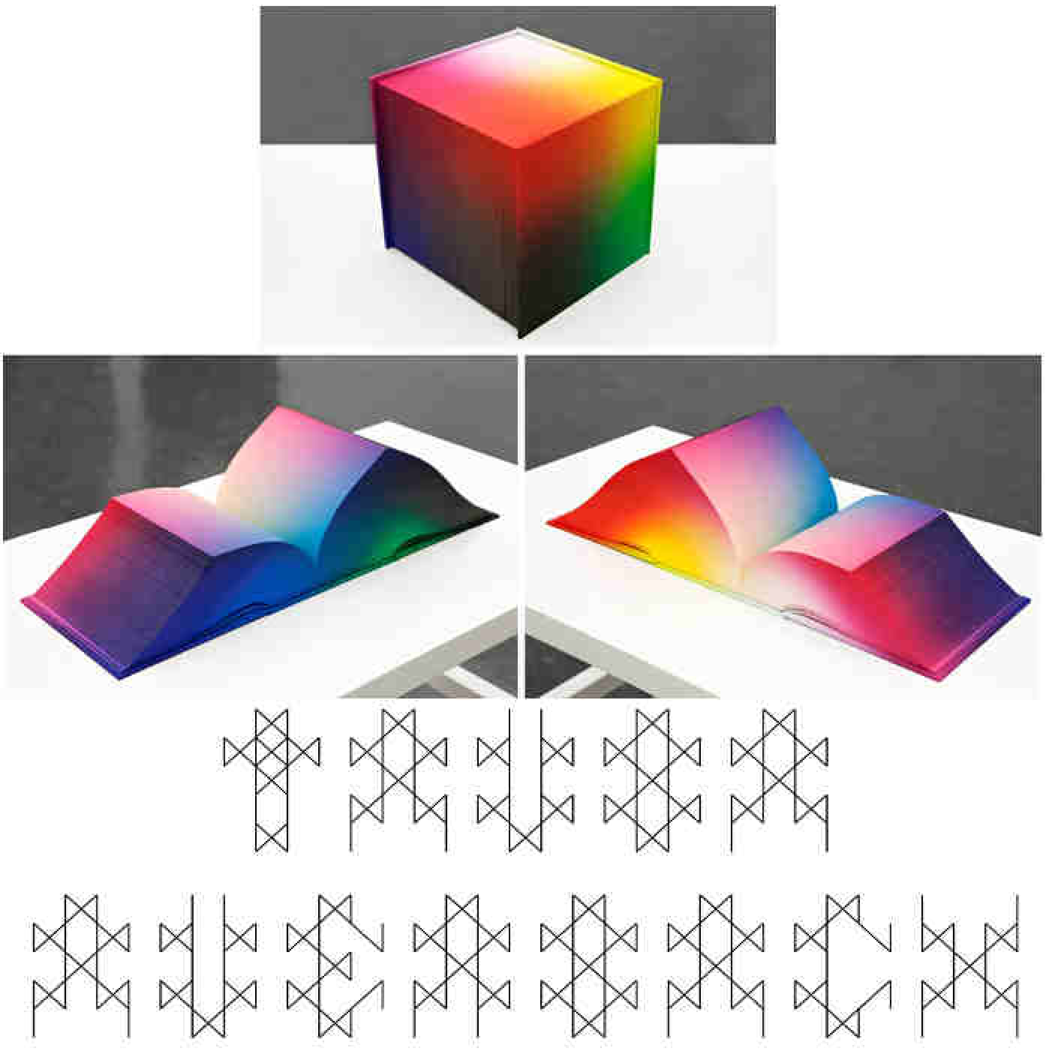
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 197 – Giugno 2015 – Anno Diciassettesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM196 ha diffuso 2954 copie e il 14/06/2015 per Google eravamo in 10'300 pagine.

Una delle cose più frustranti che conosciamo è guardare un cubo RGB: dovendo ogni punto rappresentare un colore, guardarci dentro è impossibile. ***Tauba Auerbach*** (http://www.taubaauerbach.com/) ci ha provato con il ***RGB Colorspace Atlas***: un libro 8x8x8 pollici che potete sfogliare e, finalmente, vedere dentro al cubo. La seconda parte della copertina è il modo, secondo noi geniale, con il quale si firma.

1. Matematica per amore

> *"Devo dire di non essermi mai sentita svantaggiata dall'essere una matematica donna; forse in qualche misura è vero l'opposto."*

Nell'estate del 1980, Mosca è al centro dell'attenzione del mondo.

1 *Misha, mascotte di Mosca 1980*

È un'estate olimpica, e già questo basta, di norma, ad attirare l'attenzione di tutti i media del pianeta. Poi si tratta dei primi giochi olimpici in terra russa, i primi ospitati dall'Unione Sovietica, e questa sarebbe una novità attraente anche in condizioni normali. Ma le condizioni non sono normali: queste sono Olimpiadi particolari, mutilate nelle partecipazioni e in acre odore di guerra fredda. Anche le Olimpiadi precedenti, quelle canadesi di Montreal 1976, non erano state tranquille: molti stati africani avevano rinunciato a parteciparvi per protestare contro il Comitato Olimpico Internazionale che non aveva vietato la partecipazione ai Giochi a quelle nazioni, come il Sudafrica, che praticavano l'apartheid. Quelle ancora prima, a Monaco nel 1972, avevano dovuto registrare l'assassinio di undici atleti israeliani da parte di un commando palestinese. E anche le successive, Los Angeles 1984, non saranno normali, perché disertate da un gran numero di paesi dell'Est Europa: ma questo avviene soprattutto per rappresaglia, per rendere pan per focaccia a coloro che proprio qui, a Mosca nel 1980, avevano deciso di non venire.

Pochi mesi prima dell'accensione del braciere olimpico da parte dell'ultimo tedoforo, nel giorno della vigilia di Natale del 1979, l'esercito sovietico aveva invaso l'Afghanistan. Fino a quel momento lo stato asiatico non era molto conosciuto: qualche giovane occidentale forse ne sospettava l'esistenza per un prodotto vietato dalla maggior parte delle giurisdizioni; qualche nerd ante-litteram poteva averlo registrato nella memoria come il primo nell'elenco alfabetico degli stati del pianeta; a parte questo, il nome restava quasi sconosciuto. Ma il 1980 lo porta bruscamente alla ribalta: i telegiornali insegnano presto a tutti che la sua capitale è Kabul, che si tratta di uno stato musulmano e dalla lunga tradizione guerriera, e ripetono continuamente strane parole destinate a diventare familiari, come *mujaheddin e pashtun.*

Così, il mondo assiste ad un rinfocolarsi degli attriti tra le superpotenze: il pianeta è ancora diviso in due blocchi chiaramente contrapposti, e gran parte dei paesi occidentali, capeggiati dagli Stati Uniti, diserteranno le olimpiadi moscovite: altri paesi, come l'Italia, metteranno in atto una sorta di protesta di compromesso, inviando atleti purché non dipendenti dalle forze armate, e comunque privi delle insegne nazionali.

A vederla con gli occhi della storia, viene da immaginarsi quell'estate moscovita come del tutto particolare: un miscuglio di tensioni e di festa, di paure e di celebrazioni incompiute. Ma la storia e i ricordi, anche se guardano agli stessi eventi, hanno sempre sguardi ben diversi: perché gli occhi della storia sono – o dovrebbero essere – occhi senza coinvolgimenti e senza età, e attenti soprattutto ai fatti di importanza planetaria; i ricordi sono invece modulati soprattutto dalle emozioni, le emozioni dai sentimenti, i sentimenti inevitabilmente dall'età, dalla vita, dalle passioni di chi ricorda.

Così, non è davvero possibile sapere come possa ricordare quell'estate Svetlana. Si può provare ad immaginarlo, certo; si possono avanzare delle ipotesi, tentare una ricostruzione: ma in verità non c'è alcuna garanzia che la ricostruzione sia davvero realistica. Perché Svetlana ha quattordici anni, e il mondo a quattordici anni ha dei colori del tutto particolari, che non tornano più.

2 *Svetlana*

Capelli biondi e lunghi, tenuti in ordine da un cerchietto o annodati in una treccia; occhi profondi, e soprattutto attenti. Svetlana ha un nome che ricorda la luce, come da noi fanno Lucia o Lucilla, e di certo la luce è generosa con il suo volto: sembra trovarcisi bene, sembra diffondersi allegra tra la fronte e il mento; o forse è che le ragazzine di quattordici anni emettono luce propria. È facile immaginarla con gonna al ginocchio e camicetta bianca, e soprattutto sorridente: perché non dovrebbe esserlo? Svetlana è in vacanza, in quell'estate del 1980, e le vacanze sono per definizione un periodo allegro e felice.

Certo, forse i venti di guerra provenienti dai confini asiatici saranno argomento di seria preoccupazione e di lunghe discussioni. Papà Yakov e mamma Valentina ne parleranno spesso, a casa, quando la famiglia si ritrova a cena, anche perché Mikhail, il fratello di otto anni maggiore di Svetlana, si sentirà più direttamente chiamato in causa, e avrà qualche ragionevole apprensione: i soldati dell'Armata Rossa che stanno combattendo nel deserto sono ragazzi della sua stessa età.

