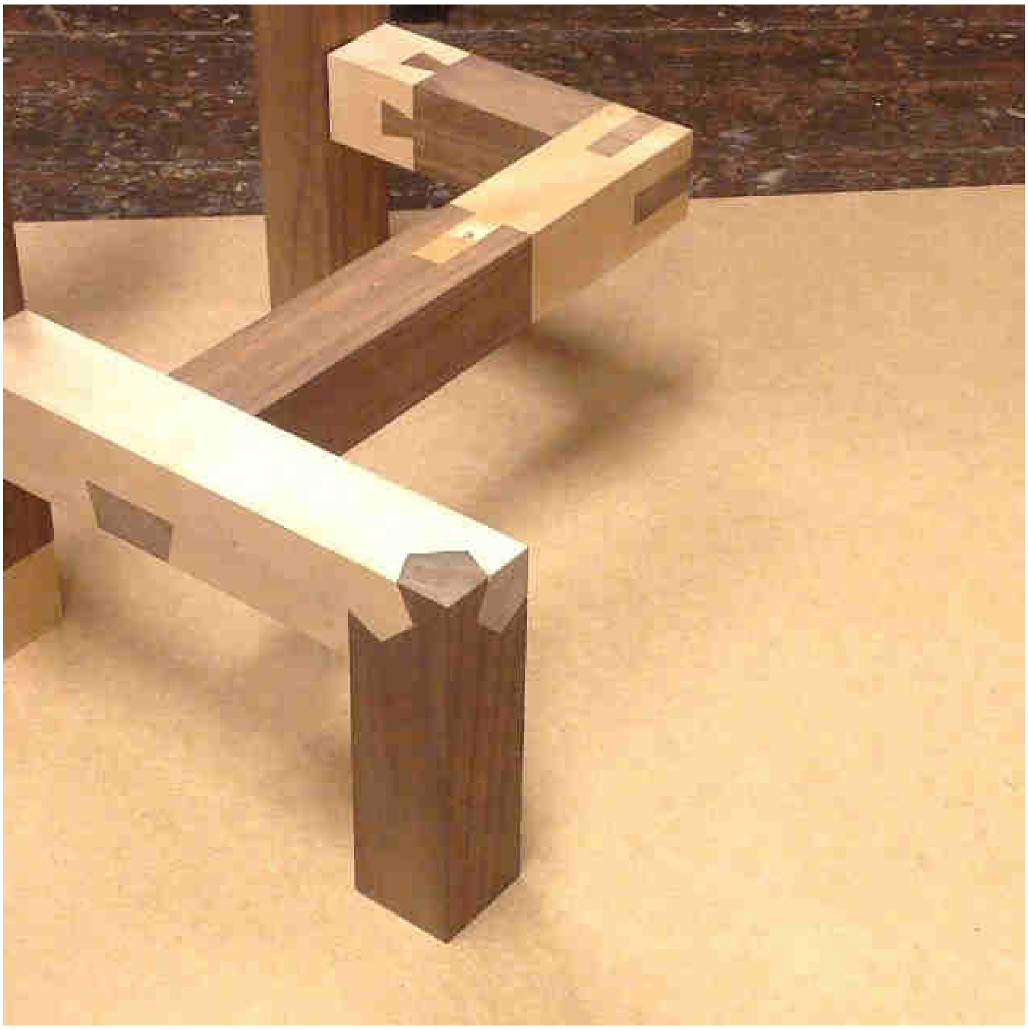
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 202 – Novembre 2015 – Anno Diciassettesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM201 ha diffuso 3'013 copie e il 08/11/2015 per Google eravamo in 8'490 pagine.

Il trucco del primo lo conoscete tutti, è l'incastro a "coda di rondine". Vorremmo però attrarre la vostra attenzione su quello in primo piano, l'ultimo della serie. È un incastro di origine giapponese che ha l'aria "ancora più impossibile" del coda di rondine. Per ulteriori dettagli, cercate in rete ***kawai tsugite***.

1. La madre di tutte le scuole

"La legge naturale e la legge divina positiva hanno conceduto ai genitori il diritto d'istruire e educare i figliuoli. La legge divina positiva ha conceduto alla Chiesa sola insegnare a tutti. Né la legge naturale né la positiva divina hanno dato ai governi degli stati diritto di insegnare… Lo Stato ha sovranità sulle cose temporali e non sulle spirituali; l'educazione e l'istruzione hanno per primo fine la vita eterna e poi la terrena. Il governo dello Stato può cooperare colla Chiesa all'istruzione e educazione dei cittadini, ma sotto i di lei dettati… e qual è al postutto l'istruzione obbligatoria che ormai si vuole dare a' fanciulli? Con gergo di gente non cristiana si chiama laica, laica suona atea… La istruzione de' fanciulli si vuole laica, si vuole nelle teneri menti insinuare l'ateismo si vuole ne' teneri cuori istillare la corruzione, necessaria conseguenza dell'ateismo; si vuole scristianizzare il mondo, o ricacciarlo alla paganica barbarie. Contro tanta empietà e sventura alza la voce il primo congresso cattolico d'Italia."

(onorevole Vito D'Ondes Reggio discorso al Primo Congresso Cattolico Italiano, Venezia, 12-16 giugno 1874).

Le due culture: la sempiterna e un po' frusta diatriba sulla separazione tra cultura umanistica e cultura scientifica ha trovato spesso spazio su questo giornalino. Si è spesso ragionato su come sia un demone prevalentemente italiano; su quanto sia pernicioso e ancor più immotivato; sulle diverse reazioni che si registrano tra i maggiori rappresentanti delle due ipotetiche fazioni, reazioni che vanno da un arrogante orgoglio che rivendica la superiorità della propria forma mentis (con conseguente diritto e privilegio di ignorare le conoscenze di base dell'altra sponda), fino ad una timida vergogna data dalla consapevolezza di una mancata preparazione; dalla ricerca dell'italica sorgente del guaio, che spesso conduce a puntare il dito con la famigerata riforma Gentile del 1923, fino alla moderna constatazione del ritardo formativo degli studenti di oggi; eccetera, eccetera, eccetera.

Varrebbe la pena indagare un po' più a fondo, ma è compito davvero improbo, e del resto ampiamente e intensamente discusso dai professionisti del settore dell'educazione. Al punto che è difficile, passando per caso di fronte al proprio vecchio liceo o scuola elementare, riconoscere in quelle costruzioni i luoghi per cui tante ideologie si sono confrontate. E viene perfino da pensare che sia un peccato che le scuole, deputate come sono a tramandare conoscenza e informazione, destinino così poco tempo a tramandare sé stesse. A ricordare la storia della scuola stessa, insomma, come edificio e come parte di una cruciale istituzione: il modo in cui è stata fondata, la scelta del luogo, il crescere dalle fondamenta al tetto o, se si tratta di scuola più antica, l'inevitabile cambio di destinazione di un'altra sede, e spesso il mutare della denominazione. La storia dell'istruzione nazionale è di per sé stessa una splendida fotografia della storia della nazione tutta.

Nel raccontare sé stesse, se la cavano un po' meglio le università: ma hanno gioco abbastanza facile. Le più vecchie accademie d'Italia sono tra le più antiche del mondo, e quindi è inevitabile che ogni *alma mater* nazionale sia orgogliosa, e si vanti, delle sue lontane origini. Ma spesso si dimentica che, anche se oggigiorno l'università è la tappa conclusiva di un percorso formativo che inizia alle elementari, l'istituto universitario non nasce certo con l'idea di accogliere giovani diplomati appena usciti dalle scuole superiori, quelle che oggi si chiamano "secondarie di secondo grado"; per l'ottima ragione che le università c'erano già quando queste scuole non esistevano affatto.

A differenza delle università, le scuole di ordine inferiore hanno una storia strettamente legata alle diverse politiche governative: e i governi cambiano spesso, e spesso cambiano anche le forme istituzionali, i regimi. Se al giorno d'oggi può essere abbastanza normale vedere il percorso formativo di un giovane come qualcosa che inizia verso i sei anni e termina dopo i venti, così non è stato per la maggior parte del tempo: al punto che con il termine "educazione dei fanciulli" si è spesso inteso qualcosa di diverso, di più pregnante di un semplice sottoinsieme temporale della educazione tout-court.

Ancora oggi si discute, con cadenza quasi regolare, sulle differenze tra scuola pubblica e privata, sulla legittimità o meno di destinare fondi pubblici a scuole confessionali. Sono temi importanti, come è davvero importante ogni decisione che riguardi l'istruzione, che resta – e sempre resterà – l'investimento più significativo e fruttuoso che può fare qualsivoglia nazione. Se in un tale marasma si può trovare consolazione, questa può arrivare dalla constatazione che, quando la scuola pubblica non esisteva, l'istruzione era davvero un lusso destinato a pochissimi.

1 *La più famosa delle studentesse antiche (almeno in immagine: è su una copertina su tre dei libri di testo)*

E, anche se può suonare strano a noi, lieti abitanti del XXI secolo, la scuola pubblica è una realtà tutt'altro che antica. Se si rinuncia all'aggettivo "pubblica", si trovano certo degli illustri antenati: basti pensare a nomi come ateneo, accademia, liceo, che richiamano direttamente la Grecia antica, o alle illustrazioni dei vecchi sussidiari che mostravano piccoli scolari nell'antica Roma con la tavoletta di cera e lo stilo, attenti a non perdersi una parola del precettore; o, meglio ancora, alla rivoluzione copernicana attuata dalla Scuola Palatina di Carlo Magno. Senza voler sminuire l'importanza di queste antiche istituzioni, resta il fatto che, nei tempi antichi, l'istruzione di massa resta essenzialmente inesistente. Acculturarsi è un lusso per pochi: e sono inevitabilmente pochi i luoghi ove è possibile trovare persone in grado di leggere e scrivere.

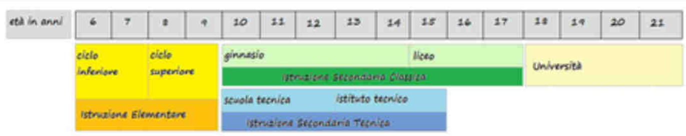
Per quanto possa suonare sconvolgente, ad orecchi laici e moderni, il discorso che Vito D'Ondes Reggio tiene nel 1874 al Primo Congresso Cattolico Italiano e che è riportato in testa a quest'articolo, è verosimile che, una volta contestualizzato, non sia altro che il "sentir comune" di molti contemporanei dell'onorevole oratore. In quegli anni il Regno d'Italia è giovanissimo, costruito sulla struttura del Regno di Sardegna artefice della recente unità nazionale, e soprattutto si trova in un vero e proprio clima di guerra fredda con il Vaticano. Il Papa, dopo la presa di Roma nel 1870 da parte dei bersaglieri che il 20 settembre hanno varcato Porta Pia, si dichiara prigioniero del neonato stato italiano, e tutti i cattolici abituati all'obbedienza al pontefice si trovano in evidente imbarazzo per essere, a un tempo, cattolici e cittadini italiani. La "questione romana" marchierà fortemente la politica italiana di fine Ottocento, e tutto sommato continuerà a farlo a lungo anche dopo, nonostante la messa in atto della Legge sulle Guarentigie del 1871 e perfino anche dopo la Conciliazione del 1922: e sarebbe certo riduttivo limitare i suoi effetti alle questioni relative all'istruzione. Ma è indubbio che in quest'ambito l'impatto è particolarmente sentito, al punto che ancora oggi le diatribe sui finanziamenti pubblici alle scuole private (in gran parte confessionali) non mancano di certo.

A voler essere pessimisti e disincantati, del resto, diventa lecito chiedersi se la celebrata "istruzione dei fanciulli" sia stata vista davvero, nell'arco della storia, come un modo per innalzare la qualità della vita dei giovani cittadini o come un metodo universalmente diffuso per fare proselitismo fin dalla più tenera età. È del resto evidente che quasi tutte le religioni – e in particolar modo quelle che professano la missione di propagare la loro fede – hanno avuto e hanno tuttora delle scuole destinate principalmente alla formazione di fedeli nell'ortodossia della loro dottrina. Per secoli, in Occidente, la figura del precettore e quella del religioso coincidono, e il livello spaventosamente alto dell'analfabetismo in Italia – ancora nel ventesimo secolo – rende familiare la scena in cui popolani corrono dal parroco per farsi leggere o scrivere una lettera: del resto, le scuole coraniche con i loro studenti corazzati di certezze sono argomento usuale sui quotidiani dei tempi nostri.

A voler essere meno cinici, si può anche considerare che la "cultura", intesa come oggi viene intesa, è un altro elemento ragionevolmente moderno: per molti secoli la grande maggioranza della popolazione è stata destinata a rimanere ancorata alla vita e al lavoro nei campi, senza tempo né possibilità di fare altro. L'etimologia stessa della parola "scuola", che viene dal greco σχολή, "riposo", mostra che l'istruzione richiede una quantità e qualità del tempo che per quasi tutto l'arco della storia è stato negato ai più. Ed è pure comprensibile che, in un tale contesto, le poche persone acculturate, cresciute quasi senza eccezioni in ambienti religiosi, si premurassero di trasferire al popolo le pochissime cose che ritenevano davvero essenziali e cruciali: e cioè appunto la religione, che ai loro occhi forniva risposte dirette e sicure per tutti i momenti significativi dell'esistenza.

Se le cose cambiano, se cominciano a cambiare di fatto nell'Ottocento, è grazie soprattutto alle due grandi rivoluzioni che hanno luogo a cavallo tra il diciottesimo e il diciannovesimo secolo. Le prime vere scuole "laiche" nascono in Francia dopo che l'Illuminismo e la Rivoluzione Francese hanno spostato l'attenzione e il baricentro della vita sociale: l'École Normale Supérieure, destinata a formare insegnanti e l'École Polytechnique, destinata a formare ingegneri, sono entrambe fondate a Parigi nel 1794, anno terzo della *Révolution*. E nella destinazione di quest'ultima si riconoscono anche le tracce dell'altra grande rivoluzione che cambia il mondo (e l'educazione): la Rivoluzione Industriale. Per la gran parte della storia dell'umanità, alle parti meno fortunate della popolazione non serviva altro che sapere come arare un campo, e le parti più fortunate erano ben soddisfatte dello status quo. La nascita dell'industria e la conseguente richiesta di manodopera attrae popolazioni dalla campagna alla città, dai campi alle fabbriche: e ben presto ci si rende conto che l'istruzione necessaria ad un buon operaio è maggiore di quella, virtualmente nulla, sufficiente ad un buon contadino.

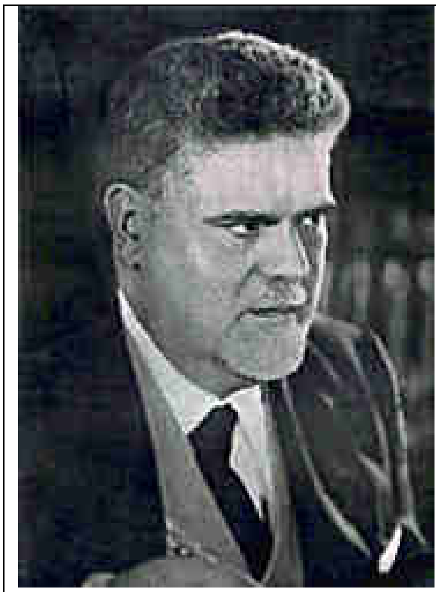
La duplice pulsione rivoluzionaria – una diretta al riconoscimento ideale ed etico dell'uguaglianza dei diritti di tutti gli uomini, l'altra pragmatica e di natura essenzialmente economica – muovono le nazioni sul campo dell'istruzione di massa. L'Italia è come al solito un po' in ritardo rispetto alle nazioni più opulente e organizzate d'Europa, soprattutto perché non è, appunto, ancora "Italia", prima del 1870. La legge guida dell'istruzione, nei primi anni del Regno d'Italia, è la legge Casati, che è in realtà una legge del Regno di Sardegna che ricalca il modello prussiano: diventa poi immediatamente norma a valenza nazionale dopo l'Unità. L'importanza della legge sta, più ancora che nel suo contenuto tecnico, nella sua natura di legge: è con essa che viene istituito il concetto di istruzione universale obbligatoria, anche se, almeno all'inizio, l'obbligo è limitato ai soli primi due anni; e soprattutto è con essa che si stabilisce per la prima volta l'assunzione di responsabilità dello Stato nella "educazione dei fanciulli".



2 *La Legge Casati del 1859 (grazie, Wikipedia)*

La Casati prevede quattro anni di scuola "elementare", suddivisi in due cicli biennali (solo il primo, appunto, sarà quello obbligatorio per legge): un ginnasio quinquennale, propedeutico al liceo triennale che è l'unica scuola che consente l'accesso all'Università, e una parallela istruzione tecnica limitata invece ai quindici anni d'età. Il Liceo non ha aggettivi che lo qualifichino: è sottinteso che sia la scuola "classica".

Anche se nasce nel bel mezzo dell'Ottocento, anche se è pensata inizialmente per uno stato ben più piccolo dell'Italia unitaria, anche se subirà nel tempo aggiustamenti – soprattutto (e per fortuna) in merito all'obbligatorietà di frequenza oltre gli otto anni d'età[1] – è ancora di fatto la Legge Casati che impera in Italia fino al 1923, quando l'istruzione scolastica italiana andrà incontro alla Riforma Gentile. Sono passati più di sessant'anni, e la riforma scolastica che deve essere attuata è evidentemente urgente: il Regno d'Italia è cambiato molto, dal Risorgimento al Primo Dopoguerra, e soprattutto c'è un nuovo regime totalitario che intende porre il proprio marchio di fabbrica anche – forse soprattutto – sull'istruzione. Il regime fascista è molto giovane, nel 1923, e se dedica subito alla scuola quella che Mussolini chiama "la più fascista delle riforme" è evidente che tiene molto all'indirizzamento anche politico dell'istruzione di massa. I contenuti della riforma non sembrano, almeno a prima vista, particolarmente rivoluzionari, soprattutto se confrontati con l'impianto definito dalla vecchia Legge Casati e dalle sue integrazioni: è piuttosto la "filosofia" che la riforma sottende ad essere più esplicitamente intenzionale. Alcuni aspetti, peraltro sono del tutto positivi, almeno sulla carta: prima di tutto l'estensione dell'obbligo scolastico fino ai 14 anni di età. Si tratta però di uno degli aspetti meno incisivi sul piano pratico, di fatto disinnescato da un altro aspetto della riforma, l'istituzione di due diversi canali di "scuola media", ovvero di quella scuola che diventava "obbligatoria" proprio grazie alla riforma: da una parte la "scuola media" propriamente detta, che già nel nome esprimeva l'intento programmatico di far proseguire gli studi ai suoi studenti, dall'altra il cosiddetto "Avviamento al Lavoro", riservato a tutti i ragazzi che non si prevedeva potessero raggiungere le scuole di grado superiore. In una nazione povera e ancora molto differenziata, un istituto del genere non ha molto appeal: se un ragazzino è destinato ad andar presto al lavorare, tanto prima ci va meglio è, e quel che accade in pratica è che l'obbligo scolastico esteso ai 14 anni resterà di fatto lettera morta fino al 1963, quando la Repubblica Italiana istituirà la scuola media unica.


3 *Giovanni Gentile*

Se c'è già una separazione netta ed esplicitamente classista per gli studi post-elementari, se ne ritrova un'altra, un po' più sottile ma di fatto altrettanto evidente, per le scuole superiori. Il "liceo", l'unica scuola che consente l'accesso alle facoltà universitarie, perde la sua singolarità[2] e viene scisso tra liceo classico e liceo scientifico: se una separazione degli studi liceali è necessaria, è meno evidente che debba esserci una differenziazione sbilanciata nella possibilità di accesso all'università. Al solo liceo classico sarà infatti possibile fornire accesso a tutte le facoltà universitarie, mentre il neonato liceo scientifico potrà garantire l'accesso alle sole facoltà scientifiche. C'è insomma una sorta di discriminazione preventiva, più che una separazione delle carriere: sarebbe stato equo consentire ai diplomati di entrambi i licei accedere a tutte le facoltà; sarebbe stato ugualmente equo, anche se probabilmente più rigido e categorico, suddividere fin dal liceo le scelte future, consentendo l'accesso

[1] È la legge Coppino del 1877 che interviene più radicalmente in questo senso: la scuola elementare passa da quattro a cinque anni, e diventa obbligatoria per tutto il quinquennio. L'obbligatorietà, ovviamente, porta con sé anche il concetto di gratuità. Resta il fatto che il giovane stato italiano era ancora troppo giovane e troppo povero, e in molti comuni (che erano le istituzioni che dovevano farsi carico dei costi dell'istruzione elementare) la legge restò spesso lettera morta.

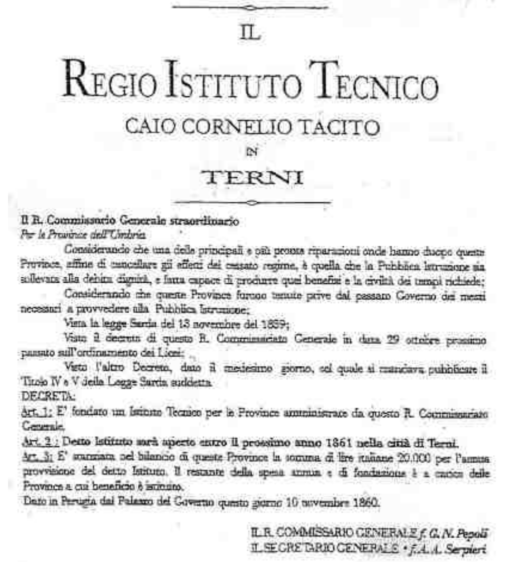
[2] C'era già stato, in realtà, un tentativo di cambiamento della struttura liceale nel 1911, con l'istituzione del "Liceo Moderno", che cercava di dare una formazione un po' diversa agli studenti che lo sceglievano. Consentiva l'accesso a tutte le facoltà universitarie, anche a quelle classiche: non ebbe però molto successo, anche perché più che un vero istituto autonomo, era una sorta di sezione differenziata all'interno dei licei classici. Fu istituito solo in poche città ed ebbe vita breve, perché fu appunto abolito dalla Legge Gentile una dozzina d'anni dopo la sua nascita.

alle facoltà umanistiche o scientifiche sulla base degli studi liceali; ma aprire tutte le porte ad un liceo e lasciarne chiuse alcune all'altro è ovviamente discriminante. È impossibile non ritrovare, in quest'impostazione tracce di quel pensiero che prese forma esplicita nella celebre diatriba tra Federigo Enriques e Benedetto Croce, con il maggior filosofo italiano che propugnava la distinzione tra gli esseri umani dotati di "mente profonda", che potevano occuparsi di tutto, e specialmente di filosofia, e quelli dotati di "mente minuta", destinati al massimo ad interessarsi di scienza[3].

È anche vero che, a cercar discriminazioni, non si finisce mai: per quanto certamente figlia di quei tempi, è certo ben più eclatante la spietata discriminazione che veniva attuata nel confronti delle fanciulle. Alle studentesse veniva negato non solo l'accesso alle università, ma di fatto anche quello liceale, perché per loro (o meglio, per quelle poche, tra loro, che potevano permettersi un'istruzione superiore) era stato creato lo speciale Liceo Femminile, unica scuola a cui potevano avere accesso, e al termine del quale le signorine ottenevano un diploma che inevitabilmente concludeva la loro carriera scolastica. Nulla di seriamente diverso dalle vetuste "scuole per educande" tenute dalle suore, se non, appunto, la presa in carico dello Stato di questi istituti in cui, inutile dirlo, le materie insegnate erano solo quelle che si ritenevano adatte al gentil sesso: quindi si trovavano anche ore dedicate alla musica, al canto, alla danza e all'economia domestica, ma neanche un'ombra di matematica o scienza.

Più in generale, la differenza cruciale tra la Legge Casati (certo tutt'altro che perfetta) e la Legge Gentile risiede soprattutto nell'intenzione diversissima che hanno nei confronti dell'istruzione confessionale. La legge Casati istituisce la scuola pubblica e laica in un momento di forte contrasto con la Chiesa, che al tempo era vista come uno dei maggiori problemi per lo Stato; la riforma Gentile accoglie invece in pieno lo spirito del Concordato, celebrato appena un anno prima dell'entrata in vigore della riforma, introducendo l'insegnamento obbligatorio della religione cattolica nelle scuole di ogni ordine e grado, e mettendo in atto i processi di parificazione tra scuole private e scuole pubbliche.

Non è certo possibile ridurre con certezza a un singolo atto legislativo gli effetti che, a quasi un secolo di distanza, ancora sussistono nel sentir comune nella differenziazione tra la cultura umanistica e quella scientifica. Le cause sono verosimilmente ben più d'una, e in fondo si è visto come la presunta superiorità invocata da Benedetto Croce fosse serpeggiante in tempi ben precedenti al 1923, e maturata sotto tempi politici assai diversi. È comunque lecito chiedersi se si sarebbero avuti, a lungo termine, degli effetti evidenti e meno distanti da quelli dell'istruzione degli altri paesi europei se l'approccio più laico e statuale che incarnava il modello "prussiano" della Legge Casati avesse avuto il tempo di evolversi.



IL

REGIO ISTITUTO TECNICO

CAIO CORNELIO TACITO

IN

TERNI

Il R. Commissario Generale straordinario
Per le Province dell'Umbria

Considerando che una delle principali e più pronte riparazioni onde hanno duopo queste Province, affine di cancellare gli effetti del cessato regime, è quella che la Pubblica Istruzione sia sollevata alla debita dignità, e fatta capace di produrre quei benefizi e la civiltà dei tempi richiede;

Considerando che queste Province furono tenute prive dal passato Governo dei mezzi necessari a provvedere alla Pubblica Istruzione;

Vista la legge Sarda del 13 novembre del 1859;

Visto il decreto di questo R. Commissariato Generale in data 29 ottobre prossimo passato sull'ordinamento dei Licei;

Visto l'altro Decreto, dato il medesimo giorno, col quale si mandava pubblicare il Titolo IV e V della Legge Sarda suddetta.

DECRETA:

Art. 1: E' fondato un Istituto Tecnico per le Province amministrate da questo R. Commissariato Generale.

Art. 2 : Detto Istituto sarà aperto entro il prossimo anno 1861 nella città di Terni.

Art. 3: E' stanziata nel bilancio di queste Province la somma di lire italiane 20.000 per l'annua provvisione del detto Istituto. Il restante della spesa annua e di fondazione è a carico delle Province a cui beneficio è istituito.

Dato in Perugia dal Palazzo del Governo questo giorno 10 novembre 1860.

IL R. COMMISSARIO GENERALE *f. G. N. Pepoli*
IL SEGRETARIO GENERALE • *f. A. A. Serpieri*

4 *Il "regio decreto" che istituisce il Regio Istituto Tecnico di Terni*

È indicativa, da questo punto di vista, l'istituzione addirittura precedente alla legge Casati di un tipo di scuola abbastanza fuori dal comune, che si propagò in alcune città italiane attorno al 1850, e il cui scopo esplicito era proprio quello di formare studenti per l'accesso a facoltà universitarie scientifiche (ingegneria, chimica, matematica, fisica, architettura...) per le quali la formazione data del liceo non appariva adeguata. Si tratta del Regio Istituto Tecnico: prima della loro

[3] Ne parlammo appunto in "Mente minuta", compleanno di Enriques, RM084, Gennaio 2006.

abolizione, attuata appunto dalla Riforma Gentile, si aprirono e svilupparono una decina di questi istituti, quasi tutti dislocati in città del centro-nord.

Si tratta di scuole superiori destinate a marchiare profondamente la storia dell'istruzione italiana: basti pensare che, anche se aboliti, non si può certo dire che non ne sopravviva l'essenza. I regi istituti tecnici erano caratterizzati da quattro sezioni: la fisico-matematica, quella di agrimensura, quella di commercio e ragioneria, e infine quella industriale meccanico-metallurgica. Nel 1923, sono queste quattro sezioni che danno vita ad una pletora di istituti tecnici indipendenti: dalla sezione fisico-matematica nascono i Licei Scientifici, mentre gli agrimensori si vedranno indirizzati negli Istituti Tecnici per Geometri; la sezione di commercio e ragioneria è ovviamente la genitrice di tutti gli Istituti Tecnici Commerciali (che molto spesso vengono chiamati colloquialmente proprio "Ragioneria"), e non c'è Istituto Tecnico Industriale, o ITI[4], che non debba i natali alla sezione numero quattro.

Quando nascono, i R.I.T. sono delle vere e proprie scuole d'élite: non certo per la loro destinazione istituzionale, ma per l'efficacia della loro preparazione e anche, purtroppo, per la loro scarsa diffusione sul territorio nazionale. Diventano istituti in cui il corpo docente è nobilitato da figure di alto prestigio, quasi sempre ingegneri anche di fama internazionale[5]: e attirano studenti fuori sede, anche dalle regioni meno fortunate che non ne annoverano nessuno nel loro territorio. Cosa questa, persino un po' paradossale, perché un'altra caratteristica assai particolare dei Regi Istituti Tecnici è proprio quella di volere aderire alle esigenze e caratteristiche del territorio in cui vengono istituiti: le città prescelte per ospitarli, non a caso, sono quelle che già palesano una certa vocazione industriale.

Vocazione industriale che è certo forte a Torino, capitale del Regno che unisce l'Italia: e tutt'oggi la maggior parte degli studenti torinesi che ottengono il diploma di ragioniere escono dallo storico Istituto Tecnico Commerciale Germano Sommeiller: se può apparire strano, a prima vista, che una scuola di indirizzo commerciale sia intitolata all'ingegnere che ha inventato un sistema di propulsione idrodinamica, organizzato i trasporti ferroviari sabaudi e, soprattutto, progettato e diretto i lavori del primo grande traforo alpino, quello del Frejus, lo stupore si dilegua in fretta quando si scopre che quell'Istituto Tecnico Commerciale nasce appunto come Regio Istituto Tecnico nel 1852, e ha avuto Germain Sommeiller tra i suoi più prestigiosi insegnanti. E non era certo il solo docente di prestigio: per molto tempo, la cattedra di preside venne tenuta da Antonio Sobrero, l'inventore della nitroglicerina. Evidentemente, la sezione di "commercio e ragioneria" è quella che ha prevalso, nel 1923, quando i Regi Istituti Tecnici si sono dovuti frammentare.

La seconda capitale d'Italia, Firenze, si dota anch'essa di un Regio Istituto Tecnico: e lo fa prima ancora di entrare a far parte dell'Italia, nel 1853; il che implica che l'aggettivo "regio", in questo caso, va a benemerito di Leopoldo II di Lorena. Adesso sopravvive come Istituto Tecnico per Geometri, ma nel 1900 ebbe addirittura l'onore di partecipare all'Esposizione Universale di Parigi.

Le vocazioni "territoriali" si leggono bene a Fermo, dove il Regio Istituto Tecnico fondato nel 1854 si indirizza rapidamente come un vero Istituto Tecnico Industriale: in parte perché nato sulle ceneri di una precedente scuola di Arti e Mestieri, in parte perché a governarla giunge Ippolito Langlois, ingegnere, generale e accademico di Francia, che proprio nel Conservatoire d'Arts e Metiers parigino ha fatto esperienza. Non è da meno Trapani, rarissimo caso di Regio Istituto Tecnico nel meridione, che ebbe l'onore e l'onere di conservare e far progredire le esperienze della precedente "scuola nautica" della città siciliana.

[4] Spesso più esplicitamente ITIS, con la "S" finale che stava per "statale" e ribadiva il concetto di scuola pubblica.

[5] Anche perché, ovviamente, gli ingegneri, a quel tempo, si formavano prevalentemente all'estero.

La fondazione, avvenuta nel 1860, del Regio Istituto Tecnico di Terni può sembrare "naturale" se si considera la città umbra come sede della prima grande acciaieria del Regno d'Italia: ma in realtà è piuttosto la dimostrazione che la vocazione industriale di Terni è precedente alle acciaierie che caratterizzeranno la storia della città. Queste saranno fondate infatti nel 1884, un quarto di secolo dopo la creazione del Regio Istituto Tecnico "Caio Cornelio Tacito[6]".

5 *Gioacchino Napoleone Pepoli*

La scelta di Terni come sede di quello che diventerà una delle scuole più prestigiose del centro Italia è dettata da diversi elementi: una certa tradizione industriale, già presente; la disponibilità di materie prime atte all'industria, quali le acque e i boschi, e soprattutto dalla lungimiranza del bolognese Gioacchino Pepoli, creato commissario della "provincia dell'Umbria" nei giorni appena successivi al plebiscito che unisce l'Umbria al Regno di Sardegna. Marchese, futuro sindaco di Bologna, eroe risorgimentale e amico di Cavour, Pepoli intravede nella conca ternana molte potenzialità di sviluppo industriale, e non trova certo in Cavour, primo Presidente del Consiglio, qualcuno che non ne condivida le idee: in merito all'Umbria, è rimasta celebre la sua frase "*La soppressione dei conventi dell'Umbria non ci veniva suggerita da un sentimento di pretofobia [...] bensì come operazione necessaria al risorgimento di quella Provincia. Come mai potrà essa camminare nelle vie del progresso se deve sottostare al peso di diecimila frati?*".

Il Regio Istituto Tecnico fa insomma la sua parte nella creazione di quello che resterà a lungo uno dei poli industriali più grandi e caratteristici dell'Italia centrale, e lo fa con autorità. È uno dei primi quattro R.I.T. d'Italia, e forma una gran quantità di studenti che poi vanno a popolare i Politecnici di Milano e Torino. Il suo corpo docente mantiene l'altissimo profilo già visto negli altri R.I.T: uno dei primi presidi, Luigi Corradi, prova a riformare sul modello francese l'insegnamento tecnico, e chiede nel 1883 l'autorizzazione ministeriale per fondare una Scuola di Meccanica Industriale e Metallurgia all'interno del Regio Istituto, e otterrà l'onore di una medaglia d'oro all'Esposizione di Parigi. Nel primo decennio del ventesimo secolo, ad insegnare nel Regio Istituto Tecnico di Terni si ritrova Gaetano Scorza, matematico di fama internazionale, allievo di Luigi Bianchi e Ulisse Dini, che completa il lavoro di Enriques e Castelnuovo su argomenti di geometria proiettiva e matrici di Riemann, e finirà senatore del Regno, oltre che presidente della Sezione Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. E prima ancora di Scorza e di Corradi, nel neonato Regio Istituto Tecnico di Terni si ritrova ad insegnare anche un matematico astigiano.

[6] Ancora più curiosa è, in questo caso, la proliferazione del Regio Istituto: naturalmente il liceo scientifico e tutti gli istituti tecnici ternani vengono generati dalle ceneri del Regio Istituto Tecnico, ma nel caso di Terni il R.I.T. "genera" anche il Liceo Classico, fino ad allora inesistente in città: e vista la denominazione della scuola, decisamente "classica" per un istituto tecnico, sarà proprio il liceo-ginnasio a mantenerla. (E questo nonostante che sia quasi certo che il grande storico dell'Impero Romano non fosse poi nato a Terni, come a lungo si è creduto: la vecchia Interamna Nahartium ha dato i natali, probabilmente, solo all'omonimo imperatore: ciò ovviamente non toglie che tutti i toponimi più prestigiosi della città siano tutti intitolati a Tacito).

6 *Carlo Alberto Castigliano*

Carlo Alberto Castigliano nasce ad Asti l'8[7] Novembre 1847, da una famiglia tutt'altro che ricca. Studente brillante, rimane orfano a sedici anni, quando il padre Giovanni muore: la madre, Orsola Cerrato, si risposa. Il nuovo sposo della mamma è comunque tutt'altro che un patrigno cattivo delle favole: si rende conto in fretta delle grandi potenzialità di Carlo Alberto, è sostiene l'intenzione del giovane di proseguire negli studi. Ma anche la nuova famiglia non è particolarmente agiata, e Castigliano, fin da ragazzo, si abitua ad alternare agli studi dei lavori saltuari. A diciannove anni, nel 1866, si diploma come perito meccanico e supera l'esame al Regio Museo Industriale di Torino che lo qualifica come professore di meccanica applicata: nello stesso anno parte alla volta di Terni, dove resterà ad insegnare nel Regio Istituto Tecnico per quattro anni. Nella città umbra, nei ritagli di tempo, si dedica allo studio della matematica.

Nel 1870 ritorna in Piemonte, e supera a pieni voti l'esame di ammissione alla Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Ma Carlo Alberto ha fretta: subito dopo l'iscrizione scrive al rettore dell'università chiedendo il permesso di poter sostenere tutti gli esami del triennio di matematica già alla fine del primo anno di corso. Il 10 marzo 1871 riceve dal Ministero della Pubblica Istruzione la risposta favorevole alla sua richiesta, e nel giro di pochi mesi sostiene con successo tutti gli esami. Il 10 novembre dello stesso anno fa domanda di iscrizione alla Scuola di Applicazione per Ingegneri, quella che ormai è più nota col nome di Politecnico di Torino. Tre anni dopo ottiene la laurea in Ingegneria Civile con una tesi che lascerà il segno: "*Intorno ai sistemi elastici*". La seconda metà dell'Ottocento è un periodo particolarmente florido per l'ingegneria italiana: un gran numero di specialisti portano la scuola italiana degli "elasticisti" al massimo splendore, ed è soprattutto grazie a loro se i metodi di analisi strutturale basati su energia e lavoro diventano universalmente diffusi. Tra questi si ritrovano l'ingegnere e astronomo Alessandro Dorna, il generale Emilio Francesco Sabbia, l'ingegnere Francesco Crotti, il fisico Luigi donati, i matematici Angelo Genocchi, Enrico Betti, Vincenzo Cerruti; e, sorprendentemente, anche il generale e uomo politico Luigi Menabrea[8].

Castigliano si inserisce perfettamente in questa schiera: la sua tesi di laurea contiene già quello che è tuttora noto come "Teorema di Castigliano", che dimostra come la derivata parziale del "lavoro molecolare", considerato come funzione delle forze agenti su una struttura linearmente elastica, calcolata rispetto ad una di queste forze, sia uguale allo spostamento (o rotazione) nella direzione della forza del suo punto di applicazione. Poco tempo dopo, nel 1875, pubblica un suo secondo teorema che completa, in senso inverso, i contenuti del primo.

Quella di Castigliano, più che una scoperta, è la dimostrazione di un principio che si riteneva valido, e che era già stato presupposto dai teorici del tempo: in particolare, includeva (e dimostrava) proprio il cosiddetto "principio di Menabrea", che aveva reso celebre il politico italiano nell'agone scientifico. Anziché rallegrarsi, però, Menabrea accolse con risentimento la dimostrazione di Castigliano, e ne nacque una delle molte,

[7] O forse il 9… non tutte le fonti concordano, sul giorno di nascita. Su mese ed anno, però, non dovrebbero esserci dubbi.

[8] Di Luigi Federico Menabrea, generale, uomo politico, due volte Presidente del Consiglio, matematico, abbiamo parlato a lungo nel compleanno dedicato a Babbage e Ada Lovelace, "La farina di Ofelia", RM059, dicembre 2004.

ricorrenti, diatribe della storia della scienza. Le prove che Menabrea aveva a suo tempo portato per tentare di dimostrare il suo principio erano palesemente insufficienti, e il "teorema di Castigliano" era inoltre di portata più generale. La cosa precipitò quando, sempre nel 1875, Menabrea tentò di dare una nuova dimostrazione del suo principio, e nel farlo usò i risultati dello stesso Castigliano, ma senza citare – a meno di un veloce accenno in una nota a piè di pagina – lo stesso Castigliano.

La diatriba finì addirittura di fronte ad un Comitato, appositamente riunito, dell'Accademia dei Lincei, perché Carlo Alberto Castigliano protestò per il mancato riconoscimento dei suoi meriti indirizzando una vibrante lettera di protesta a Luigi Cremona, allora presidente dell'Accademia.

Castigliano non ebbe soddisfazione. Il giudizio dell'Accademia del Lincei risultò essere tutto sommato o molto salomonico, o poco coraggioso: riconosceva a Castigliano il merito e l'onore di aver fatto un "ottimo lavoro", ma nel contempo sanciva che "*nessuno poteva togliere al membro dell'Accademia Luigi Menabrea il merito di aver reso popolare e di uso comune il principio generale, destinato per certo ad avere sempre maggiori applicazioni*".

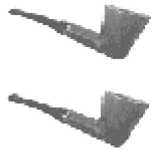
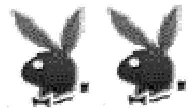
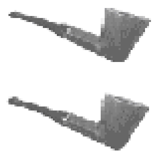
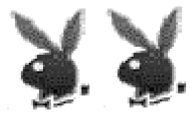
Il giudizio storico sulla contesa tra i due matematici e ingegneri piemontesi è più orientato a riconoscere un maggior merito a Castigliano, anche se è indubbio che su argomenti del genere è davvero complicato stabilire un pieno diritto di primogenitura: già Clayperon nel 1827 aveva raggiunto qualche particolare risultato sul tema, e indubbiamente Menabrea estese di molto l'applicazione di quello che lui chiamava "principio del minimo lavoro"; inoltre, si ritrovò persino un'altra dimostrazione del Teorema di Castigliano, certamente del tutto ignota all'astigiano, operata da Cotterill.

Certo è un peccato che, almeno in vita, Carlo Alberto Castigliano non abbia raccolto più soddisfazioni di quelle che riuscì ad avere: in parte per le sue origini modeste, che gli avevano già in partenza reso difficile la scalata verso i mai raggiunti pienamente onori accademici, in parte per la brevità della sua vita, visto che morì neanche trentasettenne, nel 1884. La carriera professionale di Castigliano è infatti tutt'altro che teorica: subito dopo la laurea viene assunto dalla SFAI, la Società Ferroviaria Alta Italia, che lo invierà prima ad Alba, poi a Torino, e infine a Milano. Due anni prima di morire di polmonite, riesce appena a diventare socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Torino.

7 *Il colpo d'ariete*

Nella sua breve vita ebbe comunque il tempo di aggiungere altre perle minori, oltre ai suoi famosi due teoremi: scrisse un manuale per ingegneri, che ebbe una certa popolarità; memorie sulla torsione delle molle, sulla costruzione architettonica, e inventò un tipo di estensometro. Curiosamente, fu anche tra i primi a esplorare la natura dei "colpi d'ariete" i pericolosi fenomeni idraulici devastanti propri delle situazioni in cui l'acqua – o un qualsiasi fluido – in movimento vien bruscamente fermata dalla chiusura di una valvola o eventi analoghi. La curiosità consiste nel fatto che il maggior teorico sui colpi d'ariete è stato Lorenzo Allievi, ingegnere milanese che operò nella centrale idroelettrica di Papigno, in provincia di Terni: fu proprio qui che, a valle di un incidente occorso nella centrale a causa di un colpo d'ariete, Allievi studiò la dinamica del fenomeno e giunse per primo alla sua completa teorizzazione. Per questo risultato, a Lorenzo Allievi è dedicato il nome dell'Istituto Tecnico Industriale di Terni: quell'ITIS che è il diretto discendente del Regio Istituto Tecnico che ebbe Carlo Alberto Castigliano come giovanissimo professore.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Chiusura di stagione			
I Pentagliagoni			

2.1 Chiusura di stagione

In realtà, al momento della scrittura, non è detto: anche se per impegni vari ormai sono due sabati che non si riesce a tirare, non abbiamo ancora abbandonato l'idea e non garantiamo che sia completamente salutare, circolare in prossimità del *Campo dei Chinotti*. In ogni caso, stiamo cercando dei modi per definire la linea di tiro del prossimo anno, considerando il fatto che ci servono comunque delle strutture che tengano a ragionevole distanza i curiosi. Quello che vi chiediamo, sull'ultima idea dei nostri due validi arcieri, è di verificare che non debbano usare delle frecce storte in grado di prendere le curve. E, per il piacere sadico di Rudy, sarebbe ben accetta una soluzione in GeoGebra (anche se la dimostrazione la vogliamo scritta, visualizzare come gira il fumo potrebbe essere interessante).

L'idea è di partire definendo un triangolo che, con un incredibile sforo di fantasia, chiameremo ABC.

Siccome avere solo un triangolo per terra non è particolarmente divertente, del triangolo prendiamo il cerchio inscritto, avente centro I, e statuiamo che tocca i lati del nostro triangolo secondo la corrispondenza: $\{BC, CA, AB\} \Rightarrow \{A_1, B_1, C_1\}$.

La retta A_1I taglia la mediana AA' del triangolo ABC al punto P.

La perpendicolare da I alla retta AA' incontra la parallela tirata per A al lato BC nel punto Q.

La bisettrice dell'angolo in C del triangolo ABC taglia la parallela tirata per A' al lato AC nel punto R.

La bisettrice dell'angolo in B taglia il cerchio di diametro BC in un ulteriore puno S.

Bene, la nostra linea di tiro è $PQRS$, non necessariamente in quest'ordine; ma siamo sicuri che siano sempre sulla stessa retta?

E sin qui, il problema: come al solito, però, Rudy si è fatto delle domande alle quali non ha la minima intenzione di cercare una risposta, ma posto che possano interessarvi, le lascia qui a disposizione.

Evidentemente, il triangolo ABC può variare come gli pare, quindi farsi domande su come varino i punti $PQRS$ è piuttosto stupido (e men che meno chiedersi, come nei problemi preferiti da Rudy, quale sia il *luogo geometrico* che, al variare di un qualcosa, tracciano questi punti); ma, quantomeno, come “gira il fumo”? Abbiamo dei comportamenti strani, dei casi particolari, un qualchecosa che sia degno di essere riferito?

Prendetevela pure calma, tanto ci ritroviamo a primavera.

2.2 I Pentagliagoni

OK, ce li siamo appena inventati. Ma il problema, anche se interessante, non era ambientabile, quindi abbiamo dovuto trovare qualcos’altro di strano.

I *pentagliagoni* sono dei *pentagoni* convessi che possono essere *tagliati* in *due* poligoni di *ugual perimetro*: forse dovevamo chiamarli *Isoperipentagliagoni*, ma non eravamo sicuri sulla salute mentale del nostro correttore grammaticale, nel ritrovarsi una cosa dl genere come titolo. Non solo, ma forse la definizione andrebbe rivista: stiamo parlando di *qualsiasi* pentagono (convesso), che viene isoperi(pen)tagliato.

Proviamo a chiarire la cosa con un problemino: poi, vedete voi dove buttare i nomi che abbiamo trovato.

Rudy sostiene di essere in grado di prendere *qualsiasi* pentagono convesso e di essere in grado di tagliarlo in due poligoni di ugual perimetro per i quali i due lati *maggiori* sono della stessa lunghezza.

Doc sostiene di essere in grado di prendere *lo stesso* pentagono convesso e di essere in grado di tagliarlo in due poligoni di ugual perimetro per i quali i due lati *minori* sono della stessa lunghezza.

Qualcuno ha ragione? Qualcuno ha torto? Chi può mettere nei guai l’altro, e con che *qualcosagono*?

3. Bungee Jumpers

Raramente facciamo commenti ai problemi che compaiono qui, ma questo ci pare, una volta tanto, stimolante di ulteriori espansioni.

Siano *A*, *B*, *C*, *D* quattro vertici consecutivi di un poligono regolare; se

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD},$$

quanti lati ha il poligono?

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Soluzioni e Note

Novembre.

Siamo in ritardo, accidenti. Lasciamo questo mese le note da parte, e parliamo solo di soluzioni.

4.1 [200]

4.1.1 Il triangolo di Laxap

Dal numero duecento il problema del triangolo mantiene attivo il suo fascino. Cominciamo con il testo:

Ci sono tre tipi di pianta (A, B, C). Partiamo a porne una riga a disposizione casuale; a partire da questa, costruendo un “Triangolo di Pascal al contrario”, si ottiene una seconda riga con una pianta in meno, secondo queste semplici regole:

1. *Se le due essenze al piano di sopra sono uguali, metti la stessa essenza;*
2. *Se le due essenze al piano di sopra sono diverse, metti la terza essenza.*

Andando avanti finché non si ottiene una sola pianta. Che struttura occorre dare alla prima fila per avere una determinata pianta al vertice del triangolo?

Il mese scorso abbiamo pubblicato le soluzioni di ***Bluemonday***, ***Alberto R.*** e ***BR1***, e ***trentatre*** ha deciso di commentare proprio queste ultime due.

Le soluzioni di ***AlbertoR*** e ***BR1*** in RM201 sono sostanzialmente complete; aggiungo alcune osservazioni.

Nella rappresentazione di ***BR1*** $\{ABC\} \to \{0,1,2\}$, ogni terna di valori è legata da $(x+y+z) \equiv 0 \ mod\ 3$ da cui la funzione $z = f(x,y) = (2x+2y)\ mod\ 3$.

Se la prima riga di un triangolo di lato N è $(a_{1,}\ a_{2,\dots}\ a_N)$ il vertice opposto è dato da

$$[1]\ \ z = 2^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} a_{k+1}\ \ mod\ 3$$

e questo di fatto risolve il problema.

L'incognita z dipende solo dagli estremi a_1, a_N se in [1] sono nulli tutti gli elementi intermedi; poiché 2 non è congruo a 3, deve essere $\binom{N-1}{k}\ mod\ 3 = 0,\ \ k = 1 \dots N-2$.

Ma nel triangolo di Tartaglia (*mod* 3) le righe di tipo $(1,0,\dots 0,1)$ sono solo quelle di posto

$$[2]\ \ N-1 = 3^m$$

da cui i numeri "magici" $N^* = 3^m + 1$ congetturati da ***AlbertoR*** .

- <u>dimostrazione</u> di [1]

Numerando gli elementi come ***BR1*** (e con le congruenze tutte *mod* 3) si ha per le righe successive alla 1.a

$$b_n = f(a_n, a_{n+1}) \equiv 2(a_n + a_{n+1}) \equiv 2 \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a_{n+k}$$

$$c_n = f(b_n, b_{n+1}) \equiv 2(b_n + b_{n+1}) \equiv 2^2(a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}) \equiv 2^2 \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a_{n+k}$$

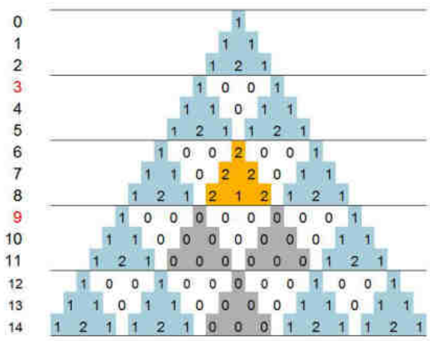
$$d_n = f(c_n, c_{n+1}) \equiv 2(c_n + c_{n+1}) \equiv 2^3(a_n + 3a_{n+1} + 3a_{n+2} + a_{n+3}) \equiv 2^3 \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a_{n+k}$$

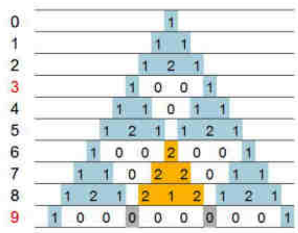
ecc. da cui la [1]

nb. la tabella dei moltiplicatori di ***BR1*** si ottiene applicando *mod* 3 ai termini in parentesi.

- <u>dimostrazione</u> di [2]

La figura a sinistra riporta il triangolo di Tartaglia (*mod* 3) – che indico con ***T*** – composto di triangoli 3x3 simili e adiacenti di tre tipi: grigio, azzurro, arancio; ogni gruppo di tre righe è riportato a destra in una unica riga con 0,1,2 per i diversi colori. P.es. le righe 9,10,11 diventano a destra la riga (1001) in posto 3. Le due figure, se proseguite, <u>sono identiche</u>; le relazioni fra le due sono di fatto <u>relazioni interne a *T*</u>. Quindi in ***T*** le righe $(1,0,\dots 0,1)$ sono generate dalla 3 con $3 \to 3^2 \to 3^3 \to \dots$





Troviamo che continuare a discutere i problemi sia cosa veramente buona ed è un peccato che nessuno abbia ripreso il secondo. Ma andiamo avanti.

4.2 [201]

4.2.1 Anticipiamo la fine dell'anno

Il Capo una volta usava i problemi con l'anno verso la fine ed inizio anno… ultimamente ce li rifila un po' sparsi in tutte le stagioni:

> *Il Capo ha* 40 *euro e* 29 *centesimi in pezzi da un cent; ne fa due mucchi, uno da* 2014 *e l'altro da* 2015 *centesimi e gioca un solitario. Ha due possibilità:*
>
> 1. *Leva lo stesso numero di monete da ciascuno dei mucchi*
> 2. *Raddoppia il numero delle monete da uno (a scelta) dei gruppi.*
>
> *Si può fare? E se la seconda regola chiedesse di triplicare le monete?*
>
> *E se avete due mucchi m, n di monete, e la seconda regola vi chiede di k-uplicarle, quale regola deve legare i tre parametri perché il gioco sia fattibile?*

Ecco, questo il gioco. Ovvio che l'ultima domanda risolve tutte le precedenti, ma l'idea era di lasciare a tutti la possibilità di arrivarci per passi. Vediamo le soluzioni, cominciando da ***Alberto R.***:

> Siano M, N i due numeri di partenza e K il moltiplicatore.
>
> Il problema ha soluzione se e solo se $M \bmod(K–1) = N \bmod(K–1)$
>
> Infatti se $M \bmod(K–1) \neq N \bmod(K–1)$ nessuna delle operazioni consentite potrà sanare questa differenza. Non la sottrazione perché, come nell'aritmetica ordinaria, anche in quella modulare se $M \neq N$ sarà anche $M–x \neq N–x$. Non la moltiplicazione per K perché $M \bmod(K–1) = (K \cdot M) \bmod(K–1)$ e idem per N.
>
> Ma se due numeri sono diversi modulo qualcosa, sono anche diversi *tout court* e non potranno essere azzerati entrambi con la stessa sottrazione.
>
> La condizione è anche sufficiente. Infatti se essa è soddisfatta i due numeri di partenza sono
>
> $$M = A(K–1)+R \quad N = B(K–1)+R$$
>
> Supponiamo $M < N$. Togliamo a entrambi $A(K–1)+R–B+A$. I due numeri diventano
>
> $$B–A \quad K(B–A)$$
>
> Non ci resta che moltiplicare per K il primo e poi azzerarli entrambi sottraendo ad essi il loro valore comune.

Tra l'altro ***Alberto R.*** fa anche notare che forse il problema era pensato per la fine dell'anno precedente (2014-2015)… che dire, il Capo ha aperto il cassettino dei problemi sbagliato… Comunque la soluzione generalizzata piace molto ai nostri solutori: ***MBG*** scrive:

> Parto subito col caso generico di mucchi da M e N monete e moltiplicazione per k.
>
> Una condizione sufficiente per risolvere è che, detta d la differenza tra M e N, si abbia $d=k–1$. Supponendo $M>N$ con $M=N+d$, tolgo $N–1$ da entrambi i mucchi, rimanendo con un mucchio da $d+1$ monete e con un 'mucchio' di una moneta. A questo punto moltiplico il secondo per k (mi rifiuto di dire k-uplicare !!!) e il gioco è fatto perché ho due mucchi uguali contenenti $k=d+1$ monete.
>
> La condizione può essere estesa al caso in cui la differenza d è un generico multiplo di $k–1$. Infatti $M = N+d = N + p(k–1)$.
>
> Togliendo $N–p$ monete da entrambi i mucchi, me ne rimangono rispettivamente pk e p e di nuovo la successiva moltiplicazione per k li rende uguali.
>
> Al momento non ho tempo di elaborare ulteriormente, quindi chiudo qui, confidando che qualcun altro vi mandi la soluzione completa.

E va bene. La versione di ***Valter*** è arrivata in due tempi ed è un po' criptica, ma suppongo che leggendo le altre risulti meno ostica:

- gruppo $n = m + k$^$x - 1$ ($x = 0,1,2,3,...$)
- levo monete sino a $m = 1$ (quindi ottengo $n = k$^x)
- "k-uplico" x volte m (quindi ottengo $m = n = k$^x)
- tolgo tutte le monete

Il secondo tempo dice:

Grazie una bottiglia di pinot nero e il polpettone della suocera mi è venuta una regola più generale al primo problema:

- f = intero a cui scendere
- gruppo $n = m +$ (k^x) * $f - f$ ($x = 0,1,2,3,...$)
- levo monete sino a $m = f$ (quindi ottengo n = [k^x]*f)
- "k-uplico" x volte f (quindi ottengo $m = n$ = [k^x]*f)
- tolgo tutte le monete

Se avete capito tutto (io mi sono fermata al polpettone) poi me lo spiegate. Per fortuna c'è ***Franco57***:

Nel caso generale il solitario riesce se e solo se $\boxed{m-n \text{ è divisibile per } k-1}$, che chiamo in seguito "la condizione". In particolare nel caso del raddoppio riesce sempre, nel caso della triplicazione solo se $m-n$ è pari, quindi non riesce per m=2014 e n=2015.

Infatti indicando con $(m,n)\to(m',n')$ una generica mossa, quelle ammesse dalla situazione (m,n) sono:

$$(m,n)\to(m-\delta,n-\delta) \text{ dove } 0<\delta<m \text{ e } \delta<n;$$
$$(m,n)\to(m,k\cdot n)\ ;$$
$$(m,n)\to(k\cdot m,n).$$

Facendo la differenza dei mucchi nella situazione arrivo della mossa si ottiene rispettivamente: $(m-\delta)-(n-\delta)=m-n$; $m-k\cdot n=(m-n)-(k-1)\cdot n$; $k\cdot m-n=(k-1)\cdot m+(m-n)$, relazioni che ci mostrano che la situazione di arrivo soddisfa la condizione se e solo se la soddisfa la condizione di partenza, perché $m-n$ e $m'-n'$ differiscono per un multiplo di $k-1$ in tutti e tre i casi. Inoltre la situazione $(0,0)$ di soluzione del solitario banalmente soddisfa la condizione. Ciò significa che se non si parte da una situazione che soddisfa la condizione il solitario non può essere risolto.

Per vedere che se la condizione è vera il solitario riesce sempre, si può produrre un metodo costruttivo partendo da una generica situazione (m,n) con $m\geq n>0$. Il primo metodo che mi è venuto è questo:

1. se $m=n>0$ risolvo con $(m,m)\to(0,0)$
2. se $m>n>1$ tolgo $n-1$ da entrambi: $(m,n)\to(m-n+1,1)$
3. se $m>n=1$ moltiplico il secondo per k : $(m,1)\to(m,k)$

Dopo la regola 2) si applica la 3) e da questa si va ancora alla 2) o alla 1). Considerando che dopo la mossa 3) i mucchi non possono essere in ordine crescente, poiché se $m<k$ la condizione è falsa per (m, 1), ne consegue che il primo mucchio diminuisce sempre in almeno due mosse e perciò alla fine si applica la 1) che risolve il solitario.

Il quesito è risolto e nel caso della parte facile del quesito è anche veloce: $(2015,2014)\to(2,1)\to(2,2)\to(0,0)$.

Ma c'è un problema: poniamo che Rudy, sempre con la regola del raddoppio, parta invece ad esempio da un mucchio di 2015 ed uno di 1000 monetine. Se applicasse il metodo descritto gli occorrerebbero ben 2031 mosse: $(2015{,}1000)\to(1016{,}1)\to(1016{,}2)\to(1015{,}1)\to(1015{,}2)\to\cdots(2{,}1)\to(2{,}2)\to(0{,}0)$. A parte la noia se la dovrebbe vedere con la famiglia famelica!

Ma Rudy se la può cavare in poche mosse anche in questo caso, cioè con la sequenza $(2015{,}1000)\to(2015{,}2000)\to(30{,}15)\to(30{,}30)\to(0{,}0)$, se applica un metodo ottimale di soluzione che descrivo qui sotto.

Partendo una generica situazione (m,n) con $m\ge n>0$ (quindi $\frac{m}{n}\ge 1$) si usano queste regole:

1. se $\frac{m}{n}=1$ risolvo con $(m,m)\to(0{,}0)$
2. se $1<\frac{m}{n}<k$ tolgo $n-\alpha$ da entrambi i mucchi: $(m,n)\to(\alpha\cdot k,\alpha)$ dove $\alpha=\frac{m-n}{k-1}$
3. se $k\le\frac{m}{n}$ moltiplico il secondo mucchio per k: $(m{,}1)\to(m,k)$

Il valore del primo mucchio ottenuto con la 2) si giustifica con $m-(n-\alpha)=\alpha\cdot(k-1)+n-(n-\alpha)=\alpha\cdot k$, il secondo è ovvio. Occorre anche mostrare che $n-\alpha$ è positivo: $\frac{m}{n}<k\Rightarrow\frac{\alpha\cdot(k-1)+n}{n}<k\Rightarrow\frac{\alpha\cdot(k-1)}{n}<k-1\Rightarrow\alpha<n$.

Per affermare che il metodo è ottimale cominciamo a contare il numero di mosse che richiede:

a) se $\frac{m}{n}=k^r$ con $r\ge 0$ risolve con $r+1$ mosse: $(m,n)\to(m,k\cdot n)\to\left(m,k^2\cdot n\right)\to\cdots\to\left(m,k^r\cdot n\right)\to(0{,}0)$

b) se $k^r<\frac{m}{n}<k^{r+1}$ con $r\ge 0$ risolve con $r+3$ mosse: $(m,n)\to(m,k\cdot n)\to\left(m,k^2\cdot n\right)\to\cdots\to\left(m,k^r\cdot n\right)\to(\alpha\cdot k,\alpha)\to(\alpha\cdot k,\alpha\cdot k)\to(0{,}0)$ dove $\alpha=\frac{m-n'}{k-1}$, posto $n'=k^r\cdot n$.

Naturalmente se $r=0$ la sequenza di moltiplicazioni del 2° gruppo per k è vuota.

Evidenzio anche una proprietà utile in seguito: se $\frac{m}{n}>k^r$ allora prevede almeno $r+2$ mosse, infatti $\frac{m}{n}=k^s$ con $s>r\Rightarrow s+1$ mosse e $k^s<\frac{m}{n}<k^{s+1}$ con $s\ge r\Rightarrow s+3$ mosse.

Vale inoltre una diseguaglianza utile in seguito: $m>n>\delta>0\Rightarrow\frac{m}{n}<\frac{m-\delta}{n-\delta}$. Infatti $\frac{m-\delta}{n-\delta}-\frac{m}{n}>0\Leftrightarrow\frac{n\cdot(m-\delta)-m\cdot(n-\delta)}{(n-\delta)\cdot\delta}>0\Leftrightarrow\frac{(m-n)\cdot\delta}{(n-\delta)}>0$ che è vera perché tutti i fattori sono positivi.

In generale un algoritmo di soluzione di un solitario è ottimale se muove sempre verso uno stato dove il numero di mosse che esso stesso prevede è il minimo tra quello di tutti gli altri stati che è possibile raggiungere con una mossa.

Anche se per i solutori più arguti ciò può essere evidente, una piccola dimostrazione mi pare necessaria: la proprietà dice che per ogni mossa consentita $s \to t$ si ha $m(s) \le m(t)+1$ dove m è la funzione che dà il numero di mosse dell'algoritmo, perché ovviamente $m(s)-1$ è il numero di mosse che esso impiega per risolvere il solitario dopo che ha mosso da s. Allora se $s \to s_1 \to \cdots \to s_r$ è una soluzione qualsiasi, non necessariamente con l'algoritmo in esame, si ha $m(s) \le m(s_1)+1 \le m(s_2)+2 \le \cdots \le m(s_r)+r = r$ poiché $m(s_r)=0$ essendo s_r uno stato di soluzione del solitario. Cioè qualsiasi soluzione da s è di almeno $m(s)$ mosse, perciò nessun altro algoritmo può essere migliore.

Mostro ora che il metodo descritto muove sempre verso uno stato dove il numero di mosse che esso stesso prevede è il minimo.

Se $m = n > 0$ non c'è dubbio che sia così perché risolve in una mossa.

Se $1 < \frac{m}{n} < k$ il metodo prevede 3 mosse quindi basta mostrare che scelta una qualsiasi mossa ammessa non si possa arrivare in una situazione che viene risolta con meno di 2 mosse, cioè che non si possa arrivare a due mucchi di pari cardinalità. Ed è così, infatti:

$(m,n) \to (m-\delta, n-\delta)$ comporterebbe $m-\delta = n-\delta \Rightarrow m = n$

$(m,n) \to (m, k \cdot n)$ comporterebbe $k \cdot m = n \Rightarrow n > m$

$(m,n) \to (k \cdot m, n)$ comporterebbe $m = k \cdot n \Rightarrow \frac{m}{n} = k$

che sono tutte e tre situazioni incompatibili con i valori iniziali di *m* e *n*.

Nel caso $\frac{m}{n} = k^r$ con $r > 0$ il metodo prevede $r+1$ mosse e la mossa prevista dal metodo è moltiplicare il secondo gruppo per k. Da (m,n) possiamo muoverci, alternativamente anche verso $(m-\delta, n-\delta)$ che dà un rapporto tra i mucchi di , oppure verso $(k \cdot m, n)$ che dà un rapporto $\frac{k \cdot m}{n} > \frac{m}{n} = k^r$. In entrambi i casi il metodo prevede ancora almeno $r+2$ mosse, quindi più delle r dalla situazione di arrivo prevista.

Infine rimane il caso $k^r < \frac{m}{n} < k^{r+1}$ con $r > 0$ per il quale il metodo prevede $r+3$ mosse cominciando da $(m,n) \to (m, k \cdot n)$. Le mosse alternative porterebbero un rapporto tra le cardinalità dei mucchi di $\frac{m-\delta}{n-\delta} > \frac{m}{n} > k^r$ oppure di $\frac{k \cdot m}{n} > \frac{m}{n} > k^r$ per entrambi i quali il metodo prevede almeno altre mosse, cioè almeno quante ve ne prevede dalla mossa suggerita dal metodo.

Perciò il metodo è ottimale (*un* metodo ottimale non *il* metodo ottimale) e consente a Rudy di risolvere il solitario sostanzialmente in $\log_k(m-n)$ mosse.

Se avete ancora qualche dubbio scrivete, scrivete… Noi adesso dobbiamo passare al secondo problema.

4.2.2 Vagamente Orwelliana

Il Capo si è divertito molto ad esporre questo problema, e qualcuno a leggerlo. Vediamolo senza fronzoli:

> *Tra tutte le combinazioni degli interi da* 1 *a n, presi a blocchi di* 62*, in media il termine maggiore vale* 1984*. Quanto vale n?*

Come aggiunta ci si era divertiti a trovare titoli che contengono stagioni, mesi e numeri, e qualcuno ha anche accettato la sfida. Ma andiamo con calma, il problema è stato apprezzato. Cominciamo con la ***Alberto R.***:

> Affinché il massimo numero presente in una combinazione di 62 numeri scelti dall'insieme 1...*N* sia *K*, occorre che:
>
> - *K* sia stato scelto, il che si può fare in un modo solo;
> - I rimanenti 61 numeri siano tutti minori di *K*, quindi scelti dall'insieme 1...(*K*–1), il che si può fare in *combin*[(*K*–1),61] modi diversi.
>
> Pertanto
>
> $$\sum_{K=62}^{N} \frac{K \cdot combin[(K-1),61]}{combin(N,62)} = 1984$$
>
> Da cui $N = 2015$.
>
> Volevate sadicamente spaventare i vostri lettori con mostruosi fattoriali di 2000 e passa, o innocentemente festeggiare l'anno in corso?

Beh, dato il cassetto da cui il Capo ha tirato fuori questi due problemi, direi di sì, voi no? Un contributo anche da ***Sawdust***:

> Innanzitutto, grazie a un paio di test *brute-force* con Excel, si nota che il risultato non cambia sia che si prendano i blocchi consecutivi (es. 1-62, 63-124, 125-186, ecc.) o si prendano tutti i blocchi possibili (es. 1-62, 2-63, 3-64, ecc.) ed è sempre 3906. Questo perché in entrambi i casi la media di tutti i termini maggiori è comunque uguale alla media tra il più piccolo dei maggiori e il più grande dei maggiori (o, se si preferisce, tra il minore dei maggiori e il maggiore dei maggiori) e quindi vale la seguente uguaglianza
>
> $$1984 = \frac{62 + x}{2}$$
>
> da cui
>
> $$x = 2 \times 1984 - 62 = 3906$$
>
> Forse potevo anche fare a meno di scomodare Excel.
>
> Passando invece ai numeri nei titoli, ci limitiamo ai libri, o ci possono stare anche i film? Così al volo, tralasciando la corposa serie delle 50 sfumature visto che il 50 l'avete già giocato voi…
>
> Se poi ci permettiamo di aggiungere anche le poesie, come dimenticare "Il cinque maggio"? E con le canzoni "7 e 40", "29 settembre" e "4/3/43"? Per la primavera che vi mancava potrebbe andare "*Spring, summer, winter and fall*" degli Aphrodite Childs?

1	**Uno, nessuno e centomila**
3	**I tre moschettieri**
3	**Tre uomini in barca**
3	**In fuga per tre**
3	**Tre scapoli e un bebè**
3	**Tre uomini in fuga**
3	**Tre uomini e una gamba**
4	**Quattro matrimoni e un funerale**
4	**I quattro dell'AveMaria**
4	**I quattro dell'oca selvaggia**
4	**Quattro mosche di velluto grigio**
6	**I sei giorni del condor (che però al cinema sono solo più tre)**
7	**I sette samurai (e I magnifici sette)**
7	**Sette spose per sette fratelli**
10	**Dieci piccoli indiani**
10	**Dieci**
13	**Apollo 13**
28	**Il ventotto ottobre**
39	**I trentanove scalini**
48	**Quarantotto ore**
49	**I quarantanove racconti**
58	**Cinquantotto minuti per morire**
100	**Cento novelle**
100	**Cento giorni a Palermo**
101	**La carica dei centouno**
300	**Trecento**
1.001	**Le mille e una notte**
2.001	**2001 odissea nello spazio**
20.000	**Ventimila leghe sotto i mari**
100.000	**Centomila gavette di ghiaccio**
1.000.000	**La banconota da un milione di dollari**

Ecco. Giocare con noi è qualcosa che diverte tutti i nostri lettori, ed è quello che ci rende ancora fieri, dopo tanti anni a premere tasti a caso. Guardate cosa ci scrive ***MBG***:

> Il problema si risolve 'semplicemente' chiamando N il numero cercato, calcolando la media come richiesto, uguagliandola a 1984 e risolvendo per N. Dirlo è facile, farlo in pratica è un po' più complicato.
>
> Sappiamo che le possibili combinazioni di 62 elementi presi da N sono pari al coefficiente binomiale $D = \binom{N}{62} = \frac{N!}{(N-62)!62!}$.
>
> Per ognuna di queste combinazioni dobbiamo cercare il valore massimo, sommarli tutti e poi dividere il numeraccio ottenuto per l'altro numeraccio D di cui sopra.
>
> La somma S dei massimi si trova moltiplicando ogni valore da 1 a N il numero di combinazioni in cui risulta come massimo.
>
> I valori da 1 a 61 evidentemente non entreranno mai in gioco, dato che scegliendo comunque 62 valori a caso, il maggiore deve sempre essere non inferiore a 62.
>
> Per il 62 abbiamo una sola combinazione possibile, ovvero i numeri da 1 a 62.
>
> Per il 63 abbiamo 62 combinazioni, dato che se 63 deve essere il massimo, gli altri 61 numeri scelti devono distribuirsi tra i 62 possibili inferiori, ovvero in $\binom{62}{61}$ modi diversi.
>
> Per il 64 abbiamo $\binom{63}{61}$ combinazioni possibili e cosi via.
>
> In generale, per il valore k abbiamo $\binom{k-1}{61}$ combinazioni in cui appare come massimo.
>
> La nostra somma risulta quindi data da:
>
> $$S = \sum_{k=62}^{N} k\binom{k-1}{61}$$
>
> Con qualche semplice maneggiamento si riesce a includere il k nel binomiale, portando fuori dalla sommatoria al suo posto un fattore costante 62:
>
> $$S = 62\sum_{k=62}^{N} \binom{k}{62}$$
>
> Questo è interessante e ci indica che forse siamo sulla strada giusta, dato che dobbiamo imporre S=1984 che, guarda caso, è divisibile per 62.
>
> A questo punto mi sono trovato in difficoltà nel semplificare la sommatoria. Forse mi sono perso in un bicchiere d'acqua o forse mi sfugge qualche proprietà dei binomiali (sarà uno dei famosi 'teoremi delle tonsille' citati tempo fa dal GC? Anche se in effetti io le tonsille non le ho fatte…).
>
> Sta di fatto che l'unico modo che ho trovato per risolverla è stato per vie traverse; in pratica mi sono servito della prima formula che ho usato per calcolare D, osservando che può essere scritta anche in forma di sommatoria se conto le combinazioni in modo simile a quanto fatto nel procedimento qui sopra, ovvero sommo il numero di combinazioni con valore massimo 62, quelle con valore massimo 63, etc, etc, fino a N (ora senza moltiplicare per il valore massimo k).
>
> $$D = \binom{N}{62} = \sum_{k=62}^{N} \binom{k-1}{61}$$
>
> Da qui mi sento autorizzato ad affermare che se la formula vale per N e 62, vale anche per N+1 e insiemi di 63 valori, per cui:

$$\binom{N+1}{63}=\sum_{h=63}^{N+1}\binom{h-1}{62}=\sum_{k=62}^{N}\binom{k}{62}$$

Non so se come dimostrazione sia rigorosa; mi appello al principio di induzione e ve la tenete così..

Da qui arrivo velocemente al risultato. Infatti la media cercata è:

$$E=\frac{S}{D}=62\binom{N+1}{63}\Big/\binom{N}{62}=62\frac{(N+1)!}{(N+1-63)!\cdot 63!}\cdot\frac{(N-62)!\cdot 62!}{N!}=\frac{62(N+1)}{63}$$

Imponendo E=1984 ricavo un (in)aspettato N=2015.

Comunque a mio avviso questo problema non è niente di più di un BJ. Ve l'avrei passato solo se il povero Orwell avesse avuto la grazia di vivere fino a 62 anni. Se proprio volete riscattarvi, potete rifare lo stesso giochetto tra 8 anni con Clarke, ma solo se riuscite a matematizzarlo con un 87.

E adesso, se siete pronti, vi diamo la soluzione di ***BR1***, che si è divertito talmente tanto che ci ha coinvolti nel processo:

Questo mese ci divertiamo col problema *Orwelliano*, cercando l'*anno finale* N cui si deve arrivare per ottenere la media M richiesta, pari a 1984…

Per cominciare, rappresentiamo come segue la lista di interi da analizzare, di estensione N incognita:

$$1)\ 1,2,3,\cdots,61,62,63,64,65,\cdots,N-2,N-1,N$$

La prima *combinazione* di interi che possiamo prendere in considerazione è quella formata dai primi **62** termini (evidenziati qui sopra dalla parentesi **rossa**): questa *combinazione* ha ovviamente come termine maggiore **62** (ed è quindi questo valore il suo *contributo* alla media), e può essere composta in un unico modo[9].

Esaminiamo poi le *combinazioni* che hanno come termine maggiore **63** (contenute nella parentesi **blu**); ce ne sono **62** in numero, ottenibili abbinando al valore **63** tutti i termini inferiori, tranne uno (da *scartare*) che può essere scelto in **62** modi diversi. Il *contributo* complessivo di queste *combinazioni* è dato quindi da **63·62**; semmai ci fermassimo qui (azzardando in astratto, come ipotesi di tentativo, che sia N=63), la media complessiva M sarebbe:

$$2)\ M=\frac{62\cdot 1+63\cdot 62}{1+62}=62{,}98+$$

Dove al numeratore abbiamo la somma dei pesi delle *combinazioni* finora considerate, ed al denominatore il numero complessivo di tali *combinazioni*.

Peccato che **62,98+** sia ben diverso da **1984**… Vuol dire che dobbiamo andare avanti; aggiungiamo allora tutte le *combinazioni* che hanno **64** come termine massimo (parentesi **verde**): queste si ottengono abbinando al valore **64** tutti i termini inferiori *tranne due*. Ora, il primo dei due termini da scartare può essere scelto in **63** modi diversi, mentre il secondo va selezionato fra i **62** residui; quindi **63·62** possibilità. Ma attenzione! In questo calcolo si stanno contando *due volte* le coppie scartate formate da termini di eguale valore, scelti in ordine opposto, e quindi il numero di *combinazioni* da considerare è la metà di quello indicato. Il contributo di queste *combinazioni* alla media è dato allora da **64·63·62/2**, per cui l'analoga della 2) è:

$$3)\ M=\frac{62\cdot 1+63\cdot 62+64\dfrac{63\cdot 62}{2}}{1+62+\dfrac{63\cdot 62}{2}}=63{,}96+$$

[9] Si dà per scontato che il termine *combinazioni*, utilizzato in RM201 per proporre il problema, si riferisca a "*combinazioni semplici*". E che sia poi vero che "*i sottoinsiemi si considerano indipendenti dall'ordine degli elementi*". Entrambe gli aspetti sono ben illustrati ad esempio qui: https://it.wikipedia.org/wiki/Combinazione.

Ci siamo un po' avvicinati a **1984**, ma la strada è ancora lunga… Comunque, forse adesso il procedimento generale è più chiaro, per cui ci si può azzardare a scrivere:

$$4)\ M = 1984$$
$$= \frac{62 \cdot 1 + 63 \cdot \frac{62}{1} + 64 \cdot \frac{63 \cdot 62}{2 \cdot 1} + 65 \cdot \frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots + N \cdot \frac{(N-1)\cdot(N-2)\cdots 63 \cdot 62}{(N-62)\cdot(N-63)\cdots 2 \cdot 1}}{1 + \frac{62}{1} + \frac{63 \cdot 62}{2 \cdot 1} + \frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots + \frac{(N-1)\cdot(N-2)\cdots 63 \cdot 62}{(N-62)\cdot(N-63)\cdots 2 \cdot 1}}$$

Ora, ricordando la definizione di *coefficiente binomiale*:

$$5)\ \binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!\,b!} \qquad a, b \in N, a \geq b \geq 0$$

la 4) può essere riscritta come segue, dove sia a numeratore che a denominatore sono stati introdotti i termini di *posizione generica K*:

$$6)\ M = 1984 = \frac{62\binom{61}{0} + 63\binom{62}{1} + 64\binom{63}{2} + 65\binom{64}{3} + \cdots + K\binom{K-1}{K-62} + \cdots + N\binom{N-1}{N-62}}{\binom{61}{0} + \binom{62}{1} + \binom{63}{2} + \binom{64}{3} + \cdots + \binom{K-1}{K-62} + \cdots + \binom{N-1}{N-62}}$$

E poi, raggruppando in forma più compatta:

$$7)\ M = 1984 = \sum_{K=62}^{N} K\binom{K-1}{K-62} \Big/ \sum_{K=62}^{N} \binom{K-1}{K-62}$$

Adesso, non si vede perché doversi limitare ad *Orwell*: se invece di riferirci proprio a *quel* libro volessimo vedere cosa capita ad esempio per quest'altro qui a destra, che richiede *M*=451 e riguarda, anziché un anno, la temperatura di ignizione della carta[10]? Considerando una media generica *M* al posto di **1984**, ed una estensione generica *B* per i *blocchi* di interi, la 7) diviene allora:

$$8)\ M = \sum_{K=B}^{N} K\binom{K-1}{K-B} \Big/ \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{K-B} \qquad \begin{matrix} B, N \in N \\ N \geq B > 0 \\ M > 0 \end{matrix}$$

Dove il vincolo *B*>0 (che esclude quindi *B*=0) nei *coefficienti binomiali* serve a mantenere in piedi il senso logico del problema; sarebbe imbarazzante dover cercare il *maggior termine* in un *blocco* formato da **0** elementi… Per *M*, invece, nessun vincolo di *interezza*: potremmo accettare di essere anche in un qualsiasi giorno dell'anno (o frazione di grado Fahrenheit), per la media…

Ora, per la sommatoria che appare come numeratore del secondo membro della 8) si può scrivere:

$$9)\ \sum_{K=B}^{N} K\binom{K-1}{K-B} = \sum_{K=B}^{N} K\frac{(K-1)!}{(B-1)!\,(K-B)!} = \sum_{K=B}^{N} \frac{BK!}{B(B-1)!\,(K-B)!} = B\sum_{K=B}^{N} \frac{K!}{B!\,(K-B)!}$$
$$= B\sum_{K=B}^{N} \binom{K}{B}$$

Per il denominatore, poi, sfruttando la proprietà di simmetria del *coefficiente binomiale*:

$$10)\ \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{K-B} = \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{B-1}$$

[10] In realtà, il valore preciso di questa temperatura critica dipende da molti fattori; ***451°F*** è solo un particolare valore *simbolico*…

La 8) diventa allora:

$$11)\ \frac{M}{B} = \sum_{K=B}^{N} \binom{K}{B} \Big/ \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{B-1}$$

La 11) è *esteticamente* davvero una bella formuletta; ma prima di venirne a capo e di trovare una forma *compatta* dignitosa per il secondo membro, c'è stato da sudare… Poi, una sera, è apparso il *Grande Fratello* in persona, a suggerire i *giochi di prestigio binomiali* che seguono…

101 101 101 101

Una delle formule utili per lo sviluppo del *coefficiente binomiale* è questa qui sotto[11]:

$$12)\ \binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1} \quad a, b \in N, a > b \geq 0$$

Attenzione al vincolo in **rosso**; nella definizione del *coefficiente binomiale* data nella 5), era ammesso avere a=b, stavolta no: il primo addendo del secondo membro della 12) diventerebbe inconsistente, contemplando il fattoriale di un numero negativo una volta sviluppato in forma esplicita.

Ciò premesso, applichiamo la 12) al *numeratore* del secondo membro della 11), avendolo però prima reso compatibile con il vincolo **rosso**, scorporando cioè il primo termine della sommatoria (*termine isolato* che vale **1**):

$$13)\ \sum_{K=B}^{N} \binom{K}{B} = \binom{B}{B} + \sum_{K=B+1}^{N} \binom{K}{B} = 1 + \sum_{K=B+1}^{N} \left[\binom{K-1}{B} + \binom{K-1}{B-1} \right]$$
$$= 1 + \sum_{K=B+1}^{N} \binom{K-1}{B} + \sum_{K=B+1}^{N} \binom{K-1}{B-1}$$

Adesso, operiamo la sostituzione H=K–1 nella prima sommatoria a secondo membro, e riassorbiamo il *termine isolato* **1** nella seconda, sfruttando poi il *trucchetto* che il valore di un *coefficiente binomiale* con termini *sopra* e *sotto* identici è sempre **1**:

$$14)\ \sum_{K=B}^{N} \binom{K}{B} = \sum_{H=B}^{N-1} \binom{H}{B} + 1 + \sum_{K=B+1}^{N} \binom{K-1}{B-1} = \sum_{H=B}^{N-1} \binom{H}{B} + \binom{B-1}{B-1} + \sum_{K=B+1}^{N} \binom{K-1}{B-1}$$
$$= \sum_{H=B}^{N-1} \binom{H}{B} + \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{B-1}$$

Se ora si estrae e si isola il termine N_{mo} dalla sommatoria a primo membro si ha:

$$15)\ \binom{N}{B} + \sum_{K=B}^{N-1} \binom{K}{B} = \sum_{H=B}^{N-1} \binom{H}{B} + \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{B-1}$$

A parte il *nome* K o H degli indici, la sommatoria a primo membro e la prima a secondo membro della 15) rappresentano quantità numericamente identiche; semplificandole, rimane allora quanto segue:

$$16)\ \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{B-1} = \binom{N}{B}$$

Il che riduce ad una *forma ragionevole* il *denominatore* della 11)… Si era partiti con la formula 9) del *numeratore*, ma vabbè… Abbiamo trovato invece una bella soluzione per il *denominatore*… C'è stata una sorta di *Serendipità*…

101 101 101 101

[11] Si trova ad esempio qui: https://it.wikipedia.org/wiki/Coefficiente_binomiale.

Adesso, la 16) è una identità di carattere generale, la cui validità non dipende dal valore specifico della costante B (a patto di rispettare i vincoli posti sopra, per B); possiamo allora riscriverla a nostro piacimento ponendo ad esempio B+1 al posto di B dappertutto, e la 16) manterrà la sua consistenza, come qui sotto nella 17):

$$17)\quad \sum_{K=B+1}^{N} \binom{K-1}{B} = \binom{N}{B+1}$$

Sostituendo ancora H=K–1 nella sommatoria della 17), e sommando ad ambo i membri i termini in **rosso**:

$$18)\quad \binom{N}{B} + \sum_{H=B}^{N-1} \binom{H}{B} = \binom{N}{B} + \binom{N}{B+1}$$

Infine, riassorbendo il termine isolato a primo membro nella sommatoria, e rinominando H come K, abbiamo un'espressione *compatta* accettabile anche per il numeratore della 11):

$$19)\quad \sum_{K=B}^{N} \binom{K}{B} = \binom{N}{B} + \binom{N}{B+1}$$

101 101 101 101

Ora, tutto diventa più semplice: sostituendo le 16) e 19) nella 11) si ha, dopo qualche calcolino algebrico-fattoriale (che tralasciamo...):

$$20)\quad \frac{M}{B} = \sum_{K=B}^{N} \binom{K}{B} \Bigg/ \sum_{K=B}^{N} \binom{K-1}{B-1} = \left[\binom{N}{B} + \binom{N}{B+1}\right] \Bigg/ \binom{N}{B} = \frac{N+1}{B+1}$$

E, finalmente, con qualche ulteriore passaggio, si ricava l'espressione che fornisce N in funzione di M e B:

$$21)\quad N = M - 1 + \frac{M}{B}$$

Con i *dati standard Orwelliani* del problema, si ricava:

$$22)\quad N = 1984 - 1 + \frac{1984}{62} = 2015$$

Come, del resto, era già *palesemente indicato* in testa al *dilemma del mese*...

Rudi Mathematici

Numero 201 – Ottobre 2015

costruito *al contrario*, rispetto ai problemi normali: quello che è di solito un dato iniziale manca, mentre viene dato quello che di solito è il risultato.

Tra tutte le combinazioni degli interi da 1 a n, presi a blocchi di 62, in media il termine maggiore vale 1984 *[Visto, che Orwell c'entrava?]*. Quanto vale n?

Per la versione termica *Bradburyana* del *dilemma*, volendo evitare soluzioni frazionarie, occorre che M/B sia intero; per fortuna, **451=11·41**, per cui possiamo scegliere B=11 o B=41, a piacimento:

$$23)\quad \begin{cases} N_{11} = 451 - 1 + \dfrac{451}{11} = 491 \\ N_{41} = 451 - 1 + \dfrac{451}{41} = 461 \end{cases}$$

That's all!

No, non ancora. ***BR1*** ha scritto qualche pagina, ***Valter*** qualche riga:

- n = interi a partire da 1
- b = numero interi presi nei blocchi
- r = risultato (quanto vale in media il termine maggiore nei blocchi)

La differenza fra r fra i blocchi con n interi e n+1 interi è costante e vale r / r+1.

Quindi n = ((r – b) / (r / r+1)) + b; nello specifico ((1984 – 62) / (62 / 63)) + 62 = 2015.

Non vi abbiamo ancora convinto che esistono molte soluzioni per lo stesso problema? Allora siamo proprio poco bravi. Meno male che voi siete, di sicuro, più bravi di noi. Prima di chiudere un benvenuto a ***NickBe***, che ci ha inviato una soluzione che purtroppo tecnicamente non abbiamo potuto copiare.

Alla prossima!

5. Quick & Dirty

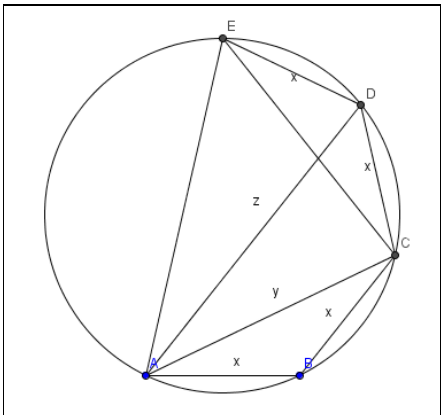
Si fa ruotare (senza che scivoli) un cerchio di un metro di circonferenza all'esterno dei lati di un quadrato di un metro di lato: quanti giri avrà fatto il cerchio quando sarà tornato alla posizione iniziale?

Se quello qui sopra vi pare troppo facile, fate ruotare lo stesso cerchio all'esterno dei lati di un poligono convesso (non necessariamente regolare) di n lati e perimetro di p metri.

> *Per quanto riguarda la prima domanda, il cerchio avrà fatto cinque giri, ruotando per quattro metri lungo i lati e ruotando ad ogni vertice di un quarto di giro.*
>
> *Per quanto riguarda la seconda domanda, avrà fatto $p+1$ giri: p giri lungo i lati e un totale di 2π radianti (e quindi un altro giro) su tutti i vertici.*
>
> *Un modo più intuitivo per esprimere la soluzione è che il cerchio fa p giri sui lati, più uno attorno al poligono.*

6. Pagina 46

Per cominciare, notiamo che se il poligono fosse un quadrato, avremmo $AB=AD$, il che implicherebbe che il reciproco di AC dovrebbe valere zero, il che è assurdo, e quindi avrà almeno un ulteriore vertice E successivo a D. Non solo, ma il fatto che il poligono sia regolare implica sia ciclico: la situazione, quindi, è quella rappresentata in figura.



8 *Ipotesi.*

Se x è il lato del poligono e se imponiamo $y=AC$ e $z=AD$, la nostra relazione diventa:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z},$$

da cui:

$$yz = xz + xy.$$

Applicando ora il Teorema di Tolomeo al quadrilatero $ACDE$, abbiamo:

$$AE \cdot x + xy = EC \cdot z.$$

Ma dovendo essere per simmetria $EC = AC = y$, si ha:

$$\begin{aligned} AE \cdot x + x\,y &= y\,z \\ &= x\,z + x\,y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AE \cdot x = x\,z$$
$$\Rightarrow AE = z = AD$$

.

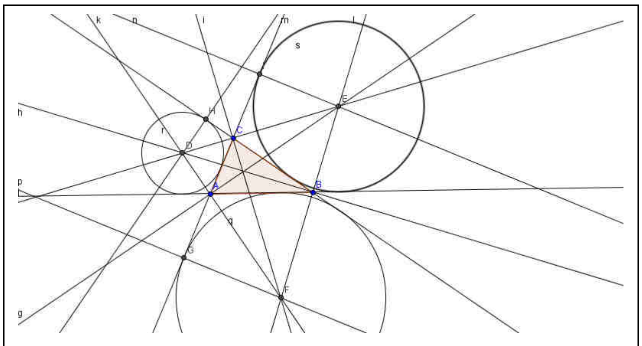
Quindi A è equidistante da D e da E, e quindi giace sulla perpendicolare che biseca DE.

Ma la perpendicolare bisecante una corda passa sempre per il centro del cerchio e quindi, percorrendo il ciclo $A \to B \to C \ldots$, nel momento in cui re-incrociamo il diametro passante per A abbiamo percorso tre lati e mezzo del poligono.

Quindi, il nostro poligono ha $(3+1/2)\cdot 2 = 7$ lati.

7. Paraphernalia Mathematica

Per prima cosa, un'immagine che non centra niente. La trovate qui di fianco: non preoccupatevi, è un problema nostro. La mettiamo solo per farvi vedere quanto lavoro esista dietro le quinte di molti i questi pezzi. Tra "usare GeoGebra" e "saper fare i disegni con GeoGebra" ci passa un mucchio di spazio.

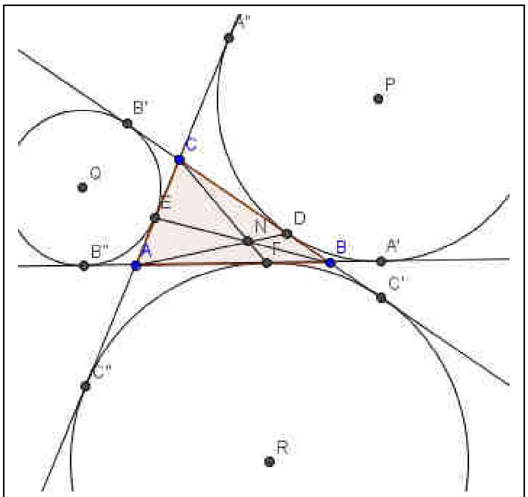


9 *Aiuto!*

Qualcuno conosce un metodo meno incasinato per tracciare i cerchi exscritti? Nel caso, grazie.

7.1 Oltre Euclide [003 – Fuori dai cerchi]

Adesso, prendiamo una versione più semplice del disegno visto sopra, con solo i lati del triangolo prolungati e i cerchi exscritti *[...e non chiedetevi come mai il triangolo è sempre lo stesso. RdA]*.



10 *Adesso si comincia a ragionare...*

Congiungendo il punto di tangenza di un cerchio con un lato del triangolo e il vertice opposto del triangolo, otteniamo i tre segmenti AD, BE, CF; non dovrebbe essere una grossa sorpresa, per voi, accorgervi che questi tre segmenti sono delle *ceviane*, e si incontrano in un punto N.

"Perché N?" Semplice, perché lo ha scoperto ***Christian Heinrich von Nagel***, ed è noto come *Punto di Nagel*. La cosa potrebbe essere accettata sulla fiducia (soprattutto visto che disegnare i cerchi exscritti non è facile), ma la dimostrazione ha, secondo noi, alcune caratteristiche che la rendono piuttosto interessante.

Il punto P è situato su BC in modo tale che $AB+BP = AC+CP$.

Il punto Q è situato su AC in modo tale che $BC+CQ = AB+AQ$.

Il punto R è situato su AB in modo tale che $BC+BR = AC+AR$.

E, come abbiamo visto quando faceva caldo, questa è condizione necessaria e sufficiente affinché i tre segmenti siano concorrenti.

Fermate le rotative! Abbiamo trovato un punto che non è di nessuno!

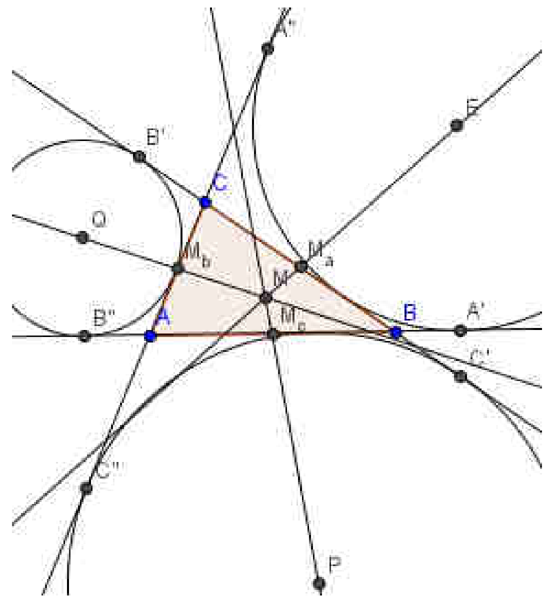
Riprendiamo il nostro disegno base, e tracciamo le rette passanti per i centri dei cerchi exscritti e il *punto medio* dei lati cui sono tangenti: provate a indovinare? Esatto! Sono ceviane.

Anche se dal disegno non sembra, il punto M è diverso dal punto di Nagel; probabilmente come punto non sembra molto interessante ai matematici (esteticamente a noi piace molto, ma la cosa non conta, a quanto pare), tant'è che non se lo è attribuito nessuno; siccome però chiamarlo "punto medio" poteva ingenerare confusione, buona parte del mondo lo chiama *mittelpunkt*.

A noi, a questo punto, sorge solo un piccolo dubbio: ma come lo chiamano, nei paesi di lingua tedesca?

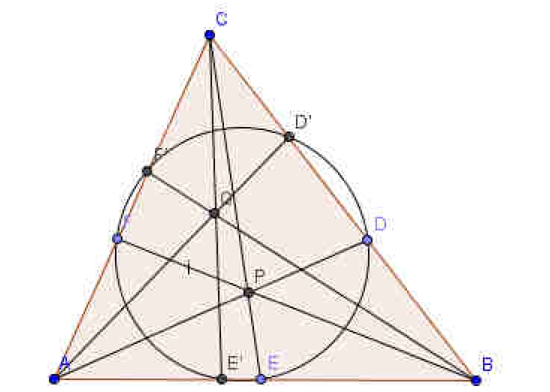
Cambiamo triangolo, che qui la cosa diventa noiosa.

Nel nostro nuovo triangolo, costruiamo tre ceviane qualsiasi: oltre ad incontrarsi in un punto, come ogni ceviana che si rispetti, avrà anche un punto di intersezione con il lato (o un prolungamento del lato: non state a sottilizzare) opposto al vertice di origine.



11 *Il Punto Senza Nome*

Consideriamo, a questo punto, il cerchio passante per i tre punti di intersezione tra le nostre ceviane e i lati: salvo casi molto particolari *[Mica tanto... abbiamo dovuto rifare il disegno tre volte, e non è comunque un gran che... ci venivano sempre chissadove! RdA]*, il vostro cerchio incrocia i lati del triangolo in altri tre punti, e (ma ormai ve lo aspettavate), questi tre punti identificano alte tre ceviane con un loro punto di concorrenza.



12 *Questo c'era da aspettarselo.*

Esiste un altro modo per trovare delle *concorrenze da concorrenti*: se prendetele solite tre ceviane "a caso" e da ogni piede tracciate la parallela ad un lato (procedete con ordine: un punto, parallela a un lato, il punto dopo, parallela al lato dopo, eccetera), otterrete tre punti di intersezione tra queste parallele e il lato restante[12]; tracciando le ceviane aventi questo punto come piede, trovate un altro punto in cui tutte e tre si intersecano.

In ognuna di queste coppie di punti (sia quella trovata "con il cerchio" che quella trovata "con le rette"), esiste un qualche legame? Beh, certo che sì: se tracciate le perpendicolari ai lati passanti per ognuno dei due punti, queste si incontrano a tre a tre in due punti (no, non sono ceviane), e il punto medio del segmento passante per questi due punti non è altro che il centro del cerchio.

Capito, cosa intendevamo dire quando dicevamo che ci sono più punti notevoli che punti non notevoli? Non solo, ma se cominciate a giocherellare con i punti medi dei lati (ad esempio tracciando il triangolo che li unisce, poi cercando i punti medi dei lati di questi e unendoli con i vertici del triangolo originale) di ceviane ne trovate a bizzeffe. Saremmo tentati di enunciare il Teorema di Rudy, sostenente che "I punti notevoli di un triangolo son così tanti in quanto si riproducono per ceviana", ma sorvoliamo (eh? No, non lo abbiamo detto. Se lo avessimo detto, l'avremmo messo quantomeno in corsivo).

Se siete abbastanza anziani, un punto dovreste conoscerlo, e a noi piacerebbe chiamarlo "Punto di Steiner", ma non lo facciamo.

In uno dei primi numeri di RM, avevamo presentato il problema di Steiner, consistente nel trovare la strada che richiedesse "meno asfalto" in grado di unire tra i loro tre punti:

[12] Nel senso che da uno siete partiti, e lo avete già intersecato; uno è parallelo, e non lo intersecherete mai; ve ne resta uno, e quello prima o poi lo incontrate.

si vede(va) che di strade era necessario costruirne *tre*, in modo tal che si incrociassero in un punto formando angoli a 120° tra i loro.

Ora, nulla vieta di unire le tre città formando un triangolo, e dichiarare l'incrocio punto notevole, giusto? Nonostante la sua origine da un qualcosa che sembra non c'entrare niente, anche qui possiamo trovare qualche interessante caratteristica; ad esempio, se costruite dei triangoli equilateri su ognuno dei lati del triangolo originale e unite il vertice "fuori"[13] con il "Punto di Steiner"; quei tre segmenti che ottenete sono uguali tra loro. Curioso, vero?

"...e cosa c'entrano le ceviane?" Avete due vie per dimostrarlo: uno richiede di andare a cercare triangoli congruenti e riuscire a stabilire le relazioni tra i loro, e la cosa non è facile; l'altra via si basa sul fatto che i tre segmenti originali (quelli a 120°), se prolungati sino al lato davanti, sono delle *ceviane*, e da lì la dimostrazione va avanti tranquilla.

"Rudy, ti pagano a virgolette o il fatto che Steiner e il suo punto siano sempre virgolettati ci dovrebbe insospettire?" Giusta la seconda: alla fine, ammettiamo che il punto in oggetto, nel quale si incontrano anche le tre linee dei triangoli equilateri, si chiama ***Punto di Fermat*** (sì, l'ha trovato lui... di dimostrazione originale come al solito non se ne parla, ma questa era facile e l'hanno trovata quasi tutti).

Adesso, visto che abbiamo quei tre equilateri, lo sapete tutti dove andremo a parare.

Tracciate i cerchi circoscritti ai tre triangoli equilateri.

Trovate i tre centri.

Formate il triangolo dei centri.

La dimostrazione che questo è sempre equilatero è dovuta a ***Napoleone***, e anche se il Grande Piccolo Corso ci è antipatico, a malincuore ammettiamo che è un gran bel teorema.

Il triangolo di Napoleone, evidentemente, ha un mucchio di caratteristiche in comune con il triangolo originario: ad esempio, e la cosa lascia abbastanza perplessi, condividono il baricentro.

Vi lasciamo ad esplorare le gioie di questo triangolino: il prossimo mese dovremmo giocare con i quadrati sui lati, ma invece facciamo un mucchio di cerchi.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[13] Potrebbe sorgervi il dubbio che queste virgolette non c'entrino niente essendo, per ognuno dei tre triangoli equilateri, uno solo il vertice ancora da unire al punto di Steiner; provate ad essere abbastanza matti da "girare i triangoli" verso l'interno del triangolo originale, e rifate i conti... eh, già. Attenzione, però: o tutti "fuori", o tutti "dentro". Un po' e un po' non funziona.