una “semplificazione” (sicuri?) dell’Hex e, avendo nominato l’altro gioco, questo pezzo si chiude qui.

7. Pagina 46

7.1 Prima soluzione

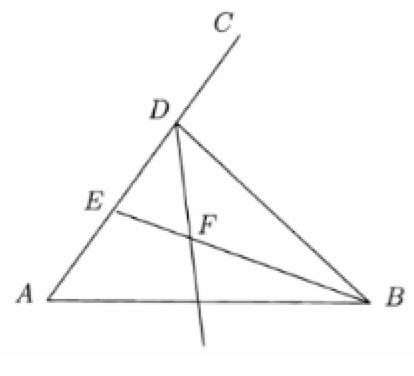
Sia AB il segmento che intendiamo bisecare e C un punto arbitrario non appartenente ad AB.

Trisecando AC in D e in E, si D il punto di trisezione più vicino a C.

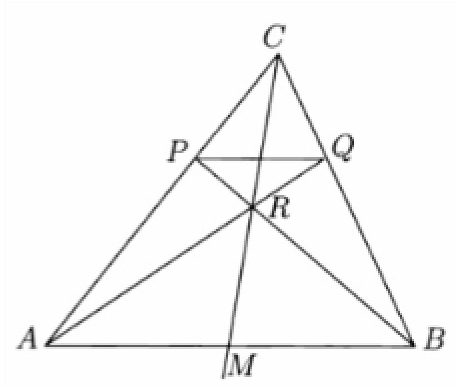
Allora, E è il punto medio di AD, e BE è la mediana del triangolo ADB.

Trisecando il segmento BE, sia F il punto di trisezione più vicino ad E.

F è quindi il punto di intersezione delle mediane di ADB, e quindi la retta DF intercetta AB nel suo punto medio.



7.2 Seconda soluzione



Sia AB il segmento che intendiamo bisecare.

Si scelga un punto arbitrario C al di fuori della linea AB, e si traccino i segmenti AC e BC.

Si trisechino i segmenti AC e BC; siano P e Q i punti di trisezioni rispettivamente di AC e BC più vicini a C.

Si traccino ora i segmenti AQ e BP, e sia R il loro punto di intersezione.

Dal Teorema di Ceva, segue immediatamente che il prolungamento del segmento CR biseca AB, come richiesto.

Nota: Per provare la validità della seconda soluzione indipendentemente dal Teorema di Ceva, si può utilizzare un altro risultato generale:

> Siano A, B e C non collineari.
>
> Siano P e Q rispettivamente giacenti sui segmenti C e BC in modo tale che PQ e AB sino parallele.
>
> Sia R l'intersezione di AQ e PB.
>
> Allora, R giace sulla mediana per C su AB.

Per provare questo, siano X su AC e Y su BC appartenenti alla linea parallela a AB passante per R: allora i triangoli PXR e PAB sono simili tra loro, così come i triangoli QRY e QAB. I rapporti XR/AB e RY/AB sono entrambi uguali al rapporto delle distanze tra le linee PQ e XY e le distanze tra le linee PQ e AB, e quindi sono uguali tra loro, e quindi $XR=RY$.

Se M è l'intersezione di AB e CR, la similitudine tra i triangoli CXR e CAM e tra i triangoli CRY e CMB implica che M è il punto medio di AB, come volevasi dimostrare.

8. Paraphernalia Mathematica

Roba tosta, questa volta. Anche se perennemente sotto gli occhi di tutti. Ma i calcoli locali ve li fate voi la prossima volta che siete a rimborso.

8.1 "Insegua quella macchina!"

Secondo Rex Stout, dire una cosa del genere a un tassista significava ricevere in risposta uno sguardo da "Q.I. uguale al numero di scarpe"[16]. Non ne siamo convinti: è molto più probabile che il nostro tassista parta (con voi a bordo) e, dopo i primi metri, si esibisca in un "quale macchina?"; tanto, il suo guadagno è già fatto, anche se cambiate idea e all'improvviso decidete che tanto valeva inseguirla a piedi.