Certo, in quelle sere d'estate Svetlana seguirà alla televisione i giochi olimpici, come potrebbe non farlo? Forse si esalterà per le evoluzioni delle sue connazionali e coetanee nella ginnastica artistica, forse sarà più attratta dal fascino immediato e atavico dell'atletica leggera, o da altro ancora.

Ma, ne siamo certi, la cosa che più riempie la testa di Svetlana, in questa estate speciale, è un'altra. Perché Svetlana ha un'anima attenta e una sensibilità speciale: è affascinata dalla cultura umanistica, adora la letteratura, scrive poesie e racconti; e non nella maniera ingenua in cui lo fanno quasi tutti gli adolescenti. Mamma e papà l'hanno esortata a dedicarsi alla letteratura e, anche se la loro figliola ha solo quattordici anni, hanno già ragione di essere orgogliosi dei loro consigli: Svetlana ha già vinto dei premi in concorsi di poesia, e ha già sbaragliato gli avversari nei concorsi nazionali di letteratura riservati agli studenti delle superiori. E tutto questo nonostante sia più piccola dei suoi compagni di classe: perché è così intelligente da trovarsi avanti negli studi scolastici.

È allora facile capire di cosa possa aver piena la testa una ragazza così precoce, intelligente e sensibile: dell'amore, di cos'altro, sennò?

E infatti, in quell'estate complicata e nervosa, la testa di Svetlana è piena solamente di Vladimir. Le quattordicenni si innamorano in maniera integrale, di solito, ed è immaginabile che Svetlana, in quella vacanza estiva, non faccia altro che pensare al suo Vladimir: le serate estive arredate di tramonti e illuminate dalla luna parlano certamente lo stesso linguaggio in ogni parte del mondo, si celebrino su una spiaggia della Crimea o in una campagna inglese, sui colli di Roma o in un'isola dei Caraibi.

Ma gli amori estivi devono fare i conti con l'autunno, l'inverno e tutta la sequela delle stagioni, specialmente se gli innamorati sono giovani e distanti. Svetlana abita a Kharkov, in Ucraina, mentre Vladimir sta a Mosca. La capitale così grande e bella, così festosa durante le Olimpiadi, deve assumere un po' l'immagine della nemica, agli occhi di Svetlana, perché le porterà lontano il suo Vladimir. E infatti la vacanza finisce, e gli sguardi e i sorrisi delle serate estive sono presto sostituiti dalle lunghe lettere invernali che corrono da Mosca a Kharkov, da Kharkov a Mosca. E le lettere d'amore hanno questa strana caratteristica, che si scrivono in lunghe e interminabili ore e si leggono nel volgere di pochi istanti.

Quando arrivano sono certo istanti densi di gioia, certo: e almeno all'inizio ripagano delle attese, dei nasi gelati appoggiati alla finestra per sorvegliare il sospirato arrivo del postino, del senso di vuoto che rimbomba nel cervello quando la mente è dislocata a centinaia di chilometri dal corpo. Ma cosa fare se quelle lettere, col passare del tempo, diventano sempre meno frequenti, sempre più corte? Se si leggono già così in fretta, se durano già così poco anche quando riempiono fittamente molte pagine, come fare se le parole scritte arrivano sempre più tardi, e sempre più rare?

È una storia comune: gli amori estivi finiscono con l'estate: l'aggettivo "estivo" disinnesca il nobile sostantivo, e i giovani ritagliano un piccolo reparto della memoria dove conservare il ricordo del breve tumulto di emozioni. Succede quasi sempre così. Quasi.

Svetlana non è d'accordo. La sua sensibilità di poetessa non inibisce affatto la sua razionalità, la sua capacità di appassionarsi rafforza, anziché indebolire, il suo senso pratico. Del resto è precoce negli studi, sa già che finirà col diplomarsi a soli sedici anni, non la si può certo accusare di non saper distinguere le cose importanti dalle sciocche vanità. Quel che le diventa subito chiaro è che la sola maniera per salvare il suo amore dall'oblio è quella di lasciare Kharkov e andare a Mosca. Ma questo comporta indubbiamente dei problemi, e non solo logistici, per una quindicenne ucraina.


3 *L'Università di Stato di Mosca, la più antica e prestigiosa dell'URSS*

L'Unione Sovietica è sconfinata, è lo stato più esteso del mondo. In termini di distanze sovietiche, gli ottocento chilometri che separano Mosca da Kharkov non sono certo particolarmente significativi, ma restano tanti per una ragazzina. Però una soluzione c'è, e Svetlana la prende subito in considerazione: se è studentessa troppo brava e saggia per non voler proseguire gli studi, e anche se è ancora troppo giovane per aspirare ad una vita indipendente, è pur vero che l'anno prossimo, quando avrà preso il diploma, anziché andare all'Università di Kharkov come previsto potrebbe andare alla grande Università di Mosca.

Tutto risolto? No, non proprio. L'Università Lomonosov, l'università statale di Mosca, è la più grande e prestigiosa dello stato. Se Svetlana riuscirà ad entrarvi, avrà la sua vita nel campus e potrà stare vicina a Vladimir, ma entrare in quell'Università è impresa quasi impossibile, anche per una studentessa brillante come lei. Perché la concorrenza è forte, fortissima: i migliori studenti di tutte le quindici repubbliche sovietiche aspirano ad entrare in quel glorioso istituto. E anche se Svetlana è così brava e intelligente da non essere intimidita dall'esercito di diciottenni che vogliono varcare quella soglia, sa bene di dover fare i conti con un'altra difficoltà: un ostacolo che sembra davvero rendere impossibile il suo sogno. Svetlana è ebrea, e l'università accetta solo un numero limitato di studenti ebrei: lo 0,5%.

Ci sono tutte le ragioni per inveire contro il cielo, maledire la sfortuna, irritarsi contro la burocrazia, denunciare razzismo e prevaricazione. Ci sono tutte le giustificazioni per le lacrime e i pianti disperati; una ragazzina che scrive poesie può lottare per il suo amore contro tutto il mondo, ma quasi sempre ne esce sconfitta: la vita non assomiglia quasi mai ad un film di Hollywood.

Ma Svetlana, oltre ad essere una ragazzina che scrive poesie, è anche e soprattutto una persona che non si lascia facilmente scoraggiare. Difficile entrare in quest'università? D'accordo. Quote irrisorie per gli studenti ebrei come me? D'accordo. Ma continuiamo a provare, guardare, cercare. E provando, guardando, cercando, Svetlana capisce che la concorrenza è davvero insuperabile, per le facoltà umanistiche; ma per quelle scientifiche le possibilità di farcela sono migliori.

La quindicenne che scrive poesie indaga, si informa, non molla la presa. La ragazzina che ama la letteratura scopre che per entrare all'Università di Mosca contano anche le raccomandazioni, le conoscenze, e finisce con il rendersi conto che da questo punto di vista l'accesso alle facoltà scientifiche è regolato in maniera un po' più corretta e onesta, e la concorrenza forse meno agguerrita. L'impresa è sempre impossibile o quasi, ma quelle tenui speranze di farcela, per quanto irrisorie, son tre volte maggiori per la Scienza che per la Letteratura.

Tanto basta, ed è facile immaginare il lieto fine della storia: Svetlana dedica il suo ultimo anno di liceo a prepararsi forsennatamente per l'esame orale di ammissione alla facoltà di Matematica dell'Università di Mosca. Affronta ogni teorema con la dedizione che solo la determinazione più profonda e l'amore adolescenziale sanno dare: disseziona ogni definizione, frantuma ogni problema. Ogni equazione irrisolta è un ostacolo verso la sua felicità futura, e come tale viene trattata; e nessuna rimane senza soluzione. E quando, un anno dopo, affronterà l'esame di ammissione, non ci saranno dubbi sul suo esito: Svetlana viene ammessa all'Università. È a Mosca, dove vive Vladimir. E vissero felici e contenti.

Raccontata così, sembra davvero la trama di un film hollywoodiano con tanto di happy-ending. Ed è piacevole poter dire che sì, in fondo è andata proprio così, lieto fine compreso; Svetlana vive ancora con Vladimir, e hanno anche tre figli. Si potrebbe lasciare al lettore la libertà di immaginare il non detto, e l'ordinario seguito della storia: ad esempio, che Svetlana potesse tornare alla poesia e alla letteratura, subito dopo l'università, per far felici i suoi genitori che verso quel destino l'avevano indirizzata e per dare finalmente libero sfogo alle sue passioni naturali; e immaginarla adesso tra i prossimi candidati al Nobel per la Letteratura dopo aver bruciato su un rogo propiziatorio tutti i sudati libri di testo di matematica. O anche, se si preferisce un po' di tensione, che abbia scelto di combattere contro le limitazioni universitarie di accesso agli studenti ebrei, diventando una sorta di pasionaria, finendo magari col diventare famosa e fidanzarsi con Gorbacev, suggerendogli la *glasnost* e la *perestroika*. Ma in realtà, il "seguito e il non detto" sono meno prevedibili, e come spesso accade, forse più divertenti di quanto è normalmente immaginabile.

4 *Svetlana Yakovlevna Jitomirskaya*

Il nome completo della nostra irriducibile quattordicenne è Svetlana Yakovlevna Jitomirskaya[1]. Il patronimico era facilmente immaginabile, perché sappiamo già che suo padre si chiamava Yakov.

[1] In cirillico: Светлана Яковлевна Житомирская. La lettera 'iniziale del cognome è la "Že", e ricorda tanto due parabole simmetriche che si incontrano nell'origine degli assi cartesiani. La traslitterazione internazionale deriva dal francese, che la riconduce ad una "J"; quella anglosassone la traslittera con "Zh", cosa che (unitamente alla declinazione al femminile anche del cognome, come si usa nel russo) spiega l'apparente differenza di cognomi tra padre e figlia.

Svetlana nasce a Kharkov il 4 Giugno 1966, ed è davvero una precoce e brava studentessa che ben promette nella cultura umanistica; così come è vero che sono mamma e papà a spingerla affettuosamente verso quella direzione. Quello che non si è detto è che tale suggerimenti non venivano da una predilezione esplicita dei genitori verso quelle materie (si è solo lasciato ingannevolmente libero il lettore di pensarlo), ma per ragioni radicalmente diverse.

Il fratello di Svetlana, Mikhail Zhitomirskii, già a quei tempi era avviato alla carriera matematica, e ha continuato a percorrerla con successo: Mikhail è oggi docente all'università di Haifa, in Israele, ed è un esperto di varietà differenziabili (*differentiable manifolds*[2]). Come se non bastasse, papà Yakov poteva permettere una vita dignitosa ai suoi figlioli perché era professore proprio a quell'Università di Kharkov che Svetlana cercherà disperatamente di evitare: e nell'Unione Sovietica del 1980 essere professore universitario garantiva sicurezza e molto prestigio. E sì: Yakov insegnava matematica, non letteratura.


5 *Valentina Mikhailovna Borok*

In una famiglia di quattro persone, due brillanti matematici possono bastare. C'è da chiedersi cosa potesse pensare Valentina, la mamma, di fronte ai discorsi professionali che probabilmente imbastivano Yakov e Mikhail. O forse non vale la pena chiederselo, perché non sappiamo per certo se in famiglia si siano mai tenuti discorsi di matematica: ma siamo ragionevolmente sicuri che, in caso affermativo, la voce della mamma sarebbe stata la più autorevole del gruppo.

Valentina Mikhailovna Borok, moglie di Yakov e madre di Mikhail e Svetlana, a quel tempo è la più grande matematica di tutta l'Ucraina. Ha pubblicato una serie di memorie fondamentali nella teoria generale delle equazioni alle derivate parziali: si tratta di un'ottantina di articoli pubblicati dalle maggiori riviste del settore. A Kharkov fonda addirittura una scuola indirizzata esplicitamente allo studio delle equazioni differenziali a derivate parziali, ed è verosimile che le sue capacità didattiche e la sua dedizione verso i propri studenti fossero anche superiore alle sue già straordinarie capacità di ricercatrice.

Se Yakov e Valentina indirizzano la piccola Svetlana verso le discipline umanistiche, non è certo per odio verso la matematica e le scienze: probabilmente, temevano solo che ci fosse "troppa matematica" in famiglia, se anche Svetlana avesse deciso di dedicarvisi.

Il destino, forse, o forse la passione per Vladimir, hanno deciso in maniera diversa. Non sappiamo cosa devono aver pensato genitori e fratello di Svetlana, quando l'hanno vista, all'ultimo anno delle superiori, dedicarsi anima e corpo alla matematica. Forse saranno stati contenti; forse, più semplicemente, avranno solo scosso un po' la testa con espressione di impotenza, come fanno sempre gli adulti quando vedono messa in atto l'irremovibile decisione dei ragazzi.

E chissà cosa avrà pensato la stessa Svetlana: lei comincia a confrontarsi seriamente con la matematica per amore di Vladimir, e si sceglie un compito difficile: deve entrare all'Università di Mosca, dove è così difficile entrare, per un ebreo. Avrà cominciato con il livore, vedendo ogni formula come un nemico da combattere? Avrà immaginato di essere circondata da pazzi, visto che tutti, in famiglia, hanno eletto questo terribile ostacolo che è la matematica a loro professione?

[2] E non è difficile trovarlo in rete, insieme ad una pletora di sue pubblicazioni.

Non lo sappiamo. Sappiamo però come è proseguita la storia, che è di nuovo abbastanza sorprendente. Tanto per cominciare, il "terribilissimo esame" di ammissione all'Università non si rivela poi terribile come paventato. Svetlana è certo preparatissima, ma è lei stessa che racconta che il tanto temuto trattamento riservato ai candidati ebrei, di fatto, a lei non viene applicato. Forse, sospetta, perché in fondo lei è figlia di due stimatissimi professori universitari, chissà.

Ma c'è un'altra cosa imprevista, anche se forse non così imprevedibile; e cioè che l'amore di Svetlana per Vladimir non verrà certo mai meno, ma dovrà fare i conti con un'altra passione: quella che Svetlana scopre di avere per la matematica. Ci prende gusto, insomma: al punto che è lo stesso Vladimir a ricordare alcuni aneddoti rivelatori di cotanto ardore. Dopo aver mosso mari e monti per giungere a Mosca da Vladimir, ogni sceneggiatore che si rispetti la immaginerebbe totalmente devota e pronta a centellinare ogni istante possibile per star vicino al fidanzato: anche perché l'università è impegnativa, e non lascia certo troppo tempo libero agli studenti innamorati.


6 *Vladimir Mandelshtam, chimico*

Oltre allo studio, ci sono anche degli impegni sconosciuti agli universitari occidentali, ma del tutto inalienabili per i ragazzi sovietici: ad esempio il lavoro nei *kolchoz*[3], le fattorie collettive. Vladimir era riuscito ad avere un singolo giorno di licenza dopo un mese di lavoro nella lontana fattoria: prese il treno, viaggiò tutta la notte per vedere Svetlana anche se solo per poche ore. Giunto a destinazione, probabilmente si aspettava di vedere la sua amata corrergli incontro con i biondi capelli mossi dal vento, ma in realtà dovette aspettare tre ore buone prima che lei si degnasse di raggiungerlo: non voleva assolutamente perdere una lezione sulle equazioni differenziali di un altro Vladimir, il grande Igorevich Arnold.

C'è qualcosa di più terribile da fare, nei confronti di un fidanzato innamorato? Beh, dipende… rubargli tre ore dopo un'odissea affrontata solo per vederla poche ore (e vedersi preferito da una lezione di matematica), è forse insuperabile, ma anche vedere la futura mogliettina scomparire per un po' il giorno stesso del matrimonio meriterebbe la palma d'oro della sfacciataggine; eppure è proprio questo che ha fatto Svetlana: era certo un giorno fatidico, quello, ma non se la sentiva proprio di rinunciare ad una lezione di Tom Spencer sull'analisi multiscala.

È insomma evidente che, se Svetlana ha dimostrato a Vladimir senza ombra di dubbio tutto il suo amore, stravolgendosi la vita pur di arrivare da lui a Mosca, anche Vladimir, da parte sua, ne ha sopportate abbastanza pur di tenersi stretta Svetlana. Non c'è da sorprendersi se i due, appena ne hanno la possibilità, si sposano e mettono in cantiere Olya[4], la primogenita.

Quella di Svetlana e Vladimir non è solo una storia d'amore a lieto fine, è anche una storia di collaborazioni scientifiche: Svetlana si laurea nel 1987, incomincia la sua carriera di ricercatrice nell'istituto moscovita di Teoria di Predizione dei Terremoti e Geofisica Matematica. Entrambi prendono il dottorato nel 1991, e forse per festeggiare il

[3] Contrazione di "*kollektivnoe chozjajstvo*", proprietà agricola collettiva. Non troppo diverse dai kibbutz israeliani, sono finite nel 1992 con il crollo dell'URSS.

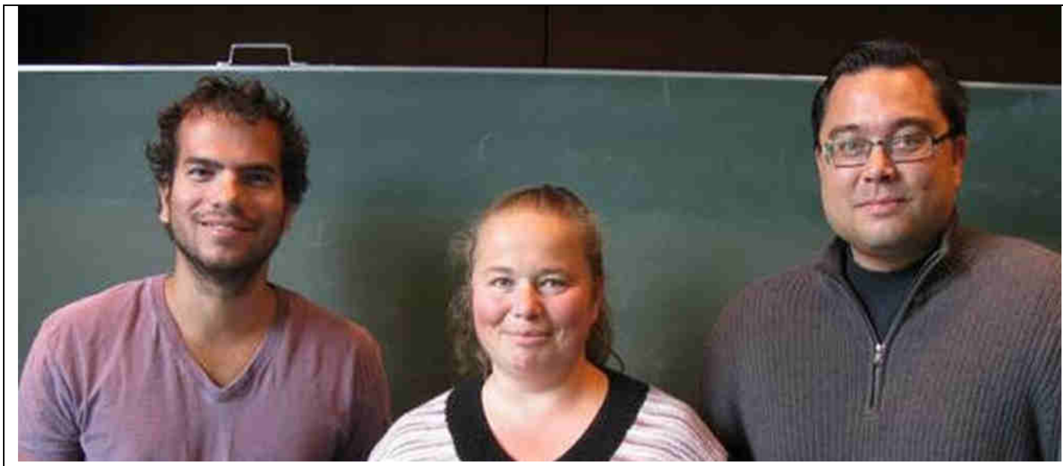
[4] Il problema maggiore nello scrivere "compleanni" di matematici viventi (specialmente se persino più giovani di chi scrive) è ovviamente l'invidia. A parte questo, però, esiste anche un'altra difficoltà, meno facilmente governabile, ovvero la paura di trascendere troppo facilmente nel pettegolezzo. Abbiamo ragionevoli motivi di pensare che a Svetlana quest'articolo possa non dispiacere, e anche dare per scontato che la sua storia sia di dominio pubblico, visto che si trova in rete. Però la rete è fin troppo generosa, ed è per questo che dobbiamo mettere un limite alle ricerche: ad esempio evitando di pubblicare quella che crediamo essere la foto di Olya. Sappiate comunque che, a meno che non ci si sia sbagliati troppo nelle ricerche, che a) anche Olya è matematica, come la mamma e la nonna, e lavora in una università della California; e b) anche Olya è molto carina, proprio come la mamma e la nonna. Continuità indiscussa attraverso tre generazioni.

