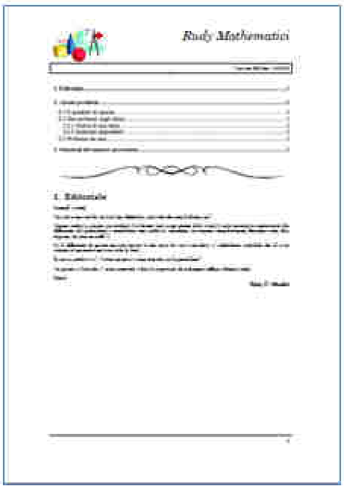
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 200 – Settembre 2015 – Anno Diciassettesimo



... and Beyond!

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM199 ha diffuso 2979 copie e il 30/08/2015 per Google eravamo in 8'710 pagine.

senza parole

1. Pi greco val bene una sfida

"Si eidem circulo inscribantur polygona ordinata in infinitum, & numerus laterum primi sit ad numerum laterum secundi subduplus, ad numerum vero laterum tertii subquadruplus, quarti suboctuplus, quinti subsexdecuplus, & ea de inceps continua ratione subdupla.
Erit polygonum primum ad tertium, sicut planum sub apotomis laterum polygoni primi & secundi ad quadratum a diametro.
Ad quartum vero, sicut solidum sub apotomis laterum primi secundi & tertii polygoni ad cubum a diametro.
Ad quintum, sicut plano-planum sub apotomis laterum primi secundi tertii & quarti ad quadrato-quadratum a diametro.
Ad sextum, sicut plano-folidum sub apotomis laterum primi secondi tertii quarti & quinti polygoni ad quadrato-cubum a diametro.
Ad septimum, sicut solido-solidum sub apotomis laterum primi secundi tertii quarti quinti & sexti polygoni ad cubo-cubum a diametro.
Et eo in infinitum continuo progressu."[1]

(Isagoge in artem analyticam, Propositio II)

"*Ma, Sire, voi non avete matematici nel vostro regno, dacché Adriano Romano non ha nominato alcun francese nel suo catalogo*."

Deve essere stato uno spettacolo vedere la faccia del Re di Francia nell'ascoltare quelle parole. E certo anche la faccia dell'ambasciatore olandese che le aveva appena pronunciate meritava attenzione, perché ci vuole del coraggio, o quantomeno una gran bella faccia tosta, per poter dire ad un regnante che nel suo dominio non ci sono matematici degni del nome.

Anche perché il re in questione è un tipo da prendere con le molle: corre l'anno 1593, e da quattro anni sul trono francese siede Enrico IV, quel re protestante, ugonotto, che si converte al cattolicesimo per poter ascendere al trono: sua, vuole la tradizione, è la celebre frase "*Parigi val bene una messa*", ottima sintesi di quanto sia facile cambiare abitudini religiose se la contropartita secolare è sufficientemente allettante.

È verosimile che Enrico IV, già Re di Navarra e ormai re di Francia, che alcuni già chiamano Enrico il Grande e che è il capostipite della dinastia dei Borboni[2], non tenesse il prestigio matematico del suo paese come cruciale priorità, in quella fine di sedicesimo secolo. Ma il prestigio di un sovrano è veicolato anche e soprattutto dal prestigio della propria nazione, e siamo pronti a scommettere che il povero ambasciatore sia rimasto fulminato dalle acuminate saette che lampeggiavano nei regali occhi.

Per essere un diplomatico, l'olandese che a Fontainebleau solletica così poco urbanamente l'orgoglio del sovrano dimostra probabilmente di non essere particolarmente abile nella sua complicata professione. Ma, del resto, come poteva aggirare l'ostacolo? C'era quella lista compilata da un dotto di Lovanio, non si poteva far finta di nulla… forse, sarebbe stato meglio non parlare affatto di matematica, certo. Ma si sa: il prestigio è una cosa seria, e il discorso dev'essere caduto sulla matematica più per il suo aspetto di sfida internazionale che per quello di scoperta accademica. E si sa: con le sfide i re vanno a nozze.

[1] No, niente traduzione. Ma se avrete la pazienza di tradurvelo da soli, scoprirete una celebre e antica via d'approccio a π.

[2] Per gli amanti degli alberi genealogici: tecnicamente, "Borboni" non è una dinastia, ma una "casa", una ramificazione della ben più antica dinastia Capetingia.

1 *Adriano Romano – Adriaan van Roomen*

Quel che è certo è che tutto inizia a causa di Adriaan van Roomen, che il re francese chiamava probabilmente Adrien Romain, e che era più noto, ai suoi tempi, col nome latinizzato Adrianus Romanus. Questi nasce il 29 settembre[3] 1561 a Lovanio, in quel Brabante fiammingo che da sempre è un crogiuolo di lingue, religioni, nazionalità e culture diverse.

Essendo di famiglia nobile (e presumibilmente ricca), Adriaan ha la fortuna di potersi dedicare agli studi: prima medicina a Huy, poi ancora a Lovanio, ed è probabilmente qui, nella sua città natale, che comincia ad interessarsi di matematica. Ha solo trentadue anni quando Enrico IV sente parlare di lui, ma è proprio in quello stesso 1593 che Adriaan pubblica "*Ideae Mathematicae Pars Prima, sive Methodus Polygonorum*", dedicato al grande Clavius, in cui, tra l'altro, mostra di aver calcolato il valore di pi greco fino alla quindicesima cifra decimale[4]. E il 1593 è un anno davvero lusinghiero, per il nostro: ottiene una prestigiosa cattedra in medicina dal principe di Franconia, ricreata appositamente per lui dopo dieci anni di vacanza; si sposa con Anna, che tra le altre cose è nipote di uno dei più famosi medici d'Europa; nei mesi subito successivi otterrà il dottorato dalla prestigiosissima Università di Bologna, e sarà perfino decorato da Rodolfo II, re d'Ungheria. Insomma, un intellettuale a tutto tondo, o meglio, come si diceva un tempo, un dotto, un sapiente, legittimamente riconosciuto come tale dai suoi contemporanei.

Ma è un periodo complicato, quello a cavallo tra Cinquecento e Seicento: la Riforma e la Controriforma sono sul piede di guerra, l'un contro l'altra armate. Se i sovrani, come si è visto, devono accuratamente scegliere se allinearsi alla Chiesa Cattolica Romana o abbracciare le nuove idee dei riformatori, anche gli scienziati e gli intellettuali sono, in qualche modo, divisi e contrapposti. Van Roomen è schierato con i cattolici, e dai sovrani e dagli intellettuali cattolici è tenuto in gran considerazione. Considerazione che non è certo del tutto immeritata, anche se il nostro, probabilmente, ha una considerazione di sé stesso come matematico un po' più alta di quanto realmente si sarebbe disposti a concedergliene oggigiorno: ad esempio, è del tutto convinto di essere riuscito a quadrare il cerchio.

Ma non bisogna neanche eccedere nel senso opposto: ad Adriano Romano la matematica interessa, e interessa molto. Nella sua opera citata dall'incauto ambasciatore, ad esempio, propone un problema in grado di spaventare chiunque ancora oggi, almeno a prima vista: si tratta di un'equazione di quarantacinquesimo (sic) grado della forma polinomiale $P(x)=\lambda P(x)$. Di fatto, si tratta dell'equazione che esprime la lunghezza della corda della quarantacinquesima parte di un angolo.

Il tutto, ovviamente, espresso nella forma elaborata e retorica in uso a quei tempi (ne avete avuto un esempio nella citazione posta in testa a quest'articolo). A volerlo scrivere in notazione moderna, il problema di Adriaan van Roomen avrebbe questa forma:

[3] Questa data di nascita ci consente di poter sfacciatamente licenziare il presente articolo come legittimo compleanno settembrino, anche se, più che il Van Roomen, il pezzo intende celebrare un altro signore, la cui esatta data di nascita è ancora – verosimilmente – ignota.

[4] Fino alla sedicesima, in realtà, ma la sedicesima è errata. Non è comunque un record perché, a sua insaputa, c'era chi aveva già fatto di meglio.

$$45x-3795x^3+95634x^5-1138500x^7+7811375x^9-34512075x^{11}+105306075x^{13}-232676280x^{15}+384942375x^{17}$$

$$-488494125x^{19}+483841800x^{21}-378658800x^{23}+236030652x^{25}-117679100x^{27}+46955700x^{29}-14945040x^{31}+3764565x^{33}$$

$$-740259x^{35}+111150x^{37}-12300x^{39}+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=C$$

dove C vale:

$$C=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Adriano Romano era ben orgoglioso del suo problema, e infatti nel suo libro sfida tutti i matematici d'Europa a risolverlo: anzi, per meglio indirizzare la sfida, si prende anche la briga di elencare tutti i più famosi matematici del tempo, rendendo così, in un certo senso, la sfida personale e nominale.

Va detto che le sfide pubbliche erano, a quei tempi, pane quotidiano per tutti coloro che ambivano ad essere considerati dei matematici professionisti: basti ricordare quel che era accaduto, giusto mezzo secolo prima, dalla nostra parte delle Alpi a proposito della risoluzione della cubica da parte di Tartaglia, Cardano, Ferrari e Scipione del Ferro[5]. Se quindi non era certo infamante sfidare altri a risolvere problemi matematici, per quanto complessi e arzigogolati potessero essere, poteva certo invece risultare imbarazzante per un sovrano sentirsi dire che nessun suo suddito meritasse di essere elencato tra i matematici migliori del continente.

Per questo, verosimilmente, la faccia di Enrico IV[6] deve aver assunto un'espressione quanto mai significativa, dopo che l'ambasciatore olandese gli ha palesato l'assenza di nomi francesi nell'elenco puntigliosamente compilato da Adriaan van Roomen[7]. La tradizione aneddotica vuole però che il re navarro non abbia dato in escandescenze, anzi: sorridendo con regale sufficienza al povero diplomatico, Enrico IV avrebbe prontamente affermato che quel catalogo non poteva essere certo esatto, perché lui stesso conosceva un uomo eccezionale, un figlio di Francia dalle straordinarie capacità matematiche. E, sapendolo presente proprio presso la corte lì a Fontainebleau, non esitò ad ordinare: "Fatelo venire subito! E lei, ambasciatore, si procuri quel libro del Romain, che si possa vedere questo famoso problema!"

Sia il libro sia il gentiluomo francese apprezzato dal re giungono presto: e mentre il sovrano e il diplomatico ancora discorrono, il misterioso personaggio, anche se è assente da ogni lista di matematici d'eccellenza, trova al volo due soluzioni al quesito, mentre ancora esamina il problema nel corridoio dell'anticamera e prima che il re torni a chiedergli cosa ne pensi. Più tardi, in serata, ne trova già altre, e provvede ad inviarle al povero ambasciatore.

[5] Per rinfrescarsi la memoria, qualora servisse, può bastare fare un salto in archivio e pescare RM064, del lontano Maggio 2004, e rileggersi "Requiem per una formula", compleanno scritto da Dario Bressanini (che a quel tempo era molto meno famoso di adesso).

[6] Per quanto molto fuori contesto, non si può non ricordare che "la faccia di Enrico IV", o meglio il suo cranio, è tornato assai di recente agli onori della cronaca, quando analisi scientifiche hanno concordato nel ritenere verosimile la possibilità che la testa ritrovata nel 2008 appartenga effettivamente al primo dei Borboni. Enrico IV viene ucciso nel 1610, il suo corpo imbalsamato resiste fino al 1793, quando i rivoluzionari ne violano la tomba e ne asportano la testa. Un'indagine giornalistica risale ad un cranio appunto nel 2008, conservato in un museo. Esami condotti da antropologi, storici, critici d'arte con i più sofisticati strumenti (TAC, datazione con carbonio 14, verosimiglianza con dati antropometrici e cronache di ferite subite dal sovrano, nonché analisi di DNA comparate tra il teschio e resti presunti di Luigi XVI) sembrano concordare nell'identificazione, anche se naturalmente esistono anche diversi studiosi di parere del tutto contrario.

[7] Per i più curiosi: la lista dei "migliori matematici del mondo" (che ovviamente erano tutti europei) comprendeva davvero tutti i grandi nomi dell'epoca: il grande Clavius, idolo dello stesso Adriano Romano; l'ancor più celebre Tycho Brahe, e poi nomi ancor oggi altisonanti come Stevino, Hugo Grotius, Guidobaldo dal Monte, Ludolph van Ceulen di Leida. Non mancavano neppure Giovanni Antonio Magini da Padova, Michel Coignet di Anversa, Nicolas Peterson, Valentin Otho, Bernard Lordel, Jans van den Weghe, Thomas Fienus di Anversa e Cornelis van Opmeer di Delft.

L'aneddoto è solo un aneddoto[8], per di più assai criticato dagli storici belgi, se non altro perché sembra voler considerare Adriaan van Roomen, che è figlio di Lovanio e pertanto assolutamente belga, alla stregua di un matematico olandese. Ciò non di meno sembra che l'aneddoto abbia dei seri fondamenti storici, se non altro perché il gentiluomo francese, due anni dopo, ricorderà la sfida, e pubblicherà tutte le 23 soluzioni positive dell'equazione, non risparmiandosi di schernire un po' il povero Romano, e ad un tempo di elogiare le scuole e le accademie francesi. Van Roomen la prende inizialmente con ben poca sportività, giungendo perfino a dire che l'unica altra soluzione a lui giunta, quella di Ludolph van Ceulen che arrivava fino a 12 decimali, valeva ben di più delle 23 del francese che si era limitato ad una profondità di soli otto decimali. Ma tutto è bene ciò che finisce bene: dopo la scaramuccia iniziale a distanza, i due finiranno per conoscersi, apprezzarsi reciprocamente e perfino a collaborare.

Il campione di Enrico IV è François Viète. Nasce a Fontenay-le-Comte, in Vandea, in qualche giorno del 1540[9]; anche se ci siamo ostinati a chiamarlo "gentiluomo" durante tutto il racconto, il titolo in realtà non gli spetta, non avendo in realtà ascendenze nobiliari: Viète è figlio di Etienne, avvocato, e da bravo figlio di professionista borghese, si predispone a seguire le orme del padre. Si laurea in legge a Poitiers a vent'anni, nel 1560, e comincia ad esercitare l'avvocatura. Come talvolta accade ai giovani laureati, nel giro di pochi anni François si accorge che la carriera per la quale ha studiato non è quella che realmente desidera: smette allora di frequentare le aule dei tribunali e cambia vita, dedicandosi… alla politica.

2 *François Viète*

Inizia a fare il segretario di Antoinette d'Aubeterre, gran nobildonna di corte, di parte ugonotta, che presto lo incarica di fare da precettore a sua figlia; questa è Catherine de Parthenay, che diverrà una delle donne più famose del suo tempo per le sue capacità intellettuali: umanista, intellettuale, poliglotta, dotata per la matematica e le scienze.

Entrare nelle grazie della nobiltà ugonotta non è poi una pessima scelta, almeno se si riesce a sopravvivere alla tragica notte di San Bartolomeo del 1572; e infatti Viète fa rapidamente carriera: entra in Parlamento nel 1571, e nel 1576 si ritrova direttamente al servizio di

[8] Viene raccontato da Tallement de Reaux, nella sua opera *Historiettes*.

[9] La data di nascita di Viète è sconosciuta a quasi tutte le fonti consultate. Non viene riportata dal portale di biografie matematiche di St.Andrews, non è scritta nella Wikipedia inglese, e nemmeno in quella francese: quest'ultimo caso è particolarmente significativo perché la voce su Viète di Wikipedia.fr è veramente ciclopica, più un saggio che una voce d'enciclopedia, e marchiata dalla stella di qualità. Stranamente, la nostra Wikipedia italiana, pur riservando a Viète ben poche righe (davvero niente, rispetto alla cugina transalpina) registra però come data di nascita di François Viète il 13 Dicembre 1504. Sappiamo di rischiare di essere tacciati di antipatriottismo, ma non ci sentiamo sicuri della data, soprattutto tenendo conto del fatto che altri siti non si pronunciano. Di conseguenza, licenziamo il compleanno di Viète in Settembre, grazie alla complicità del settembrino Adriaan van Roomen, sperando che François non se la prenda troppo, anche se fosse nato davvero il giorno di santa Lucia.