Ecco, partendo dal fatto che i tassisti non risultano essere una specie in via d'estinzione (e quindi il loro *algoritmo di caccia* deve essere decisamente efficiente), come funziona il calcolo delle tariffe?

Volendo dare un piccolo contributo alla storia degli strumenti di ~~tortura~~ misura, per prima cosa vi diciamo che il *tassametro* è stato inventato nel 1896 da ***Wilhem Bruhn***: quindi, la prossima volta sapete con chi prendervela. Il geniale signore ha deciso che la *distanza* percorsa era importante (e quindi il tutto era collegato all'odometro), ma anche il *tempo* passato stando fermi doveva avere il suo prezzo, e quindi nel sistema doveva esserci anche un cronometro, ma i due sistemi *funzionavano in momenti diversi*. Il "colpo di genio" di Bruhn è stato di utilizzare un metodo che è in decisa controtendenza rispetto a quella che è una logica ormai postulata: un viaggio in Frecciarossa costa più caro che lo stesso percorso in Frecciabianca che costa più caro di un Regionale. Per dirla con una battuta (che ci pare risalga a Bill Matterson), "Il golf è quel gioco in cui meno giochi, più ti diverti": nel tassametro, la filosofia di base sembra essere che "qualsiasi cosa succeda, il tassista ci guadagna".

La ricerca su Google di "TariffeTaxi <CittàDoveVivete>" vi permette di ottenere rapidamente una base dati interessante: per evidenti motivi campanilistici, abbiamo scaricato quelle di Torino[17]:

- Bandiera[18]: €3.50
- Tariffa base: €1.44/km (sino a €8.00, inclusa la Bandiera)
- Oraria: €32.70
- Tariffa primaria: €1.05/km (da €8.00 a €13.00)
- Oraria: €25.70
- Tariffa secondaria: €1.27/km (oltre €13.00)
- Oraria: 25.70
- Crociera: €1.44/km (per il percorso superiore a 60 km/h, scendendo sotto questa velocità si torna alla relativa tariffa).

Grazie al valido supporto di alcuni colleghi, siamo riusciti ad avere un (non molto recente, purtroppo) tariffario londinese:

- Bandiera: £1.00
- Tariffa base: 20p/189.3 metri o 40.8 secondi

I valori piuttosto balordi presenti in entrambe le tabelle sono, con un minimo di calcoli (e aggiornamenti) spiegabili attraverso quella che è la *madre di tutte le formule* di questo tipo, stabilita nel 1934 dall'Autorità dei Trasporti londinese:

[16] Vi ricordiamo che i gialli di Nero Wolfe scritti da Rex Stout (con un'unica eccezione) sono ambientati negli Stati Uniti, dove un piede del 7½ è un'enormità.

[17] Ci imitiamo alla tariffa *semplice*, ignorando andate/ritorno, tariffe massime per l'aeroporto, bagagli, notturna e amenità consimili.

[18] Si definisce "Bandiera" il costo fisso per accedere al taxi: come ama dire un amico, la tariffa da pagare per essere considerati degni della sua attenzione. Storicamente, il termine risale a quando i tassisti, per indicare di essere impegnati in una corsa, alzavano una bandierina con la scritta "Occupato": lo spossante gesto di alzare la bandierina andava pagato.

3 *dimes* di Bandiera + 3 *dimes* per ogni 1/3 di miglio compiuto a velocità superiore a 5 1/3 di miglio per ora o 3 *dimes* ogni 3 ½ minuti compiuti a velocità inferiore a 5 1/3 di miglio per ora.

Il matematico che è in noi non resiste all'idea di farsi una domanda apparentemente stupida: "...superiore… ...inferiore… Ma cosa succede, se vado *esattamente* a 5 1/3?" Se tirate a indovinare, probabilmente azzeccate la risposta esatta: spendete 3 *dimes* per ogni terzo di miglio, che percorrete esattamente in 3 ½ minuti.