titolo accademico scrivono una memoria congiunta in cui mostrano di aver scoperto un'espressione esplicita delle funzioni di Green dell'operatore di Schrödinger. A questa ne seguiranno altre, scritte sia in collaborazione sia da soli.

Sempre nel 1991, e anche stavolta quasi per combinazione, Svetlana e Vladimir lasciano quella che ormai è solo Russia, non più l'Unione Sovietica, e si trasferiscono negli Stati Uniti. Vladimir riceve un'inaspettata offerta di lavoro (un *postdoc*, per la precisione) da parte dell'USC, l'Università della Southern California; parlando di USA, a Svetlana sarà tornato in mente che il prof. Klein, l'anno prima, l'aveva invitata a Irvine. È solo dopo aver sbirciato l'atlante che i due scoprono che anche Irvine si trova nella California del sud, e la coincidenza sembra troppo curiosa per non essere sfruttata.

Il circolo virtuoso delle combinazioni si chiude infine quando Svetlana, che in fondo all'Università di Irvine aveva solo un incarico part-time, impressiona così tanto il suo mentore americano, Abel Klein[5], che questi muove mare e monti per farla restare a Irvine a tempo pieno. Le conoscenze di Svetlana che tanto impressionarono Klein erano quelle sull'analisi multiscala: ovvero, proprio il tema per il quale Svetlana scappò via per un paio d'ore il giorno del suo matrimonio.

In California Svetlana si trova bene, e porta avanti i suoi studi sugli operatori di Schrödinger: si dedica all'analisi di fenomeni spettrali che hanno un forte impatto nella fisica teorica, e approfondisce lo studio degli operatori quasi-periodici. Per questo studio riceve il prestigioso premio Satter dell'American Mathematical Society, perché il suo lavoro, che chiama in causa la teoria ergodica, i sistemi dinamici, il calcolo delle probabilità e l'analisi funzionale e armonica, ha prodotto immediati e significativi risultati con applicazioni dirette a diverse scoperte della fisica.



7 *Il gioco delle tre carte: trovate la Medaglia Fields*[6]

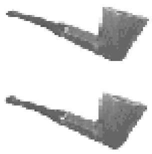
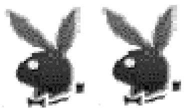
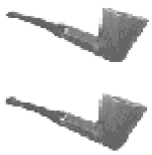
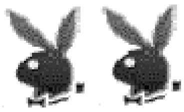
E la storia non è finita: Svetlana Jitomirskaya è ancora giovane, e si ritrova a presiedere conferenze di importanza internazionale, e a tenere discorsi plenari ai Congressi Internazionali di Fisica Matematica. Non sappiamo se scriva ancora poesie e racconti, e ci auguriamo che non abbia mai rimpianto la sua scelta da quattordicenne innamorata.

Di certo, la Matematica ha fatto un affare, nel catturarla.

[5] Viene da chiedersi come avrebbe mai potuto scegliere una carriera diversa dal matematico, uno studioso che si chiama "Abel" di nome e "Klein" di cognome…

[6] Se proprio non ce la fate, tornate a leggere il compleanno di Laura Bassi, RM189, "La matematica svelata", ottobre 2014.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Abbiamo ricominciato!			
…ma io continuo a perdere			

2.1 Abbiamo ricominciato!

A tirare con l'arco; non solo, ma quest'anno ci sono due grosse novità: tanto per cominciare, con incommensurabile sprezzo del pericolo (provate voi, a litigare con una sega circolare) e impensate capacità visionarie (nel senso che ha fatto tutto a mente, senza disegni), Doc è riuscito a costruire una struttura su cui posare il bersaglio: ne è talmente fiero che ha preso la fotografia da una posizione piuttosto insolita. Carino, vero?

8 *Il Grande Supporto!*

9 *L'albero Sacro!*

La seconda grande novità è che seguendo le più robuste tradizioni Celtiche, ora anche i Chinotti hanno il loro Albero Sacro: questo, procurato da Rudy, con peripezie degne effettivamente di una saga *fentasi*, anche se ancora abbastanza in fasce, fa bella mostra di sé nella foto dall'altra parte. Non è ancora confrontabile con le millenarie e nodose querce dei Salassi, ma si vede chiaramente che ha intenzione di lasciarsele alle spalle.

...e cosa c'entra tutto ciò con il problema? Assolutamente nulla, ma volevamo farvi vedere che in tutte le storie che vi raccontiamo per condire i problemi, un fondo di realtà c'è.

Nella foto del Grande Supporto, vedete anche un tratto della linea di tiro da quaranta piedi: ora, anche se la cosa ha una certa sua compattezza strutturale, il fatto di avere tutto quanto a prato uniforme è considerato da Doc piuttosto noioso: volendo *movimentare* un po' l'ambiente, Doc ha optato per decorare una zona in modo tale che il bordo e un'area centrale restino a prato, ma il resto sia fiorito: volendo inserire una nota matematica nel tutto, ha definito lo stato di *ogni punto* della zona nel seguente modo:

"Supponiamo di porre l'origine delle coordinate al centro della zona soggetta alle nostre attenzioni vivaistiche: un punto è erboso se soddisfa la condizione $c \leq \big||x| - a\big| + \big||y| - a\big| \leq b$, con $0 < c \leq 2a \leq b$."

"Cosa c'entra il '2'?"

"Per variare un po'".

"E quanto valgono a, b e c?"

"Non ne ho la più pallida idea: quello che voglio è che la parte fiorita e la parte erbosa occupino la stessa superficie, e che questa sia minore di 200 m^2".

Ragazzi, potete dargli una mano? Conoscendo Doc, quello continuerà a camminare sulla linea di tiro sin quando non ha trovato questi tre valori, e tirare diventa pericoloso... Che forma ha il disegno, e quanto valgono a, b e c?

2.2 ...ma io continuo a perdere

Se vi state chiedendo come mai compaiano così tanti problemi ambientati al *Campo dei Chinotti*, la ragione è presto detta: Rudy utilizza questa come neanche tanto sottile forma di rivalsa nei confronti di *qualcuno* che, in assenza di Fred[7], riesce nella migliore delle ipotesi a farlo arrivare secondo *[Un* game *della scorsa settimana, comunque, si è concluso* 4-6. *Gli altri cinque, invariabilmente,* 0-6 *(RdA)]*. Comunque, non demordo: bridge, scacchi, matematica, tiro con l'arco… Esistono ormai numerosi campi nei quali ho dimostrato di avere *più entusiasmo che capacità*, e mi diverto (tanto, anche se vinco, mica li paga Doc, i chinotti…).

Questa volta, il Nostro si trova alle prese con una serie di zone piuttosto ampie di forme quadrangolari irregolari (sono tutte quadrangolari, tutte irregolari, e sono una diversa dall'altra); l'intento di Doc, visto che esistono ampi camminamenti tra una zona e l'altra, sarebbe quella di piantarci dei fiori, ma il padrone di casa *[...che lasciamo vincere perché altrimenti non ci fa più entrare, diciamocelo (RdA)]* è terrorizzato dal fatto che, riempiendo ognuna delle zone con un determinato fiore, il tutto venga "piatto" e "noioso" (sue testuali parole).

La sua idea era quella, per ogni quadrilatero, di determinare un punto O tale che, una volta tirati i segmenti dai punti medi dei lati sino ad O, il nostro quadrilatero risultasse diviso in quattro parti (e fin qui non ci vuole, molto, direte voi) e, per non fare ingiustizie verso nessuna qualità di fiori, che queste quattro aree fossero *di area uguale*. E, dovendo ripetere l'esercizio per un buon numero di quadrilateri tutti diversi tra loro, procedere per tentativi non è proponibile: si esige un metodo generale!

Doc è talmente preso dai calcoli e disegni mentali[8] che la sua *performance* sta visibilmente calando: ecco, se poteste *non* risolvere il problema sino alla fine della stagione arcieristica...

3. Oldies & Goldies

3.1 [RM181 – Febbraio 2014] – Supertask!

Questo secondo Rudy non lo avete risolto perché abbiamo nascosto *troppo bene* il problema: infatti, parlavamo di altri tre problemi dicendovi che non erano quelli i problemi (e, nel frattempo, a Rudy ne è venuto in mente un altro. No, non ve lo diciamo, vi distraete troppo). Quindi, adesso ve lo mettiamo qui dematematizzato.

Su due vecchi rotoli da calcolatrice sono scritti di seguito, senza spazi e senza zeri iniziali, i numeri da 1 a 100 (duplice copia, i due rotoli sono quindi perfettamente identici): insomma una cosa del tipo: 123456789101112131415l...9596979899100. Da ognuno di questi rotoli dovete cancellare *cento cifre*, con due obiettivi diversi:

[7] Maturità, quest'anno. E un'antica quanto irragionevole legge proibisce di portare l'arco all'orale.

[8] Come avete notato nell'aneddoto del problema precedente (vero), il Nostro ha una grande capacità di visualizzazione, e quindi schifa carta & matita.

1. Il primo rotolo, leggendo le cifre restanti di seguito, dovrà contenere il numero *più grande possibile*.
2. Il secondo rotolo, leggendo le cifre restanti di seguito, dovrà contenere il numero *più piccolo possibile*.

Supponendo abbiate brillantemente risolto entrambi i problemi, *quanto vale la differenza tra i due numeri*?

Espansione di cui non sappiamo la risposta: esiste un metodo generalizzato? Ad esempio, scrivo i primi k numeri in base b, cancello k cifre: che metodi uso (nel caso "minimo" e nel caso "massimo") per cancellare le cifre? Esiste un metodo per calcolare "alla svelta" (ossia senza fare il conto "lungo") quanto valga la differenza?

4. Bungee Jumpers

Provare che in ogni numero di 16 cifre, esiste una sequenza di cifre consecutive il cui prodotto è un quadrato perfetto.

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Soluzioni e Note

Giugno.

Senza punti esclamativi, perché ne è già passato metà, mentre scrivo, e chissà quanto ne sarà passato quando leggerete.

Abbiamo una scusa per il ritardo, questa volta, ma non è forse vero sempre? Lasciamo perdere e vediamo che cosa ci avete scritto in questo mesetto.

A dire la verità non molto: nessuno ha risolto i problemi del mese, ed abbiamo due contributi su un quesito che non era stato completamente eviscerato la volta passat. Vediamo quello.

5.1 [195]

5.1.1 ALEE_OOh_ooh. ALEe_Oh_Oh

Prima di tutto vediamo di che cosa trattava il problema sui punteggi:

> *Statuiamo il metodo di punteggio: se vinci tre punti, se pareggi un punto a testa, se perdi niente, non importa il punteggio conseguito. Consideriamo il girone unico, abbiamo n squadre: alla fine del torneo i punteggi delle squadre sono una serie di interi consecutivi. Quanti punti ha fatto l'ultima in classifica? Esistono diversi "percorsi" che ci portano a questo risultato? Per la vincitrice, quale potrebbe essere stata la peggior posizione?*

Il mese scorso abbiamo pubblicato due soluzioni poco convinte di ***Alberto R.***, nel corso di maggio e giugno ci sono giunti più commenti, cominciamo con ***τρ*** che si legge, correttamente *TauRho*, malgrado quello che scrivevo il mese scorso.

- sia n il numero delle squadre partecipanti al campionato
- ciascuna giocherà quindi $n - 1$ partite
- le partite totali giocate durante il campionato (a partita diretta, senza "il ritorno") saranno $(n^2–n)/2$
- punteggio massimo derivante da una partita 3+0 = 3 punti
- punteggio minimo derivante da una partita 1+1 = 2 punti
- sia k il numero di partite concluse con una vittoria (e quindi generante *3* punti l'una)
- sarà quindi $(n^2–n–2k)/2$ il numero di partite concluse in pareggio (e quindi generante 2 punti l'una)
- sia x il punteggio dell'ultima classificata (ovvero l'incognita richiesta dal problema)

- i punti totali generati alla fine del campionato, per avere la classifica che segua un andamento a punteggi consecutivi, sarà pertanto $(n^2-n+2nx)/2$ (per chiarire: se l'ultima in classifica deve avere x punti, la penultima avrà $x+1$, la terzultima $x+2$ e così fino alla prima classificata che avrà $x+n-1$ punti)
- il punteggio minimo totale ottenibile durante il campionato si ha quando tutte le partite si sono concluse in pareggio (quindi quando $k=0$) e questo valore sarà $[(n^2-n)/2]*2$ ovvero n^2-n
- il punteggio massimo totale ottenibile durante il campionato si ha quando tutte le partite si sono concluse con la vittoria di una delle due squadre (quindi quando $k = (n^2-n)/2$) e questo valore sarà $[(n^2-n)/2]*3$ ovvero $(n^2-n)*3/2$

La prima condizione che dobbiamo imporre è che i punti totali di fine campionato siano compresi tra il minimo e il massimo possibili:

$$[n^2-n] \leqslant \frac{(n^2-n-2nx)}{2} \leqslant [n^2-n]\frac{3}{2}$$

ovvero:

$$\frac{(n-1)}{2} \leqslant x \leqslant n-1$$

Tabelliamo un po', al variare di n (avendo banalmente presente che, almeno in questo universo, n, x e k devono essere valori interi):

n	Limite inf (arrotond. intero)	Limite sup	Possibili valori di x
1	0	0	0
2	0,5 (1)	1	1
3	1	2	1,2
4	1,5 (2)	3	2,3
5	2	4	2,3,4
6	2,5 (3)	5	3,4,5
7	3	6	3,4,5,6
8	3,5 (4)	7	4,5,6,7
9	4	8	4,5,6,7,8
10	4,5 (5)	9	5,6,7,8,9

Ora, *quella là* è solamente una condizione necessaria (e non sufficiente); abbiamo solo messo dei paletti, per così dire, e bisogna vedere ora per quali valori effettivi di x riportati in tabella è effettivamente possibile il verificarsi; tiriamo in ballo k.

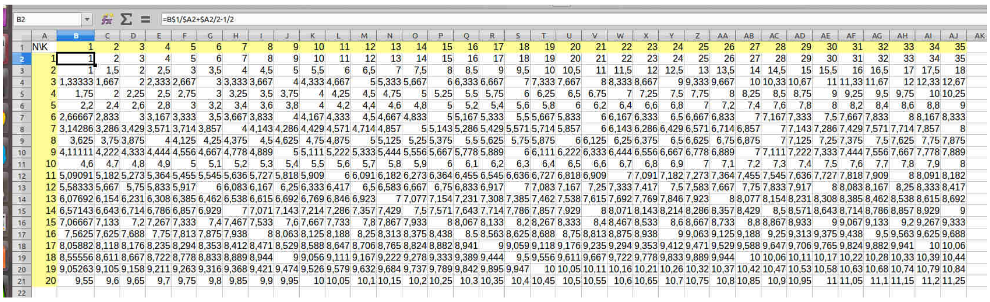
I punti totali di fine campionato *effettivi* varieranno in base a quante partite sono finite in pareggio e quante con vittoria:

$$\frac{(n^2-n-2nx)}{2} = [k]*3 + \left[\frac{(n^2-n-2k)}{2}\right]*2$$

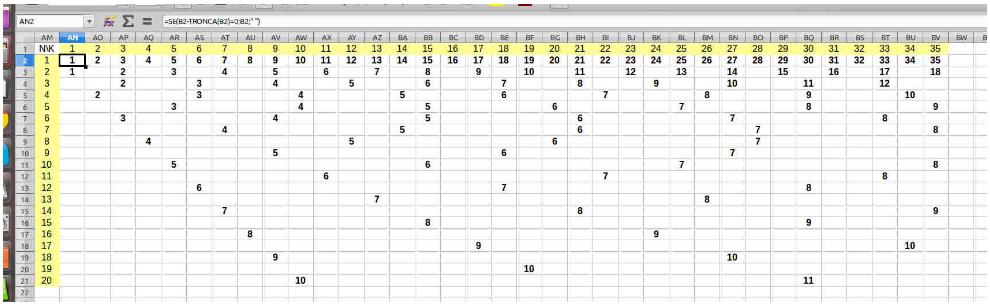
ovvero:

$$x = \frac{k}{n}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}$$

Siccome qua ora si tratta di far variare due parametri (n e k) mi prendo la libertà di usare un po' di Excel (o meglio, Calc, la sua controparte *open*) e vi lascio la formula in vista in modo che se ci fossero errori me li possiate trovare (n è le righe, k è le colonne)



ma siamo sempre in questo universo e pertanto scarto i valori non interi (notare la figata che i numeri uguali assumono forme a parabola)

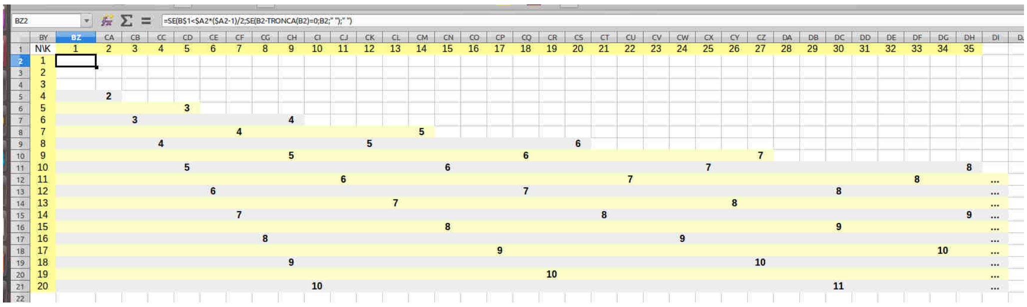


Ma attenzione, questi non sono tutti valori *buoni,* dobbiamo fare una cernita e introdurre la condizione, ovvia, che il numero di vittorie k sia minore del numero totale di partite giocate (ma giura!):

$$k < (n^2 – n)/2$$

(basta la condizione *minore* e non *minore-o-uguale* perché se fosse *uguale* vorrebbe dire che i punteggi delle varie squadre sarebbero tutti multipli di 3 e sarebbe pertanto impossibile avere i punteggi in scala consecutiva; deve esserci per forza qualche pareggio)

Applicando questa condizione alla tabella ne segue:



Questa mi da i corretti valori possibili di x a seconda di quante squadre partecipano al campionato e a quante partite finiscono in vittoria; riportando la tabella di prima:

n	Limite inf (arrotond. intero)	Limite sup	Effettivi valori di x
1	0	0	0
2	0,5 (1)	1	1
3	1	2	1,2
4	1,5 (2)	3	2,3
5	2	4	2,3,4
6	2,5 (3)	5	3,4,5
7	3	6	3,4,5,6
8	3,5 (4)	7	4,5,6,7
9	4	8	4,5,6,7,8
10	4,5 (5)	9	5,6,7,8,9

Momento di riflessione, ovvero proviamo a verificarne qualcuno: ***Alberto R.*** vi ha già mostrato la soluzione *'a schedina'* per n=4 (e k=2) e per n=6 (e k=9) come presentato nelle soluzioni su RM196; io vi porto la soluzione *'a classifica'* per:

- n=4, k=2
- n=5, k=5
- n=6, k=9 (notare che è diversa dalla soluzione trovata da Alberto R)
- n=7, k=7 e k=14
- n=8, k=12 e k=20
- poi basta perché mi son stufato

Caso 4 squadre, 2 vittorie (tot. 6 partite): X=2

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	5	1	2	0	3
2ª	4	1	1	1	3
3ª	3	0	3	0	3
4ª	2	0	2	1	3

Caso 5 squadre, 5 vittorie (tot. 10 partite): X=3

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	7	2	1	1	4
2ª	6	1	3	0	4
3ª	5	1	2	1	4
4ª	4	1	1	2	4
5ª	3	0	3	1	4

Caso 6 squadre, 9 vittorie (tot. 15 partite): X=4

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	9	2	3	0	5
2ª	8	2	2	1	5
3ª	7	2	1	2	5
4ª	6	1	3	1	5
5ª	5	1	2	2	5
6ª	4	1	1	3	5

Caso 7 squadre, 7 vittorie (tot. 21 partite): X=4

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	10	2	4	0	6
2ª	9	2	3	1	6
3ª	8	1	5	0	6
4ª	7	1	4	1	6
5ª	6	1	3	2	6
6ª	5	0	5	1	6
7ª	4	0	4	2	6

Caso 7 squadre, 14 vittorie (tot. 21 partite): X=5

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	11	3	2	1	6
2ª	10	3	1	2	6
3ª	9	2	3	1	6
4ª	8	2	2	2	6
5ª	7	2	1	3	6
6ª	6	1	3	2	6
7ª	5	1	2	3	6

Caso 8 squadre, 12 vittorie (tot. 28 partite): X=5

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	12	3	3	1	7
2ª	11	3	2	2	7
3ª	10	2	4	1	7
4ª	9	2	3	2	7
5ª	8	1	5	1	7
6ª	7	1	4	2	7
7ª	6	0	6	1	7
8ª	5	0	5	2	7

Caso 8 squadre, 20 vittorie (tot. 28 partite): X=6

Posizione	punti	vinte	pareggiate	perse	Partite giocate
1ª	13	4	1	2	7
2ª	12	4	0	3	7
3ª	11	3	2	2	7
4ª	10	3	1	3	7
5ª	9	3	0	4	7
6ª	8	1	5	1	7
7ª	7	1	4	2	7
8ª	6	1	3	3	7

Tutto ciò è quello che ho realizzato il mese scorso; verrebbe da pensare: "Perfetto, funziona per molti casi, è facile che sia giusto!". NO.

Ricordate quando a inizio mail ho scritto che avevo trovato un errore? (*un* e non *l'* perché non è detto che sia l'unico). Beh, in realtà ho scoperto che il discorso NON funziona quando, con n pari > 4, ho $k=n/2$, cioè non è possibile trovare una classifica valida per $n=6$ e $k=3$, per $n=8$ e $k=4$, $n=10$ e $k=5$, e via dicendo (mentre per $n=4$ e $k=2$ funziona!!)

Praticamente, quando il numero di vittorie è la metà del numero di squadre partecipanti, non c'è verso di trovare una soluzione a classifica valida, perché (provare per credere) risulterebbe che una squadra, per fare il punteggio che dovrebbe teoricamente realizzare, dovrebbe giocare più partite di quelle che in realtà sono lecite.

E quindi?

E quindi non sapendo comunque perché, tolgo dalla tabella i valori che si hanno con n pari e $k=n/2$ (tranne per n=4); la tabella conseguente da questa nuova cernita diviene:

N\K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
1																																				
2																																				
3																																				
4		2																																		
5					3																															
6									4																											
7							4							5																						
8												5								6																
9									5									6									7									
10															6										7										8	
11											6											7											8			...
12																		7												8						...
13													7													8										...
14																					8														9	...
15															8															9						...
16																								9												...
17																	9																	10		...
18																											10									...
19																			10																	...
20																														11						...

Ora, finalmente, per tutti i valori iniziali (almeno fino a $n=8$) il tutto funziona e la tabella iniziale diviene infine:

n	Limite inf (arrotond. intero)	Limite sup	Reali valori di x
1	0	0	0
2	0,5 (1)	1	1
3	1	2	1,2
4	1,5 (2)	3	2,3
5	2	4	2,3,4
6	2,5 (3)	5	3,4,5
7	3	6	3,4,5,6
8	3,5 (4)	7	4,5,6,7
9	4	8	4,5,6,7,8
10	4,5 (5)	9	5,6,7,8,9

Si tratta ora, da questi dati, di risalire alla formula in grado di dare risposta alla domanda "dato n il numero di squadre, quanti punti (x) avrà fatto l'ultima in classifica?" e introdurremo una variabile intera che chiameremo t.

Per n dispari >3:

$$X_{n_{dispari}} = \frac{(n-1)}{2} + t \quad con \quad 1 \leqslant t \leqslant \frac{(n-3)}{2}$$

mentre per n pari >2:

$$X_{n_{pari}} = \frac{n}{2} + t \quad con \quad \begin{cases} t=0 & se \quad n=4 \\ 1 \leqslant t \leqslant \dfrac{(n-4)}{2} & se \quad n \neq 4 \end{cases}$$

Chi ci garantisce che tutto questo esposto sia corretto? Ah boh, sicuro non io. Ma se qualcuno è in grado di dimostrarmi la correttezza o l'inesattezza di quello che sviluppato io, ne sarò ben felice.

Anche noi, siamo felici per ogni contributo, ma non dimenticatevi di risolvere i problemi di maggio per il mese prossimo, che se no il Capo si mette in sciopero… Ma tornando a noi, l'altra versione è di ***Rub***, che non ha bisogno di presentazioni:

Ho elaborato il problema della classifica consecutiva di N squadre, e sono arrivato alle seguenti equazioni fondamentali:

1. Con N squadre abbiamo in tutto $\binom{N}{2}$ partite; Numero Partite = $\frac{N(N-1)}{2}$
2. Avendo u come punteggio della ultima squadra, e via salendo u+1, u+2…, u+N–1, la somma dei punti conquistati da tutte le squadre è ricavabile dalla formula di Gauss; Totale Punti: $Nu+\frac{N(N-1)}{2}$
3. Sia P il numero di Pareggi, e V quello delle partite che terminano con una Vittoria, ne consegue
   a. Numero Partite=P+V
   b. Totale Punti=3V+2P
4. Si deriva quindi:
   a. $P+V=\frac{N(N-1)}{2}$
   b. $3V+2P= Nu+\frac{N(N-1)}{2}$

      da cui
   c. $P=N(N-1)-Nu$
   d. $V=Nu-\frac{N(N-1)}{2}$

Per potere avere i risultati in sequenza come richiesto, occorre che ogni tre squadre consecutive in classifica abbiamo conseguito lo stesso numero di vittorie, e rispettivamente zero, uno e due pareggi: quindi in totale 3 pareggi ogni tre squadre; in effetti, i risultati delle squadre potrebbero essere (ad esempio): 6 vv; 7 vvp; 8 vvpp; 9 vvv; eccetera. Ipotizzando un numero N multiplo di 3, ci dobbiamo attendere quindi un numero di pareggi pari ad $N/2$ (ogni due squadre con un punto sono un pareggio).

Ma in realtà sono possibili anche altre soluzioni, con una vittoria sostituita da tre pareggi, che portano alla stessa sequenza di risultati; assumendo

$$P=aN, \text{ e di conseguenza } V=\frac{N(N-1)}{2}-aN$$

si opera con semplice algebra, combinando 4c e 4d, sino alla seguente relazione

$$u=N-1-a$$

cha ha come prima soluzione intere quella data da a=2 (un numero di pareggi pari quindi ad N). Possiamo infine ottenere la soluzione richiesta:

i punti *u* (al massimo) della ultima squadra sono dati dalla seguente relazione: $u=N–2$

Esistono altre soluzioni, con un numero di pareggi pari ad un multiplo di N, che comportano

$$u=N–3,\ u=N–4,\ ..\ \text{sino ad } u=1+N/2$$

che avvicina la soluzione quasi al massimo numero di pareggi ammessi. Nel nostro campionato a 18 squadre quindi abbiamo il punteggio della ultima variabile tra 11 e 16.

E con questo ci fermiamo, completamente soddisfatti. O forse no? Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Con una penna nera disegnate una curva chiusa della forma che preferite. Poi prendete una penna rossa e disegnate una curva chiusa come vi pare. La curva rossa incontra, in un certo numero di punti, la curva nera. Il numero di questi punti è sempre pari, sempre dispari o dipende? E se dipende, dipende da cosa?

7. Pagina 46

Se una qualsiasi delle cifre di $n = a_1a_2...a_{16}$ è lei medesima un quadrato, ossia se vale 0, 1, 4 o 9, la conclusione è immediata; dobbiamo quindi considerare solo gli interi composi dalle cifre 2, 3, 5, 6, 7, 8. Questo significa che ogni prodotto che può rappresentare una soluzione avrà la forma $2^a3^b5^c7^d$, e il nostro scopo consiste nel dimostrare che a, b, c, d sono tutti pari.

Ci sono 16 prodotti che iniziano con a_1, e sono a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, eccetera; e ci sono 16 classi di parità per (a, b, c, d): (D, D, D, D), (D, D, D, P), sino a (P, P, P, P). Se (a, b, c, d) appartiene a quest'ultima classe, la conclusione segue.

Se non vi appartiene, allora i 16 prodotti appartengono alle restanti 15 classi, ma per il Principio della Piccionaia ne deve esistere una coppia $a_1...a_k$ e $a_1...a_t$, con $t>k$, che appartenga alla stessa classe.

Siccome la differenza tra due esponenti dispari o tra due esponenti pari è pari, segue che il quoziente:

$$\frac{a_1\ldots a_t}{a_1\ldots a_k}=a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_t$$

è un quadrato perfetto.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Mettiamo in ordine il gioco

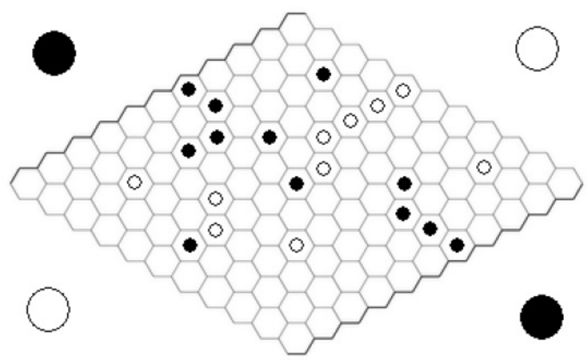
Conoscete l'***Hex***? Non ne abbiamo mai parato in *Zugzwang!*, per il semplice fatto che, come gioco, ci pareva più degno di analisi che di giocata, quindi (visto che gli analizzatori dei giochi là presentati sono in numero leggermente minore dei lettori di questa rubrica[9]) abbiamo preferito passare a cose più giocabili. Ma ultimamente sono successe delle cose.

Tra circa un mese, in una rubrica *fuori di qui* presenteremo l'idea di un lettore che vorrebbe aiuto per sviluppare l'analisi di una variazione dell'Hex: nella fattispecie, il Nostro vorrebbe analizzare il caso di una scacchiera *infinita*. Sorvoliamo sulla facile battuta che "uno vince di sicuro, ma viene lunga"; l'amico, sembra interessato a studiare metodi che, nel complicato ambito prescelto, permettano di aggirare il fatto che il problema è P-SPAZIO-Completo: nel caso non lo sappiate, questo vuol dire che lo risolvete prima della pensione, ma come memoria vi serve una Piazza d'Armi coltivata ad Hard Disk *molto* densi.

Non abbiamo intenzione di analizzare il lavoro (ci aspettiamo lo facciano altri migliori di noi), ma vorremmo fornire un minimo di contributo mettendo ordine tra alcuni interessanti teoremi riferiti al gioco: qui, sembra che una volta tanto siano gli *informatici* a sostenere che si tratta di una perdita di tempo, mentre i *matematici* che ci stanno lavorando sembrano piuttosto ottimisti.

...ma cominciamo, nel caso qualcuno se le fosse dimenticate, dalle

8.1.1 Regole dell'Hex



10 *Dopo qualche mossa.*

L'Hex si gioca su una scacchiera romboidale divisa in esagoni: le dimensioni sono variabili, ma la misura più utilizzata è quella 11x11; due lati opposti sono indicati come "neri", mentre gli altri due lati sono "bianchi": uno dei due giocatori ha una dotazione di pedine nere, mentre l'avversario ha a disposizione pedine bianche; i due giocatori pongono alternativamente una pedina su un esagono libero, con l'obiettivo di formare una catena ininterrotta di pedine del proprio colore congiungente i due lati della scacchiera del medesimo colore: nella figura, vedete una scacchiera con qualche pedina giocata. Giusto per dimostrare quanto sia "semplice" il gioco ma quali sottigliezze si possano impiegare, secondo noi il nero ha un discreto vantaggio, dato da quelle due pedine nere nella zona centrale: infatti, anche se fisicamente non sono collegate tra di loro, per il bianco risulta impossibile contrastarne l'aggancio: esistono *due vie* che permettono di unirle (i due esagoni tra di loro), e se il bianco, anche avendo il tratto, occupa una delle due alla mossa successiva il nero può agganciarle: notate che la medesima situazione si pone per l'aggancio della catena nera sulla sinistra con questo gruppo centrale, e quindi possiamo dire (no, non si dice, ma come espressione ci piace) che il nero ha "conquistato il centro"; unire questa catena alla catena sulla destra non sembra facile, ma visto il livello di gioco del bianco, secondo noi si può fare.

[9] Questa rubrica la leggono in *due*, visto che devono correggere gli errori dello scrivente. Secondo alcune accurate analisi, gli analisti sull'altra rubrica citata sono *esattamente due in meno*.

8.1.2 Non c'è "suspence"

Come si dice in matematica, l'Hex è un gioco "risolto in modo ultradebole": ossia si verifica che, supponendo due giocatori perfetti, allora vince il primo.

Per avere una dimostrazione completa di questo teorema *[...già non mi piace la dimostrazione, ci mancherebbe ancora mancassero dei pezzi (RdA)]*, prima ci serve un lemma che ha l'aria piuttosto stupida:

> Avere dei pezzi del vostro colore messi a caso sulla scacchiera non danneggia la vostra strategia.

La cosa potreste verificarla da soli, ma ci pare un buon esempio di ragionamento in questo campo, quindi esplicitiamo la dimostrazione.

Prendiamo uno qualsiasi dei pezzi in più, e supponiamo voi abbiate una strategia; i casi sono due:

1. Se il pezzo in più fa parte della vostra strategia vincente, allora quando secondo la vostra strategia dovreste giocare in quella posizione, potete giocare in un qualsiasi altro punto della scacchiera (anche in un punto non previsto dalla vostra strategia) e, alla prossima mossa, giocare come se aveste appena giocato il pezzo in più.
2. Se il pezzo in più non fa parte della vostra strategia, limitatevi ad ignorarlo.

...semplice, vero?

Forti di questo elementare ma utilissimo concetto, possiamo affrontare la prima parte della nostra dimostrazione (per la seconda, ci serve un altro lemma, ma lo vediamo dopo).

Per dimostrare che tra giocatori perfetti il primo giocatore vince, supponiamo (per assurdo) che il *secondo* giocatore abbia una strategia vincente: in questo caso, il primo può limitarsi a fare una giocata casuale in un punto qualsiasi della scacchiera. Quando il secondo giocatore gioca, diventa a tutti gli effetti il primo giocatore, mentre l'ex primo giocatore è ora il secondo giocatore e può applicare la strategia vincente: il pezzo giocato "a caso", all'inizio, o rientra o non rientra nella strategia, ma comunque, come visto prima, male non fa, e quindi a questo punto l'originale secondo giocatore non può più vincere, e quindi vince il primo giocatore, e quindi il primo giocatore vince sempre a Hex.

Chi si è accorto che manca un pezzo? Infatti, ci serve un altro pezzo, ma è talmente importante che gli dedichiamo un capitoletto tutto suo.

8.1.3 Qualcuno "ci resta"

Arrivati alla fine del punto precedente, la risposta potrebbe essere: "Un momento: potrebbe finire patta!". Spiacente deludervi, ma quello talmente importante da essere noto come il "Teorema dell'Hex" statuisce che la cosa non è possibile: e rappresenta il *primo caso* di ragionamento che "sembra non c'entrare niente"; il secondo, molto più eclatante, ce lo teniamo per ultimo.

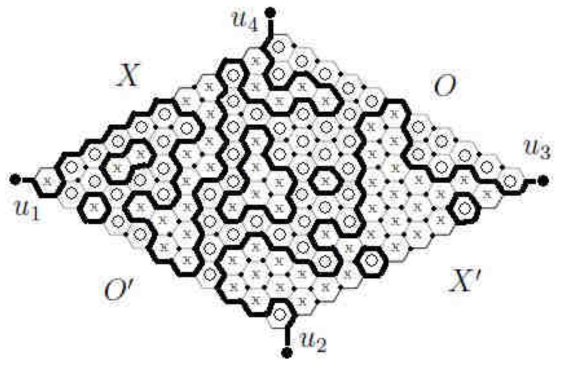
Qui ci serve prima dimostrare un altro lemma:

> Un grafo finito i cui vertici abbiano al più grado 2 è l'unione di sottografi disgiunti, ciascuno dei quali è o un vertice isolato, o un ciclo semplice, o un cammino semplice.

E qui, quantomeno all'autore del pezzo, sorge spontanea la domanda: "Ma che cosa c'entra?". Prima dimostriamolo, poi vediamo di usarlo: se vi fidate, saltate il prossimo paragrafo.

Si abbia un grafo g con N vertici: se ogni vertice ha al più grado 2, g ha al più N archi; indichiamo i grafi di questo tipo con k archi come g_k. In g_0 tutti i vertici sono isolati, e quindi in questo caso il nostro teorema è dimostrato. Se il nostro grafo ha n+1 archi, scegliamo un arco qualsiasi (u, v) e rimuoviamolo: i due nodi u e v hanno ora al più grado 1, visto che prima della rimozione avevano al più grado 2, e quindi non possono appartenere a nessun ciclo: per l'assunto dell'induzione, il grafo g_n è composto unicamente da vertici isolati, cicli semplici e cammini semplici; se ora ri-aggiungiamo l'arco (u, v), i sottografi che erano disgiunti da (u, v) in g_n restano invariati da questa re-inserzione, e i vertici u e v sono ora o sullo stesso cammino semplice o ciclo semplice, e quindi g_{n+1} è anch'esso l'unione di vertici disgiunti, cammini semplici o cicli semplici. Il che prova il lemma.

Sono tornati, quelli che si fidavano?



11 *2x-zone e o-zone.*

Per comodità, sostituiamo le pedine nere con delle x e le pedine bianche con delle o; rappresentiamo la nostra scacchiera come un grafo $G = (V, A)$ formato dai vertici V e dagli archi A; ogni vertice degli esagoni della scacchiera è un elemento di V, mentre ogni lato degli esagoni è un elemento di A: creiamo altri quattro vertici u_1, u_2, u_3, u_4 collegati ai quattro "vertici" della nostra scacchiera attraverso gli archi a_1, a_2, a_3, a_4 rispettivamente. Inoltre, definiamo *X-zona* uno (o più) esagoni marcati con x e una delle aree marcate X o X' e, in modo analogo, definiamo la *O-zona*: quindi, i nostri nuovi archi a_1, a_2, a_3, a_4 giacciono tra una *X-zona* e una *O-zona*; nella figura, vediamo una scacchiera in notazione *x-o*.

Il Teorema dell'Hex, in questa notazione, si esprime come:

> Se ogni casa di una scacchiera da Hex contiene una x o una o, allora o esiste un *x-cammino* che connette X a X', o esiste un *o-cammino* che connette O a O'.

Per dimostrare questo, per prima cosa costruiamo il sottografo $G' = (V, A')$ di G, con gli stessi vertici ma un sottoinsieme degli archi: infatti, definiamo un arco come appartenente a G' solo se è sul confine tra una *X-zona* e una *O-zona*; quindi a_1, a_2, a_3, a_4 appartengono a G', e i vertici u_1, u_2, u_3, u_4 hanno grado 1.

Se tutti i tre esagoni attorno ad un vertice sono marcati nello stesso modo, allora il vertice è isolato in G' e ha grado 0; se un vertice è circondato da due esagoni di un tipo e il restante esagono di un altro tipo, allora il vertice in G' ha grado 2; quindi, ogni vertice nel grafo originario (esclusi i vertici u) ha grado 0 o 2.

Visto che G' ha vertici di grado al più 2, possiamo applicare il lemma visto prima e sostenere che è l'unione di sottografi disgiunti, ciascuno dei quali è un nodo isolato, un ciclo semplice o un cammino semplice; ognuno dei nodi u_1, u_2, u_3, u_4 è allora il punto terminale di un qualche cammino, visto che hanno grado 1, e il fatto che i grafi in G' siano disgiunti ci garantisce che questi cammini non sono cicli; quindi, esistono due cammini semplici in G', ognuno dei quali connette due punti tra u_1, u_2, u_3, u_4, e questi cammini definiscono una catena vincente di esagoni; e quindi, per qualsiasi arbitraria disposizione sulla scacchiera, esiste un cammino vincente per un giocatore.

A questo punto, riprendiamo la dimostrazione[10] di quanto ci interessa: dal Teorema dell'Hex, esiste sempre una strategia vincente, se la strategia vincente fosse per il secondo giocatore, il primo giocatore potrebbe mettere il primo gettone in un punto qualsiasi della scacchiera, diventando a tutti gli effetti il secondo giocatore: quindi la somma di una mossa casuale e la strategia vincente del secondo giocatore formano una strategia vincente per il primo giocatore, e quindi se esiste una strategia vincente questa deve essere del primo giocatore.

Questa dimostrazione lascia sovente perplessi e, quando se ne parla, saltano sempre fuori delle interessanti obiezioni:

Che cosa impedisce al secondo giocatore di rubare nuovamente la strategia, ossia di fare una mossa casuale tornando ad essere il secondo giocatore?

[10] Dovuta a Nash: ne approfittiamo per ricordarlo. Ciao, John.

Abbiamo presunto dei giocatori perfetti, e se la strategia del primo giocatore batte il secondo giocatore quando questo gioca perfettamente, lo batterà anche quando gioca meno che perfettamente, ossia con una mossa casuale come inizio.

Cosa mi impedisce di applicare questo "furto di strategia" a qualsiasi altro gioco di scacchiera?

Deve essere un gioco in cui "avere una mossa extra non può danneggiarti": questo, ad esempio, è vero nel filetto/tria/tictactoe, ma non è vero negli scacchi o nella dama. Inoltre, deve essere un gioco in cui non esista la patta, altrimenti il fatto che il secondo giocatore non vinca non implica che il primo giocatore vinca.

Con che strategia il primo giocatore vince?

Abbiamo detto che vince, non che sappiamo come fa.

8.1.4 Talmente assurdo da essere vero

Quando siamo partiti, era nostra intenzione riuscire a dimostrare un ultimo teorema, che per noi ha due grandi ragioni di simpatia: per prima cosa collega tra di loro due cose che sembrano correlate circa come i cavoli e le merende, e secondariamente stabilisce un'equivalenza *biunivoca* tra le due cose. Ciò significa, però, che la dimostrazione è di lunghezza doppia, visto che dovete dimostrare prima che $A \Rightarrow B$, e poi che $B \Rightarrow A$; non solo, ma nel caso particolare le due dimostrazioni sono particolarmente ostiche: abbiamo cercato una dimostrazione più "intuitiva" di questa equivalenza, ma non siamo riusciti a trovarla, se qualcuno di voi ci riesce, promesso che pubblicheremo, e anche di corsa.

Come i nostri più affezionati lettori[11] sicuramente ricordano, tempo fa abbiamo parlato di un teorema, formulandolo in modo molto debole: il testo, posto nella usuale forma raffazzonata che ci contraddistingue, suonava suppergiù come: "In una rototraslazione, esiste almeno un punto che sta fermo". Non avevamo dimostrato la cosa, ma avevamo dato (per il caso specifico delle rototraslazioni) un *modo* per trovare il punto. Oggi, finalmente, lo poniamo nella sua forma classica, anche se senza dimostrazioni e/o metodi costruttivi:

Teorema di Brouwer del Punto Fisso: sia f una mappatura continua del quadrato unitario I^2 su sé stesso. Allora esiste $x \in I^2$ per cui $f(x) = x$.

Teorema che, sin dai nostri primi passi nella matematica di questo tipo, ci ha sempre lasciato piuttosto perplessi, data la sua grande generalità; vista, capita e dimenticata la dimostrazione, però, abbiamo imparato a prenderlo come un dato di fatto e siamo andati oltre; quello stupore giovanile, però, ci ha nuovamente colto quando abbiamo trovato il teorema che segue:

Il Teorema di Brouwer è equivalente al Teorema dell'Hex.

Il che, potrebbe addirittura riappacificarci con la dimostrazione che "Il primo vince".

..ma secondo voi, passando di qui, si riuscirà mai a trovare una strategia?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[11] ...quelli che non solo leggono RM, ma comprano addirittura *i libri* che scriviamo: nella fattispecie, il primo (quello pubblicato all'insaputa degli autori).