Enrico di Navarra. A quarant'anni, nel 1580, è ormai consigliere speciale di quello che diverrà il successivo sovrano, appunto Enrico di Navarra, con un incarico del tutto speciale: quello di decrittare i messaggi cifrati dei nemici di sempre, gli spagnoli.

L'abilità di François in questa sua mansione è stupefacente, la chiave di cifratura è basata su cinquecento caratteri, ma non resiste ai metodi di scardinamento di Viète: è in fondo comprensibile che, in epoca di caccia alle streghe e di Controriforma, i cattolicissimi figli di Spagna siano giunti ad accusare l'infame ugonotto di aver stretto un patto con il diavolo.

3 *Enrico IV sconfigge la Lega Cattolica*

Ma i cattolici sono assai potenti anche in Francia: lo si è visto, perfino Enrico di Navarra dovrà rinunciare alla sua fede protestante per poter salire al trono. Nel decennio compreso tra il 1580 e il 1590 le pressioni esercitate dalla Lega Cattolica contro gli ugonotti sono tali da riuscire a mettere in ombra la carriera politica di Viète, che tornerà in auge solo verso il 1594, quando finalmente rientrerà alla corte del suo vecchio protettore, ormai divenuto sovrano di Francia.

Se quel decennio è sterile per la carriera politica di Viète, è invece fecondo per la storia della matematica: al pari di Fermat[10], Viète non sarà mai un matematico professionista, e come tutti i dilettanti ha bisogno di tempo libero per dedicarsi alla matematica. I suoi interessi sono vasti, e coprono virtualmente tutti gli aspetti della matematica del tempo: ed è possibile che il suo sguardo "da dilettante" lo aiutasse a vedere con obiettività i limiti della maniera di affrontare gli studi matematici del suo tempo. Già nel 1571 aveva cominciato a pubblicare – naturalmente a sue spese e con molte difficoltà – le prime due parti del suo *Canon Mathematichus*, che ne prevedeva quattro: opera che continuava le tavole trigonometriche di Regiomontano[11]. Nel 1591 scrive quello che è probabilmente il suo capolavoro, ovvero "*In Artem Analyticem Isagoge*", dove Viète esplora quella che è senza dubbio la sua grande passione, l'algebra[12].

È verosimile che il maggior contributo di Viète alla matematica non sia riducibile alla scoperta di teoremi o dimostrazioni, per quanto le sue opere non siano certo prive di scoperte di rilievo: piuttosto è l'introduzione di un nuovo metodo di scrittura e di notazione che Viète introduce e che poi, grazie soprattutto ad Harriot, si dimostrerà estremamente utile per il progresso di tutta la matematica. È infatti Viète che, tra le altre cose, suggerisce di utilizzare le prime lettere dell'alfabeto per indicare le quantità costanti e riservare le ultime alle variabili, contribuendo così a rendere la "x" la lettera indubbiamente più evocativa di tutta la storia della matematica. Può sembrare un contributo da poco, se non ci si pone sufficiente attenzione, ma in realtà si tratta di

[10] Protagonista di "Polenta d'estate", RM091.

[11] Regiomontano e la latinizzazione dei nomi sono temi di "Fra Piumazzo e Sant'Anna Pelago", RM185.

[12] Viète fu il primo a chiamare l'algebra "arte analitica", nome che ebbe un discreto successo ai suoi tempi. John Wallis la chiamava "aritmetica speciosa (*specious*)", per mettere in evidenza le "specie", ovvero le potenze, delle variabili. Newton preferiva il termine "aritmetica universale", forse perché il grande Isaac era particolarmente attratto dall'aggettivo "universale". Quasi tutti erano comunque d'accordo che il termine originale arabo (appunto "algebra") fosse un obbrobrio: Descartes non esitò a definirlo "barbaro".

qualcosa di rivoluzionario: nel trattare le grandezze con "nomi" e termini verbosi, non risultava evidente la possibilità di operare algebricamente su di esse. In altri termini, se adesso semplifichiamo due x nei due membri di un'equazione senza neanche pensarci un istante, è per merito di François Viète: prima di lui, non ci aveva pensato di fatto nessuno[13].

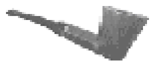
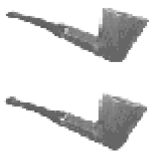
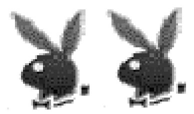
L'occhio del dilettante che vede più facilmente la trave nell'occhio del matematico professionista? Può darsi. Ma è anche vero che definire "dilettante" Viète ha senso solo se si circoscrive il significato della parola "dilettante" al mero dignificato di "persona che non svolge una certa attività come lavoro principale", spogliandolo del significato di "approssimato, arruffato" che al giorno d'oggi si porta talvolta dietro. Le capacità matematiche di Viète sono eccezionalmente profonde: il paragrafo posto all'inizio di quest'articolo, la Proposizione II del suo capolavoro, non si limita a cercare di calcolare qualche decimale in più del valore di pi greco, ma apre le porta di questa ricerca verso l'infinito: con una costruzione geometrica che, partendo da un quadrato inscritto in un cerchio ricava al suo interno un ottagono regolare, ripete il processo "*in infinitum continuo progressu*".

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \cdots$$

È forse il primo momento in cui si capisce che pi greco non è un numero realmente conoscibile, che ha la sua estensione nascosta nelle pieghe dell'infinito.

[13] "La logistica numerica è quella utilizza i numeri: la logistica simbolica è quella che usa i simboli, quali, ad esempio, le lettere dell'alfabeto". Dalla "*In artem analyticem isagoge*", 1591.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Il triangolo di Laxap			
Giallo matematico			

2.1 Il triangolo di Laxap

Non state a googlare il nome: è, semplicemente, "Pascal" scritto al contrario (con qualche aggiustamento fonetico), e lo stiamo costruendo sul Campo dei Chinotti.

E non tirate sospiri di sollievo: è fatto di piantine che, nonostante tutti i nostri sforzi, non riescono ad evolvere dalla dimensione "bonsai"; quindi, continueremo a tirare con l'arco, per vostra gioia e preoccupazione dei vicini, e a sviluppare problemi in merito, visto che Rudy ormai a vincere un'intera partita ci ha rinunciato da tempo.

Comunque, ormai abbiamo *tre* essenze (ciascuna in svariate copie) in attesa di guardare dall'alto al basso il Platano della Tesoriera[14]: l'ormai famoso Chinotto, la Quercia e, ultima acquisizione, due Giuseppi[15]; procedendo per margutta o per talea (ce n'era un'altra, ma non me la ricordo), la nostra intenzione sarebbe di riprodurli e, avendone ottenuto un certo numero, di porli a dimora.

L'idea era di piazzare una riga di piante equidistanziate, più o meno casualmente scelte tra le tre essenze. Partendo ad esempio dalla riga ABCCBABCBA (A=querciA, B=giuseBbe – ha il raffreddore – C=Chinotto) che è composta da ***dieci*** alberelli; a partire da questa, costruendo un "Triangolo di Pascal al contrario" (chiaro, adesso, il titolo del problema?), di costruire una seconda riga di ***nove*** alberelli, secondo queste semplici regole:

1. Se le due essenze al piano di sopra sono uguali, metti la stessa essenza;
2. Se le due essenze al piano di sopra sono diverse, metti la terza essenza.

Per capirci, la seconda fila sarebbe una cosa del tipo: CACACCAAC (oibò! Spariti i Giuseppi! Tranquilli, tra un attimo tornano).

...e avanti in questo modo, ottenendo quindi una riga da ***otto***: BBBBCBAB (...ve l'avevo detto, che tornavano...), poi da sette, da sei, da cinque... sin quando non vi resta un singolo albero, e avete una graziosa disposizione triangolare di 10+9... Quarantacinque, giusto? Giusto, 45 piante.

[14] Dai giornali di oggi, risulta essere il più grosso albero di Torino: quasi sette metri di circonferenza. No, il problema non è calcolare il raggio. Su, siate seri.

[15] Il tormentone dell'estate è stato il *politically correct*: essendo "diversamente alti" (poco più di una lattina di quelle slim), se li chiamate con il diminutivo "Pini" si arrabbiano. Quindi, sono dei Giuseppi.

Ora, sia io che Doc (Treccia non gioca, a quanto pare non le piace tirare con l'arco: non viene mai...) abbiamo le nostre preferenze *essenziali* (nel senso che preferiamo un certo tipo di albero), e saremmo interessati a far terminare il triangolo con proprio quell'albero lì. L'idea è, senza dare troppo nell'occhio[16], di influenzare la costruzione della prima fila in modo tale che termini con la nostra essenza preferita.

Riuscite a darci una mano? Oh, non limitatevi a dieci piante, nella prima riga: Rudy sta migliorando nel tiro, quindi c'è il rischio di avere molto più spazio, l'anno prossimo...

2.2 Giallo matematico

A titolo di premessa, ci teniamo a sottolineare che questa estate abbiamo letto "The Cuckoo Calling", di Galbraith (che poi sarebbe J. K. Rowlings, autrice della serie di Harry Potter). Bello, ma forse quattrocento pagine sono un po' troppe: va detto che il "mistero" principale non è trovare il colpevole, ma scoprire come va a finire tra i due personaggi[17], quindi la *suspence* resta anche quando capite chi è stato (che non è facile, tra l'altro). Opinione personale, duecentocinquanta pagine erano la taglia giusta; ma forse non avrebbe avuto successo, così corto: leggetelo e fateci sapere.

Comunque, stiamo ripassando teoria e pratica del giallo, e vorremmo farvi partecipi di un grazioso enigma che abbiamo trovato tra i nostri appunti di gioventù.

Efferato crimine al Dipartimento di Matematica! Dalla sala professori, è stato rubato l'intero contenuto del salvadanaio per comprare il caffè: a seguito delle indagini, risulta che nella mattinata nella quale è stato commesso il furto, solo sei professori (e nessuno studente) sono entrati nella stanza; ciascuno una volta sola, restandoci per un certo tempo e poi uscendosene: ogni volta che due qualsiasi si trovavano nella stanza, almeno uno di loro vedeva l'altro[18].

L'indagine, efficientemente attivata dalla segretaria del dipartimento (l'unica persona in grado di trattare con quella gabbi i matti) raggiunge rapidamente le seguenti conclusioni: Abel dice di aver visto nella stanza Bernoulli e Erdos, Bernoulli dice di aver visto Abel e Fermat, Cauchy dice di aver visto Descartes e Fermat, Descartes dice di aver visto Abel e Fermat, Erdos dice di aver visto Bernoulli e Cauchy, Fermat dice di aver visto Cauchy e Erdos.

Evidentemente, uno ed uno solo di loro sta mentendo, fornendo false informazioni (*non* omettendo informazioni) per dare la colpa ad un altro: chi sta mentendo, e qual è la bugia?

Facile? Beh, sì. Pensavamo di espanderlo, ma Gauss e Hilbert ci sono simpatici, non avremmo sopportato la possibilità che fossero sospettati di un così efferato delitto...

3. Bungee Jumpers

Qual è il valore della somma

$$S=\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}$$

La soluzione, a "Pagina 46"

[16] Con questo termine intendiamo che, supponendo Rudy voglia terminare con il Chinotto, la sequenza CCCCCCCCCC andrebbe benissimo, ma forse a quel punto Doc comincerebbe a sospettare qualcosa... Meglio "nascondere" un po' lo scopo, insomma.

[17] Rileggetevi "La donna della domenica", di Fruttero e Lucentini: anche lì, del colpevole non importa nulla a nessuno, e il quesito principale viene risolto nelle ultime tre parole.

[18] "Almeno" in quanto, notoriamente, i prof sono distratti, e il secondo potrebbe non aver notato il primo (ma, reiteriamo, almeno uno dei due nota l'altro).

4. Soluzioni e Note

Settembre.

È tempo di RM200. Mi sembra ieri che i tre tapini che si affannano ancora a far uscire un numero al mese di questa rivista incredibile sedevano in un ristorante canavesano, ingollando grosse quantità di eccellenti vini piemontesi e scervellandosi su come celebrare in maniera originale il centesimo numero. Ci sembrava già allora straordinario: novantanove numeri, più di otto anni, ma a suo tempo era ancora tutto molto più facile. La decisione fu semplicemente di scambiarci i ruoli e ancora adesso sappiamo che il Compleanno del numero cento fu scritto dalla sottoscritta e le Soluzioni & Note dal Doc, ma il Paraphernalia sempre dal Capo perché non volevamo fare la rotazione completa, o perché né io né Piotr avevamo la forza di scrivere un PM, chissà. Le ragioni si sono perse un po' nel passato, ma RM100, Maggio 2007, esiste ancora, un altro piccolo miracolo mensile.

Cento numeri e altri otto anni dopo, siamo ancora qui e non siamo riusciti a trovare il tempo di inventarci nessuna idea speciale, per questo RM, ma dopotutto è già grandioso esserci, aver voglia di farlo ancora una volta e trovare voi tutti, solutori e commentatori, tutti quanti mese dopo mese ancora con la voglia di leggerci ed incoraggiarci. E di incoraggiamento ne abbiamo sempre bisogno.

Siamo andati nello spazio (se non lo sapete, vuol dire che non leggete i testi delle copertine, il Capo se la prenderà parecchio), siamo anche atterrati su LeScienze, abbiamo scritto libri e vinto premi, rilasciato interviste radiofoniche e celebrato tanti momenti importanti, ma quello che ci rende sempre più orgogliosi è che alcuni di voi si ricordano ancora il numero uno, e i tempi in cui non andavamo da nessuna parte e non ci conosceva nessuno. Una occasione buona per dire: grazie di esserci, a quelli che si ricordano e a quelli che ci seguono da meno tempo, ma che non ci abbandonano.

E adesso basta fare i sentimentali, andiamo a vedere le soluzioni di agosto.

4.1 [199]

4.1.1 Quarti Nobiliari

Il Capo prepara alberi genealogici egoisti, certamente cercando qualche ascendente famoso per giustificare la sua importanza… noi non conosciamo nessuno tanto vanesio e timido al tempo stesso, e voi?

Comunque ecco il testo del problema:

> *L'albero dei miei ascendenti è disegnato con uno spazio di 2 cm tra una generazione e l'altra e tra gli elementi della stessa generazione. Ogni vertice del grafo è sottostante e centrato rispetto ai due punti che rappresentano i suoi genitori.*
>
> *Tutti i vertici del grafo (me compreso) sono numerati progressivamente dal basso all'alto e da sinistra a destra a partire da 1 (che sono io). Posto che sia "all'ultimo piano", qual è la coordinata del parente 2015? E come si chiama? In quanti, della sua generazione, hanno dovuto organizzarsi per dare origine ad un risultato insignificante come il sottoscritto? Come è imparentato con me?*

Un successone per questo problema. Per prima, la soluzione di un nostro nuovo lettore, ***Bluemonday***, che (grazie alle *chiarissime* indicazioni sul nostro sito) ha tentato di inviarci le sue prime soluzioni in tanti modi, che se non le pubblichiamo c'è veramente da vergognarsi.

> Partiamo col notare che $2^{10} < 2015 < 2^{11}$.
>
> Poiché chiaramente il primo numero di ogni "livello" o "generazione" del diagramma binario ad albero è 2^k, capiamo che il 2015-esimo parente deve trovarsi sul 10 livello quindi la sua ordinata è $2 \cdot 10 = 20$.

> Per quanto riguarda l'ascissa, misuriamo la sua "distanza" dall'asse y in questa maniera: $(2015 - 2^{10} + 1) - 2^9 = 480$ (Per chiarire: questo è il numero di parenti con ascissa positiva fino a includere il 2015-esimo). Ora, se capisco il problema, poiché tra due numeri ci sono 2 centimetri di spazio, il primo numero con ascissa positiva sull'ultimo livello avrà ascissa 1, quindi il parente 2015 avrà ascissa
>
> $$959(1 + 2 \cdot 479 = 959).$$

Bene, complimenti alla pazienza di ***Bluemonday***, che concorda con la soluzione del veterano (di RM) ***Sawdust***:

> Posto l'autore del pezzo nell'origine delle coordinate, l'antenato 2015 dovrebbe trovarsi nel punto (959, 20).
>
> I suoi coevi che hanno contribuito al misfatto sono 1024.
>
> Come grado di parentela dovrebbe essere il quadrisavolo del quadrisavolo dell'autore.
>
> Ma, se facciamo riferimento alla figura 1 del testo e consideriamo che 2 sia la mamma e 3 il papà, mantenendo lo stesso schema nello sviluppo tutti i numeri pari sono mamme e tutti i numeri dispari papà. Da qui deriva che anche il 2015 era un maschietto, e anche tutti i suoi successori diretti fino al de cuius erano uomini, a parte la numero 62, quindi era in realtà il quadrisavolo della quadrisavola!
>
> Infatti la linea regressa è: 1, 3, 7, 15, 31, 62, 125, 251, 503, 1007, 2015..

Prego di notare la sottigliezza nello scoprire l'antenat*a*… ***Alberto R.***, che si firma "orgoglioso di essere il numero uno" (ed il cui sommario del problema abbiamo usato sopra, per cui lo tagliamo qui) commenta così:

> (…) Tutti i vertici del grafo (me compreso) sono numerati progressivamente dal basso all'alto e da sinistra a destra a partire da 1 (che sono io). Ne risulta che il primo elemento della K-esima fila è $2\^K$ e l'ultimo $2\^(K+1)–1$. In totale sono presenti $2\^(H+1) – 1$ vertici.
>
> Si chiedono le coordinate dell'N-esimo punto in un sistema cartesiano con origine nel punto 1, l'asse x verso destra e l'asse y verso l'alto.
>
> Sia $2\^K$ è la più grande potenza di 2 che non supera N (quindi N sta sulla K-esima fila) e poniamo $N = 2\^K + R$. L'N-esimo punto ha, in centimetri, le coordinate
>
> $x = 2\^(H–K) \cdot (2R+1) – 2\^H$ $y = 2K$
>
> Il figlio/a di N è $N/2$ arrotondato in difetto se N è dispari. Quindi la successione che va da 2015 a me è formata da 2015, 1007, 503, 251, 125, 62, 31, 15, 7, 3, 1.
>
> Per inciso faccio notare che se sostituiamo ogni numero di questa sequenza con il suo resto modulo 2, la successione che otteniamo 11111011111 letta da destra a sinistra (in generale, perché in questo caso è capitato che sia palindroma) non è altro che il numero 2015 scritto in base 2.
>
> Ma chi è il sig.2015? Impossibile rispondere se non si aggiunge una precisazione: nel disegnare l'albero ho messo sempre la madre a sinistra e il padre a destra. In questo modo i pari sono femmine e i dispari maschi. E mi sta bene così perché io, Alberto, ho il numero 1. Se fossi Albertina avrei messo il padre a sinistra e la madre a destra onde non avere eccezioni col numero 1.
>
> Adesso posso precisare che il Sig. 2015 è il padre del padre del padre del padre del padre della madre del padre del padre del padre di mio padre.

Fantastico, vero? Meglio adattare le convenzioni, anche Rudy preferisce restare maschio. Fermiamoci qui, e passiamo all'altro problema.

4.1.2 Nim con il salto

Un classicissimo gioco, modificato per renderlo più interessante, ma sarà così? Non è già stato fatto tutto con il Nim? Vediamo:

> *Avete N monete/biglie/sassolini; ad ogni turno potete toglierne, a scelta,* 1, 2, 3, …, *n: poi tocca al vostro avversario; perde il primo che non può fare una mossa, ossia*

> *che si ritrova senza biglie da estrarre. Trovare (se esiste), per ogni N, la strategia vincente del primo giocatore. Supponiamo di limitare il numero delle scelte: cosa succede se si possono prendere dal mucchio, solo i valori* 1, 3 *e* 4*? in questo caso, per quali valori di N il primo giocatore ha una strategia? E quale?*

La prima soluzione che è arrivata è di ***Adam***, che ci ha scritto parecchie volte, riportiamo tutto insieme:

> (…) Il gioco che descrivete è Subtraction(1,3,4), con la regola "normale", quindi è definitivamente periodico. In questo caso particolare è perfino periodico! I primi valori Grundy sono:
>
> 0 0
>
> 1 1
>
> 2 0
>
> 3 1
>
> 4 2
>
> 5 3
>
> 6 2
>
> 7 0
>
> 8 1
>
> 9 0
>
> 10 1
>
> 11 2
>
> 12 3
>
> 13 2
>
> (ottenuto prima a mano sul treno poi verificato con:

```
#!/usr/bin/perl
sub mex {
my $i=0;
while (defined $move[$i]) {
 $i++;
 }
return $i;
}
$g[0]=0;
print "0 0\n";
$n=1;
while ($n<=(2<<25)) {
if ($n>=1) {
$move[$g[$n-1]]=1;
}
if ($n>=3) {
$move[$g[$n-3]]=1;
}
if ($n>=4) {
$move[$g[$n-4]]=1;
}
$g[$n]=mex();
```

```
#if ($g[$n]==0) {
print "$n $g[$n]\n";
#}
$n++;
@move=();
sleep 1;
}
```

e vediamo che i valori da 7 a 11 sono uguali a quelli da 0 a 4 per cui (dato che la mossa massima è 4) il gioco è periodico e basta. Quindi non succede niente di particolare fra 31 e 35 (estremi inclusi).

Il primo giocatore deve solo guardare il valore mod 7 della grandezza del mucchio.

Se è 0 o 2 ha perso. Può fare una mossa a caso.

Se è 1, 3, o 4 toglie 1, 3 o 4 rispettivamente per portare il mucchio a 0 mod 7. Se è 5 o 6 toglie 3 o 4 rispettivamente per lasciare 2 mod 7. (Ok se il valore è 3 mod 7 può togliere 1 o 3 a piacere)

Avete parlato di 6 dimensioni ma essendo il gioco normale è facile trattare il caso in cui abbiamo tanti mucchi vuoi con queste regole e si muove in un mucchio a piacere.

Trovate la somma Nim dei valori dei mucchi. Se è 0 avete perso. Altrimenti fate una mossa per lasciare una posizione di valore 0 all'avversario.

Visto che i valori dei singoli mucchi non sono mai maggiori di 3 questo non è molto difficile.

Farlo con 6 mucchi o con un qualche altro numero di mucchi non cambia niente. Concretamente, ignorate i mucchi che valgono 0 e eventuali coppie di mucchi uguali. A questo punto rimanete con uno di questi casi:

1 e fate la solita mossa nel mucchio rimasto

2 e fate la solita mossa nel mucchio rimasto

3 e fate la solita mossa nel mucchio rimasto

1, 2 e togliete 1 gettone dal mucchio che vale 2

1,3 e togliete 4 gettoni dal mucchio che vale 3

2, 3 e togliete 1 gettone dal mucchio che vale 3

1, 2, 3 non è possibile perché vale 0.

Il vostro problema "vero" qual è?

(…) Versione misere

Winning Ways seconda edizione vol 3 pagina 4 (sezione sui giochi misere), "all subtraction games reduce to nim" quindi trattare il vostro gioco con qualsiasi numero di mucchi anche con la regola misere è ok.

A questo punto mi pare che anche le generalizzazioni del tipo "devi fare una mossa in ogni mucchio" e "puoi fare le mosse in tutti i mucchi che vuoi, ma almeno uno", sia nel caso normale sia nel caso misere, siano fattibili con le solite tecniche di winning ways.

Come vedete ***Adam*** non è rimasto molto impressionato dal problema. Vediamo che cosa ne dice ***Bluemonday***, sì lo stesso nuovo solutore di prima:

Ecco alcune considerazioni . Se definiamo $A(N)$ uguale a 1 se esiste una strategia vincente per il primo giocatore con N oggetti e 0 altrimenti, allora questo gioco è equivalente a considerare la successione ricorsiva non-lineare:

$$A(N) = 1 - A(N-1) \cdot A(N-3) \cdot A(N-4)$$

Infatti se N è vincente (ossia esiste una strategia per il primo giocatore), vuol dire che posso prendere 1, 3 o 4 e il restante è un numero perdente (che forza cioè il

> secondo giocatore a fare una mossa che al prossimo turno mi da un numero vincente).
>
> Mentre se N è perdente vuol dire che sia che prenda 1, 3, o 4 ottengo un numero vincente, ossia il secondo giocatore ha una strategia per vincere.
>
> Un po' di ragionamento dimostra che questa situazione è riassunta nell'equazione precedente.
>
> Vedendo un po' di valori dell'equazione precedente è evidente un pattern: i valori si ripetono modularmente ogni 7 (e questo può essere dimostrato facilmente per induzione considerando $A(N + 7)$ e utilizzando la formula precedente). Siccome tra i 1; …; 7 gli unici valori per cui N non ha strategia sono 2 e 7, concludiamo che il primo giocatore ha sempre una strategia se e solo se N ≠ 0, 2 *mod* 7.
>
> La strategia vincente, ammesso che esista, quindi sarebbe: Ad ogni turno considero $N - 1$; $N - 3$; $N - 4$ *mod* 7 e trovo quale tra questi numeri è congruente a 0 o 2 modulo 7 (La regola di divisibilità per 7 può far comodo. Saprei come ricavarla, ma non la ricordo), e tolgo 1, 3, o 4 in modo dal lasciare un numero che sia sempre congruente a 0 o a 2 modulo 7.

Beh, ne sanno tutti una più del Capo. ***Alberto R.*** ci manda la sua opinione:

> Nel piatto ci sono N gettoni. Ognuno dei due giocatori, a turno, ne prende a, oppure b, oppure c, oppure .... oppure z.
>
> Chi non può più prendere ha perso. Ovviamente la strategia di gioco dipende da come è composto l'insieme $\{a, b, c, ..., z\}$ dei prelievi consentiti e, in merito, conveniamo una volta per tutte che a sia il più piccolo numero dell'insieme e z il più grande.
>
> Definiamo "rosso" un numero che consente la vittoria di chi lo genera e quindi la sconfitta di chi lo riceve. Ad esempio, dato l'insieme {2, 3, 4}, 0 e 1 sono numeri rossi perché ho vinto se, con la mia presa, lascio all'avversario il piatto con dentro 0 gettoni oppure 1 gettone. Questi li chiameremo "rossi banali", ma esistono altri numeri rossi non banali, ad esempio – e sempre con riferimento all'insieme {2, 3, 4} – il numero 7 perché se lascio al mio avversario un piatto con dentro 7 gettoni, qualunque presa egli faccia, io posso rispondere in modo da lasciare nel piatto 1 o 0 gettoni e così ho vinto.
>
> I numeri non rossi li chiameremo "verdi".
>
> Valgono le seguenti regole:
>
> - Chi riceve un numero rosso, qualunque mossa faccia, restituirà all'avversario un numero verde.
> - Chi riceve un numero verde può, con un'opportuna presa, restituire un numero rosso, e la strategia vincente consiste proprio nell'eseguire questa "opportuna presa". Insomma chi lascia un rosso riceve un verde e può restituire un nuovo rosso più piccolo del precedente e così via fino ad un rosso banale, cioè fino alla vittoria.
> - di conseguenza, se il gioco ha inizio con N gettoni, avrà una strategia vincente chi fa la prima mossa se N è verde, chi fa la seconda se N è rosso.
>
> Dato l'insieme $\{a, b, c, ..., z\}$, per il lavoro di coloritura si può usare questo metodo iterativo:
>
> - Si colorano di verde tutti i numeri dell'insieme $\{a, b, c, ..., z\}$.
> - Si colorano i rossi banali, cioè lo zero ed eventuali numeri minori di a.
> - Detto X più piccolo numero non ancora colorato, se X-a, X-b, X-c, ... X-z sono tutti verdi (o negativi), allora X è rosso; se anche uno solo dei suddetti X-a, X-b, X-c, ... X-z è rosso, allora X è verde.
> - Si ripete l'operazione per il successivo X. Di solito non serve proseguire fino ad N perché la successione dei rossi manifesta ben presto evidenti

regolarità che ne consentono l'estrapolazione e la scrittura in modo compatto. Il procedimento è noioso, ma Excel aiuta!

In alcuni casi semplici si può evitare il suddetto metodo iterativo e procedere con ragionamenti diretti. Ad esempio se l'insieme dei prelievi consentiti è {1, 2, 3, 4}, si scopre subito che sono rossi tutti e soli i multipli di 5. Infatti se io lascio al mio avversario $5K$ gettoni e lui ne prende n, io rispondo prendendone 5-n e restituisco un piatto con $5(K\text{-}1)$ gettoni che è ancora un multiplo di 5 e così via fino a zero che è il più piccolo multiplo di 5.

Con analogo ragionamento è facile estendere la suddetta soluzione al caso più generale di un insieme $\{a, b, c, ..., z\}$ di numeri **consecutivi** con $a \geq 1$. In tal caso sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $K(a+z)+n$, dove K è un naturale zero compreso ed n può assumere tutti i valori minori di a, zero compreso.

Invece le cose si complicano quando l'insieme $\{a, b, c, ..., z\}$ ha dei "buchi", cioè non siamo di fronte a numeri consecutivi. In tal caso non ci resta che ricorrere al (brutto) metodo iterativo innanzi descritto.

Ecco alcuni esempi (anche qui K è qualunque naturale zero compreso. Ma che rottura doverlo precisare sempre! Facciamo un referendum e decidiamo, una volta per tutte, se "naturali" sono gli interi positivi o quelli non negativi!)

- {1, 3,4} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $7K$ e $7K+2$. Questo è il caso citato nel problema, dove, tra l'altro, si legge *"...pare che tra* 31 *e* 35 *(estremi inclusi) succedano cose interessanti..."* Boh! io non ci ho trovato nulla di particolare.
- {1, 2, 4} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $3K$
- {1, 2, 5} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $3K$
- {1, 2, 6} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $7K$ e $7K+3$
- {1, 5, 6} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $11K$, $11K+2$, $11K+4$
- {1, 2, 4, 8} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo 3K
- {3, 5, 7} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $10K$, $10K+1$, $10K+2$
- {2, 5} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $7K$, $7K+1$, $7K+4$
- {1, 3, 5, 7, 9} non è necessario il metodo iterativo. è ovvio che sono rossi i pari e verdi i dispari
- {3, 5, 7, 9, 11} sono rossi tutti e soli i numeri del tipo $14K$, $14K+1$, $14K+2$

Ho costruito questa sfilza di esempi sperando che rilevassero una qualche regolarità in grado di fornire indizi per una soluzione generale di tipo sintetico. Invece niente. caos totale. Esisterà una tale soluzione? Beh, se esiste, di certo qualcuno dei diabolici lettori di RM la troverà, a meno che non siano tutti in ammollo o sbracati al sole o a consumare scarpe su aspri sentieri o a consumare pazienza in coda davanti ai musei.

I diabolici erano quelli sopra… eh. Ma ci fermiamo qui, dopotutto questa rubrica compie veramente il duecentesimo compleanno il mese prossimo. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Un ragazzo e una ragazza sono seduti vicino.

"Sono un ragazzo" dice la persona con i capelli neri.

"Sono una ragazza" dice la persona con i capelli rossi.

Se almeno uno di loro mente, chi è chi?

Le quattro possibili combinazioni di (V)ero-(F)also per le due dichiarazioni fatte sono VV, VF, FV, FF. La prima dobbiamo eliminarla in quanto almeno uno mente. La seconda e la terza dobbiamo eliminarle in quanto, se uno dei due mente, anche l'altro ha mentito. Quindi resta valida solo l'ultima possibilità: stanno mentendo entrambi, la ragazza ha i capelli neri e il ragazzo ha i capelli rossi.

6. Zugzwang!

Nell'ottica di prendere le cose con calma, *non* spieghiamo un gioco che conoscono tutti, lo semplifichiamo, e poi giochiamo il secondo al contrario. Implicando che potreste provare a giocare il primo al contrario.

Questa rubrica era, nella notte dei tempi, nata per chiedervi di analizzare i giochi presentati, senza pretesa di risolverli in modo completo, ma dando a Rudy, quantomeno, la possibilità di fare un inizio di partita decente; risultati molto vicini allo zero, ma non ci aspettavamo di più. *Otto* numeri fa, vi avevamo raccontato il *Neutron*, chiedendovi di analizzarlo: visto che non l'ha fatto nessuno, questo *non* vi chiediamo di analizzarlo, anche perché se ci lasciate un paio di mesi liberi potremmo farcela anche da soli (e, visto che sono dei solitari, più che da soli non potremmo farlo).

6.1 Lam-Turki

Quanti di voi si sono mangiati il fegato sul *Solitario*? Quello con un mucchio di pedine, che devi saltarle per mangiarle (le pedine, non il fegato)? Bene, proviamo a prenderla più semplice.

Partiamo da un *pentalfa*, o *pentagramma* (sarebbe la stella pentagonale): mettiamo *nove* pedine su quelli che d'ora in poi definiremo *incroci*: trattasi di cinque vertici del pentagono centrale e di quattro delle cinque punte delle stelle; per ovvie[19] ragioni di simmetria, siete liberi di scegliere quale punta di stella lasciare libera.

Il gioco è un solitario (sappiamo benissimo che proponendo i nostri giochini a tutti i vostri amici, questi hanno optato per toglervi dalla lista delle telefonate del venerdì sera), quindi potete prendervi tutto il tempo che volete: la singola mossa consiste nel saltare con una pedina un'altra pedina, atterrare su un vertice libero e togliere dal tavoliere la pedina saltata; per (questa volta non si arrabbia neanche Doc) evidenti ragioni, la prima mossa è forzata; ma la seconda, cominciate ad avere un certo numero di opzioni, e la cosa diventa interessante.

Scopo del gioco è lasciare una pedina solitaria (*pun intended*) sul tavoliere.

Facile? Sì. Analizzato? Sì. Ma non vi diamo la soluzione.

6.2 Pentalfa

Qui, le regole del gioco sono facilissime: partite da un pentagramma vuoto, posate da qualche parte una pedina, fatele fare un salto di un vertice e, nel vertice saltato, mettete una nuova pedina. Scopo del gioco, mettere il massimo numero di pedine (che abbiamo il sospetto essere *nove*) sui vari vertici.

Il nome del gioco nasce dal fatto che la stella pentagonale si può disegnare con cinque *alfa* maiuscole (che sono perfettamente uguali alle "a" maiuscole, quindi lasciate pure quella ormai sfascicolata copia del Rocci a riposare in biblioteca), opportunamente sovrapposte.

Secondo noi, il nome del gioco è una schifezza: tanto per cominciare, non si capisce affatto che stiamo giocando un Lam-Turki al contrario (riconosciamo che "aflatnep" o "ikrut-mal" sono nomi fetenti, per il gioco, ma almeno il tentativo si poteva farlo). E poi, con questa faccenda che la pedina si "lascia dietro" una nuova pedina, con il nome e il tavoliere di palese origine greca, non era meglio chiamarlo "Deucalione e Pirra"? A costo di inventarsi un modo per giocarlo in due, a noi sembra molto romantico. E più azzeccato.

7. Pagina 46

Per comodità, esplicitiamo la somma:

$$S=\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\binom{99}{2k}=\binom{99}{0}-\binom{99}{2}+\binom{99}{4}-\ldots-\binom{99}{98}.$$

[19] Per *ovvi* motivi, questa parola è qui solo per vedere se Doc legge il pezzo.

Per prima cosa, osserviamo che:

$$(1+x)^{99}=\binom{99}{0}+\binom{99}{1}x+\binom{99}{2}x^2+\binom{99}{3}x^3+\ldots+\binom{99}{99}x^{99}$$

e che:

$$(1-x)^{99}=\binom{99}{0}-\binom{99}{1}x+\binom{99}{2}x^2-\binom{99}{3}x^3+\ldots-\binom{99}{99}x^{99}.$$

Da questo si ricava che:

$$\frac{(1+x)^{99}+(1-x)^{99}}{2}=\binom{99}{0}+\binom{99}{2}x^2+\binom{99}{4}x^4+\ldots+\binom{99}{98}x^{98}.$$

Questa è un'identità, e per $x = i = \sqrt{-1}$ otteniamo:

$$\frac{(1+i)^{99}+(1-i)^{99}}{2}=\binom{99}{0}-\binom{99}{2}+\binom{99}{4}-\ldots-\binom{99}{98}=S.$$

Passando alla forma polare

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

si ricava, dalla formula di DeMoivre:

$$\begin{aligned}(1+i)^{99} &=(\sqrt{2})^{99}\left(\cos\frac{99\pi}{4}+i\sin\frac{99\pi}{4}\right)\\ &=(\sqrt{2})^{99}\left[\cos\left(24\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(24\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right]\\ &=(\sqrt{2})^{99}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

E, nello stesso modo:

$$(1-i)^{99}=(\sqrt{2})^{99}\left[\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right].$$

E quindi:

$$\begin{aligned}S \quad = \quad \frac{(1+i)^{99}+(1-i)^{99}}{2} &=(\sqrt{2})^{99}\cos\frac{3\pi}{3}\\ &=(\sqrt{2})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &=-(\sqrt{2})^{98}\\ &=-2^{49}.\end{aligned}$$

8. Paraphernalia Mathematica

Mettiamo in premessa quello che di solito esplicitiamo nelle prime righe, in quanto da un po' di tempo siamo (Rudy speaking) *molto* arrabbiati in merito. Eccheccribbio, spiegarcelo da piccoli no, vero?

8.1 Oltre Euclide [1, forse]

Riprendete il vecchio libro di Geometria, quello dei primi anni delle superiori.

Riguardatevelo.

Confrontatelo con Euclide.

E arrabbiatevi, in due direzioni diverse.

La prima, sulla quale sorvoleremo[20], consiste nel fatto che se consideriamo il nostro testo un traduzione, prendiamo il traduttore e, come diceva Jules Verne, lo mandiamo a lavare i piatti.

La seconda, che è quella che ci interessa, è che la Geometria[21] l'hanno fermata lì: incredibile, arrivati al secondo anno di liceo, tutti sono andati nanna e nessuno ha fatto più niente: il che potrebbe essere considerato un bene, visto che nella maggior parte dei casi la noia andava a mille; ma, esattamente come Rudy con il latino, dopo un po' ti viene da chiederti se non ci sia qualcosa di interessante, oltre.

E l'abbiamo trovato: abbiamo messo un "forse" nel titolo, in quanto non siamo sicuri di mettere la seconda puntata. Ma una volta tanto abbiamo intenzione di procedere controcorrente: qui, ad ogni enunciazione seguiranno, una volta tanto, le *dimostrazioni*.

Pronti? Via.

Cominciamo da una definizione facile facile, dall'aria tanto innocua quanto inutile:

> *In un triangolo, si definisce ceviana qualsiasi linea che, partendo da un angolo, intercetti il lato opposto.*

Queste linee prendono il nome da ***Giovanni Ceva*** (1647-1734: compleanno in lista d'attesa, quando Doc ne avrà voglia), che le ha studiate nella sua opera *De lineis invicem secantibus statica constructione* (1678): l'interesse nasce dal fatto che, anche se sembra difficile, su queste linee estremamente generali è possibile sviluppare un teorema, giustappunto il *Teorema di Ceva*:

> *Le tre ceviane originate dagli angoli A, B e C, intercettanti i lati opposti rispettivamente nei punti L, M e N, sono concorrenti se e solo se:*

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{BN}{NA}\cdot\frac{CL}{BL}=1$$

Tra un po' arriva il disegno, tranquilli. Prima, però, sottolineiamo tre cose.

Per prima cosa, abbiamo qualche contraddizione, in giro: secondo alcuni dei nostri testi, si definisce ceviana (o meglio, *tripletta di ceviane*) solo quella retta che rispetta il Teorema di Ceva; secondo altri testi, qualsiasi retta che parte da un angolo e arriva al lato opposto, senza pretese di concorrenza, si chiama in questo modo; la cosa non ci interessa molto, visto che tanto parleremo solo di concorrenti.

Per seconda cosa, notiamo che il teorema dice "se e solo se", quindi saranno necessarie due dimostrazioni.