I valori, comunque, nascono anche da quella che è una stima della *velocità media* di un taxi in città: questo significa che, per quanto riguarda il centro di Torino, ci si assesta su (inclusi i semafori e le precedenze) un valore inferiore a 23 km/h [*un breve momento di sano campanilismo: a Londra oggi lo stesso calcolo restituisce* 10 *mph, ossia circa* 16 *km/h*].

"...ma perché poi c'è una fascia oltre gli 8 euro?" Tanto per cominciare notiamo che gli euro sono solo 4.50, visto che la Bandiera la pagate comunque; questo corrisponde a poco più di 3 chilometri in centro (o a 8 minuti, se andate sulla tariffa oraria) e si presume (Torino è piccola…) che con quei tre chilometri vi troviate in zone periferiche: incidentalmente, notiamo che il "raggio della periferia" sta tra gli otto e i tredici euro (ossia, cinque euro) che a 1.05 €/km significa quasi cinque chilometri.

Oltre? Beh, dovreste essere arrivati alla tangenziale, e lì scattano la tariffa secondaria o quella di crociera. Ma forse, a questo punto, tanto valeva prendere il treno.

Come dicevamo prima, più il taxi va piano e più vi costa: in pratica, se la velocità media di un viaggio scende al di sotto della velocità media teorica (i 23 km/h per Torino), parte la tariffa oraria, e quindi pagate come se impiegaste lo stesso *tempo* ma percorreste una distanza *maggiore* alla tariffa chilometrica.

Ma può succedere di peggio: supponiamo che, con amici, decidiate di partire dalla stazione con due taxi e che i due palafrenieri percorrano la stessa strada (2 chilometri), impiegano 6 minuti (ignoriamo la Bandiera); solo che:

- Il taxi dei vostri amici ha percorso tutto il tragitto a 20 km/h, applicando quindi la tariffa oraria (siamo sotto la velocità media) per 1/10 d'ora, ad un costo di **3.27** euro.
- Il vostro taxi ha percorso metà della strada (un chilometro) a 40 all'ora (impiegando 1/40 d'ora), sopra la velocità media e quindi con tariffa chilometrica a 1.44 euro, ma nella seconda parte (ingorgo!) ha viaggiato a 13 km/h per 3/40 d'ora e per questo tempo ha applicato la tariffa oraria, pari a 2.45 euro: il tempo totale sono sempre 6 minuti, il percorso sempre 2 chilometri, ma a voi la corsa è costata **3.89** euro.

No, dico, fa quasi il 20% in più!

Insomma, cosa "succede durante il viaggio" può essere molto importante.

Ci sono due punti che vanno ancora considerati: uno di questi è la *Bandiera*, che, nei nostri calcoli, abbiamo dato per scontata, visto che comunque c'è e non si toglie; considerate comunque due tassisti che, in una giornata, abbiano percorso 20 chilometri a alle stesse velocità, superiori alla velocità media (quindi in condizioni di tariffa chilometrica): con la "piccola" differenza che il primo ha avuto cinque clienti che hanno percorso 4 chilometri ciascuno, mentre il secondo ha avuto un cliente solo, che andava lontano; guadagno del primo, 37.4 euro, mentre il secondo deve accontentarsi di 28.56 euro! Quindi, quella dei tassisti si arrabbino quando un percorso è "corto", è una leggenda metropolitana[19].

[19] ...a meno che sia previsto un percorso ad alta velocità (che costa "come il primo tracciato urbano", quindi molto caro) che porti in una zona nella quale sia presente un'alta densità di clienti: motivo per il quale alle stazioni sono sempre presenti dei tassisti *ansiosi* di portarvi all'aeroporto (non necessariamente) più vicino.

...e non abbiamo parlato degli arrotondamenti… Su una spesa di 12 euro, ben difficilmente direste “tenga il resto” pagando con un biglietto da venti, ma su una spesa di 42, la cosa viene relativamente naturale.

Adesso, cercate di capire come mai, al di sotto dei cinque chilometri, Rudy preferisca utilizzare le proprie suole piuttosto che prendere un taxi...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms