Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 198 – Luglio 2015 – Anno Diciassettesimo

1. L'ultimo muro **3**

2. Problemi **15**

2.1 Un problema di quest'anno: Rosso + Blu = Violetto 15
2.2 Niente arco, questa volta 16

3. Oldies & Goldies **16**

3.1 [RM184 – Maggio 2014] – Tiro di campagna 16

4. Bungee Jumpers **17**

5. Soluzioni e Note **17**

5.1 [181] 17
5.1.1 Supertask! 17
5.2 [195] 20
5.2.1 ALEE_OOh_ooh. ALEe_Oh_Oh 20
5.3 [196] 20
5.3.1 Trovare "la patata"! 20
5.4 [197] 22
5.4.1 Abbiamo ricominciato! 22
5.4.2 …ma io continuo a perdere 23

6. Quick & Dirty **25**

7. Pagina 46 ..... **25**

8. Paraphernalia Mathematica **27**

8.1 Piove. 27

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM197 ha diffuso 2'966 copie e il 05/07/2015 per Google eravamo in 10'400 pagine.

Il signore in copertina si chiama ***Pietro Boselli***. Insegna matematica allo University College di Londra e, come secondo lavoro, fa il modello per l'intimo maschile. Noi ci limitiamo a qualche battutaccia sul concetto di "modello matematico" ma, nelle parole di un nostro mentore, *"Who says math isn't sexy?"*.

1. L'ultimo muro

"So di essere mortale, creatura di un giorno: ma quando mi perdo a seguire i cammini circolari delle stelle, i miei piedi non toccano più la terra."
(Tolomeo)

In una calda e tiepida serata di inizio Giugno può accadere (e in effetti è accaduto) di ritrovarsi a cenare all'aperto con un gruppo di amici in giardino, a stupirsi della leggerezza dell'aria e, come naturale conseguenza, della bellezza delle stelle. Capita soprattutto se si tratta di una sera fortunata, poco dopo il tramonto, con i pianeti maggiori in bella vista, quasi si fossero tirati a lustro per stupire gli astanti[1].

È un'occasione propizia, anche se non certo unica, per provare ad incantare gli amici che non guardano mai più in alto dell'orizzonte, quasi avessero un blocco cervicale che gli impedisca la rotazione alto-azimutale del collo; più ancora è occasione perfetta se ci sono bambini o adolescenti che si entusiasmano quando gli si mostrano le costellazioni zodiacali, o meglio ancora se gli si insegna a risalire alla Stella Polare partendo dalle ultime due ruote del carro dell'Orsa Maggiore.

Serate fortunate come questa non sono poi così rare, se uno ha la pazienza di andare a cercarsele. Sono invece davvero poco frequenti le serate fortunatissime, quelle in cui, oltre al tutto quanto descritto, accade nei cieli qualcosa di imprevisto, o almeno di inaspettato. I cieli sono densi di meraviglie in ogni istante, ma queste sono quasi sempre negate a chi guarda le stelle un po' per caso. Ciò non di meno può accadere (e in effetti è accaduto) che una congiuntura felice faccia alzare il dito a qualcuno che chiede: "E cosa sarebbe quella luce che si muove così… un aereo?".

Si muove, in effetti. Luce grande e di un arancione vivo, ma senza niente che lampeggi. In moto sicuro e veloce, ma certo non come quello d'una meteora. Salita da ovest, diretta a nord-nordovest, vuoi vedere che…?

È una vera bellezza vivere in un mondo in cui le informazioni si possono tirar fuori dalla saccoccia come gli spiccioli: la luce misteriosa viaggia veloce nel cielo, e nel giro di un paio di minuti sparirà di sicuro dietro la collina, ma un paio di minuti sono sufficienti. Qualche tasto premuto sul telefono, e arriva subito Internet con tutti i suoi armamentari: pochi secondi, e si può finalmente confermare, mentre la luce ancora è in vista: "Sì, è proprio lei! La ISS, la Stazione Spaziale Internazionale! Suvvia, salutate Samantha[2], fate ciao con la manina…"

È piacevole, divertente, immaginarsi esseri umani che galleggiano in microgravità dentro quella lucina che gioca a rimpiattino con le stelle: ed è divertente vedere le facce dei bambini e dei ragazzini che sono ad un tempo stupite ed entusiaste, per essere riusciti a vedere con i propri occhi una vera e propria astronave, anche se appariva solo come una lucina frettolosa.

Un po' meno divertente, persino un po' frustrante è invece che può accadere (e infatti è accaduto) che nei giorni successivi qualcuno dei convitati alla cena all'aperto dove l'ISS ha fatto da imprevista ospite d'onore si trovi a confessare di essere stato accusato di raccontar fanfaluche, di spararle grosse, da parte di coscienziosi e saggi colleghi d'ufficio. "Seeh, hai visto la Samantha, ma non farci ridere…"; "Vorresti farci credere che gli

[1] Che, guarda caso, è proprio quello che nel Giugno di questo 2105 hanno fatto Venere e Giove, inseguendosi per tutto il mese, sfiorando prima una sottile falce di Luna, e infine dandosi un appuntamento ravvicinato proprio nella notte a cavallo tra giugno e luglio. Ci auguriamo che siate riusciti a vederli.

[2] Nella remotissima ipotesi che qualcuno si ritrovi a leggere queste righe in un periodo non troppo vicino alla tarda primavera 2015: Samantha è ovviamente il capitano Samantha Cristoforetti, prima astronauta italiana donna, che alla sua prima missione (ESA Expedition 42) ha battuto il record femminile di permanenza nello spazio in una singola missione: duecento giorni meno poche ore.

astronauti si vedono dalla finestra di casa, ma per chi ci hai preso?"; "E certo, la prossima volta ci dirai pure che hai visto sbarcare i marziani di un'altra galassia, vero?"

1 *Qualcuno[3],in Scozia, l'ha vista così (la ISS è la linea…)*

Fermo restando che si potrebbe già discettare a lungo sulla contraddizione in termini implicita nell'espressione "marziano di un'altra galassia", visto che Marte fino a prova contraria è ben contenuto nella nostra cara vecchia Via Lattea, il problema vero non è tanto convincere il povero amico tacciato di seminar fanfaluche che quella che si è vista era proprio la ISS: in rete è facile trovare abbondanza di siti che raccontano come osservarla, giorno ora minuti secondi del passaggio sopra ogni longitudine e latitudine, infografiche sulle molte orbite e tutto quanto è umanamente possibile desiderare per poter vedere la stazione spaziale; una persona razionale non può non convincersi, di fronte ad una tale messe di informazioni dettagliate e organizzate. No, il guaio è cercar di capire perché mai molte persone – adulte, forse anche ragionevoli – debbano credere che la cosa sia impossibile. Ancora più difficile è provare a immaginare quali idee queste persone abbiano dell'universo: non tanto dal punto di vista metafisico, ontologico, filosofico; semplicemente dal punto di vista delle dimensioni fisiche.

Perché è quasi sempre solo una questione di misura, in ultima analisi. Gli antichi Greci avevano già scoperto che il cosmo era ben più grande di quanto era lecito immaginarsi a prima vista, e i loro risultati avrebbero già stupito i colleghi del povero amico sbertucciato. Ma le dimensioni che sono ritenute ragionevoli oggigiorno sono del tutto inimmaginabili anche per persone bene informate, è c'è da chiedersi come provare a spiegarle a chi di dimensione universale possiede solo il tasso di sintesi tra ignoranza e arroganza. È verosimile che la strada percorsa dal "marziano di un'altra galassia" sia davvero, per molti, comparabile a quella fatta dai pur eroici esseri umani che partono a bordo delle Soyuz; quanto meno, è davvero probabile che la gran parte del pubblico non sia minimamente cosciente delle misure in gioco, e abbia una visione romantica e favolosa delle distanze spaziali.

Lo spazio, già. Oltre a quello delle misure, c'è anche il problema delle definizioni: cosa vuol dire "andare nello spazio"? Cosa bisogna fare per meritarsi la qualifica di "astronauta"[4]? Si dovrà stabilire una convenzione, e non potrebbe essere altrimenti: in fondo, cosa vuol dire essere "fuori" dalla Terra? Se faccio un saltino a piedi uniti mi ritrovo nello spazio per qualche centesimo di secondo? O devo perlomeno allontanarmi dal centro della Terra più di quanto faccia la punta dell'Everest, e quindi fare il saltino lì, sennò non vale? L'atmosfera terrestre è "spazio" o è "Terra"? Bisogna allontanarsi dal pianeta fino al punto in cui la forza di gravità terrestre è pari a zero? No, questa definizione non va bene di sicuro: Newton ci ha spiegato da tempo che un punto del genere non esiste in tutto l'universo.

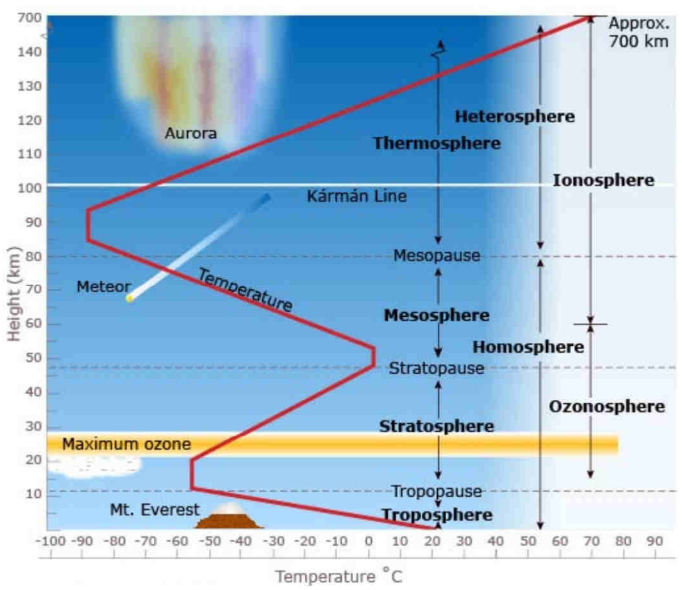
La convenzione ormai unanimemente riconosciuta fissa l'inizio dello "spazio" a cento chilometri di altitudine sopra il livello del mare: questa quota si chiama "Linea di Kármán" e chiunque la superi ha il pieno diritto di chiamarsi astronauta. Il limite è certo

[3] Il qualcuno dovrebbe avere a che vedere con www.Perfexion.com. La velocità con la quale si muove la ISS consente delle belle foto con esposizione lunga, ma non lunghissima.

[4] O magari di "cosmonauta", come chiamavano i loro eroi i cittadini dell'Unione Sovietica.

convenzionale, ma è anche assai ben definito, e non è stato fissato a 100 km per pura simpatia con i numeri tondi, anzi: e forse sviscerare la definizione aiuta a capire cosa si intenda convenzionalmente per "spazio", e perché.

Ad osservarle nel cielo stellato, le luci di un aereo e i riflessi metallici della luce solare da parte della ISS non appaiono poi troppo diversi, e può essere istruttivo provare a vedere quali siano le differenze sostanziali tra i due oggetti. Insomma, è in fondo lecito chiedersi se un aereo di linea sia assimilabile a un'astronave specializzata in voli a bassa quota o, per contro, se una stazione spaziale possa essere rubricata come una sorta di evoluto aeroplano che fa pochissimi scali e vola più in alto dei confratelli che popolano gli aeroporti. Un errore ancora troppo comune che si fa è quello di usare come criterio di distinzione la cosiddetta "assenza di gravità" che sussisterebbe all'interno dei veicoli spaziali, ben diversa dalla gravità chiara e riconoscibile quando si è dentro un aereo. È un errore grave, se non altro perché la famosa condizione di "assenza di gravità" è del tutto fantastica, o meglio erronea: la gravità terrestre c'è ancora, eccome! Tiene al guinzaglio un oggetto grosso e distante come la Luna, come potrebbe sparire nei confronti di macchine e uomini che si avventurano appena sopra la sua superficie? Ciò non di meno, è indiscutibile che bere un caffè da una tazzina è cosa possibilissima su un aereo di linea, mentre gli astronauti alle tazzine devono proprio rinunciare (ma possono prendersi la libertà di berlo da un contenitore chiuso anche stando a testa in giù).



2 *I nomi delle diverse zone dell'atmosfera sono troppi per elencarli nel testo. Preferiamo rubare questo bel grafico all'università di Waikato (sono neozelandesi, agli antipodi: non ci scopriranno mai).*

Si potrebbe sintetizzare la differenza principale tra i due veicoli dicendo che la massima preoccupazione dei piloti di un aeroplano è quella di non cadere, mentre gli astronauti non fanno che cadere tutto il tempo. Basta soffermarsi solo un istante su nozioni apprese a scuola per rendersene conto: un aereo consuma carburante con i suoi motori sempre accesi per riuscire, grazie alle sue ali, a sfruttare la densità dell'atmosfera per controbilanciare l'attrazione gravitazionale. Una stazione spaziale, o qualsiasi altro oggetto che stia in orbita, si preoccupa solo di avere una velocità di caduta gravitazionale abbastanza alta per riuscire a continuare a cadere senza impattare il pianeta. Durante l'addestramento, gli aspiranti astronauti vengono portati in quota su aerei sostanzialmente vuoti, un unico ambiente privo di poltrone e di qualsiasi altra suppellettile; giunti ad una quota rilevante, il pilota compie una manovra abbastanza terrorizzante: punta il muso verso il suolo e lascia che l'aereo precipiti in caduta libera. I giovanotti all'interno si troveranno così, per una manciata di secondi, a fluttuare all'interno dell'aereo, per la semplice ragione che anche loro, come l'aereo che li contiene, stanno precipitando verso terra. Questo addestramento viene spesso raccontato come "una simulazione dell'assenza di gravità" che proveranno una volta in missione. Non è davvero una buona maniera di descriverlo: più che una "simulazione", più che una "assenza di gravità", quel che provano gli aspiranti astronauti in quel momento è esattamente quello che succede in orbita: proprio per colpa della gravità terrestre si continua a cadere, dentro la ISS, così come "cade" la ISS stessa. Le differenze si limitano al fatto che l'aereo, se non vuole schiantarsi, entro pochi secondi deve raddrizzarsi e riprendere quota, mentre le navicelle possono serenamente continuare a cadere.

Gli aerei, insomma, hanno bisogno di essere sostenuti dall'aria: ma tanto più si va in alto, tanto più l'aria si rarefà, e sostiene di meno gli aerei. In parte si può ovviare alla cosa: un aereo riesce a farsi sostenere dall'aria meno densa se procede più veloce, quindi vale la regola, in parte intuitiva, che per salire molto in alto bisogna avere la capacità di volare molto, molto veloci. Come abbiamo già detto, questa necessità di andare molto, molto veloci è anche la condizione che hanno gli oggetti spaziali, per essere certi di poter continuare a cadere senza riuscire a sfracellarsi al suolo. Ebbene, cosa succederà ad un teorico aereo che continui imperterrito a salire di quota e aumentare la velocità per compensare il rarefarsi atmosferico? Succederà (sempre in via teorica, ovviamente) che ad una certa quota l'atmosfera sarà così rarefatta che la velocità richiesta per sostenersi in volo sarà superiore a quella sufficiente a rimanere in orbita: un po' come se qualcuno dicesse all'aereo: "piantala di affannarti ad accelerare per farti sostenere dall'atmosfera, ormai vai così veloce che non riuscirai più a schiantarti al suolo, perché corri più veloce di lui".

Abbastanza curiosamente, quando il fisico statunitense Theodore von Kármán, si mise a calcolare per primo la quota in cui la densità atmosferica diventava troppo bassa a scopi aeronautici, proprio perché la velocità per rimanere in quota superava quella orbitale, scoprì che questa quota era molto vicina alla cifra tonda di 100 chilometri. La FAI[5] stabilisce la Linea di Kármán come la soglia separatrice tra i "voli aeronautici" dai "voli astronautici", i primi al di sotto, i secondi al di sopra di tale limite.

Cento chilometri non sono poi molti, anche se percorrerli lungo l'asse zeta è cosa ben diversa dal disegnarli in automobile sulla superficie terrestre: bastano una dozzina di cime himalaiane una sopra l'altra per superare la Linea di Kàrmàn e immaginarsi di varcare la porta d'ingresso verso lo spazio profondo. Non serve andare in orbita, tant'è vero che sono a pieno diritto "astronauti" anche uomini che hanno compiuto voli suborbitali: sia Alan Shepard che Virgil Grissom, i primi americani che compirono voli suborbitali nel programma Mercury, erano a tutti gli effetti astronauti ancor prima di partecipare, come poi fecero, alle missioni orbitali Gemini e Apollo. E ci sono alcuni record ufficiali dell'astronautica che lasciano effettivamente stupiti, come quello del primo astronauta ad essere andato due volte nello spazio: si tratta di Joseph A. Walker, che superò la linea di Kàrman il 19 Luglio e poi di nuovo il 22 Agosto 1963, pur senza essere mai salito su una rampa di lancio. Era il pilota collaudatore dell'aerorazzo X-15[6], che nei voli numeri 90 e 91 raggiunse le quote di 105 e 107 chilometri sul livello del mare. Non particolarmente sorprendente e neanche particolarmente allegro è il record ancora precedente e iniziatico della storia dell'astronautica: a tutti gli effetti, la prima nazione ad aver mandato un oggetto nello spazio, secondo le definizioni ufficiali e condivise, non è stata né l'Unione


3 *In secondo piano, l'X-15: in primo piano, un giovane Neil Armstrong*

[5] No, non il Fondo per l'Ambiente Italiano: la Fédération Aéronautique Internationale.

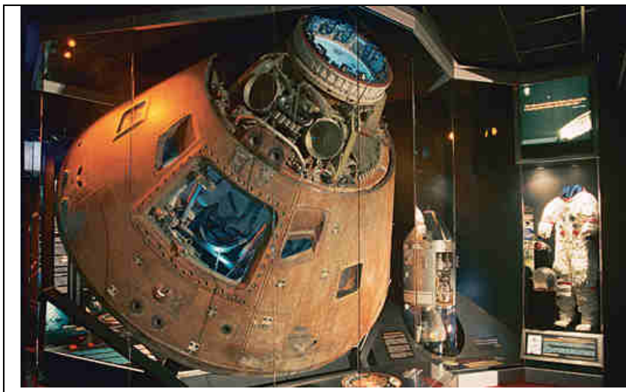
[6] Aerorazzo, quindi qualcosa a metà tra aereo e razzo: ma decisamente più aereo, dal punto di vista della dinamica. Erano velivoli sperimentali dell'aviazione americana.

Sovietica né gli Stati Uniti d'America, ma il Terzo Reich della Germania nazista, quando lanciò le V2, le "bombe volanti" che raggiungevano quote vicine ai 200 chilometri.

La Stazione Spaziale Internazionale gira intorno alla Terra ad altitudini che vanno dai 350 ai 450 chilometri: larga e lunga un centinaio di metri, con uno spessore di una trentina, e con dei fenomenali pannelli solari che risplendono quando sono colpiti dalla luce del sole, non è davvero strano che possa essere vista da terra. In pieno "spazio", secondo qualsiasi definizione: ma non per questo troppo distante da noi, quando ci passa sopra la testa. Gli astronauti – davvero tanti – che l'hanno abitata senza soluzione di continuità negli ultimi anni possono vantare un gran numero di record, ma certo non quello di maggior distanza dalla Terra. Anche questo è un record che di solito non viene preso in considerazione, eppure è davvero significativo ed evocativo, quasi romantico: quali sono le persone che sono andate più lontano di tutti, nella Storia dell'Umanità?

Una risposta approssimativa è abbastanza facile: quelle che sono andate sulla Luna. Curiosamente, è una risposta sbagliata; sono soltanto dodici gli uomini che hanno toccato il suolo del nostro satellite, ovvero le coppie di astronauti delle missioni Apollo dalla 11 alla 17, Apollo 13 esclusa per il famoso incidente di viaggio che trasformò il suo volo in una vera e propria odissea[7]. Ma qui non conta toccare la Luna, conta la distanza dalla Terra, e la massima distanza si ha quando la capsula spaziale è in orbita attorno alla Luna dalla parte opposta alla Terra. Quindi, oltre a coloro che hanno toccato la Luna bisogna conteggiare anche i poveri astronauti[8] che continuavano a girare in orbita lunare mentre gli amici saltellavano allegri sul suolo di Selene, nonché gli astronauti che hanno compiuto le prove generali dell'Apollo 11, ovvero quelli dell'Apollo 8 e 10[9].

In totale, nove missioni lunari per tre astronauti ciascuna, ovvero ventiquattro[10] persone che sono andate davvero lontano, molto più lontano dei pur eroici altri astronauti che da più di cinquant'anni si avvicendano nello spazio prossimo alla Terra. Forse sarebbe giusto attribuire il primato a tutti e 24, pari merito, e con la distanza record e standard di 400.000 chilometri, che è quanto dista più o meno la Luna; ma si sa, i cacciatori di record sono pignoli e curiosi. È comunque piacevole scendere ancora più in dettaglio, e scoprire che a meritarsi il titolo assoluto sono proprio i più sfortunati del gruppo, ovvero Jim Lovell, Jack Swigert e Jack Haise dell'Apollo 13. Questo proprio a causa della loro sfortuna: normalmente, nell'approccio alla Luna, le capsule Apollo non superavano le cento miglia di quota rispetto alla superficie del satellite; l'Apollo 13 però dovette utilizzare il famoso "effetto fionda" gravitazionale per poter tornare sulla Terra, una volta



4 *Odyssey, l'automobilina (con gente a bordo) che è andata più lontano di tutte.*

[7] Del resto, come i cacciatori di coincidenze certo ricorderanno, il modulo di comando della missione si chiamava proprio Odyssey.

[8] Astronauti che condividono un record curioso, e di natura generale: sono le persone più "sole" mai esistite. Quando orbitavano solitari, si trovavano ad un certo punto lontani più di un diametro lunare dai due compagni – quando erano ai loro antipodi – e ovviamente lontanissimi dal resto dell'umanità.

[9] L'Apollo 9, pur se successiva all'Apollo 8 che fu la prima capsula ad entrare in orbita lunare, si limitò a testare il LEM nell'orbita terrestre.

[10] No, stiamo scherzando… lo sappiamo anche noi che 3x9 fa 27, e non 24: ma 24 resta il numero giusto di "volatori verso la Luna", ben divisi 12 a 12 tra chi la Luna l'ha toccata e chi no. Questo perché John Young e Eugene Cernan, che volarono sull'Apollo 10 che non allunò, fecero poi parte degli equipaggi rispettivamente dell'Apollo 16 e 17, e quindi toccarono la superficie lunare. Così i 27 sono già diventati 25: a farli scendere al definitivo 24 ci pensa lo sfortunatissimo Jim Lovell, che dopo essere andato verso la Luna con l'Apollo 8 nella prova generale, ci ritornò con l'Apollo 13, ma senza riuscire ad allunare neanche la seconda volta.

constatato che la missione di allunaggio era abortita a causa dell'esplosione di un serbatoio di ossigeno nel modulo di comando. Questo comportò il raggiungimento di una quota superiore nell'orbita lunare, pari a 254 chilometri. Considerando tutto, distanza dalla Terra e quota dalla superficie lunare, i calcoli (con qualche approssimazione, ma ragionevolmente precisi) stabiliscono il record della maggiore distanza dalla Terra in un valore assai prossimo (ancora!) ad una cifra tonda: 400.171 chilometri.

Ancorché paragonare le distanze della Stazione Spaziale Internazionale con quelle degli alieni extragalattici, potrebbe stupire già il confronto con quelle due dozzine di scavezzacolli che sono andati dalle parti della Luna dentro delle scatolette di latta e con una potenza di calcolo pari a quelle di un odierno telefono cellulare di fascia bassa. C'è un intero fattore mille che li separa: la nostra Samantha ha vissuto nello spazio, in microgravità, per più di sei mesi, ha percorso milioni di chilometri e battuto un sacco di record dell'astronautica, ma al pari di tutti gli astronauti del XXI secolo non si piazza granché bene nella gara a chi è stato più lontano dalla superfice terrestre, ai quattrocentomila chilometri di Lovell e compagni può opporre solo un quattrocento.

Ma queste sono distanze umane. Si riesce a ricordarle bene, se uno ci pone anche solo poca attenzione, e sempreché non sia affetto da analfabetismo numerico, quello che gli inglesi chiamano "innumeracy". Anche perché, lo si è visto, abbondano i numeri tondi: 100 per la linea di Kàrmàn, 400 per i chilometri della ISS, 400.000 per la Luna; e ci vuole poco a ricordare che l'equatore è fissato in 40.000 chilometri, e che pertanto ne bastano dieci giusti per legare Terra e Luna; o che la luce viaggia a 300.000 chilometri al secondo, e che pertanto il record di maggior lontananza dalla madre Terra si può registrare con un ardito 1,33 secondi/luce. E forse proprio la luce è un buon metro di paragone, perché la sua velocità è inimmaginabile sulla scala umana, ma mostra tutta la sua limitazione per misurare l'Universo.

Il secondo/luce che basta a portarci sulla Luna deve crescere già fino ad otto minuti, per portarci sul Sole: e si vede che perfino il secondo/luce diventa presto un'unità di misura scomoda per misurare il Sistema Solare. Diventa naturale usare proprio la distanza Terra-Sole per fare i conti con gli altri pianeti: distanza che si chiama Unità Astronomica[11], tant'è vero che a quel punto dire che "Marte dista dal Sole più o meno 1,5 UA" dà una visione della posizione reciproca dei due pianeti più intuitiva di quanto farebbero unità di misura più piccole. In ogni caso, quando Marte è nel punto più lontano dalla Terra cominciano a diventare complicate anche le trasmissioni radio tra terrestri e marziani, visto che la risposta "Bene, grazie!" arriverebbe al tapino che ha posto l'ingenua domanda "Come stai?" una ventina di minuti dopo.

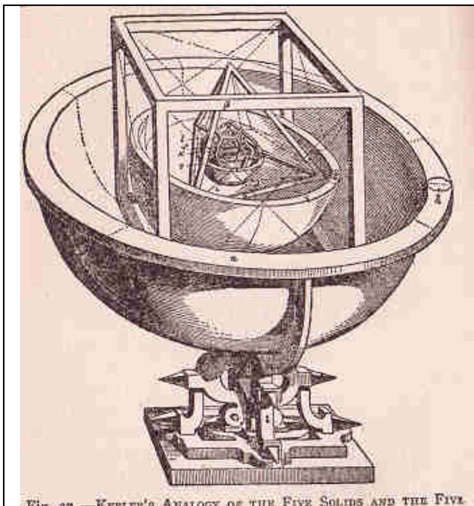
E in fondo, le distanze degli altri pianeti del sistema solare dalla Terra stanno alle dimensioni galattiche più o meno come la distanza che c'è tra la nostra pelle e noi stessi sta al diametro di una galassia, cioè nulla di nulla. La nostra splendida galassia, la bellissima Via Lattea, richiede alla luce un viaggio di centomila anni, per essere attraversata da un capo all'altro. In termini di UA, sono circa sei miliardi e mezzo; in termini di chilometri, è un numero composto da 1 seguito da 18 zeri. In termini del record umano di distanza percorsa, detenuto dall'Apollo 13, sono duemila miliardi. Se riusciremo a fare di seguito duemila miliardi di volte la distanza dell'Apollo 13, avremo esplorato finalmente casa nostra, cioè la nostra galassia madre. Solo poi potremo cominciare a pensare seriamente a fare un serio viaggio intergalattico, cioè verso i famosi omini verdi che "abitano in un'altra galassia".

[11] Abbreviata in UA o meglio ancora AU. Distanza non perfettamente chiara a prima vista, poiché anche la Terra ha un'orbita ellittica, seppur di poco, e la distanza dal Sole varia da 147 a 152 milioni di chilometri. La distanza media è di circa 149.597.871 chilometri, ed è quanto si usa per convertire le UA in km. Come tutte le unità di misura, anche la UA è stata poi definita con maggior rigore, anche se questo comporta una perdita della intuitiva scelta originaria.

5 *Non abbiamo trovato foto intere della Via Lattea (chissà perché): accontentatevi di sua sorella gemella, Andromeda*

E una galassia è un misero granello di polvere, su scala universale. Quant'è grande l'universo intero? Oh, beh… come minimo, per rispondere a domande come queste, bisognerebbe mettersi d'accordo sul termine "Universo", poi discettare un po' sulla sua finitezza o meno, sulla sua forma (aperta o chiusa) e chissà quante altre cose. Possiamo accontentarci di dire che, per quanto ne sappiamo adesso, se lo assimilassimo ad una sfera, difficilmente avrebbe un diametro inferiore ai novanta miliardi di anni luce. Il che significa… beh, i conti con i cambi di scala si possono lasciare come facile esercizio al lettore[12].

Inimmaginabili. La parola descrive pienamente il concetto, perché si tratta oggettivamente di dimensioni che non possono essere compiutamente immaginate da nessuno. Certo, la pura constatazione dei valori in gioco è già un'informazione cruciale, se non altro per capire che prima di usare alcuni termini (come "intergalattico" o "universale") bisognerebbe spendere qualche grammo di prudenza; ma per il resto, si può fare davvero ben poco, a parte dichiarare la completa impossibilità di visualizzare le grandezze in gioco. E in qualche modo questa consapevolezza torna ad essere più in sintonia con coloro che delle dimensioni universali non si sono mai curati: in fondo, c'è davvero differenza tra chi non si è mai interrogato su una questione e chi invece lo ha fatto, trovando una risposta troppo grande da essere immaginata? Sì, sì, d'accordo, la differenza c'è, ed è grande: ma comunque, quanto deve allora essere stata lunga la strada che ha portato l'Uomo a doversi confrontare con un universo così incredibilmente più vasto di sé stesso? Soprattutto se si considera che le sole informazioni che abbiamo sono quelle veicolate da flebilissimi raggi di luce?



6 *Il Mysterium Cosmographicum di Keplero*

Una delle cose più sorprendenti, nella storia della cosmologia è quella che mostra come l'Umanità sia giunta a farsi un'idea della natura delle stelle solo molto tardi. Perché c'è questo, di semplice ed evidente: discettare sulle qualità e le proprietà di oggetti intangibili è virtualmente senza senso, se non se ne conoscono almeno le dimensioni; e le dimensioni di un oggetto restano misteriose, se non se ne conosce la distanza da noi. Gli antichi guardavano lo stesso cielo che possiamo guardare noi, e come noi potevamo incantarsi nel vedere migliaia di luci punteggiare l'oscurità, e muoversi in sincrono perfetto, disegnando archi nel cielo da est a ovest. Senza avere però idea del perché: che cosa le spingeva in così perfetta sincronia? Che ragione c'era dei loro diversi colori, del loro diverso brillare? Perché alcune di loro, più brillanti della media, sfuggivano alla regola che le voleva tutte sempre sincroniche, e si prendevano la libertà di vagolare per il cielo? Avere la conoscenza di

12 È dalle scuole medie che speriamo di poter scrivere una frase del genere.

queste risposte, come in gran parte oggi abbiamo, impedisce forse di poter capire fino in fondo gli interrogativi che si ponevano gli astronomi di un tempo. Ma potrebbe essere utile provare a mettersi nei loro panni, almeno per un po'.

Gli antichi Greci sapevano che la Terra era sferica: o quantomeno lo sapevano gli studiosi che di questo si interessavano. Eratostene ne misura perfino le dimensioni, con la celebre osservazione degli angoli delle ombre proiettate durante il solstizio d'estate tra Alessandria e Siene, e sbaglia di poco. Resta però il fatto che è naturale immaginarla ferma, fissa, perché è indubbio che ogni volta che si sale su un oggetto in movimento la "sensazione del moto" è ben evidente. Se la Terra è ferma, devono allora essere gli astri a muoversi, di notte: come possono farlo, così perfettamente allineati tra loro? L'idea delle stelle inchiodate ad un unico oggetto, un'enorme sfera all'interno della quale ci troviamo noi e tutto l'Universo, non è poi così stupida: risolve il problema della sincronicità del moto delle stelle, riconduce l'idea (complicata) di migliaia di luci che grazie ad una misteriosa intelligenza riescono a muoversi di concerto all'idea (semplice) che sia un unico oggetto oscuro, punteggiato di luci, a ruotare su sé stesso.

È così buona, l'idea, che risulta difficile abbandonarla anche se si vedono poche luci che si ribellano al moto generale, e se ne vanno per conto proprio. Come sistemarli, questi erranti[13]? Allo stesso modo: si perde un po' di generalità e di eleganza, ma se ognuno di questi erranti avesse una sua propria sfera indipendente sulla quale fosse inchiodato, certo più piccola e interna a quella più grande delle stelle fisse, l'idea sarebbe salva. Occorre solo un ulteriore accorgimento, ovvero che questa sfera sia trasparente, invisibile, cosicché la luce delle stelle e degli altri erranti, dietro di essa, rimanga visibile.

L'ipotesi delle sfere cristalline, una annidata nell'altra come le matrioske, a noi sembra molto ingenua; ma saremmo davvero riusciti ad immaginare qualcosa di meglio, al posto degli antichi? Rimangono certo tante domande, gran parte delle quali trovano risposta nella religione: a spingere le sfere si chiamano le torme angeliche, si prefigurano complicati rapporti dimensionali tra le sfere concordi all'inclusione fra loro di solidi platonici, e così via… ma è comunque opportuno frenare i sorrisi di compatimento, perché le ipotesi alternative non sono davvero facili da dimostrare.

Provate a convincere Tolomeo e i suoi contemporanei che i pianeti sono enormi palle di materia che viaggiano nel cielo: perché mai non cadono, come prima o poi fanno tutte le cose che volano? Provate a convincerli che la Terra ruota su sé stessa, ed è questo moto incessante a causare l'illusione del ruotare notturno delle stelle e degli astri: dov'è il vento sulla faccia che si sente sempre quando ci si muove? Provate a dirgli che le stelle sono oggetti indipendenti e diversi, diffusi come polvere nello spazio: cosa le fa muovere così di concerto? Ah, la rotazione della Terra, che abbiamo già visto essere impossibile? Ma se anche fosse, come potrebbero restare appese nel cielo? Come potrebbero, se sono indipendenti l'una dall'altra, mostrarsi pienamente immobili, rigorosamente fisse e non vagolanti nel cielo come moscerini?

Le sfere cristalline saranno un'idea ingenua, ma sono una cosmologia: un progetto unico, una visione d'insieme che spiega molte cose a un tempo. E poi, non dimentichiamo che "cristalline", cioè trasparenti, devono essere solo le stelle dei pianeti (certo, Sole e Luna compresi, che anche loro sono tali), mentre la sfera delle stelle fisse può anche non essere trasparente: è un'enorme cupola che avvolge la Terra, una "volta celeste", appunto. Una volta solida, fatta forse di mattoni divini, chissà: un muro protettivo che protegge la Terra e il Cielo.

Gran parte delle idee ingenue cadono in fretta, quando comincia il metodo scientifico. Copernico dice che forse è possibile che sia il Sole, non la Terra, al centro dell'Universo, e mette in moto il pianeta. Keplero modifica la perfezione delle orbite circolari tanto care a Tolomeo e a quasi tutti gli studiosi, rinunciando alla perfezione mistica del cerchio, ma risolvendo meglio lo strano fenomeno degli epicicli. E soprattutto Galileo, che con l'uso sapiente del telescopio riconduce la natura delle Cose del Cielo alla natura delle Cose

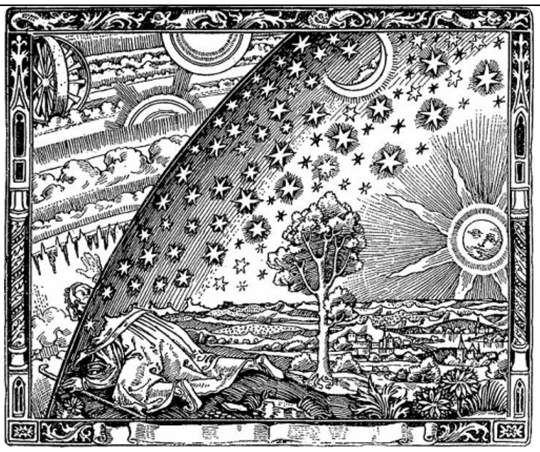
[13] Lo sapete già, vero, che "pianeta" significa "errante"?

della Terra: montagne sulla Luna, Venere che fa le fasi, stelline misteriose che girano intorno a Giove. Cade quasi tutto: l'idea della fissità della Terra, dell'immutabilità dei cieli. E infine Newton, che mostra a tutti una legge che vale tanto per le mele che cadono dagli alberi quanto per i pianeti che disegnano orbite nel cielo: il cielo ha una Meccanica, e quella Meccanica è conoscibile e universale.

Tutto chiarito, allora? No. Non ancora.

Anche se la rivoluzione copernicana, il metodo galileiano e la fisica newtoniana sono tanto rivoluzionarie da cambiare integralmente – e per sempre – la visione del mondo e dell'universo, il problema delle stelle rimane. Il sistema solare è ordinato; si scoprono adesso perfino pianeti insospettati, si squaderna pian piano tutta la conoscenza che governa l'apparizione delle comete, la traiettoria della caduta delle meteore: ma le stelle?

Le stelle restano fisse, e mute. Galileo, puntando il telescopio, ne vede cento dove l'occhio ne conta un paio; scopre che le nebulosità della Via Lattea è data da una tempesta di stelline; ma il suo telescopio può mostrarne sì di più, ma non riesce a ingrandirle; rimangono lì, puntiformi, fisse e tra loro sincroniche.



7 *L'ultimo muro*

Cosa sono le stelle? Aveva ragione Giordano Bruno, a dire che erano mondi infuocati come il nostro Sole, ma lontani? Il secolo dei lumi è certo più pronto ad accettare la tesi di quanto lo fossero i contemporanei di Bruno, ma allora quanto distanti debbono essere, per negare la possibilità di vederle muoversi? Perché continuano a negare il senso dello "spessore" dello spazio, anche con le osservazioni più accurate, anche cambiando punto d'osservazione, in modo che la parallasse ne riveli la diversa profondità una rispetto all'altra? Possibile che siano davvero luci inchiodate su un muro?

8 *Friedrich Wilhelm Bessel*

No, non lo sono: ma l'ultimo muro cade solo nel 1838, quasi due secoli dopo la nascita della scienza moderna. E a farlo cadere è un uomo inatteso, che non ha neppure un titolo accademico decente.

Friedrich Wilhelm Bessel nasce a Minden, cittadina della Westfalia, il 22 Luglio 1784. È di famiglia tutt'altro che ricca, suo padre è un piccolo impiegato statale, e Wilhelm non può permettersi di studiare a lungo. A soli quattordici anni, all'inizio dell'anno 1799, Bessel comincia il suo apprendistato presso la società mercantile Kulenkamp di Brema. Apprendistato significa nessuna paga o stipendio, ma si mostra presto così abile nei conti e nei bilanci che dopo il primo anno i suoi principali gli accordano un modesto salario.

A Bessel il lavoro piace: probabilmente, è proprio la sua continua curiosità e passione verso la conoscenza a regolare la sua vita, soprattutto in giovane età. Lavorare in una società mercantile lo fa appassionare di commercio estero: per questa ragione, il ragazzino capisce che deve formarsi sulle materie che con questa sua passione hanno a che fare, quali la geografia, la lingua inglese e spagnola. L'inglese gli risulta particolarmente facile, visto che riesce ad impararlo al punto di scrivere lettere commerciali nel giro di tre mesi. Naturalmente, il commercio estero si muoveva per nave, e probabilmente Bessel ha intenzione di diventare comandante di un cargo merci, e per farlo comincia a studiare (sempre di notte, visto che di giorno lavora) tecniche di navigazione. Naturalmente, tra queste tecniche c'è anche la determinazione del "punto nave", e l'armeggiare col sestante comincia a farlo interessare di astronomia: anche perché le poche istruzioni pratiche destinate ai navigatori non lo soddisfano abbastanza. Così continua a studiare astronomia, e di conseguenza matematica, fino a padroneggiare le tecniche di navigazione abbastanza bene da poter determinare latitudine e longitudine da solo, con strumenti (sestante per la latitudine e orologio per la longitudine) che aveva fatto costruire da artigiani dietro sue precise specifiche progettuali.

L'astronomia, insomma, lo appassiona davvero. Non ha forse neppure vent'anni quando spedisce a Olbers[14] uno studio su come calcolare al meglio l'orbita di una cometa. Olbers è profondamente colpito, risponde suggerendo a Bessel di continuare le osservazioni e perfezionare l'opera: Wilhelm lo fa, e il lavoro viene pubblicato sulla maggiore rivista astronomica tedesca, il *Monatliche Correspondenz*.

Bessel si trova al crocevia della sua vita: sta per finire l'apprendistato a Kulekamp, che significa avere finalmente un lavoro remunerativo e ragionevolmente sicuro; nel contempo, Olbers lo esorta ad accettare la posizione di assistente all'osservatorio privato di Schröter , un avvocato astronomo dilettante, seppur molto stimato, di Lilienthal, vicino Brema: posizione che, ovviamente, era disponibile dietro esplicita raccomandazione dello stesso Olbers. Non è scelta facile: Wilhelm ha lavorato per sette anni praticamente gratis per raggiungere una posizione che proprio ora sta per diventare assai remunerativa, mentre il futuro di un assistente autodidatta di un osservatorio astronomico privato è meno garantito. Ma alla fine accetta: è il 1806, e Bessel comincia seriamente ad osservare pianeti, comete e stelle.

È un lavoro che fa bene, molto bene: se ne accorgono presto i maggiori centri astronomici tedeschi, e Bessel riceve offerte di lavoro sia da Lipsia sia da Greifswald, ma è probabile che si trovi bene a Lilienthal, visto che declina entrambe le offerte. È più difficile rifiutare l'offerta successiva, però: Federico Guglielmo III di Prussia sta costruendo un nuovo (e regale) osservatorio a Königsberg, e nomina Bessel direttore dell'osservatorio e professore di astronomia.

In realtà, la nomina deve aver sconvolto – oltre che certo lusingato – Bessel oltre ogni dire. C'è infatti una difficoltà sconcertante: per quanto giunga dal Reale Osservatorio, la cattedra professorale di astronomia non può essere assunta da Wilhelm per la banale ragione che non si può essere professori senza essere prima dottori, e Bessel non è laureato. Ma lo sconcerto dura poco: la prestigiosissima Università di Göttingen conferisce immediatamente una laurea a Friedrich Wilhelm Bessel, su raccomandazione di uno dei professori dell'ateneo. Se può sembrare eccessiva la fiducia del senato accademico di Göttingen nelle capacità di giudizio di un singolo docente, lo stupore scompare in fretta quando si copre che a raccomandare Bessel è stato Gauss, che aveva conosciuto Bessel a Brema un paio di anni prima e riconosciuto le sue capacità. E se garantisce Gauss, non c'è possibilità di sbagliare.

L'osservatorio è ancora in costruzione, ma Bessel comincia subito a lavorare al suo nuovo incarico. Rimarrà a Königsberg per tutto il resto della sua vita, ed è qui che comincerà l'incredibile lavoro di determinare la posizione e il moto proprio di più di cinquemila stelle. Ed è ovviamente qui che abbatterà l'ultimo muro.

[14] Heinrich Wilhelm Olbers, grande astronomo tedesco, famoso se non altro per il celebre e bellissimo "paradosso di Olbers", che mostrava come il cielo non potesse essere buio, di notte, se la distribuzione delle stelle fosse stata quella che si credeva essere. Ma doveva anche essere modesto: di sé disse che il suo maggior contributo all'astronomia era stato quello di aver convinto Bessel a diventare un astronomo professionista.

L'astronomia di inizio Ottocento non è ferma alle convinzioni medievali, sia ben chiaro. Per quanto rimangano le perplessità raccontate sulle stelle fisse, sono molti i progressi, anche strettamente operativi e di misurazione, che sono stati fatti. Nel 1671 una spedizione francese alla Cayenna era servita per misurare la distanza di Marte, sostanzialmente con il solito metodo della parallasse: osservazioni congiunte dalla Cayenna e da Parigi permisero poi a Cassini di elaborare i dati anche per altre valutazioni, e riuscì a stabilire con ragionevole[15] precisione la distanza media tra la Terra e il Sole. Più significativamente, una scoperta densa di significato la fece Halley nel 1718, usando oltre al fedele telescopio anche i vecchi libri. Nel secondo secolo avanti Cristo Ipparco aveva registrato la posizione di un gran numero di stelle, e Halley nota che le posizioni di Sirio, Procione e Arturo sono diverse da quelle che vede nel cielo: bisogna scegliere se togliere la fiducia a Ipparco o pensare che le stelle abbiano un moto proprio. Halley opta per dare fiducia al grande greco: ciò non meno, tentativi di misurare la distanza di queste stelle restano senza risultati apprezzabili.

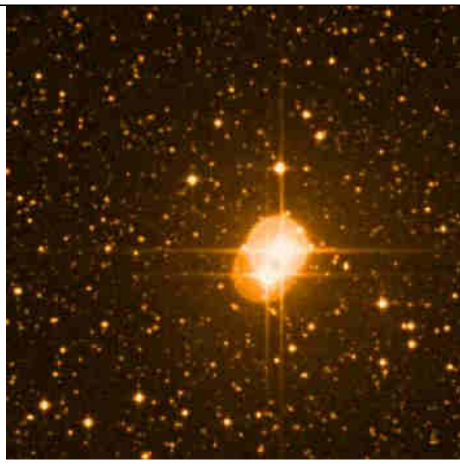
Di fatto, all'epoca di Bessel la situazione è a uno stallo. Il metodo della parallasse, che di fatto è lo stesso usato fin da Eratostene, si basa semplicemente sulla triangolazione: se si conosce la base di un triangolo e si riesce a misurare l'angolo opposto alla base, non è difficile risalire all'altezza, cioè alla distanza tra vertice e base. Certo, per misurare angoli piccoli è meglio disporre di una base grande, ma ormai nel XIX secolo si ha già a disposizione la base più ampia possibile, per un astronomo terrestre: ovvero il diametro dell'orbita della Terra. Misurazioni fatte a sei mesi di distanza l'una dall'altra dovrebbero far sì che le stelle più vicine mostrino uno spostamento sullo sfondo del cielo.

È una cosa nota agli astronomi del tempo, ma di fatto, pochi sono quelli che hanno seriamente provato a metterla in atto: verosimilmente per la complicazione che comporta, o forse perché i primi tentativi non hanno dato risultati di sorta.

Wilhelm Bessel, forse perché non aveva avuto un'istruzione accademica, aveva in progetto, molto semplicemente, di rifondare tutta l'astronomia pratica. Fra prima misure di geodesia, calcola l'ellitticità del "meridiano prussiano", e nel contempo inventa strumenti: strumenti fisici, come l'eliometro, che non è propriamente inventato da lui, ma che lui usa per primo in maniera estensiva e originale; e anche strumenti matematici, equazioni specifiche che gli servono a rendere consistenti i risultati statistici ottenuti. Sono le famose Equazioni di Bessel, casi particolari della funzione ipergeometrica confluente: gioie e dolori di molti studenti delle facoltà scientifiche.

Con un eliometro accurato, costruito dal celebre Joseph van Fraunhofer, Bessel di fatto fonda l'astronomia posizionale moderna, con i risultati riportati nel suo *Fundamenta Astronomiae* del 1818. A complemento, pubblica più tardi le *Tabulae Regiomontanae*[16], che resteranno a lungo il riferimento dell'astronomia.

Bessel, come Halley, crede alle misure di Ipparco. E crede che il "moto proprio" delle stelle sia anche un sintomo di vicinanza: decide pertanto di indagare su di loro. Per questa ragione sceglie di indagare su una stella poco famosa e soprattutto poco brillante, cosa che



9 *61 Cygni*

[15] "ragionevole" va inteso in senso molto relativo: il risultato ottenuto era di circa il 7% più corto della distanza reale. Si tratta comunque di un grande miglioramento, se si tiene conto che Cassini calcolò una distanza di circa 140 milioni di chilometri (rispetto ai 150 reali), ma prima della misurazione si confidava ancora sui calcoli di Tolomeo, che poneva la nostra stella madre ad appena 6 milioni di chilometri circa.

[16] Dove naturalmente l'aggettivo "regiomontano" è dato dalla latinizzazione di "Königsberg", la "montagna del re".

renderà complicate le osservazioni: 61 Cygni[17]. Come lascia intuire il suo nome, non è una stella di particolare importanza, ma è nota per avere un moto proprio di assoluto rispetto.

La scelta è buona: per la prima volta, come Bessel annuncia nel 1838, una parallasse significativa di una stella fissa è stata registrata. L'angolo è di appena un terzo di secondo d'arco[18]: corrisponde ad una distanza dalla Terra di circa 690.000 diametri d'orbita terrestri o, come diremmo oggi, circa 10,3 anni luce.

È una distanza impressionante. Gli astronomi devono fare i conti con qualcosa che a molti sembrava impossibile; la fissità delle stelle, la loro resistenza alla misurazione, la loro assenza di mostrarsi come dischi anziché come punti, è tutta dovuta solo al fatto che sono incredibilmente lontane. La volta antica delle stelle fisse si sgretola, e si aprono spazi davvero immensi. Altri astronomi corrono a misurare parallassi, e qualche stella rivela la sua distanza: sono poche, anzi pochissime, e sono certamente le più vicine alla Terra. Le altre, la stragrande maggioranza, resistono ancora al metodo della parallasse: e questo significa che sono davvero tanto, tanto, tanto distanti[19].

Il vecchio Olbers compiva 80 anni, nel 1838: durante le celebrazioni del suo compleanno, ringraziò Bessel "per avere per la prima volta messo le nostre idee dell'universo su solide basi".

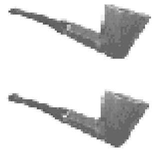
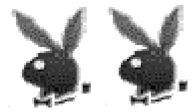
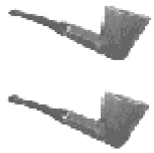
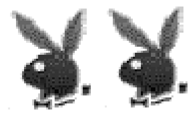
L'ultimo muro era caduto.

[17] Notoriamente, i nomi delle stelle (a parte le poche che ne hanno anche uno proprio, come Sirio, Antares, etc.) sono individuate da una lettera greca e dal genitivo del nome della costellazione di appartenenza: Alpha Centauri, Eta Carinae, Delta Eridani,…) e tanto più in alto nell'ordine alfabetico è la lettera, tanto più è brillante la stella. Quando le lettere greche finiscono, si passa ai numeri: di conseguenza, 61 Cygni non è un gran piazzamento, come brillantezza nella costellazione del Cigno. Ma era la tenutaria del record di moto proprio: 5,2" all'anno.

[18] 0.292″ ± 0.0045, per la precisione.

[19] …e naturalmente, per quanto distanti, sono tutte stelle della nostra Via Lattea. Per dimostrare e capire l'esistenza degli universi-isola, le galassie, occorre aspettare il XX secolo. E spaventarsi sempre di più per le distanze in gioco.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Un problema di quest'anno: Rosso + Blu = Violetto			
Niente arco, questa volta			

2.1 Un problema di quest'anno: Rosso + Blu = Violetto

Non sappiamo se ve ne siete accorti, ma i "problemi dell'anno" (intendiamo, con questo termine, i problemi che coinvolgono il numero d'ordine dell'anno in corso) noi li pubblichiamo nella seconda metà dell'anno. Potremmo accampare scuse del tipo "...i nostri lettori sono talmente svaniti che sino a luglio continuano a scrivere la data sbagliata", anche se la ragione è molto più semplice: i luoghi da cui li prendiamo li pubblicano verso inizio anno, i loro lettori ci mettono un certo tempo a risolverli, e poi noi dobbiamo capire le soluzioni; se a questo aggiungiamo il tempo che impiegate voi a risolverli, li avete pronti giusto in tempo per riciclarli, in un afflato di nostalgia, la notte di San Silvestro.

Questo ci pare abbastanza carino, con questa sua possibilità di *colorare l'anno*; non garantiamo sull'anno prossimo, ma qui ci potreste pensare voi a titolo di espansione.

Definiamo come ***numeri blu*** quei numeri interi $b > 0$ per cui ***non esiste*** alcun intero $a < b$, $a > 0$ tale che, ***sommando*** ad a la somma delle cifre che compongono a, si ottenga b; ad esempio, 28 non è un numero blu, visto che $23 + 2 + 3 = 28$; mentre lo è 23, visto che $16 + 1 + 6 = 23$; tutto chiaro sin qui, voglio sperare.

Adesso, definiamo come ***numeri rossi*** quei numeri interi $r > 0$ per cui ***esiste*** almeno un intero $q > r$, $q > 0$ tale che, sottraendo da q la somma delle cifre che compongono q, si ottenga r; ad esempio, 18 è un numero rosso, in quanto $21 - 2 - 1 = 18$, mentre non lo è 15.

A questo punto, dovreste ritrovarvi con un bel po' di numeri colorati; per semplificare la colorazione, se un numero è sia rosso che blu, ci pare immediato che venga fuori ***violetto***.

E adesso, cominciamo a porci alcune domande.

Tanto per cominciare, ci risulta che 2015 non sia colorato; quale sarà il prossimo anno blu? E quale quello rosso?

Indi, quale è stato il primo anno violetto?

Ma i numeri rossi e quelli blu, quanti sono[20]?

I numeri violetti hanno l'aria abbastanza rara: che caratteristica hanno in comune?

[20] Secondo alcuni, la seconda parte di questa domanda è la più tosta di tutto il problema. A parte l'ultima, con la quale è una bella gara.

...Ma tra i numeri minori di 2015, sono più i rossi o i blu? E quanti sono i numeri violetti?

Svelti, che così nelle prossime edizioni del ***Carnevale della Matematica*** avremo, nella sbrodolata iniziale con le caratteristiche del numero, anche quella del "Colore ErreEmmico" (Nah, non lo faranno mai. Gente seria, quella. E poi, mica l'abbiamo inventato noi).

2.2 Niente arco, questa volta

Nel senso che il campo di tiro comincia a stufarsi, di essere riprogettato due volte al mese[21]; questa volta, visto che il tempo non era un gran che, abbiamo deciso di spostarci al coperto, e siccome ci è stato impedito di tirare con l'arco in casa, come estrema forma di rappresaglia ci siamo proposti di *dare una mano*.

Con perfetta e dolorosa conoscenza della nostra inettitudine, le signore Silverbrahms e D'Alembert ci hanno chiesto di tirare una riga sul muro, che unisse due punti preventivamente marcati e distanti tra di loro circa un metro; per evitare che distruggessimo oggetti importanti, come materiale (oltre alle opportune matite) ci sono stati forniti dei *residuati elementari*[22]: nella fattispecie, una riga non graduata di dieci centimetri e un vecchio balaustrino piuttosto instabile (i cerchi li tira benissimo, ma quando lo sollevate la vite decide che quel cerchio non gli piace e vi cambia l'apertura) con apertura massima di quattro centimetri. Nella loro infinita bontà, le signore si accontenterebbero di un certo numero di punti appartenenti alla linea.

Ci siamo messi di buona lena e abbiamo ottenuto una soluzione che ha riscosso l'ammirazione delle signore, le quali pragmaticamente e all'unisono se ne sono uscite in un "Ci sarebbero un altro paio di lavori identici da fare nelle altre stanze...".

Ci rechiamo nella prima (no, in realtà è la seconda... Lasciamo perdere, avete capito), e provo il balaustrino tracciando un cerchio arbitrario sul muro: appena finito, questo perfido aggeggio si smonta in tremila pezzi, duemilanovecentonovantanove dei quali diventano immediatamente gioco bellissimo per i gatti (il tremillesimo è la punta: i gatti non ci giocano perché è piantata nel mio pollice); ciò nonostante, Doc riesce gloriosamente a terminare la costruzione, mentre io inseguo gatti, recupero pezzi, medico pollici e rimonto balaustrini.

Giunti all'ultima stazione delle nostre peripezie, con il balaustrino opportunamente rimontato, con l'aria da artista Doc si ravviva i capelli e si lascia cadere sulla poltrona, frantumando il righello. E anche qui, pur se con qualche difficoltà (non tiriamo la linea, ci limitiamo a trovarne dei punti) ce l'abbiamo fatta.

Riuscite a capire nei tre casi come abbiamo fatto? Dai, che se scrivete una soluzione abbastanza lunga, la pubblichiamo nei PM (così non la vede nessuno). Ci sono alcuni argomenti interessanti, da quelle parti, e Rudy non li ha mai capiti bene.

3. Oldies & Goldies

Ammettiamo che una delle premesse dalle parti del punto (1) della procedura rappresenta una palese impossibilità, ma almeno qualche tentativo potevate farlo… Bene, sfrondiamolo di qualche eccesso di arzigogolo e riproviamo.

3.1 [RM184 – Maggio 2014] – Tiro di campagna

Sapete come si fa il *tiro di campagna*? Il bersaglio è per terra, ha un raggio di una decina di metri e si tira a parabola, da grossa distanza, ad una bandierina piazzata nel centro esatto.

Per variare un po' la cosa, Doc ha definito tre punti tutti all'interno dell'area del bersaglio che definiscono un triangolo; ogni freccia che cade dentro il triangolo rappresenta un punto, ma Rudy non sa dove sono i tre vertici del triangolo; la logica dei tiri è questa:

[21] Due problemi al mese, fa due volte al mese. E non abbiamo ancora parlato di arco "da altre parti", altrimenti...

[22] Con questo termine si intendono "sussidi didattici avanzati dalle scuole elementari dei VAdLdRM".

1. Rudy tira una freccia, *esattamente dove vuole lui*
2. Doc misura la distanza di quella freccia dal vertice *non individuato* più vicino del triangolo e la comunica a Rudy
3. Rudy, controllando i risultati dei tiri precedenti, comunica se ha individuato eventualmente qualche vertice e ricomincia dal punto 1

Da quando ha individuato i vertici del triangolo, Rudy tira tutte le frecce al suo interno, e *solo queste fanno punti* (uno per ogni freccia): le precedenti, anche se all'interno del triangolo, no, e quindi il triangolo va individuato con il numero minimo di frecce: riuscite a trovare una strategia?

Le logiche generalizzazioni sono sia in un senso che nell'altro: se il bersaglio fosse un segmento, individuato dai punti d'inizio e di fine? Se fosse un punto singolo? Se fosse un poligono (convesso: non andiamo a cercarci complicazioni) di *n* lati?

4. Bungee Jumpers

La *sequenza degli interi priva di quadrati è*:

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, ...

Dimostrate che, se $\lfloor x \rfloor$ indica il massimo intero minore o uguale a x, allora l'n-esimo termine della serie è:

$$\left\lfloor n + \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor .$$

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Soluzioni e Note

Luglio.

Tanto da dire, tanto da fare, ma se non la finiamo qui non usciamo prima della metà del mese. Quindi andiamo avanti.

5.1 [181]

5.1.1 Supertask!

Gli *Oldies&Goldies* stanno funzionando a dovere: piano piano i vecchi problemi dimenticati o passati per qualche motivo senza soluzione stanno trovando una seconda primavera. È il caso di questo, che il Capo ha ripreso il mese scorso:

> *Su due vecchi rotoli da calcolatrice sono scritti di seguito, senza spazi e senza zeri iniziali, i numeri da* 1 *a* 100 *(duplice copia, i due rotoli sono quindi perfettamente identici): insomma una cosa del tipo:* 1234567891011121314151...9596979899100. *Da ognuno di questi rotoli dovete cancellare cento cifre, con due obiettivi diversi:*
>
> 1. *Il primo rotolo, leggendo le cifre restanti di seguito, dovrà contenere il numero più grande possibile.*
> 2. *Il secondo rotolo, leggendo le cifre restanti di seguito, dovrà contenere il numero più piccolo possibile.*
>
> *Supponendo abbiate brillantemente risolto entrambi i problemi, quanto vale la differenza tra i due numeri?*
>
> *Espansione di cui non sappiamo la risposta: esiste un metodo generalizzato? Ad esempio, scrivo i primi k numeri in base b, cancello k cifre: che metodi uso (nel caso "minimo" e nel caso "massimo") per cancellare le cifre? Esiste un metodo per calcolare "alla svelta" (ossia senza fare il conto "lungo") quanto valga la differenza?*

Ecco. Dopo mesi di assenza si è fatto risentire ***MBG***, che vedrete comparire in diverse sezioni più avanti. Vediamo che cosa ci scrive:

Cancellando le 100 cifre, il numero di cifre del numero finale è determinato dal numero di cifre iniziale (N = 1 x 9 + 2 x 90 + 3 = 192) meno le 100 che cancello, ovvero 92.

Per ottenere il numero più grande possibile dobbiamo cercare di rimanere con una sequenza del tipo 999….988…877…

Allo stesso modo, per avere il più piccolo, dobbiamo rimanere con 000…011….12…

La procedura dovrebbe quindi essere abbastanza semplice, e credo vada bene anche per sequenze di cifre qualunque e numero di cancellazioni diverse.

Per ottenere il numero più grande:

- parto dal primo e proseguo contando i 9, fino a che supero la posizione 100+n, dove n è il numero di 9 che finora sono stati trovati.
- ritorno indietro all'ultimo 9 e cancello tutte le cifre precedenti diverse da 9; sia k il numero di cifre che posso ancora cancellare
- proseguo dall'ultimo 9 che ho trovato contando ora gli 8 fino a che sono andato avanti più di k+n posizioni, dove n è il numero di 8 che ho contato.
- ritorno indietro all'ultimo 8 e cancello tutte le cifre precedenti diverse da 8 aggiornando il valore k del numero di cifre che posso ancora cancellare
- ripeto i due punti precedenti con la cifra di riferimento via via a scalare finché ho una di queste condizioni finali: a) k=0 b) arrivo alla fine della sequenza con k>0 (in questo caso cancello le ultime k cifre, qualunque siano) c) arrivo al punto che devo cancellare gli zeri (ma questo vuol dire che nella parte finale della sequenza sono rimasti solo degli zeri)

Si vede subito che nel nostro caso specifico della sequenza delle 192 cifre dei numeri da 1 a 100 siamo nel caso a.

Per ottenere il numero più piccolo procedo in modo analogo, lavorando al contrario partendo da 0 e poi man mano a salire.

Dopo aver scritto questa procedura, mi sono accorto che non è del tutto corretta. In realtà quando in ogni passaggio faccio la ricerca in avanti della cifra C (C=9,8,7,…0), devo selezionare non solo C, ma anche tutte le altre cifre >C che potrei ancora incontrare.

Chiaramente, nel caso di ricerca del numero più piccolo, dove C=0,1,2….9, seleziono oltre a C tutte le cifre <C.

Mettiamo praticamente alla prova l'algoritmo.

Qui sotto c'è il nostro rotolo in cui ho evidenziato le cifre che cancello al primo passaggio:

123456789**1011121314151617181**9**2021222324252627282**9**303132333435363738**
39**4041424344454647484**9505152535455565758596061626364656667686970717 27
3747576777879808182838485868788899091929394959697989 9100

Sono 84. Non vado oltre perché per arrivare al prossimo 9 dovrei cancellare altre 19 cifre e supererei quindi il limite delle 100 consentite.

Epurata la sequenza dalle cifre evidenziate, me ne rimangono 108, con ancora 16 cancellazioni possibili.

Parto allora dall'ultimo 9 della serie iniziale cercando ogni C<=8, ma il primo lo trovo dopo 17 cifre, cioè una in più di quelle che mi posso permettere:

99999**50515253545556575**8596061626364656667686970717273747576777879808 1
8283848586878889909192939495969798 99100

Passo quindi direttamente a cercare i C<=7 e ne trovo uno dopo 15 cancellazioni.

99999**505152535455565**7585960616263646566676869707172737475767778798081
82838485868788899091929394959697989 9100

Rimane una sola cancellazione da fare che è evidentemente il 5 che segue il 7 a cui sono arrivato prima:

99999**7**5859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889909192939495969798991**0**0

Da cui il risultato finale:

999997859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889
9091929394959697989910

Analogamente trovo il numero più piccolo possibile:

Cancellazioni del primo giro (86):

12345678910**1112131415161718192**0**2122232425262728293**0**313233343536373839**
3940**414243444546474849 5**0515253545556575859606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889909192939495969798991**0**0

Una sola cancellazione al secondo giro:

00000**5**1525354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899100

Infatti qui notiamo che la prossima cifra che mi interesserebbe tenere è lo zero che viene due posizioni prima del prossimo 1, ma per arrivarci mi servirebbero 18 cancellazioni a fronte delle sole 14 disponibili.

Rimango con 105 cifre e 13 cancellazioni da fare.

Vado veloce con i prossimi 2 passaggi in cui cerco nell'ordine i *C*>=2 e i *C*>=3 e compaiono i due 5 qui evidenziati:

000001**5**2**5**354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899100

Siamo dunque rimasti con 103 cifre, 89 cancellate e 11 ancora da togliere.

Qui finisco in un colpo solo perché trovo direttamente 11 cifre >=4 che arrivano giuste giuste fino allo 0 che avrei comunque tenuto.

00000123**5**4**5556575859**60616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899100

Il risultato finale è dunque:

000001234606162636465666768697071727374757677787980818283848586878889
9091929394959697989910 0

Ci ha scritto anche ***Sawdust*** in proposito, ed ha cercato anche di vedere le estensioni:

Il numero più grande possibile è

9999978596 0616263646566676869707172737475767777
8798081828384858687888990919293949596979899100

Il numero più piccolo possibile è

1000001234 0616263646566676869707172737475767777
8798081828384858687888990919293949596979899100

Li ho scritti su due righe perché per farli stare su una riga sola avrei dovuto usare un carattere troppo piccolo e lo spazio dopo le prime 10 cifre serve ad evidenziare come dopo di esso i numeri siano perfettamente uguali.

Da ciò deriva che la differenza tra i due è pari a

8.999.977.362 x 10^{82}

Ma se, come detto in RM181, Jorge da Burgos volesse fare proprio il cattivo farebbe in modo da tenere nel numero più piccolo un po' di zeri iniziali e quindi arriverebbe ad avere questo numero

0000012346 0616263646566676869707172737475767777
8798081828384858687888990919293949596979899100

in cui anche la 10° cifra è uguale al numero più grande ottenuto da Ipazia d'Alessandria e quindi la differenza tra i due sarebbe

$$999.996.625 \text{ x } 10^{83}$$

da cui si vede che tanta cattiveria porterebbe solo un incremento dell'11% circa della differenza.

Fantastico, andiamo avanti.

5.2 [195]

5.2.1 ALEE_OOh_ooh. ALEe_Oh_Oh

Ancora questo problema? ebbene sì, ma giusto per un commento. Secondo le regole, però, richiamiamo il testo:

> *Statuiamo il metodo di punteggio: se vinci tre punti, se pareggi un punto a testa, se perdi niente, non importa il punteggio conseguito. Consideriamo il girone unico, abbiamo n squadre: alla fine del torneo i punteggi delle squadre sono una serie di interi consecutivi. Quanti punti ha fatto l'ultima in classifica? Esistono diversi "percorsi" che ci portano a questo risultato? Per la vincitrice, quale potrebbe essere stata la peggior posizione?*

In RM196 abbiamo pubblicato due soluzioni poco convinte di ***Alberto R.***, il mese scorso i commenti e le soluzioni di ***Rub*** e ***τϱ***, quest'ultimo ci scrive per auto-correggersi un errore:

> (…) l'errore sta nell'aver allegato la classifica sbagliata per quanto riguarda n=8 squadre e k=20 vittorie. Lo schema corretto è questo:

Caso 8 squadre, 20 vittorie (tot. 28 partite): X=6

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	13	4	1	2	7
2ª	12	4	0	3	7
3ª	11	3	2	2	7
4ª	10	3	1	3	7
5ª	9	~~3~~ 2	~~0~~ 3	~~1~~ 2	7
6ª	8	~~1~~ 2	~~5~~ 2	~~1~~ 3	7
7ª	7	1	4	2	7
8ª	6	1	3	3	7

> mentre quello di prima non è corretto in quanto i pareggi non tornerebbero con le partite reali (esplico: se la 6a avesse fatto 5 pareggi, essi sarebbero avvenuti con la 1a, la 3a, la 4a, la 7a e l'8a, ma a questo punto allora la 7a potrebbe aver pareggiato solamente con la 3a, la 6a e l'8a e manca quindi un pareggio. Impossibile).

Bene, e questo l'abbiamo chiarito. Procediamo.

5.3 [196]

5.3.1 Trovare "la patata"!

Ebbene sì, soluzioni ai problemi del mese passato! Qualcuno ha udito i miei richiami all'ordine. Cominciamo con il testo del quesito:

> *Nella "Zona della Patata" è diffuso uno sport: su una linea di un chilometro, a distanze di dieci metri una dall'altra, vengono distribuite uniformemente cento patate; i due concorrenti devono:*
>
> 1. *Partire dalla linea di partenza*
> 2. *Raggiungere la patata più vicina*
> 3. *Raccoglierla e portarla al secchio sulla linea di partenza*
> 4. *(Ricominciare da (1)).*
>
> *Vince, chiaramente, chi riesce a portare l'ultima patata.*
>
> *Come potremmo rendere il gioco "equo" per un maratoneta e un centometrista, variando la distanza tra un tubero e l'altro?*

> *Supponendo di conoscere con precisione la differenza di velocità tra due corridori, che si voglia garantire al più lento un vantaggio: questo può mettere una patata a sua scelta nel proprio basket prima della gara. Esiste una patata che permette di vincere?*
>
> *Se cambio i parametri? Come cambia cosa?*

La soluzione che vi proponiamo è di ***MBG***, che ha praticamente scritto queste S&N:

> Avevo lasciato perdere questo problema perché pensavo arrivassero già un sacco di soluzioni scritte meglio della mia. Vedo invece su RM197 il vuoto totale per cui mi sento in dovere di venire in soccorso per riempire la sezione S&N che nel periodo estivo è sempre in sofferenza.
>
> In realtà mi sono ricordato di questo problema, perché proprio in questi giorni dalle mie parti si svolge una gara molto simile a quella descritta:
>
> http://www.gandino.it/tradizioni-e-folklore/la-corsa-delle-uova
>
> Abbiamo uova invece di patate, 1m di distanza invece che 10m e il fatto che la sfida è tra uno che raccoglie le 100 uova e un altro che corre su una distanza lineare prefissata (11200m); ma per il resto la matematica è la medesima a parte un fattore 10.
>
> Nel caso delle patate, la distanza totale da percorrere è:
>
> $$D = 2(10 + 20 + \ldots 1000) = 2 \cdot 10 \sum_{n=1}^{100} n = 2 \cdot 10 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} = 101000$$
>
> Dando la possibilità di avere un vantaggio eliminando una patata, conviene senza dubbio scegliere la più lontana, riducendo il percorso totale di $R = 2000$m.
>
> Supponendo che i contendenti si muovano a velocità costante V tra la linea di partenza e le patate e trascurando quindi le accelerazioni e le pause per raccolta e inversione (ma sono davvero trascurabili?), ricaviamo che il maschietto completerà il percorso nel tempo $t_M = D/V_M$ e la femminuccia nel tempo $t_F = (D - R)/V_F$
>
> Supponiamo che il vantaggio del maschietto sia dato da un fattore k sulla velocità:
>
> $$V_M = k\ V_F = k\ V$$
>
> Imponendo che i tempi siano uguali si ottiene semplicemente:
>
> $$k = D/(D - R)$$
>
> Nel caso migliore in cui si scelga R=2000 si ha k=1.0202… cioè 2.02%
>
> Ma se il vantaggio di velocità del maschietto è 2.04%, vince sempre lui nonostante gli tocchi una patata in più.
>
> Procedendo al contrario e calcolando R usando il fattore di 2.04% si trova R≈2020, per cui si può rendere la gara abbastanza equa se alla femminuccia viene abbuonata sia l'ultima sia la prima patata.
>
> Dato che tutti i calcoli sono semplici, non c'è difficoltà ad estendere il problema per parametri diversi. Riguardo la domanda di rendere la gara equa per un maratoneta e un centometrista, si può pensare di cambiare le formule con parametri addizionali:
>
> 1- introdurre un tempo di pausa per ogni patata raccolta, per tener conto di tempi di inversione di marcia diversi per ogni soggetto o di un tempo di recupero fiato (ad esempio il centometrista avrà una velocità maggiore, ma poi deve fermarsi a riposare dopo ogni scatto); questo è facile, perché se il tempo di ritardo per patata è costante, basta solo tener conto di una differenza costante nel confrontare i due tempi
>
> 2- prevedere una velocità media diversa a seconda della distanza della patata (che per il centometrista avrà presumibilmente un massimo centrato sulla patata nr.10, mentre per il maratoneta dovrebbe essere abbastanza costante); qui è più complicato fare i conti ma avendo la distribuzione della velocità si dovrebbe riuscire

a piazzare le patate a distanze non costanti in modo da rendere uguali i tempi di raccolta dei due atleti.

PS: per la cronaca, qui con le uova è da anni e anni che perde sempre quello che raccoglie. Ovvero vince sempre il maratoneta anche se deve percorrere il 10% di distanza in più.

Fantastico vero? La corsa del Capo esiste veramente, e con parametri diversi…

Tra poco arriviamo al mese scorso, non vi preoccupate.

5.4 [197]

5.4.1 Abbiamo ricominciato!

Oh, eccoci finalmente ai quesiti proposti più di recente. Con il ritorno dell'estate Rudy e Doc hanno ripeso a tirare con l'arco, e vengono continuamente ispirati a inventare nuove e complicate tecniche per decorare il campo di tiro:

Supponiamo di porre l'origine delle coordinate al centro della zona soggetta alle nostre attenzioni vivaistiche: un punto è erboso se soddisfa la condizione

$$c \leq |(|x| - a)| + |(|y| - a)| \leq b, \text{ con } 0 < c \leq 2a \leq b.$$

Il resto è fiorito. La parte fiorita e la parte erbosa devono occupare la stessa superficie, e questa deve essere minore di 200 *m*^{2}*. Che forma ha il disegno, e quanto valgono a, b e c?*

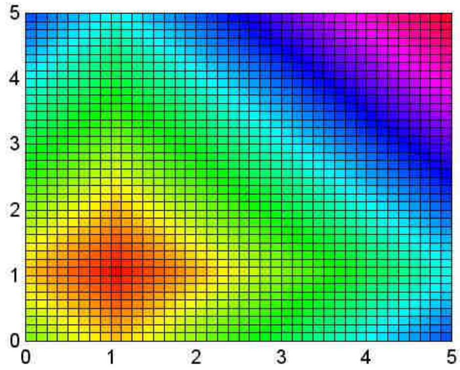
Fin qui, il problema, piuttosto carino per i miei gusti. La soluzione di ***MBG*** è la seguente:

La forma del disegno risultante dalle condizioni imposte dal problema si può intuire in modo abbastanza semplice senza usare ausilii grafico-informatici facendo due rapide osservazioni:

- l'espressione $f(x,y) = \left||x|-a\right| + \left||y|-a\right|$ è indipendente dai segni di x e y per cui si può vedere come varia nel solo quadrante con x, y positivi e poi replicare sugli altri
- la condizione $0 < c \leq 2a \leq b$ implica che $a>0$ per cui posso dividere tutto per a e lavorare sul caso $c \leq \left||x|-1\right| + \left||y|-1\right| \leq b$ con $0 < c \leq 2 \leq b$

A questo punto l'andamento di $f(x, y)$ è relativamente facile da ricavare e basta prenderne i valori tra c e b per avere le geometrie cercate.

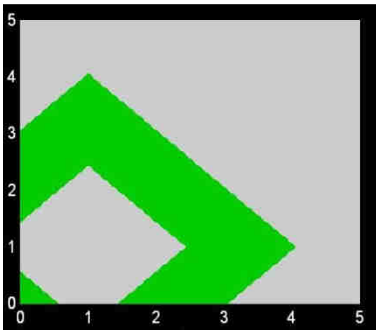
Nell'immagine qui sotto i valori assunti dalla $f(x, y)$ per x, y tra 0 e 5 sono visualizzati con una scala di colore: basta prendere tutte le sfumature corrispondenti all'intervallo tra b e c cercato per visualizzare immediatamente la parte erbosa e quella fiorita.

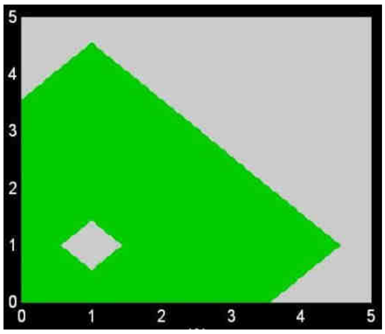


Per capirci, il rosso (n.b.: quello che c'è a $x = y = 1$, non quello che mi ha messo anche a $x = y = 5$) corrisponde a $f(x,y) = 0$, il giallo/arancio a $f(x, y) = 1$ e il verde chiaro a $f(x, y)=2$. Si può avere il riferimento della scala guardando i colori sull'asse x e considerando che $f(x, 0) = x - 1$.

In definitiva, il limite dettato dal valore *c* corrisponde sempre a un poligono che sta a un livello di colore costante compreso tra il rosso e il verde chiaro. Per il limite dovuto a *b* prendiamo un livello dal verde chiaro in su verso il violetto.

Qui sotto le due geometrie che si ottengono, a seconda che *C* sia minore o maggiore di 1. A sinistra con *C*=1.5 e *B*=3, a destra con *C*=0.5 e *B*=3.5





Come al solito sono di fretta per cui non ho tempo di completare la soluzione andando a determinare i valori di *a*, *b*, *c* per cui si hanno i 200m^2 di prato richiesti dal problema.

Ma avendo determinato che le geometrie che si generano sono quelle delle figure precedenti, si tratta solo di fare qualche semplice calcolo.

Inoltre avendo la stessa situazione nei 4 quadranti, per *evidenti ragioni di simmetria* (cit.), bi basta determinare i valori per cui abbiamo 50m^2 nei due casi visualizzati sopra.

Esteticamente interessanti entrambe le figure, vero? Qualcuno ha voglia di trovare i valori di *a*, *b*, *c*?

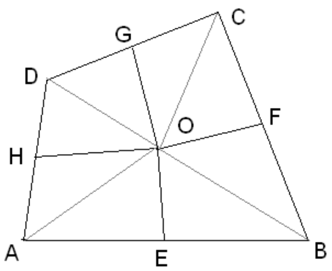
5.4.2 …ma io continuo a perdere

Alto problema geometrico, altra decorazione del *Campo dei Chinotti*:

Il Nostro si trova alle prese con una serie di zone piuttosto ampie di forme tutte quadrangolari e tutte irregolari, con ampi camminamenti tra una zona e l'altra. L'idea è quella, per ogni quadrilatero, di determinare un punto O tale che, una volta tirati i segmenti dai punti medi dei lati sino ad O, il nostro quadrilatero risultasse diviso in quattro parti e che queste quattro aree fossero uguali. E, dovendo ripetere l'esercizio per un buon numero di quadrilateri tutti diversi tra loro, procedere per tentativi non è proponibile: si esige un metodo generale!

Anche qui, la prima soluzione è di ***MBG***:

Consideriamo il generico quadrilatero ABCD e siano E, F, G, H i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, CD, DA.



Vogliamo che il punto interno O sia fissato in modo che siano uguali le aree dei quadrilateri OEBF, OFCG, OGDH e OHAE. Nel seguito indicherò con $S[P_1P_2 \ldots P_N]$ l'area del poligono generico $P_1P_2 \ldots P_N$. Quindi il problema richiede S[OEBF] = S[OFCG] = S[OGDH] = S[OHAE].

Osserviamo prima di tutto che, per qualsiasi posizione di O, si ha sempre:

S[OEA] = S[OEB], S[OFB] = S[OFC], S[OGC] = S[OGD] e S[OHD] = S[OHA]

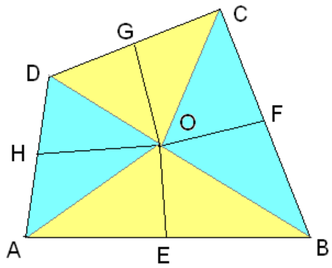
avendo ogni coppia di triangoli la stessa base e la stessa altezza. Richiedendo S[OEAH] = S[OEBF] si ha quindi S[OHA] = S[OFB].

Ripetendo il ragionamento per le altre coppie di quadrilateri, risulta che gli 8 triangoli che si formano, hanno aree uguali a gruppi di 4.

S[OEA] = S[OEB] = S[OGC] = S[OGD]

S[OFB] = S[OFC] = S[OHD] = S[OHA]

Nella figura ho evidenziato con colori uguali i triangoli che devono avere area uguale



Intanto comincio a scrivere la soluzione teorica, poi vedremo se riusciamo a trovare qualcosa di più pratico ed elegante.

Essendo S[OAB] = S[OCD], considerando AB e CD le basi dei triangoli e detto k il rapporto AB/CD, le due altezze, ovvero le distanze dalla retta passante per AB e quella dalla retta passante per CD devono essere tra loro in rapporto $1/k$. Quindi O deve trovarsi sul luogo dei punti per cui le distanze dalle due rette sopra citate stanno tra loro in rapporto $1/k$: questo luogo dei punti è una retta. Si ragiona analogamente per i due triangoli colorati in azzurro e si ricava che O deve trovarsi su un'altra retta luogo dei punti tali per cui il rapporto delle distanze tra le rette passanti per BC e DA è pari a $1/h$, con h=BC/DA.

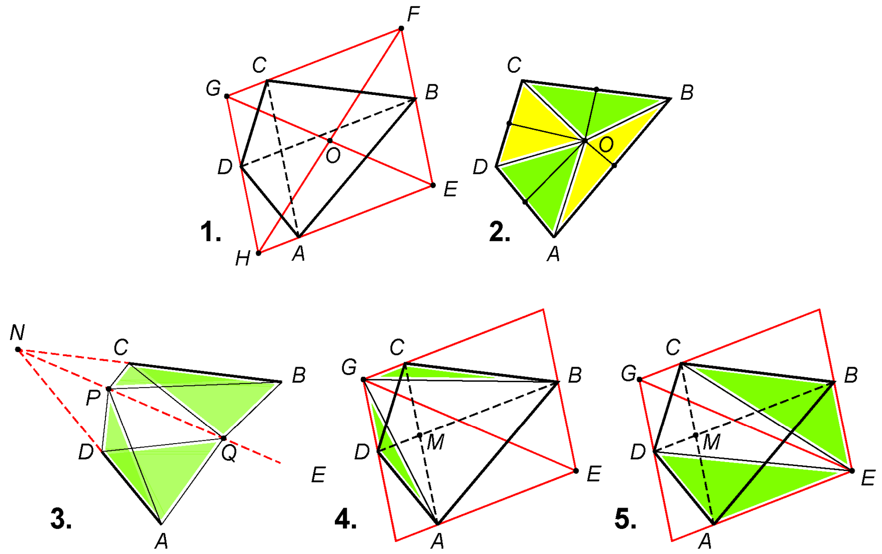
Usando la geometria analitica e mettendo su piano cartesiano i punti A B C e D trovare la soluzione è abbastanza facile: si usa la arcinota formuletta per la distanza punto-retta e si risolve un banale sistemino lineare che non sto a riportare.

Per farlo in pratica sul campo (nel senso proprio del campo di tiro) il problema si riduce a misurare i rapporti tra i lati opposti e determinare ciascuna delle due rette da intersecare per trovare O. Un punto della retta è facile da trovare, essendo all'incrocio dei prolungamenti dei lati opposti del quadrilatero (nel caso di lati paralleli la soluzione è banalmente data da un'altra retta parallela tale che le distanze dai lati siano in rapporto k); il secondo punto è da determinare variando l'angolo della retta finché si trova il rapporto distanze cercato. Qui mi sarebbe piaciuto trovare una soluzione con riga e compasso ma non ci sono arrivato nel breve tempo che ho a disposizione e quindi lascio in sospeso.

Il resto è facile: si ripete il procedimento sugli altri due lati e intersecando con la retta trovata prima ottengo la posizione del punto O.

Niente male, vero? Per questo problema abbiamo una versione alternativa di ***trentatre***:

Fra fiori ed erbacce e schivando le frecce, spero di aver colto il problema: dato un quadrilatero qualsiasi trovare il punto che congiunto ai punti medi dei lati lo divide in quattro parti di area uguale.



Per il quadrilatero $ABCD$ (fig. 1) basta tracciare il rombo circoscritto $EFGH$ con lati paralleli alle diagonali AC, BD. Il punto O cercato è il centro del rombo.

Tracciando da O i segmenti verso i vertici $ABCD$ e verso i punti medi dei lati (fig. 2) le aree cercate sono composte da mezzo triangolo verde e mezzo giallo. Se sono tutte uguali, poiché ogni triangolo verde (e ogni giallo) è composto di due parti di area uguale, i due triangoli verdi hanno la stessa area, e così i due gialli.

Limitiamoci ai triangoli verdi. Se (fig. 3) dati i lati AD e BC, il punto P individua due triangoli di area uguale, questo avviene per ogni punto Q sulla retta NP con N intersezione dei due lati. Infatti il rapporto delle aree dei triangoli ADP, BCP è uguale al rapporto delle altezze condotte per P, che non dipende dal posizione di P sulla retta.

Ma (fig.4) i triangoli con vertice in G hanno la stessa area di CDG, e quelli con vertice in E (fig.5) la stessa area di ABE. Quindi la retta PQ coincide con la diagonale EG e il punto O deve stare su questa. Per l'eguaglianza dei triangoli gialli, O deve stare sull'altra diagonale FH, da cui la soluzione.

E con questo abbiamo proprio pubblicato tutto quello che avevamo in giro per la mail. Se avete inviato una soluzione ma non la vedete qui, ditecelo, che proviamo a migliorarci. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Con una penna nera disegnate una curva chiusa della forma che preferite. Poi prendete una penna rossa e disegnate una curva chiusa come vi pare. La curva rossa incontra, in un certo numero di punti, la curva nera. Il numero di questi punti è sempre pari, sempre dispari o dipende? E se dipende, dipende da cosa?

Una curva divide il piano in due regioni, chiamiamole "interno" e "esterno". Da qualunque regione inizi la curva rossa, dovrà finire nella stessa regione, quindi attraversa un numero pari di volte la curva nera.

7. Pagina 46

Un non-quadrato è sempre compreso strettamente tra due quadrati, ossia è sempre:

$$m^2 < t_n < (m+1)^2;$$

questo significa che la sequenza dei primi t_n numeri è composta da m quadrati e n non quadrati, e quindi:

$$t_n = n + m.$$

Essendo:

$$\left[n+\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right]=n+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right],$$

dobbiamo dimostrare che:

$$m=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right].$$

Ma questo è equivalente a:

$$m\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{n}<m+1$$
$$m-\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{n}<m+\frac{1}{2}$$
$$m^2-m+\frac{1}{4}\leqslant n<m^2+m+\frac{1}{4}$$

e, essendo m e n interi,

$$m^2 - m + 1 \leq n \leq m^2 + m.$$

Ma questo segue immediatamente dai limiti $m^2 < t_n < (m+1)^2$ che abbiamo imposto a t_n, e quindi:

$$m^2<m+n<m^2+2m+1$$
$$m^2-m<n<m^2+m+1$$
$$m^2-m+1\leqslant n\leqslant m^2+m.$$

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Piove.

No, dico, qui qualcuno lo sta facendo apposta.

La decisione di scrivere questo pezzo è stata presa in un momento nel quale il materiale didattico citato nel titolo brillava per estensione, intensione, qualità e quantità; nel momento nel quale finalmente ci accingiamo a scrivere queste note, sono quasi due settimane che non si vede nulla. "Beh, ma tanto è teorico. Da quando in qua ti lasci influenzare dalla realtà?" Non so voi, ma quando piove, per terra è tutto bagnato, io sono in casa al coperto e non trovo l'ombrello, all'improvviso lo scrivere qualcosa mi pare un'ottima alternativa alla passeggiata.

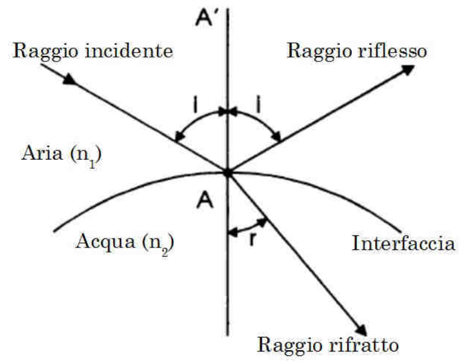
No, non ho intenzione di parlare di pioggia, ma di una sua diretta conseguenza, ossia dell'arcobaleno, soprattutto visto che ho finalmente trovato un po' di conti ben fatti che spiegano *bene*[23] cosa succede.

Sorvoliamo sulla storia degli studi, anche se parlare di qualcuno rispondente al nome di Teodorico di Friburgo[24] potrebbe essere interessante, e cerchiamo di capire cosa succede con un minimo di precisione. Cominciamo con qualche *fattoide*[25].

Sapete tutti *dove* trovare l'arcobaleno: Sole alle spalle e pioggia davanti a voi, il che ci fa comprendere che deve esserci di mezzo una *riflessione*; non solo ma la metà mattina (o la metà pomeriggio) si rivelano essere i momenti migliori per vederlo, in quanto in questo modo l'arco risulta più alto nel cielo; in buone condizioni di visibilità, potreste anche accorgervi che è *sempre grande uguale*: il raggio del semicerchio è circa di 42 gradi (e dopo vediamo perché).

Non sappiamo se sia per motivi legati al riscaldamento globale, ma a sensazione (quindi, probabilmente, sbagliamo) ci pare che gli arcobaleni "doppi" siano aumentati, rispetto al periodo della nostra gioventù: provate a verificare quante volte, oltre all'arcobaleno "normale" (primo termine tecnico: "*primario*") ne vedete anche un altro, il cosiddetto arcobaleno *secondario*, a colori invertiti (il rosso è all'esterno); questo, ha un raggio sotteso da un angolo di una cinquantina di gradi (anche qui, ne parliamo dopo).

Approfittiamo del momento magico per statuire che, una volta tanto, siamo d'accordo con gli americani: i sette colori dell'arcobaleno sono sei, e si ricordano con R-O-Y-G-B-V[26], Rosso, Arancione, Giallo, Verde, Blu, Violetto. Per evitare litigi, comunque, i disegni li facciamo tutti in bianco e nero.



10 *Arcobaleno monocromatico.*

Cominciamo con il cercare di capire l'arcobaleno primario: la situazione è quella indicata nella figura a fianco; un *Raggio incidente* colpisce la superficie della goccia d'acqua con un angolo *i* rispetto alla verticale *A-A'*; un altro raggio (il *Raggio riflesso*) lascia la superficie dallo stesso punto con il medesimo angolo *i* (e quindi l'*Angolo di incidenza* è uguale all'*Angolo di riflessione*).

[23] Nel senso che se seguite le spiegazioni che vengono date nella scuola dell'obbligo (e, se avete un corso contenente ottica, in certi casi anche all'università), scatenano una quantità di domande che, prima o poi, convince il docente a "segnarsi il nome" (e vi aspetta o all'esame o all'uscita).

[24] Pare sia stato l'unico, nel Medio Evo, a sviluppare ipotesi sull'arcobaleno.

[25] Ho appena finito di leggere un libro che era pieno di *factoid*: se qualcuno trova un termine migliore in italiano, prometto che lo uso (anche se ne trova uno peggiore, ma la cosa mi pare difficile: questo è veramente terribile).

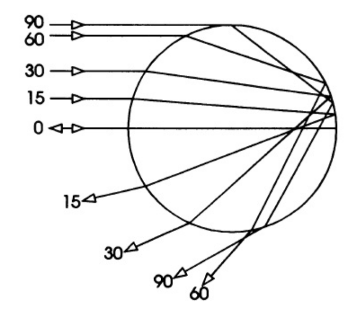
[26] Su questa mnemonica, esiste un grazioso racconto di Asimov tra gli Enigmi dell'Union Club, intitolato "Mezzo Fantasma".

Ma non tutta la luce viene riflessa; una certa porzione viene rifratta secondo l'*Angolo di rifrazione r*, come mostrato in figura e, se n_1 e n_2 sono gli *Indici di rifrazione* rispettivamente dell'aria e dell'acqua, gli angoli seguono la ***Legge di Snell***(ius[27]):

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

Siccome l'indice di rifrazione dell'aria (e del vuoto) è pari a 1, di solito ci si semplifica la vita considerando solo quello del secondo mezzo; nel nostro caso è l'acqua, per cui n=1,33.

È ora di un'altra figura.

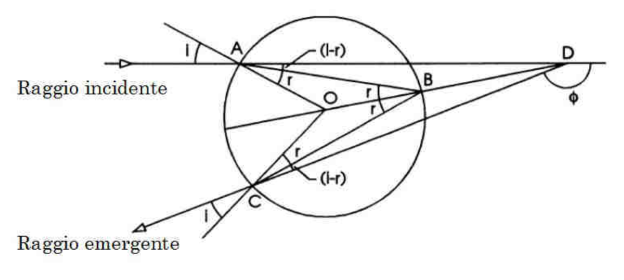


11 *Attenti a non scivolare.*

Qui vediamo i raggi solari (che, data la distanza del Sole, consideriamo *paralleli* tra di loro) incidere sulla goccia formando angoli diversi *con la normale nel punto di interfaccia* (lo sottolineo perché la cosa non era molto chiara alla mia prof di scienze delle medie... questo era il punto dove la spiegazione accelerava); una parte verrà riflessa, ma la parte restante del raggio entrerà nella goccia secondo la legge di Snell e, arrivata di nuovo all'interfaccia, subirà la stessa sorte: una parte verrà rifratta all'esterno, mentre una parte resterà dentro la goccia, per raggiungere di nuovo l'interfaccia e essere di nuovo riflessa e rifratta[28].

Per procedere, ci serve un'ulteriore figura: grande e complicata, questa volta.

Il nostro raggio incidente è rifratto in A, riflesso in B e rifratto nuovamente in C, dove riemerge dalla goccia; se noi prolunghiamo i raggi incidente ed emergente, questi si incontrano in un punto D formando un angolo Φ; dati i valori in figura, si vede che il suo valore è:

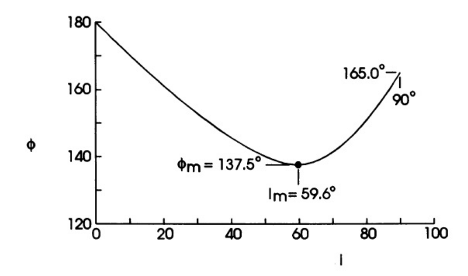


12 *Il nocciolo della questione.*

$$\Phi = 2\,(i - r) + (180 - 2r).$$

Usando la formula di Snell, possiamo riscrivere questa espressione come:

$$\phi = 180 + 2i - 4\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right).$$



13 *La forma dell'acqua.*

Se, come ogni matematico (o fisico) che si rispetti, fossimo interessati ai punti con comportamenti particolari, potremmo chiederci per quali valori dei vari angoli otteniamo il *Φ minimo*. Derivando rispetto ad i, si vede che è:

$$\cos i_m = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

e, sostituendo il valore n = 1,33 dell'acqua, otteniamo il minimo indicato nel grafico qui a

[27] Tutto il mondo lo chiama *Snell*, in Italia si trova più sovente la grafia *Snellius*. Essendo il Nostro olandese, potete fare come pare a voi, tanto non si arrabbia.

[28] Mi ha sempre divertito molto che al primo giro si ignori la riflessione, al secondo la rifrazione e al terzo di nuovo la riflessione: ci si aspetterebbe che, se una cosa è insignificante una volta, lo sia anche alle successive! In realtà, il rapporto tra gli indici di rifrazione si inverte all'invertirsi dell'interfaccia: una volta questa è aria-acqua, la seconda volta acqua-aria, la terza di nuovo aria-acqua.

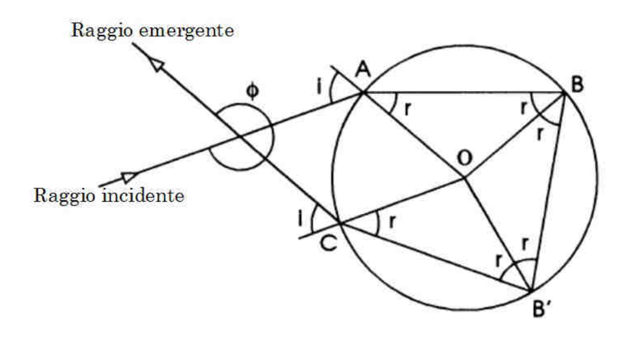
fianco: e, giusto per tirare in ballo qualcun altro, un raggio entrante in una goccia esattamente sotto l'angolo di incidenza dato è noto come *Raggio di Cartesio*.

Dalla figura si vede che non sono ammessi angoli minori di (circa) 138°; questo significa che *tutti i raggi uscenti dalla goccia sono confinati in un angolo di* 180° – 138° = 42°; il vertice di questo cono è nell'occhio dell'osservatore e l'asse è nella direzione opposta al Sole.

Inoltre, siccome la curva mostrata in figura è molto piatta in prossimità del punto di minimo, buona parte dei raggi emergenti sono nella zona dei 42°.

Ragazzi, sono fiero di me: vi ho appena raccontato l'arcobaleno *monocromatico*.

Infatti, manca ancora qualcuno: *Newton* ha dimostrato che il valore di n varia in funzione del colore passando (per il visibile) da n = 1,332 per il rosso a n = 1,344 per il violetto. Se rifate il conto, ottenete due curve del tipo visto sopra ben distinte e quindi due diversi valori dell'angolo minimo: incredibile come questo spettacolo sia basato su meno di due gradi di differenza.



14 *Il biliardo del secondario.*

Tirando le somme: l'arcobaleno è una semicirconferenza il cui raggio è sotteso da un angolo di circa 42°, un po' di più per il rosso, un po' di meno per il violetto, una via di mezzo per gli altri colori.

Adesso, attraverso lo stesso schema, diventa relativamente semplice spiegare l'arcobaleno secondario: se facciamo, con le dovute modifiche deducibili dalla figura a fianco, lo stesso ragionamento, ci accorgiamo che abbiamo una rifrazione, *due riflessioni* e un'altra rifrazione; col che, la nostra formula diventa:

$$\Phi = 2\,(i - r) + 2\,(180 - 2r).$$

Vi preghiamo di notare che qui il nostro angolo ha una posizione completamente diversa rispetto a quella del caso dell'arcobaleno primario.

Qui, il nostro valore minimo ricavato attraverso differenziazione diventa:

$$\cos i_m = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}},$$

Il che ci porta al valore di circa 72° per l'angolo di incidenza minimo. Stessi calcoli (ma con numeri diversi) del caso precedente, e vediamo che il nostro arcobaleno ha un raggio sotteso da un angolo di circa 50°; non solo, ma il fatto che il raggio esca "da sopra" fa sì che l'angolo sotteso sia *un po' minore* per il rosso e *un po' maggiore* per il violetto; quindi, i colori risultano invertiti.

Il grafico, in questo caso, ve lo disegnate da soli: vi basti sapere che viene un po' più "ripido" nella zona del minimo, e questa è una delle ragioni per cui *il secondario è sempre meno luminoso del primario*; contribuisce anche la motivazione di "senso comune" che se fa più strada dentro la goccia (e una perdita per rifrazione ce la troviamo sempre) la luce si attenua, ma anche questa componente della "ripidità" contribuisce.

Insomma, quando un raggio di luce entra in una goccia d'acqua, i casi sono due: o esce nel "cono da 42°", e forma l'arcobaleno primario, o esce nel "cono da 50°", e forma quello secondario. "E in mezzo?" In mezzo è buio, non esce luce: per questo, quella zona di 50 – 42 = 8 gradi si chiama *Banda scura di Alessandro* (di Afrodisia).

Riassumendo (e ignorando le due rifrazioni): l'arcobaleno primario ha una riflessione, quello secondario ne ha due: ma si possono avere ulteriori riflessioni, generando arcobaleni *ternari, quaternari,* e avanti in questo modo?

A malincuore, ammettiamo di sì: purtroppo, i testi che abbiamo reperito latitano abbastanza sulla matematica, in questo campo. Non abbiamo nulla da obiettare (il calcolo non è difficile) sul fatto che ci si limiti ad enunciare che le nostre due equazioni diventino:

$$\cos i_m = \sqrt{\frac{n^2-1}{8}},$$

ma ci pare corretto almeno dare una traccia per giustificare le osservazioni: "gli arcobaleni terziario e quaternario appaiono come dei cerchi attorno al Sole, il quinquinario è praticamente coincidente con il secondario e l'esanario si trova all'interno del primario" ...e un paio di disegnini per i casi più balordi no, vero[29]? Comunque, sappiate che al momento sono stati calcolati tutti gli arcobaleni sino al caso k=20. Se qualcuno ha voglia di rifare i calcoli, pubblicheremo molto volentieri.

Qualcuno di voi sa guidare un aereo? Se "vedete l'arcobaleno" mentre siete ad una quota sufficiente, ci dicono sia uno spettacolo molto bello: infatti, qui, il cono lo vedete *tutto*, e l'arcobaleno è *circolare*.

Ci resta un solo dubbio: ma negli arcobaleni circolari, dov'è la pentola d'oro?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[29] In realtà esiste una trattazione accurata: Boyer, C. B. (1987). *The Rainbow: from Myth to Mathematics.* Princeton, N.J.: Princeton University Press. Sì, proprio *quel* Boyer. E no, non lo abbiamo trovato da nessuna parte.