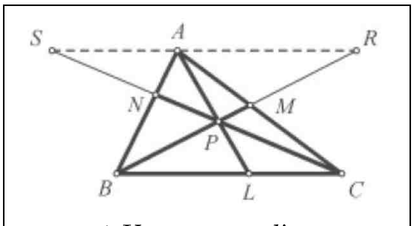
Come ultima cosa, nel disegno che correda la dimostrazione ci siamo cercati un caso semplice: il punto di concorrenza potrebbe benissimo essere *esterno* al triangolo (e la

[20] Per ulteriori dettagli, chiedete a Doc. Che ha rischiato l'infarto da risate l'anno che alla maturità classica è uscito un pezzo di Euclide.

[21] Nel senso "classico": non parliamo di Geometria Analitica o cose del genere, ma della buona vecchia roba fatta di punti, rette, triangoli sul piano euclideo e compagnia cantando: insomma, quella con ABC..., non con *xyz*. Speriamo (ma siamo sicuri di no) di essere stati chiari.

ceviana intercetterebbe il *prolungamento* del lato), ma la verifica che vale la stessa relazione ve la lasciamo come esercizio.

Giustappunto, riferimento la figura a fianco, dove abbiamo prolungato le ceviane *CN* e *BM* sino ad intercettare la parallela al lato *BC* nei punti, rispettivamente, *S* e *R*.



1 *Un caso semplice.*

Passiamo alla prima parte del teorema.

***Ipotesi**: Esiste un punto P comune ad AL, BM e CN.*

***Tesi**: AM · BN · CL = MC · NA · BL.*

Il fatto che *SR* sia parallela a *BC* ci permette di stabilire alcune similitudini tra i triangoli presenti nella figura:

$$\Delta AMR \sim \Delta CMB \Rightarrow \frac{AM}{MC}=\frac{AR}{CB} \qquad \textbf{[1]}$$

$$\Delta BNC \sim \Delta ANS \Rightarrow \frac{BN}{NA}=\frac{CB}{SA} \qquad \textbf{[2]}$$

$$\Delta CLP \sim \Delta SAP \Rightarrow \frac{CL}{SA}=\frac{LP}{AP} \qquad \textbf{[3]}$$

$$\Delta BLP \sim \Delta RAP \Rightarrow \frac{RL}{RA}=\frac{LP}{AP} \qquad \textbf{[4]}$$

Da **[3]** e **[4]** otteniamo:

$$\frac{CL}{SA}=\frac{BL}{RA} \Rightarrow \frac{CL}{BL}=\frac{SA}{RA} \qquad \textbf{[5]}$$

Moltiplicando tra di loro **[1]**, **[2]** e **[5]**, otteniamo il risultato desiderato:

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{RN}{NA}\cdot\frac{CL}{BL}=\frac{AR}{CB}\cdot\frac{CB}{SA}\cdot\frac{SA}{RA}=1,$$

che può essere scritta come *AM · BN · CL = AN · BL · CM*; se si preferisce una forma più aulica (e, per certi versi, più chiara), tutto questo si può esprimere come il fatto che *il prodotto dei segmenti definiti dalle ceviane* (concorrenti) *presi in modo alterno lungo i lati dei triangoli sono uguali*.

Bene, siamo a metà.

Adesso, si tratta di dimostrare il contrario, ossia che:

***Ipotesi**: AM · BN · CL = MC · NA · BL.*

***Tesi**: Esiste un punto P comune ad AL, BM e CN.*

Insomma, utilizzando la nostra riesposizione qui sopra, vogliamo dimostrare che se il prodotto dei segmenti *alternati*[22] lungo i lati del triangolo sono uguali, allora le tre ceviane devono essere concorrenti.

Partiamo dal fatto che due ceviane (OK, non parallele... Dai, non fate i matematici!) da qualche parte devono incontrarsi, dicendo che *BM* e *AL* si incontrano in *P*; tracciamo *PC* (ossia andiamo all'unico angolo non ancora coinvolto) e prolunghiamo siano ad *AB*, ottenendo il punto *N'*: a questo punto, siamo sicuri che *AL*, *BM* e *CN'* sono concorrenti: quindi, per la prima parte (già dimostrata) del Teorema di Ceva abbiamo che:

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{BN'}{N'A}\cdot\frac{CL}{RL}=1.$$

[22] Lo abbiamo evidenziato in corsivo perché è l'unico modo che abbiamo per ricordarci quel prodotto balordo. A parte un caso speciale, ma non vorremmo fare uno spoiler.

Ma dalla nostra ipotesi sappiamo che lo stesso prodotto senza apici vale 1, quindi:

$$\frac{BN'}{N'A}=\frac{BN}{NA}, \Rightarrow N=N',$$

e quindi coincidono, Quod Erat Demostrandum.

Esiste un'interessante variazione sul tema del Teorema di Ceva, dovuta a Carnot: le tre ceviane sono concorrenti se e solo se:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Di questo, non vorremmo privare Alice (sapete che lei è sempre stata appassionata di trigonometria) della gioia di dimostrarlo: se volete una traccia, si tratta di utilizzare la legge dei seni[23] alcune volte di seguito.

Siamo sicuri avrete apprezzato la bellezza estetica del Teorema di Ceva, ma probabilmente vi starete chiedendo: "E Adesso, cosa ci faccio?". Tanto per cominciare (e questa volta ci limiteremo a questo) potreste semplificarvi la vita verificando alcune cose tutt'altro che semplici.

Ricordate sicuramente che altezze, mediane e bisettrici si incontrano rispettivamente in ortocentro, baricentro e circocentro: l'altra cosa che ricordate, probabilmente, è che le tre dimostrazioni erano noiosissime, mentre quello che dovreste aver appena scoperto è che il Teorema di Ceva sembra fatto apposta per dimostrare tutto ciò.

Per farvi vedere quanto la cosa sia semplice, cominciamo con il *non* darvi la dimostrazione della concorrenza delle mediane (aiutino: in ognuno dei rapporti del Teorema di Ceva, il numeratore è uguale al denominatore).

Per quanto riguarda le *altezze*, se con H_x indichiamo il piede dell'altezza originata dall'angolo X e incidente sul lato opposto x, abbiamo che:

$$\Delta AH_cC \sim \Delta AH_bB \Rightarrow \frac{AH_c}{H_bA}=\frac{AC}{AB} \qquad \textbf{[6]}$$

$$\Delta BH_aA \sim \Delta BH_cC \Rightarrow \frac{BH_a}{H_cB}=\frac{AB}{BC} \qquad \textbf{[7]}$$

$$\Delta CH_bB \sim \Delta CH_aA \Rightarrow \frac{CH_b}{H_aC}=\frac{BC}{AC} \qquad \textbf{[8]}$$

Moltiplicando tra di loro **[6]**, **[7]** e **[8]** otteniamo:

$$\frac{AH_c}{H_bA}\cdot\frac{BH_a}{H_cB}\cdot\frac{CH_b}{H_aC}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}=1. \qquad \textbf{[9]}$$

E quindi, sono concorrenti ed esiste l'ortocentro. Vi preghiamo di notare la simmetria dei vari passaggi: ricordato uno, gli altri sono immediati per semplici permutazioni degli indici.

Per quanto riguarda le bisettrici, dobbiamo usare un trucchetto (o meglio, un teorema piuttosto astruso) del quale, se insistete, potremmo anche fornirvi la dimostrazione: *in un triangolo, la bisettrice di un angolo divide il lato sul quale incide in parti proporzionali ai lati adiacenti.*

Questo significa, in pratica, che nel nostro triangolo, sempre se T_x è il piede della bisettrice dell'angolo X incidente sul lato x, per quanto riguarda AT_a abbiamo che:

[23] Lontani ricordi di liceo: il teorema dei seni aveva, nel nostro libro (il mitico *Forti*) la notazione "*impropriamente detta 'di Carnot'*". Sarà per il fatto che serve a dimostrare questo teorema?

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CT_a}{T_aB}$$

...e similari: moltiplicando le tre espressioni tra i loro, si ottiene che:

$$\frac{CT_a}{T_aB}\cdot\frac{AT_b}{T_bC}\cdot\frac{BT_c}{T_cA}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}=1$$

dove l'ultimo passaggio è una pura semplificazione di tutti i termini.

Come dicevamo, le mediane ve le calcolate da soli.

E, già che ci siete, potreste cancellare il "forse" dal titolo: abbiamo materiale per almeno un'altra puntata.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms