Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 194 – Marzo 2015 – Anno Diciassettesimo

1. Rive Gauche **3**

2. Problemi **10**

2.1 I Chinotti trepidano... 10
2.2 Questi sono cugini di Benford 11

3. Oldies & Goldies **11**

3.1 [RM165, Ottobre 2012] – Solito TrePerDue 11

4. Bungee Jumpers **12**

5. Soluzioni e Note **12**

5.1 [Calendario 2015 – Marzo – Putnam 2000, A3] 13
5.2 [189] 15
5.2.1 Grande successo di critica e di pubblico 15
5.3 [193] 16
5.3.1 Ancora bottiglie! 16

6. Quick & Dirty **17**

7. Pagina 46 ..... **17**

8. Paraphernalia Mathematica **20**

8.1 Go, Alice, Go! [002] 20
8.2 Frazioni di Paperino 21

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM193 ha diffuso 3'224 copie e il 08/03/2015 per Google eravamo in 11'300 pagine.

Katy Galbraith fa la ceramista, e ha disegnato queste piastrelle da doccia. Scusate se siamo brevi, ma le stiamo cercando.

1. Rive Gauche

"Scoprire qualcosa in matematica significa superare una inibizione e una tradizione. Non è possibile fare progressi senza essere sovversivi."

È una piazza davvero piccola. Forse sarebbe più giusta chiamarla semplicemente "largo" perché in realtà non è altro che un triangolo acuto, formato da due viali. Gli angoli molto acuti rendono gli appezzamenti di terreno difficilmente edificabili[1], ed è per questo che spesso, in città, diventano piccoli giardini; proprio com'è successo qui, dove un paio di platani generosi riescono a gettare ombra su un'aiuola tanto fragile da non poter neppure ospitare due panchine. Ma se la piazza è piccola, le vie che la ritagliano sono autorevoli e belle: rue Saint-Victor e Rue des Écoles, e già il nome di quest'ultima dovrebbe chiarire in quale zona della capitale francese si trovi la piazzetta.

1 *48°50'52"N 2°21'05"E*

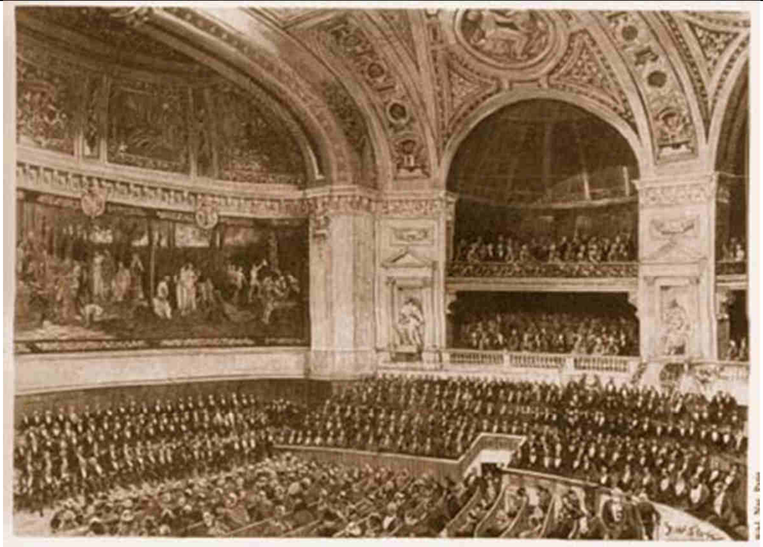
Rue des Écoles, la "via delle scuole" è un boulevard lungo e importante, che corre quasi parallelo al celeberrimo Boulevard Saint-Germain, forse il più famoso dei viali del Quartier Latino di Parigi. Rue Saint-Victor è molto meno nota, una via non troppo grande, ma è parallela e quasi figliastra della grande Rue Monge, e per gli amanti della matematica è consolante vedere un viale imponente dedicato ad un matematico.

Del resto, è tutto il quartiere che respira e fa respirare un'aria di scienza. Siamo in piena Rive Gauche, la riva sinistra della Senna: qui sono i licei più famosi di Parigi, come l'Henri IV e soprattutto come il Louis Le Grand; qui c'è la celeberrima ÉcolePolytechnique e la forse ancor più famosa École Normale Superieur. Qui sta il Collège de France, per mescolare nella toponomastica, e sperabilmente anche nelle coscienze, la cultura umanistica e quella scientifica. E un banale stradario aiuta molto all'uopo, da queste parti, dove Rue Lagrange incrocia Rue Dante, e ci si può dare facilmente appuntamento in Rue Gay-Lussac, o in Rue Laplace, o in Rue Buffon. Perché è qui, sulla riva sinistra della Senna, incastrata tra le macchie verdi del Jardin Des Plants e il Luxembourg, che respira forte l'accademia di Francia.

Qui sta l'università Pierre et Marie Curie, ad esempio: ma soprattutto, da sempre qui sta il tempio francese per eccellenza, la Sorbona. La piccola piazza triangolare dista dalla grande aula magna della Sorbona meno di cinquecento metri: e tra quell'aula maestosa e la piccola piazza si è creato un legame duraturo fin dal 2 dicembre 1957.

[1] Difficile, ma non impossibile. Basti pensare al "ferro da stiro" di New York, il Fuller Building, che però può permettersi un'area, seppur triangolare, non proprio piccolissima; nel campo, è verosimile che il campione del mondo resti la "fetta di polenta torinese", che ha dato il titolo al compleanno di Fermat, RM091, agosto 2006.

Era un lunedì, e il pubblico presente nel Grand Amphithéâtre era assai numeroso: cosa davvero insolita, per quella che, in fondo, altro non era se non la discussione di una tesi di dottorato. Il neo-dottore aveva in realtà già mostrato, prima ancora del conferimento del titolo accademico, di essere un ricercatore assai brillante e geniale. Aveva già scritto ben sei memorie, tutte pubblicate dall'Accademia delle Scienze francese. L'anno prima, in Romania, ad un Congresso di Matematica Renè de Possel[2] aveva citato un suo lavoro. E in quel 1956 era giunto lui stesso a Parigi per prendere contatto con tre mostri sacri della matematica francese: Gaston Julia[3], Henri Cartan[4] e Laurent Schwartz[5].



2 *Il "Grand Amphithéâtre" swlla Sorbona in una incisione del XIX secolo*

A rendere straordinario l'evento, però, non erano le indiscusse capacità matematiche del dottorando: più tristemente, l'eccezionalità dell'evento era che si trattava di un conferimento "*in absentia*", ovvero senza che il protagonista fosse presente; ancor più tristemente, quel che ogni persona presente nella grande aula ben sapeva era che più che una tesi proclamata in assenza del laureato, quella che veniva annunciata in quel lunedì dicembrino altro non era se non una laurea postuma. Anche se non era ancora stato ufficializzato, tutti sapevano già che Maurice Audin era stato ammazzato in carcere sei mesi prima, durante un interrogatorio condotto dai paracadutisti francesi che reprimevano l'insurrezione algerina.

La piccola piazza triangolare porta oggi il suo nome. La targa lo ricorda come "Matematico – Membro del partito comunista algerino – Militante della causa anticolonialista". Nato il giorno di san Valentino del 1932 a Beja, in Tunisia, dove il padre era a capo della brigata di gendarmeria, Maurice Audin ha appena venticinque anni quando muore durante il brutale interrogatorio al quale viene sottoposto l'undici giugno del 1957 dai militari del Primo Reggimento "Chasseurs", Cacciatori paracadutisti. È giovane, ma ha già moglie, Josette, e tre figli: ha rinunciato dopo il liceo alla carriera militare per dedicarsi alla matematica, che studia con successo all'università di Algeri. Qui si laurea nel 1953, e poco dopo viene chiamato da René de Possel a fargli da assistente. Maurice è un "francese d'Algeria", figlio di padre francese e madre algerina, ed è anche uno dei pochi francesi d'Algeria ad essere strenuamente anticolonialista. Entra nel PCA, partito comunista algerino, a diciotto anni, e frequenta anche l'AEMAN, la comunità degli studenti musulmani.

La "battaglia di Algeri" comincia nel gennaio 1957, quando la Decima Divisione Paracadutisti assume poteri di polizia nella città. A marzo, Audin ospita in casa un altro dirigente comunista, e l'evento non passa inosservato. Pochi mesi dopo, l'11 giugno, un

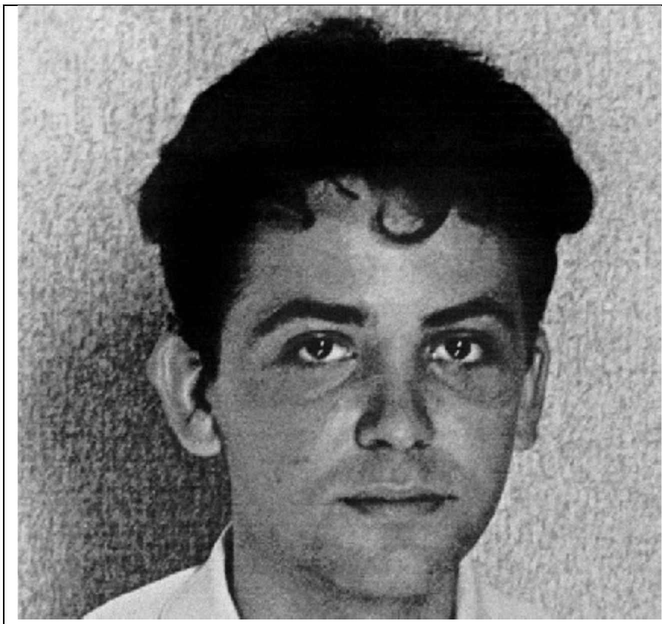
[2] Matematico, analista, tra i fondatori del Gruppo Bourbaki, pioniere dell'informatica francese.

[3] Protagonista del compleanno "Un naso per Platone", RM073, Febbraio 2005.

[4] Protagonista del compleanno "Project Management", RM126, Luglio 2009, dedicato a Bourbaki e soprattutto a lui, anima principale del gruppo. Vi si cita anche il De Possel della nota 2.

[5] Protagonista del compleanno… del compleanno… come non è in archivio? Eppure mi sembrava…

manipolo di paracadutisti lo arresta nella sua casa. Nessuno dei suoi familiari, amici o conoscenti lo vedrà mai più.


3 *Maurice Audin*

La versione ufficiale dei militari francesi è che Maurice Audin era "evaso" dieci giorni dopo l'arresto durante un trasferimento. Josette Audin deposita una denuncia contro ignoti per l'omicidio del marito, e di conseguenza si apre un'inchiesta. Il caso assume presto risonanza nazionale, ma in buona sostanza non si ottengono reali notizie sul destino di Maurice, che viene legalmente dichiarato deceduto nel 1966. Il "caso Audin" resta aperto come una ferita non cicatrizzata nelle cronache francesi per decenni: si formano comitati, si scrivono libri, si avanzano ipotesi storiche. Michèle Audin è una dei tre figli di Maurice: aveva due anni e mezzo quando suo padre fu cancellato dal mondo. Ha studiato matematica, ed è diventata brava e famosa, dopo aver studiato alla Normale è diventata professore all'IRMA[6] di Strasburgo, dove si occupa di geometria simplettica. È abbastanza eclettica da entrar a far parte dell'Oulipo, abbastanza geniale e meritevole da meritarsi la Legion d'Onore, la massima onorificenza francese. Onorificenza che però Michèle restituisce nelle mani del presidente Sarkozy, il 1° gennaio 2009, per protesta contro le mancate risposte dello stato francese alle molte richieste di spiegazioni avanzate da Josette, sua madre, in merito alla scomparsa del padre.

La verità storica, per una volta niente affatto diversa dalla verità generalmente supposta, si manifesta l'otto Gennaio 2014, quando sulle televisioni di Francia arriva un documento video sconvolgente: l'ultima intervista al generale Aussaresses, protagonista di quei giorni terribili di Algeri, morto appena qualche giorno prima. Il vecchio generale, certo complice la consapevolezza di essere prossimo alla dipartita, confessa in viva voce all'intervistatore di aver dato a suo tempo l'ordine di uccidere Maurice Audin.

Non c'è dubbio che il "caso Audin" sia stato un dramma di gran lunga più politico che scientifico. È però altrettanto certo che Maurice Audin era un matematico di vaglia, e la sua morte in così giovane età impedisce di sapere quale avrebbe potuto essere il suo contributo alla matematica. La tesi che gli valse la laurea "in absentia" alla Sorbona era intitolata "*Sur les équations linéaires dans un espace vectoriel"*, ed era davvero quasi completa nel momento della sua sparizione: conteneva numerosi errori, e i due grandi matematici che la controllarono decisero di non correggerli, proprio per evitare che si potesse poi dire che la tesi di Audin era in realtà una tesi non sua. Già nel Novembre del 1957 si era formato il primo dei diversi "Comitati Audin" che fino ad oggi hanno continuato a chiedere giustizia per il giovane matematico franco-algerino: e l'idea di portare ancora più platealmente sotto i riflettori dei media il caso tramite l'assegnazione della laurea in assenza, ma di fatto postuma, fu originata proprio da quei due relatori, entrambi due "grandi" della matematica francese: i già citati Renè de Possel, che ebbe Audin come studente e assistente, e Laurent Schwartz.

[6] Istituto di Ricerca Matematica Avanzata.


4 *Laurent Schwartz*

Laurent Schwartz nasce a Parigi il 5 Marzo 1915[7]; per tutta la vita resterà un personaggio originale e irrituale, ed è possibile che queste caratteristiche siano in gran parte già scritte nelle sue origini: il suo cognome è di evidente origine germanica, eppure la sua famiglia si sente francese come poche altre. Il padre di Laurent, Anselme, è originario dell'Alsazia, terra da sempre contesa tra Francia e Germania: e nonostante il cognome si sente così francese da emigrare a Parigi appena quattordicenne, ovvero non appena raggiunge quel tanto d'indipendenza che gli consente di lasciare la terra natia: ciò che lo sconvolge è proprio l'essere tedesco, perché era nato nel 1872, e poco prima della sua nascita l'Alsazia era diventata tedesca in conseguenza della vittoria germanica nella guerra franco-prussiana del 1870-1871.

A Parigi Anselme diventa chirurgo di fama internazionale; ma non è solo grazie a lui che Laurent respira fin da piccolo un'atmosfera profondamente scientifica. La famiglia, oltre che alsaziana, è anche ebrea (anche se ben lontana dall'essere osservante e ortodossa: Anselme, il capofamiglia, è diventato ben presto ateo e come atei ha cresciuto i suoi tre figli), e come spesso accade tra gli ambienti giudei di quei tempi, la scienza è tenuta in altissima considerazione. Se suo padre è un chirurgo famoso, suo zio Robert Debré[8] è un pediatra ancora più celebre, considerato di fatto il maggior fondatore dell'UNICEF, il Fondo delle Nazioni Unite per l'Infanzia.

Sul fronte delle parentele matematiche, Laurent tralascia i consanguinei (che, come si è visto, hanno una forte predisposizione alla medicina) per affidarsi agli affini: non solo sposa Marie-Hélène Lévy, matematica, ma facendolo diventa genero di Paul Lévy, ovvero uno dei massimi esperti di Teoria delle Probabilità del ventesimo secolo (alla pari con György Pólya[9] e Andrej Kolmogorov[10], per intenderci); e se queste, ovviamente, sono parentele che non possono aver influenzato Schwartz nell'infanzia, è opportuno ricordare che, seppur acquisito, Laurent aveva per zio nientepopodimeno che Jacques Hadamard.

[7] Sì, giusto un secolo fa. Non sono state fatte molte celebrazioni per il suo centenario, ed è un peccato.

[8] Robert Debré, oltre che zio di Schwartz, ha anche altre parentele notevoli: gran parte dei suoi figli e nipoti sono personaggi di alto rilievo nella storia e nella cultura francese. Ci limiteremo a ricordare Michél, che è stato Primo Ministro nella Quarta Repubblica nel governo De Gaulle e uno degli estensori della costituzione della Quinta Repubblica. E, a meno di grossolani errori nel conto delle parentele – sempre possibili – questo dovrebbe rendere Laurent Schwartz anche "cugino di premier".

[9] Protagonista del compleanno "Alle urne!", RM131, Dicembre 2009.

[10] Protagonista del compleanno "Collegio Matematico numero 18", RM159, Aprile 2012

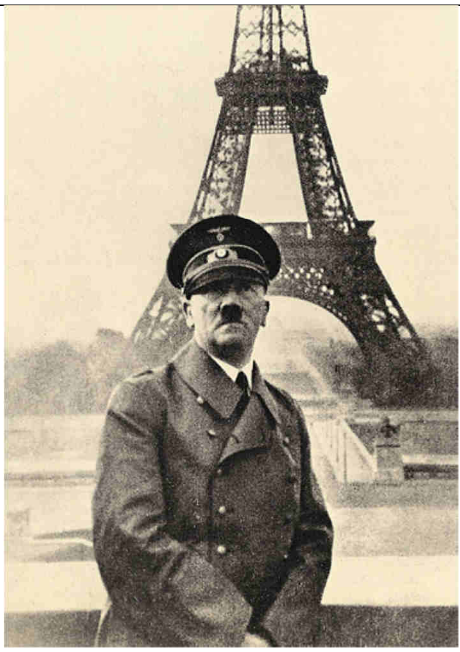
5 *Jacques Hadamard*

È verosimile che, crescendo in una famiglia del genere, un povero fanciullo non possa neanche lontanamente pensare di andar male a scuola: e infatti Laurent è uno studente brillante. Nonostante la poliomielite che lo colpisce all'età di undici anni, e che renderà il suo fisico debole per tutta la vita, il giovane Schwartz brilla soprattutto in Latino, Greco e Matematica. In Latino è così bravo che vince il concorso nazionale nella categoria "generale" e si piazza quarto nella categoria "traduzioni", al punto che i genitori si trovano in serio imbarazzo nel decidere a quale disciplina indirizzare il giovanotto. La possibilità di indirizzarlo agli studi classici e umanistici di filosofia e filologia è ben più di una trascurabile opzione. Ma avere una famiglia ricca di esperienza torna utile: mamma Claire chiede consiglio al celebre fratello Robert, che è un'autorità mondiale nella pediatria, e probabilmente riesce meglio di chiunque altro a capire quali siano le reali potenzialità di un giovane. Zio Robert suggerisce di dedicarsi alla matematica, e Laurent obbedisce; o meglio, obbedisce in parte. Abbandona infatti il Latino, ma non la Filosofia, decidendo ottenere al liceo il *diploma*[11] sia in Matematica che in Filosofia.

In breve, stiamo parlando di uno studente che non ha alcuna difficoltà ad entrare alla Normale nel 1934 né ad uscirne laureato tre anni dopo, nel 1937. La sua futura sposa, Marie-Hélène, l'ha conosciuta già al liceo, ma è qui ai corsi di matematica della Normale che comincia a frequentarla con intenti non solo amichevoli; ed è sempre qui, alla Normale, che ha i primi contatti con il futuro suocero, perché Paul Lévy ci insegna, e trasmette al giovanotto la passione per la Teoria delle Probabilità e soprattutto per l'Analisi Funzionale. Ciò non toglie che il 1937 non è uno degli anni migliori possibili, per un giovane neolaureato francese ebreo: negli anni immediatamente successivi alla laurea un brillante matematico dovrebbe trovare la sua strada scientifica e accademica, ma gli anni successivi sono, per Laurent, quelli della Seconda Guerra Mondiale, dell'occupazione nazista della Francia e della caccia agli ebrei.

Oltre ad una moglie, un suocero e una passione accademica e professionale, Schwartz trova alla Normale anche un altro tipo di fermento, forse meno duraturo ma non meno travolgente: la passione politica. È in questo periodo che Laurent mostra una delle caratteristiche più significative della sua personalità, quella del ribelle. Per tutta la decade che anticipa e chiude gli anni della guerra, dal 1937 al 1947, Schwartz sarà un militante trozkista; e pur riconoscendo, negli anni della maturità, un certo numero di eccessi ed errori in quella sua compagine politica, non rinnegherà né rimpiangerà mai la sua scelta, che pure gli costò molti in termini di carriera e privilegi.

[11] "diploma" è una arruffata traduzione di ciò che i francesi – e non solo loro – chiamano "baccalaureato".


6 *Parigi occupata*

Appena uscito dalla Normale, Schwartz decide di anticipare il servizio militare: a causa della gracilità del suo fisico, comunque, non arriverà mai a combattere, e viene definitivamente congedato nel 1940. La fine della breve carriera militare coincide però con l'inizio della sua carriera di matematico: lasciata Parigi, ormai invasa dall'esercito tedesco, i coniugi Schwartz si spostano a Tolosa, dove incontrano Henri Cartan, di passaggio per una serie di lezioni; è un vero colpo di fortuna per entrambi, visto che Marie-Hélène intende riprendere gli studi interrotti e Laurent viene invitato a Clermont-Ferrand. Laurent accetta, e nel capoluogo dell'Alvernia conosce André Weil[12], che lo coopta nel Gruppo Bourbaki.

Se gli anni di guerra sono pertanto fruttuosi dal punto di vista matematico, restano anni difficilissimi dal punto di vista della sopravvivenza. Essere al tempo stesso ebreo e trozkista significa essere in costante pericolo di vita: Laurent e Marie-Hélène sono continuamente in fuga, in perenne allerta. Devono perfino celarsi dietro un'identità fittizia, e Schwartz fingerà di chiamarsi Laurent-Marie Sélimartin. Quanto fosse importante essere prudenti e quanto necessario fosse essere fortunati lo mostra bene il destino di due compagni di tesi di Laurent, l'ebreo Jacques Feldbau e il rifugiato Gorny, che finirono entrambi deportati ad Auschwitz tra il 1942 e il 1943. Ad incrementare le difficoltà di una coppia di giovani intellettuali costantemente in fuga, nel 1943 arriva anche la nascita di Marc-André, il primogenito. Eppure, quasi come se il cervello fosse stimolato dalla continua tensione, è proprio nel 1944 che Schwartz produce lo studio che lo renderà immortale nella storia della matematica, la Teoria delle Distribuzioni. Secondo la sua stessa testimonianza, è durante una delle sue frequenti notti insonni che viene colto dall'illuminazione che consentirà di risolvere tutte le ambasce matematiche portate sulla scena da alcune funzioni amate e utilizzate dai fisici, come la Delta di Dirac o la funzione a gradino di Heaviside. A differenza delle altre volte, in cui, contento dei progressi fatti durante la notte insonne, riprendeva serenamente a dormire, in quella notte del 1944 Laurent è così sicuro ed esaltato che a dormire non ci pensa proprio, e corre ad annunciare la sua scoperta al suo vicino di casa. Nella disgrazia della sua perenne fuga, è certo una bella fortuna avere avuto, in quel momento, come vicino di casa Henri Cartan; questi lo ascolta, capisce, e gli batte, non solo metaforicamente, la mano sulla spalla: "*Ce l'hai fatta*", gli dice, "*da adesso in poi non avremo mai più funzioni senza derivata*". La Teoria delle Distribuzioni, in effetti, resta uno dei capisaldi della matematica moderna, ed è anche una delle poche conquiste della matematica del XX secolo ad essere insegnata nei corsi universitari. Rende il nome di Laurent Schwartz noto ai matematici di tutto il mondo, e appena sei anni più tardi, nel 1959, Harald Bohr[13] avrà gioco facile e generale consenso nel proporre Schwartz per la Medaglia Fields durante il Congresso Internazionale dei Matematici che si tiene ad Harvard; per contro, il passato di trozkista di Laurent gli renderà assai difficile ottenere il visto per gli USA per andare a ritirare il premio.

[12] Protagonista del compleanno "Figura e sfondo", RM088, Marzo 2006.
[13] Certo, il fratello di Niels, nonché protagonista del compleanno "Una vita da mediano", RM063, Aprile 2004.


7 *Murale ad Algeri per Maurice Audin*

Con certe esperienze di vita alle spalle, è facile capire con quanta passione e dedizione Schwartz possa essersi dedicato al caso di Maurice Audin: e in realtà, quella per Audin non è altro che una sola tra le molte battaglie intellettuali e politiche di Schwartz. Si presenta alle elezioni del 1945 e del 1946, senza essere eletto; nel 1956 è tra i più convinti attivisti nella protesta contro l'invasione dell'Ungheria da parte dell'Unione Sovietica. Si batte ferocemente contro la guerra americana nel Vietnam, denuncia l'invasione sovietica dell'Afghanistan, poi fustiga la guerra russa contro la Cecenia. Del resto, già dai tempi dell'*affaire Audin* Schwartz si è fatto notare come firmatario del "Manifesto dei 121", che propugna e sostiene l'insubordinazione militare: firma che gli costa il posto di professore al Politecnico, dove insegna.

Quel licenziamento non è, per altro, il prezzo peggiore che Laurent Schwartz deve pagare per difendere le sue idee. L'otto febbraio 1962 il diciannovenne figlio di Schwartz, Marc-André, viene rapito dai nazionalisti francesi per ricondurre l'attività anticolonialista di Laurent a favore dell'Algeria a più miti consigli. Il rapimento è uno shock inimmaginabile, e probabilmente resterà insuperato, sia per i genitori che per il ragazzo. Anche se Marc-André viene liberato nel giro di un paio di giorni, l'esperienza lo segna profondamente. È infatti opinione condivisa che quando infine Marc-André si suicida, nel 1971, il gesto non sia altro che la tragica conclusione della violenza subita nove anni prima.

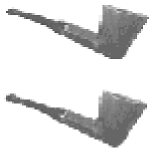
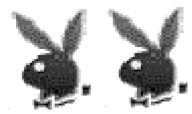
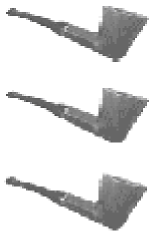
Ma Laurent Schwartz ha continuato. Continuato a fare matematica, a lottare, a vivere. Se ne è andato nell'estate del 2002, dopo aver dato tanto alle idee che più amava: alla matematica, alla libertà, alla ribellione. Sulle piazze di Algeri i giovani fanno murales con l'immagine di Maurice Audin, ed è certo anche per merito di Laurent Schwartz se questo accade. I suoi studenti sono cresciuti forti in matematica e in senso civile, se tra questi ci furono nomi come quello di Bernard Malgrange, Jacques-Louis Lions, François Bruhat e soprattutto dell'altro eterno ribelle, Alexandre Grothendieck[14].

Il suo lascito autobiografico è un libro che si intitola "*Un matematico alle prese con il secolo*[15]", e non c'è dubbio che il secolo che ha quasi vissuto per intero, quello che termina proprio in questi giorni, lo abbia messo a dura prova. Ma ci sembra anche che da questa prova Laurent Schwartz non sia uscito sconfitto.

[14] Protagonista del compleanno "Sasha e Shurik", RM086, Gennaio 2006.

[15] "*Un mathématicien aux prises avec le siècle*", edizioni Odile Jacob, 1997. No, non ci risulta esistere in italiano.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
I Chinotti trepidano…			
Questi sono cugini di Benford			

2.1 I Chinotti trepidano...

...ma non ci pare ancora il caso di riaprire il campo di tiro: rischiamo di dover mettere la sciarpa di lana alle frecce, e la cosa non è molto funzionale: quindi, le attività di Doc si stanno rivolgendo al vicino appezzamento, che brama dall'essere piantumato.

Al momento il prato è un quadrato, e speriamo lo resti per tutta la durata del problema (sapete, quando Doc si dà da fare nulla può essere dato per scontato): l'idea, visto che ci aspettiamo un'estate piuttosto calda[16], è quella di piantare degli alberi di alto fusto che siano in grado di fornire un poco di ombra agli esausti arcieri: non solo, ma quest'anno la falange arcieristica dovrebbe anche aumentare il numero delle sue componenti, quindi Rudy finalmente la smetterà di essere secondo.

Dicevamo: sul prato Doc intende piantare in modo regolare 169 alberi, in modo da ottenere un reticolo 13x13; quello che non lo convince è che, tra il fatto che il prato è un quadrato e il reticolo regolare, la cosa sta diventando piuttosto noiosa e ripetitiva, e sta cercando consigli per vivacizzare la cosa: l'ultima gli è stata suggerita dal vivaista (che non vedeva l'ora di disfarsi di robaccia che languiva in magazzino), con la proposta di mettere 53 alberi *diversi dagli altri* (quindi, 116 di un tipo e 53 di un altro: giusto? Giusto), sempre sui punti del reticolo ma piazzati in un modo piuttosto casuale.

La cosa ha immediatamente entusiasmato Doc che, in attesa del disgelo (sì, dalle sue parti riesce anche *a gelare*), sta progettando disposizioni casuali-ma-non-troppo dei 53 alberi diversi: il motivo del "ma-non-troppo" è che, per sottolineare la casualità, il Nostro richiede che non ci siano quattro alberi del gruppo di 53 che siano ai vertici di un rettangolo con lati paralleli ai lati dell'appezzamento (nulla viene detto sugli altri: invecchiando, un minimo di ripetitività fa comunque piacere).

Fornito di un ragionevole numero di biglie (di due colori diversi) e di una *sandbox*, stiamo riuscendo a tenerlo tranquillo, ma lo rivorremmo tra gli umani per l'ora di cena. Riuscite ad aiutarlo? E, se riusciste a generalizzare, potreste anche renderlo felice: in un quadrato di lato n, quanti punti potete scegliere al massimo in modo tale che nessuno gruppo di quattro sia sui vertici di un rettangolo di lati paralleli al quadrato originale[17]?

[16] Questo ci risulta sia un "Anno del Niño". Quindi, dovrebbe fare caldo.

[17] Solito *caveat*: del problema *più generale di tutti* non abbiamo soluzione, l'unica generalizzazione che abbiamo è per n=7. Ma sappiamo che la cosa non vi intimorisce.

2.2 Questi sono cugini di Benford

Ve lo ricordate, vero, Benford? Quel fisico simpaticamente fuori di testa che, partendo dalle ditate su una tavola dei logaritmi, ha dimostrato che Bill Clinton aveva evaso le tasse. Se non ve lo ricordate, ve lo ripetiamo: aveva raccolto un mucchio di valori "presenti nella realtà" (medie di battute a baseball, altezza delle cascate del Niagara, numero di scarpe dei vicini di casa…) che non c'entravano niente uno con l'altro, e aveva scoperto che, come prima cifra, c'era una grande abbondanza di numeri "1". È rimasto famoso, appunto, per aver messo assieme cose che non c'entrano nulla tra di loro e aver trovato una relazione.

Va detto che anche a noi, nella realtà rappresentata da questa Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa, riusciamo a far saltare fuori delle relazioni che nessuno si aspetta: tra pigreco, "*e*" e la sezione aurea c'è solo l'imbarazzo della scelta, a comparire nei punti più impensati delle soluzioni ai problemi.

Abbiamo trovato un problemino (o meglio, un teoremino… o, meglio ancora, una congetturina, almeno per noi) che non fa saltare fuori nessuno dei "prezzemolini" qui sopra (lavora con gli interi), ma alla fine viene proprio da chiedersi se si tratti di una coincidenza o no.

Allora, lo schemino è qui di fianco. Prendiamo un ~~sei~~ numero a caso, ad esempio 6 (ma funziona anche con degli altri), e calcoliamone tutte le partizioni (insomma, le somme che fanno 6). Di fianco, scriviamo il numero delle parti distinte (in pratica, le ripetizioni non contano) di ciascuna delle partizioni, e quindi sommiamo tutti questi valori: siccome non lo farete mai, l'ho fatto io (per quello ho preso "un sei piccolo[18]": altrimenti c'era troppo lavoro da fare). Sono sicuro che tutti quelli tra di voi che hanno letto Len Deighton a questo punto stanno pensando alla citazione "Interessante quando un trattato in otto volumi sul gonfiaggio dei canotti pneumatici", ma adesso viene il bello: tutte le parti distinte sono diciannove, giusto? Bene, adesso contate gli "uno" nelle partizioni (e questo ve lo fate voi).

6	1
5+1	2
4+2	2
4+1+1	2
3+3	1
3+2+1	3
3+1+1+1	2
2+2+2	1
2+2+1+1	2
2+1+1+1+1	2
1+1+1+1+1+1	1
	19

Coincidenza? Noi di RM pensiamo di no. E un tizio di nome Stanley è d'accordo con noi, e dice di avere la dimostrazione, ma il solito problema del margine… Secondo noi si sta solo montando la testa: riuscite a dimostrarla?

Sembra strano, ma anche qui esiste una generalizzazione (il tizio, qui, si chiama Elder), anche se ci pare perda qualcosa in linearità: *Il numero totale delle occorrenze di un intero k tra tutte le partizioni di n è pari al numero di ricorrenze in cui una parte compare k o più volte in una partizione*. Questo non vi chiediamo di dimostrarlo, ma almeno di spiegarcelo: non abbiamo capito niente.

3. Oldies & Goldies

Per questo, sappiamo benissimo perché non lo avete risolto. …Ma scherziamo, andare a vedere un PM???

3.1 [RM165, Ottobre 2012] – Solito TrePerDue

Per cominciare, il testo.

> *Questa volta è tutta colpa di Rudy. Ha finito tutto in ritardo, quindi ha recuperato un PM di secoli fa scopiazzato dal Ghersi: piccolo guaio, una formula interessante non era dimostrata, ed essendo le* 22:01 *del* 30 *settembre il suddetto non si sogna*

[18] Questa battuta la capiscono solo i "Fisici Volanti": un loro (per brevissimo tempo) collega, parlando dei limiti delle successioni durante l'orale di Analisi 1, si esibì in un "prendendo un tre piccolo a piacere...". L'Orso Yoghi (detto Andrea, tra gli umani) sostiene di essere stato presente all'esibizione. Ulteriori notizie sui FV da parte di Doc, se lo riterrà opportuno (per farla breve: ci siamo ritrovati e "uatsappati").

> *neanche di cercarne la dimostrazione. E quindi ve la rifila come tre per due. Dimostrate la formula* [2] *del PM, così almeno una volta tanto siete costretti a leggerlo.*

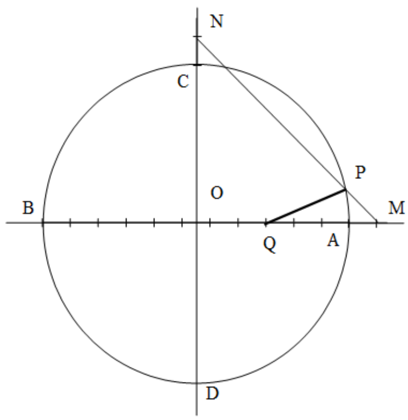
Il PM, come *tutti* sicuramente ricordate, trattava delle costruzioni approssimate degli n-agoni regolari, con due metodi: il Rinaldini (che è quello che conoscono tutti) e il Bardin (che lo conosce meno gente ma è più preciso): con questo ultimo metodo, se n è il numero di lati del poligono da tracciare, ci avevano detto che l'errore era:

$$l = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 8n + 48 - (n-6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}}$$

E questa è giustappunto la formula che vi chiedevamo di dimostrare, visto che Ghersi ce la spara lì senza dire niente.

Eh? Come sarebbe "Qual è il metodo Bardin?" …non vorrete mica dire che *non avete letto il PM?* Humpf. Segue. Ma solo perché sono un buono.

Con calma. Questa volta la divisione (in n=11 parti) la facciamo sul diametro *orizzontale* **AB**. Indi, tracciamo il diametro perpendicolare *CD* e prolunghiamo questi due diametri dalla parte di *A* e *C* di una lunghezza *uguale ad uno degli intervalli* trovando i due punti *N* e *M*. Uniamo questi due punti e la retta appena tracciata intersecherà la circonferenza in *P*. Unendo *P* con il *terzo* punto di divisione *Q*, otteniamo il segmento *PQ* che è pari al lato (approssimato) del nostro n-agono.



Adesso, datevi da fare. Vorremmo la dimostrazione prima che ci chiedano di disegnare un triscaidecagono regolare sulla spiaggia. Quindi, muoversi.

4. Bungee Jumpers

Date tutte le frazioni irriducibili in cui il denominatore è minore di 99, siano esse ordinate in modo crescente:

1/99, 1/98, …, a/b, 5/8, c/d, … .

Si chiedono i valori di a/b, c/d ai due lati di 5/8.

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Soluzioni e Note

Marzo!

Tanto per cambiare siamo in ritardo, ma che ci volete fare? È una buona tradizione.

Speriamo di uscire in tempo per annunciarvi che i due membri più affascinanti del trio sono di nuovo in giro per conferenze e saranno al Liceo Martinetti di Caluso venerdì 20 Marzo alle ore 10.40 per la conferenza su "Frattali e Caos". La conferenza è di quelle organizzate nell'ambito della Mathesis di Ivrea, i miei compari faranno sicuramente un figurone.

Per il resto, febbraio è stato un mese corto e ricco di eventi e cose da fare per tutti noi, ma purtroppo scarso di soluzioni, per cui dovrei fare presto. Mi raccomando ragazzi, sta arrivando la primavera, risvegliate il vostro senso matematico!

Cominciamo con un regalo per il Capo in anticipo (ve lo ricordate, vero, che a marzo ricorre il suo genetliaco?), che ne nel mese di marzo ci sta benissimo, ed è la soluzione di ***Sawdust*** al problema di marzo del nostro calendario. Abbiamo scritto troppe volte marzo?

5.1 [Calendario 2015 – Marzo – Putnam 2000, A3]

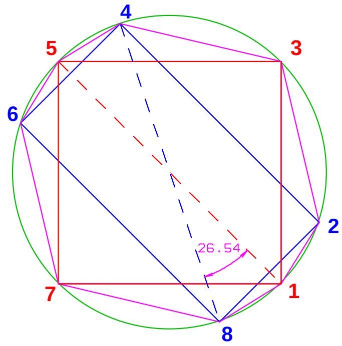
L'ottagono $P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5\ P_6\ P_7\ P_8$ è inscritto in un cerchio con i vertici sulla circonferenza nell'ordine dato. Se il poligono $P_1\ P_3\ P_5\ P_7$ è un quadrato di area 5 e il poligono $P_2\ P_4\ P_6\ P_8$ è un rettangolo di area 4, trovate la massima area possibile per l'ottagono dato.

Se il quadrato $P_1\ P_3\ P_5\ P_7$ ha area 5 il suo lato è $\sqrt{5}$, la sua diagonale vale $\sqrt{5}\sqrt{2}=\sqrt{10}$ e questo è anche il diametro del cerchio ad esso circoscritto.

Ma il diametro del cerchio è anche la diagonale del rettangolo $P_2\ P_4\ P_6\ P_8$.

I lati del rettangolo sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \quad \text{in cui } x=\sqrt{2} \text{ e } y=2\sqrt{2}$$

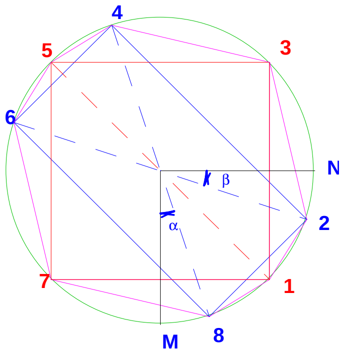


Questo potrebbe essere un disegno del problema in cui sono stati indicati solo i pedici dei punti dati.

La massima area possibile dell'ottagono si ha quando è massima la somma delle aree dei triangoli 123 e 178 (e degli opposti 567 e 543).

Ora dobbiamo vedere quando si ottiene questa condizione.

Il rettangolo può ruotare nei 2 sensi per un angolo al massimo pari al valore indicato in figura, perché oltre questo valore cambia l'ordine dei punti.



L'altezza del triangolo 178 (considerando il lato 17 come base) è pari a

$$\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{2}\cos\alpha-1\right)$$

E così l'altezza del triangolo 123 (con base 13) è pari a

$$\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\beta-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{2}\cos\beta-1\right)$$

Ma *cos β* è pari a

$$\cos\left(90°-\alpha-2\arcsin\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}\right)\right)=\sin\left(\alpha+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)$$

Ossia circa sin(53,13°+α), quindi $\alpha+\beta$=36,87°.

Qui giunti possiamo esprimere la somma di queste due aree in funzione di α e cercare per quale valore la derivata si azzera.

$$S(123)+S(178)=\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\sqrt{2}\sin\left(\alpha+2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-1\right]\right\}\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sqrt{2}\cos\alpha-1\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\left\{\left[\sqrt{2}\sin\left(\alpha+2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-1\right]+\left(\sqrt{2}\cos\alpha-1\right)\right\}$$

Però, visto che a noi interessa il punto di massimo e, per ora, non il suo valore, possiamo trascurare il moltiplicatore iniziale e termini noti finali e riscriverla così

$$\sqrt{2}\sin\left(\alpha+2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\sqrt{2}\cos\alpha-1=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\sqrt{2}\cos\alpha$$

o addirittura così

$$\sin\left(\alpha+2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\cos\alpha$$

La derivata è pari a

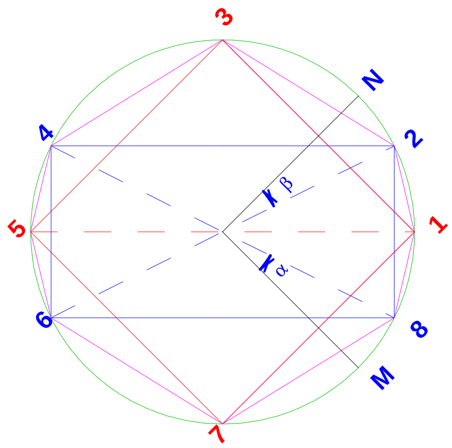
$$S'=\cos\left(\alpha+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)-\sin\alpha$$

E questa si azzera per un angolo pari a 18,435°, per cui β è uguale ad α, il che significa che il rettangolo ha gli assi coincidenti con le diagonali del quadrato.

Di conseguenza le altezze dei 2 triangoli in questione sono uguali e pari a

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{2}\cos\alpha-1\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{2}\cdot 0{,}9487-1\right)=0{,}3819$$

e l'area del triangolo 123 (che è equivalente al triangolo 178) è 0,427 da cui l'area dell'ottagono è 6,708.



Dopo tanto penare, mi sono dato un sacco di epiteti poco carini quando ho riguardato il disegno in maniera un po' diversa.

In questo modo si vede immediatamente che l'ottagono avrà area massima quando le diagonali del quadrato giacciono sugli assi del rettangolo!

Proviamo a verificarne il valore ripartendo da qui.

L'altezza del triangolo 234 è $\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$, e quindi la sua area è

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{2\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{20}-2}{2}=\frac{2\sqrt{5}-2}{2}=\sqrt{5}-1$$

L'altezza del triangolo 128 è $\frac{\sqrt{10}}{2}-\sqrt{2}$, e quindi la sua area è

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{20}-4}{4}=\frac{2\sqrt{5}-4}{4}=\frac{\sqrt{5}-2}{2}$$

Sommando le aree dei 4 triangoli a quella del rettangolo abbiamo

$$4+2\left(\sqrt{5}-1\right)+2\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)=4+2\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{5}-2=3\sqrt{5}=6{,}708$$

Con molta meno fatica!

5.2 [189]

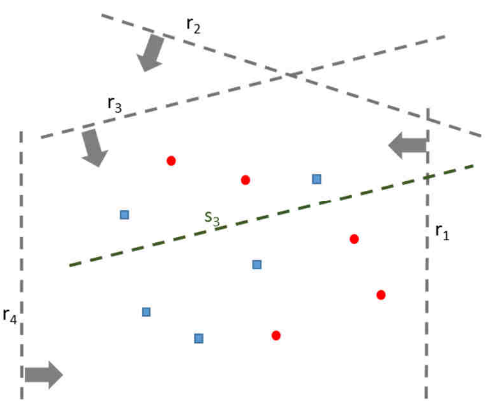
5.2.1 Grande successo di critica e di pubblico

Sapete quanto mi piace scoprire che vi siete ricordati di un problema dimenticato? Beh, se non lo sapevate ve lo dico adesso. Ho una lista personale dei problemi dimenticati, ed ho obbligato il Capo a riscriverli a tappe forzate (ve ne siete accorti? che ogni mese ci sono dei problemi in più nella rubrica "Oldies and Goldies"?). Ecco, quando qualcuno si accorge senza che noi ci si debba lamentare indeterminatamente, siamo tutti e tre molto contenti. Anche il Capo che non lo è mai per definizione.

Vediamo il testo:

> *Si vuole definire nel prato (un grosso rettangolo) 2n punti, e di questi averne n come piazzole di tiro e gli altri n come bersagli. Quindi si definiscono le linee di tiro; le distanze sono irrilevanti, e supponiamo che nessun arciere vada mai oltre il bersaglio, ma vogliamo evitare gli incroci tra le linee: è possibile?*

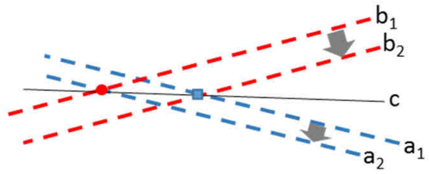
In calce, il Capo prometteva una riapertura del poligono di tiro per marzo, e credeteci o no, abbiamo la soluzione in tempo! Si tratta infatti di ***Franco57***, che attribuisce il ritardo solo al tempo necessario per mettere la soluzione in formato trasmissibile per mail:

> Prima di tutto è evidente che se gli oggetti, piazzole  e bersagli  , non sono abbastanza *a muzzo* nel prato, gli incroci tra le linee di tiro non sono sempre evitabili. L'esempio più semplice è costituito da due piazzole e due tirassegni allineati e posti nell'ordine detto:  .
>
> Quindi poniamo che tutte le coppie piazzola e bersaglio, più avanti rappresentate sinteticamente con un quadratino celeste e un tondino rosso, siano in direzioni distinte, anzi che tutte le coppie di oggetti siano in direzioni e rette diverse, e che siano sufficientemente distanti da considerarsi puntiformi.
>
> L'idea è quella di mostrare che per $n>1$ è sempre possibile dividere con una retta i $2n$ oggetti in due insiemi non vuoti, in ciascuno dei quali vi sia lo stesso numero di piazzole e di bersagli, riducendo così il problema iniziale a due problemi identici ma con un numero inferiore di oggetti. Poiché le linee di tiro di uno di questi sotto-insiemi non possono mai intersecare quelle dell'altro, una soluzione per essi induce una soluzione sul problema con $2n$ oggetti. Continuando ricorsivamente a dividere in questo modo, prima o poi uno di questi insiemi rimane composto solo da una piazzola e da un tirassegno, la cui unica linea di tiro risolve banalmente il quesito per $n=1$.
>
> 
>
>
> In conclusione basta dimostrare che tale retta esiste sempre.
>
> Prendiamo allora una retta non parallela a nessuna coppia di oggetti in modo tale che tutte le piazzole e i tirassegni siano da una stessa parte (r_1 nel disegno). Avvicinandola all'insieme parallelamente a sé stessa, mano a mano che le piazzole e i bersagli passano nel semipiano opposto calcoliamo la differenza $D_i = P_i - B_i$ tra il numero di piazzole P_i e il numero di bersagli B_i incontrati in questo cammino in funzione del numero di oggetti i incontrati. All'inizio e alla fine vale 0, ma se nel mezzo si riazzera ho trovato la mia retta. Come nel disegno supponiamo di no, quindi poiché D_i aumenta o diminuisce di 1 all'incremento di i, nel mezzo è sempre positiva o sempre negativa. Se ruotiamo la retta varia anche la funzione D_i ma se la ruotiamo di mezzo angolo giro (r_4 nel

disegno) allora ancora la funzione D_i non si azzera nel mezzo, ma ha questa volta segno opposto (precisamente $D_i(r_4) = -D_{2n-i}(r_1)$).

Ora basta dimostrare che il minimo (o il massimo) D_i varia abbastanza lentamente al variare della angolazione da consentire ad una retta con una rotazione intermedia di azzerarsi (r_3 nel disegno, che si azzera in D_4 con la parallela s_3).

Ma quando l'angolazione della retta passa una sola delle direzioni delle coppie piazzola-bersaglio (nella figura dalla *a* alla *b*) ma nessun'altra direzione delle possibili coppie di oggetti, la funzione D_i rimane identica eccezion fatta per l'incontro di quella coppia di oggetti che passa in ordine diverso, quindi il minimo D_i varia al più di una sola unità.



Poiché il mimino D_i cambia segno durante la rotazione della retta di mezzo angolo giro, allora necessariamente vale 0 per qualche angolazione intermedia.

Anche se un po' informalmente (la scusa è che si fa sì matematica ma ricreativa) mi pare dimostrato che è sempre possibile definire linee di tiro che non si incrocino.

Su ***Franco57*** il Capo può sempre contare.

5.3 [193]

Non c'è molto di cui vantarsi, una sola soluzione…

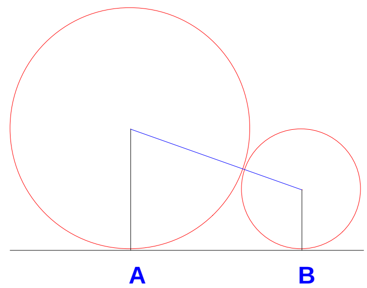
5.3.1 Ancora bottiglie!

Ecco un problema ispirato da quello del mese precedente con bottiglie inscatolate. Questa volta le bottiglie si trovano su un piano:

> *Le bottiglie sono tutte diverse: per semplicità, assumeremo i loro raggi (di base, approssimandole a cilindri) siano pari a* 1, 2, 3, …, *n: man mano che vengono consumate, sono posate sul balcone in modo tale da poggiare tutte sul pavimento piegate su un fianco. Questa struttura occupa un certo spazio che vorremmo minimizzare. Come risolvere il problema per n pari a* 20*?* 50*?*

Problema geometrico? Chi potrebbe risolverlo se non il nostro ***Sawdust***?

Date 2 circonferenze tangenti tra di loro ed entrambe tangenti ad una retta, la situazione è chiaramente quella raffigurata qui a fianco e la distanza tra i punti di tangenza con la retta (AB nel disegno) è pari a



$$\overline{AB} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$$

che sviluppata porta a

$$\overline{AB} = \sqrt{R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2} = 2\sqrt{Rr}$$

Quindi tra le 2 circonferenze più grandi del problema, ossia nel caso di n=20 C_1=20 e C_2=19, la distanza è pari a circa 38,9872.

Nello spazio in basso tra queste 2 potrà starci solo una circonferenza di raggio x tale che

$$2\sqrt{20x}+2\sqrt{19x}<2\sqrt{380}$$
$$x<4{,}8726$$

Quindi le circonferenze di raggio 1, 2, 3 e 4 possono essere trascurate ai fini del calcolo, visto che si infilano senza disturbare negli spazi lasciati tra le altre.

Disponendo in fila ordinata le bottiglie dal raggio 20 al raggio 5 andiamo a occupare uno spazio lungo 399,65 cm, possiamo fare meglio?

Se infiliamo la 5 tra la 19 e la 20, scostandole di poco, guadagniamo meno di 10 cm, riducendo lo spazio occupato a 390,2 cm.

Se invece alterniamo le bottiglie nell'ordine 20, 10, 19, 9, 18, 8 e così a seguire (ma in questo caso la 4 tra la 14 e la 13 le allontana ancora un po'), lo spazio occupato viene ridotto a 378,74 cm.

Ho fatto un po' di tentativi empirici e quello che mi sembra il risultato migliore è con la sequenza 11, 13, 4, 15, 6, 17, 8, 19, 10, 20, 9, 18, 7, 16, 5, 14 e 12 (così solo la 1, la 2 e la 3 vanno negli spazi vuoti) che occupa solo 376,2865 cm, riducendo di circa il 6% lo spazio impegnato.

Nel caso delle bottiglie fino al diametro 50, tra la 50 e la 49 si infila la 12, e quindi mettendo in fila le bottiglie ordinate da 50 a 13 lo spazio richiesto è di 2393,66 cm., mentre mettendole tutte in fila servono 2549,024 cm.

Se le disponiamo come nell'ultimo esempio del caso da 20, e quindi nella sequenza

27, 29, 31, 33, 9, 35, 11, 37, 13, 39, 15, 41, 17, 43, 19, 45, 21, 47, 23, 49, 25, 50, 24, 48, 22, 46, 20, 44, 18, 42, 16, 40, 14, 38, 12, 36, 10, 34, 32, 30, 28 e 26, (e anche qui solo le bottiglie fino alla 8 si imboscano) sono sufficienti 2281,69 cm con una riduzione dello spazio vicino al 10,5%.

Giocando ancora un po' con l'inizio e la fine della sequenza, trasformandola cioè in 29, 31, 27, 33, 9, 35, 10, 37, 12, 39, 14, 41, 16, 43, 18, 45, 20, 47, 22, 49, 24, 50, 25, 48, 23, 46, 21, 44, 19, 42, 17, 40, 15, 38, 13, 36, 11, 34, 26, 32, 28 e 30 le bottiglie occupano uno spazio totale di 2280,146 cm.

Questo è tutto. Speriamo che gli altri problemi trovino soluzione durante marzo, ma nel frattempo vi salutiamo per il momento. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

A noi sono sempre piaciute le soluzioni "alternative": qui, ne abbiamo trovata una che ha trasformato un problema delle Olimpiadi Matematiche in un "Q&D".

La domanda cui non sappiamo rispondere è: "Ma qual era, la soluzione ortodossa?" Nel senso di quella noiosa che occupa un paio di pagine, e non poche righe appassionanti.

Dimostrate che se da una scacchiera $2^n \times 2^n$ viene rimossa una casella qualsiasi, la parte restante della scacchiera è ricopribile da tri(o)mini a forma di "L".

Dividiamo la scacchiera in quattro sotto-scacchiere identiche $2^{n-1} \times 2^{n-1}$: la cella mancante sarà in una ben precisa sotto-scacchiera.

Poniamo il nostro tri(o)mino al centro, in modo tale che occupi una casella per ciascuna delle sotto-scacchiere senza la cella mancante.

Consideriamo ogni sotto-scacchiera come una scacchiera del problema originale, in cui la cella (è una sola) occupata dal tri(o)mino posizionato al punto precedente è equivalente a una cella mancante.

Risolviamo il problema per induzione, dividendo ulteriormente in quattro parti ogni singola scacchiera.

7. Pagina 46

Tra le diverse soluzioni, ne esiste una che utilizza le *Frazioni di Farey*.

Si definisce come *n-esima sequenza di Farey* F_n quella che contiene tutte le frazioni irriducibili in ordine crescente per cui il denominatore sia minore di n: ad esempio, si ha:

$$F_5 = 0/1,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/3,\ 2/5,\ 1/2,\ 3/5,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ 1/1.$$

Quindi, F_{99} rappresenta la parte iniziale della sequenza *infinita* (non è stato richiesto che le frazioni siano proprie) richiesta dal problema; ed essendo 5/8<1, si ha che a/b, c/d appartengono alla sequenza.

È noto che per due frazioni successive w/x, y/z appartenenti ad una sequenza di Farey vale la relazione:

$$xy - wz = 1.$$

E quindi, se a/b precede immediatamente 5/8 nella sequenza di Farey, deve essere:

$$5b - 8a = 1$$
$$8a + 1 = 5b \equiv 0 \pmod 5$$
$$\Rightarrow a \equiv 3 \pmod 5.$$

Ossia esiste un qualche intero positivo n per cui $a = 5n + 3$ e, sostituendo nella prima delle espressioni qui sopra, otteniamo:

$$5b - 40n - 24 = 1$$
$$b = 8n + 5$$
$$\Rightarrow a/b = (5n + 3) / (8n + 5).$$

Il che significa che il termine immediatamente precedente 5/8 nella sequenza di Farey vale $(5n + 3) / (8n + 5)$: e siccome ogni sequenza di Farey F_n è contenuta nelle sequenze successive F_{n+k}, questo termine resterà il termine immeditamente precedente 5/8 sin quando non interverrà una frazione maggiore di lui (ma minore di 5/8), dato che i termini devono restare strettamente crescenti.

Si vede facilmente che $(5n + 3) / (8n + 5)$ aumenta all'aumentare di n:

$$\begin{aligned}\frac{5(n+1)+3}{8(n+1)+5}-\frac{5\cdot n+3}{8\cdot n+5} &= \frac{5\cdot n+8}{8\cdot n+13}-\frac{5\cdot n+3}{8\cdot n+5}\\ &= \frac{1}{(8\cdot n+13)\cdot(8\cdot n+5)}>0\end{aligned}.$$

Se esprimiamo $(5n + 3) / (8n + 5)$ ai minimi termini, abbiamo che *ogni divisore comune* d *di* $8n + 5$ *e* $5n + 3$ *divide anche* $5(8n + 5) - 8(5n + 3) = 1$, *e quindi deve essere* $d = 1$.

Quindi, $8n + 5$ è il valore effettivo del denominatore nella sequenza; siccome inoltre deve essere minore di 99, il suo massimo valore è 93, che viene raggiunto per $n = 11$.

Ossia, nel procedere lungo le sequenze di Farey sino a F_{99}, i vicini sinistri di 5/8 procedono lungo i valori (crescenti) di $(5n + 3) / (8n + 5)$, n = 1, 2, …, 11. Il vicino sinistro in F_{99} risulta quindi essere:

$$(5\cdot 11 + 3) / (8\cdot 11 + 5) = 58/93.$$

Nello stesso modo, per quanto riguarda c/d:

$$5d = 8c - 1$$
$$8c \equiv 1 \pmod 5$$
$$c = 5n + 2,$$

e quindi:

$$5d = 40n + 15$$
$$d = 8n + 3.$$

ossia, ridotto a frazione irriducibile,

$$c/d = (5n + 2) / (8n + 3).$$

In questo caso, nel passare da una sequenza alla successiva, il termine che stiamo cercando o resta uguale o diventa minore, avvicinandosi sempre di più a 5/8, e si verifica facilmente che $(5n + 2) / (8n + 3)$ decresce al crescere di n, e quindi anche questa volta sarà il massimo valore di n che c fornirà il valore del vicino di destra di 5/8 in F_{99}.

Imponendo quindi $8n + 3 < 99$, otteniamo $n = 12$ (e denominatore pari a 99; quindi

$$(5 \cdot 12 + 2) / (8 \cdot 12 + 3) = 62/99.$$

8. Paraphernalia Mathematica

Double feature, questa volta. Non perché siamo buoni, ma il mese passato abbiamo chiuso all'ultimo momento e questa parte proprio non abbiamo fatto a tempo a scriverla. Siccome è breve, e abbiamo un altro argomento che è breve anche lui, li mettiamo assieme e vediamo cosa succede.

8.1 Go, Alice, Go! [002]

Il mese scorso, Alice è riuscita in quello che sembra un compito impossibile: mandare un messaggio senza chiave, e farlo capire all'altro lato. Ringalluzzita dal successo, tenta un altro *exploit*.

È implicito che, quando andate a votare, per evitare brogli, dobbiate dimostrare la vostra identità: è altrettanto implicito che volete mantenere la segretezza del voto, e la cosa viene risolta facendo votare un *certo numero* di persone nello stesso seggio: sono tutte riconosciute, ma i voti sono tutti mescolati e risalire a chi ha votato cosa diventa impossibile.

Il problema che affronta adesso Alice[19] è quello di implementare un sistema di voto *da casa*, nel quale venga riconosciuta l'identità dell'elettore, venga accettato il suo voto ma non sia possibile scoprire che cosa ha votato.

Supponiamo che – in un modo o nell'altro – Alice sia riuscita a dimostrare la propria identità, e quindi sia ammessa al voto: il "trucco" utilizzato per mantenere la segretezza è di utilizzare, per nascondere il proprio voto, non una tecnica "normale" di criptazione, ma gli *altri voti*. In pratica, il voto di Alice viene "nascosto in mezzo agli altri", esattamente come quando andate al seggio: in un'immagine piuttosto pittoresca, Alice non dice cosa vota, dice come vanno a finire le elezioni.

Prima di tutto, però, raffreddiamo i facili entusiasmi: il sistema funziona per *piccoli numeri*: infatti, se utilizzate delle k-ple per la trasmissione dei voti, avete n votanti che devono scegliere tra r opzioni[20], deve comunque essere $nr<k$: il che significa che, se usate il nostro $GF(2^{300})$, potete gestire un qualcosa come 70 elettori con 4 partiti: il che, potrebbe essere considerata una violazione della democrazia ben maggiore della segretezza del voto. Non solo, ma come vedremo, gli elettori devono darsi un mucchio da fare, e alzarsi tutti molto presto: fidiamo nella loro volontà di partecipazione, va bene?

In alcune discussioni che risalgono ormai alla preistoria di questa rivista, avevamo utilizzato simboli piuttosto creativi per definire le fazioni in lizza: qui, più prosaicamente, rappresentiamo ognuno dei partiti con un *polinomio* di grado minore o uguale a r, e supponiamo gli n votanti A_1, A_2, …, A_n esprimano la loro preferenza scegliendo uno di questi polinomi.

Sappiamo che ci sono sempre almeno r polinomi irriducibili: richiediamo che la rappresentazione dei partiti avvenga attraverso uno di questi polinomi e, per il momento, ignoriamo la possibilità di un sabotaggio: ci limitiamo a richiedere il mantenimento della riservatezza del voto.

Sempre per restare sui preliminari, richiediamo che A_i sia in grado di ricevere delle k-ple da A_{i-1} e sia in grado di trasmetterle a A_{i+1} , con le condizioni al contorno che A_n le trasmette a A_1: questo ci impone quindi di avere un *ordine* di votazione e, soprattutto, di presumere che nessuno si astenga.

Come prima cosa, l'elettore A_i genera due grossi interi positivi a_i e b_i e sceglie una k-pla y_i: tutti e tre questi valori sono mantenuti segreti, e il nostro elettore "nasconde" il suo voto x_i moltiplicando questo valore per y_i: la base della procedura consiste nel fornire ad ogni elettore i due prodotti $x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n$ e $y_1 y_2 \ldots y_n$ da cui per divisione diventa

[19] In realtà qui le Alici (anzi, gli *Alici*) sono due: ***Richard Lipton*** e ***Avi Widgerson***, della Princeton University.

[20] ...e non stiamo contando le preferenze...

possibile ricavare il risultato (parziale! Stiamo ancora votando!) dell'elezione, che è $X = x_1 x_2 \dots x_n$.

La cosa richiede alcuni passaggi.

***Fase* 1, *Passo* 1**: In questo passo, A_i riceve una k-pla da A_{i-1}, la eleva alla potenza a_i e la passa a A_{i+1} : tutto questo per l'intero elettorato, il che significa un giro completo. Alla fine, il nostro A_i che ha fatto partire il giro riceve (manteniamo l'ordine negli esponenti per chiarezza anche se, essendo commutativi, non sarebbe necessario):

$$\left(x_i y_i\right)^{a_i a_{i+1} \dots a_n a_1 a_2 \dots a_{i-1}}.$$

Tutto più chiaro, vogliamo sperare.

***Fase* 1, *Passo* 2**: In questo passo, ogni elettore non deve fare altro che moltiplicare quanto ricevuto per il proprio $(x_i\ y_i)^a$, che era stato determinato al passo precedente: il primo della serie non fa altro che passare il proprio $(x_i\ y_i)^a$ (come se avesse ricevuto 1, insomma).

***Fase* 1, *Passo* 3**: In questo passo, ognuno degli A_i rimuove il suo esponente da quello che ha ricevuto elevando quanto ricevuto alla potenza a_i^{-1} (e abbiamo visto il mese scorso come questo sia possibile: se ricordate, il dover estrarre questo inverso ci imponeva la condizione aggiuntiva che a_i e b_i fossero primi rispetto a $2^k - 1$); in questo modo, A_i inizia passando $(x_1 y_1 \dots x_n y_n)^{a_i^{-1}}$ e quindi ottiene $x_1\ y_1 \dots x^n\ y^n$.

***Fase* 2**: qui si tratta di applicare la stessa procedura a tre passi a $y_1\ y_2 \dots y_n$: attenzione però che al posto dei vari a_i bisogna utilizzare i b_i .

In pratica, ogni A_i è ora in grado di calcolare il proprio $X = x_1\ x_2 \dots x_n$: questo risultato, che contiene tutti i voti (incluso quello del nostro soggetto) viene passato all'Ufficio Elettorale competente.

A questo punto, l'Ufficio Elettorale fa un lavoro che può essere facilmente verificato da ogni A_i: in pratica, dall'insieme dei polinomi irriducibili P_1, P_2, …, P_r verifica quanti "esemplari" di ognuno di essi è contenuto in X, calcolando X/P_i: se non è divisibile, significa che nessuno ha votato per l'i-esimo candidato, mentre se è divisibile si riprova a dividere per X e si conta un voto: avanti in questo modo, il nostro polinomio sarà divisibile tante volte quanti sono i voti ricevuti dal candidato.

Essendo i nostri polinomi irriducibili, la scomposizione dovrà essere unica, e quindi possiamo estrarre il risultato.

Il sistema ha anche un'altra interessante caratteristica: per nessuno, neanche per l'ufficio elettorale, è possibile modificare i dati. I risultati delle elezioni devono corrispondere al polinomio X, che ogni elettore conosce: in caso contrario, qualcuno ha barato.

"Ma se funziona così bene, perché non lo applicano?" Secondo noi, per due ragioni: tanto per cominciare richiede un mucchio di passaggi, e già oggi la gente non va a votare perché c'è troppo da faticare; inoltre, convincere i nostri connazionali allergici alla matematica a usare questo "sistemino" è, a dire poco, una fatica di Sisifo.

8.2 Frazioni di Paperino

Il titolo deriva dal fatto che ricordiamo benissimo un'avventura nella quale Paperino si improvvisava insegnante e riusciva a fare una serie di calcoli con *metodi* palesemente sbagliati, ma risultati corretti: per intenderci, operazioni del tipo:

$$\frac{64}{16} = \frac{4}{1}.$$

"Corretta. Come hai fatto?"

"Ho semplificato i sei".

Se la matematica per voi non riveste alcun interesse, è abbastanza probabile che a seguito di una risposta del genere mi mandiate rapidamente a quel paese; ma se mostrate qualche interesse in matematica ricreativa, è più probabile che dalla stupidaggine di cui sopra vi nasca la domanda di *quali siano* i numeri per i quali operazioni del genere sono possibili. Come sempre, una veloce ricerca per forza bruta vi permette di identificarne qualcuno:

$$\frac{98}{49}, \frac{95}{19}, \frac{65}{26}$$

e i loro reciproci, ovviamente[21].

Se ci limitiamo ai numeri a due cifre e giocherelliamo con un computer, ci accorgiamo che non ce ne sono altri, il che potrebbe portarci a un rapido disamore per la materia; ma per il momento ci siamo fermati alla *base dieci*: cosa succede, nelle altre basi? Va meglio o peggio, ad esempio, in base dodici?

Per cominciare, statuiamo il problema in modo formale (e inventiamoci una notazione): siamo interessati ad identificare le cifre x, y, z nella base b per cui

$$\frac{x,y}{z,x} = \frac{y}{z},$$

dove il simbolo $\frac{x,y}{z,x}$ significa $\frac{xb+y}{zb+x} = \frac{y}{z}$. Ricordiamoci che questa formulazione non tiene conto dei reciproci, che si "semplificano" nell'altro senso.

Iniziamo l'esplorazione delle diverse basi: prima, come sempre, lavoriamo di forza bruta.

In base 2, niente di interessante (semplificare gli zeri non è valido! Non l'avevamo detto? Beh, lo diciamo adesso).

In base 3, idem, visto che ha solo due simboli diversi da zero.

In base 4, finalmente succede qualcosa di interessante. Infatti, abbiamo:

$$\frac{3,2}{1,3} = 2.$$

Il guaio è che anche la forza bruta qui riesce a fare piuttosto poco: infatti, in una qualsiasi base b, dobbiamo controllare un totale di $(b-1)(b-2)(b-3)$ frazioni, il che non è poco: meglio affrontare la cosa da un punto di vista più teorico: proviamo a riformulare il problema e ad *arzigogolarci* un po' sopra.

Quelle che cerchiamo sono le soluzioni all'equazione:

$$(bx + y) / (bz + x) = y / z,$$

con $1 \leq x, y, z \leq b - 1$ e x, y, z tutti diversi tra loro.

Moltiplicando la nostra equazione per $(bz + x)$, otteniamo:

$$b\,(x - y)\,z = y\,(x - z),$$

ossia, *se b è primo*, si ha che $b \mid y$ ("b divide y": simbolo utilissimo, sempre molto poco usato) o che $b \mid (x - z)$; siccome $1 \leq y \leq b - 1$ e $1 \leq |x - z| \leq b - 1$, nessuna delle due è possibile, e quindi ***se la base è prima, non è possibile nessuna frazione "alla Paperino"*** (potevamo scrivere "non ci sono soluzioni all'equazione data", ma usare il nome di qualcuno dà sempre un'aria più tecnica).

Riaggiustando la nostra espressione, otteniamo:

$$yz\,(b - 1) = x\,(bz - y);$$

Se supponiamo $b - 1$ *primo*, allora $b - 1$ divide o x o $bz - y$; nel secondo caso, divide anche $(b - 1)\,z + z - y$ e quindi divide anche $z - y$; ma questo è impossibile in quanto $1 \leq |z - y| \leq b - 1$, e quindi deve essere $b - 1 \mid x$ e (per il fatto che le nostre incognite sono *cifre*) $x = b - 1$. Abbiamo ora $yz = bz - y$, e quindi y è un multiplo di z, diciamo $y = kz$; questo ci porta a $kz^2 = bz - kz$ e $y = kz = b - k$, ossia si ha che k è un fattore di b. Da cui, è soluzione:

$$(b - 1,\ b - k,\ b/k - 1),$$

ossia ***c'è una soluzione corrispondente ad ogni fattore di b oltre a b e a 1; inoltre, se $b - 1$ è primo, queste sono le uniche soluzioni***.

Questo significa che avete quattro frazioni di Paperino in base 12, e 10 in base 60 (visto che 11 e 59 sono numeri primi). Le soluzioni di questo tipo sono dette ***banali***: e questo

[21] Stiamo sorvolando su alcuni casi triviali, quali ad esempio 22/22.

dovrebbe insospettirvi sul fatto che ce ne siano delle altre che non è così immediato trovare.

Ve la diamo subito, la brutta notizia? Non ci risultano metodi per tirare fuori in un colpo solo tutte le frazioni di Paperino nel caso generale; ci risulta però un metodo che, anche se procede per tentativi, richiede decisamente meno calcoli che il provarle tutte.

Tutte le soluzioni sono della forma:

$$x = mp$$
$$y = x - k$$
$$z = xy / (y + kb),$$

sotto le condizioni che z risulti un intero, p sia un fattore primo di $b - 1$, $1 \leq m \leq r = b - 1$, $1 \leq k < x$.

Sicuramente più facile da verificare che la ricerca a forza bruta; la dimostrazione è lunga e noiosa (e siamo già in ritardo), quindi se vi interessa avete solo da chiederla.

Appurato che dobbiamo cercare delle soluzioni con $x < b - 1$ (sono quelle *non banali*), notiamo che se b è pari, allora se p e r sono fattori di $b - 1$, devono essere entrambi dispari; in questo caso, si verifica facilmente che

$$x = p\ (r + 1) / 2$$
$$y = b / 2$$
$$z = (r + 1) / 2$$

è una soluzione accettabile della nostra equazione: si vede anche che non è banale in quanto $b - 1 > p$, e quindi:

$$x = (pr + p) / 2 = (b - 1 + p) / 2 < b - 1.$$

Non solo, ma scambiare r e p ci fornisce un'ulteriore soluzione, tranne nel caso in cui $b - 1$ sia un quadrato dispari (il che porterebbe a $p = r$).

Se b è dispari e s è un suo fattore (proprio: non cominciate a cercare i peli nell'uovo) allora le componenti della soluzione banale ($b - 1$, $b - s$, $b/s - 1$) sono pari, e quindi dimezzandole tutte otteniamo una soluzione non banale: ad esempio, (8, 6, 2) è una soluzione banale per la base 9, e quindi (4, 3, 1) è una sua soluzione non banale. Non ci sono altre soluzioni per la base 9: sembra (potreste verificarlo) che per tutte le altre basi in cui sia b che $b - 1$ sono composti esistano soluzioni non banali non ottenibili per divisione per un fattore comune delle soluzioni banali, ma la cosa non ci risulta essere dimostrata.

Con la nostra usuale precisione e accuratezza, facciamo un'affermazione: y non è mai molto piccolo. E neanche x.

La cosa, in effetti, risulta da un paio di teoremi piuttosto semplici da dimostrare: messi in forma unica, statuiscono che *per tutte le soluzioni,* $y \geq (x + 1) / 2$, *e quindi* $k \leq (x - 1) / 2$. *E* $x \geq 1 + \sqrt{b}$.

Quindi, possiamo rivedere il nostro teoremino su tutte le forme possibili esprimendolo in questo modo:

$$x = mp \text{ dove } p \text{ è un fattore primo di } b - 1 \text{ e } (1 + \sqrt{b}) / p \leq m \leq (b - 1) / \mathrm{p};$$
$$y = x - k \text{ dove } (x - 1) / 2 \geq k > 1;$$
$$z = xy / (y + kb).$$

Il che, anche se complica la scrittura, semplifica la ricerca; ad esempio, per $b = 10$, p deve valere 3, $x = 3m \geq 5$, il che significa che x deve valere 9 o 6; per $x = 9$ abbiamo le soluzioni banali (9, 8, 4) e (9, 5, 1), mentre per $y = 6$ deve essere $y \geq 4$, quindi y varrà 4 o 5, da cui nascono le altre due soluzioni (6, 4, 1) e (6, 5, 2). E basta.

La potenza di questo teorema è tale da permettere (a macchina) di esaminare anche casi come $b = 1000$, per il quale si contano 126 soluzioni (che vi calcolate voi: fateci sapere come avete scritto le cifre, mi raccomando!).

Giocherellando sempre con queste formule, si possono ottenere altre informazioni interessanti (delle quali vi lasciamo volentieri la dimostrazione come esercizio: tanto, se avete letto sin qui, ormai siete dei tossicodipendenti, nel ramo). Ad esempio:

Per tutte le soluzioni, $z \leq y / 2$.

Il numero delle soluzioni per un dato b ***è pari, a meno che*** b ***sia un quadrato pari***.

Per dirla con una vecchia citazione di Dirac, l'ultimo teorema vi permette di capire che avete sbagliato in un numero *dispari* di posti.

Interessati come sempre agli eccessi e ai comportamenti anomali, potremmo chiederci quali siano le basi con il maggior numero di frazioni di Paperino: i migliori candidati, evidentemente, sono quelle per cui b è un quadrato e $b - 1$ ha più fattori possibili; potete vedere facilmente (beh, l'ultimo mica tanto...) che la base 36 ha 21 soluzioni, la base 441 ne ha 130 e il record (conosciuto da noi, quantomeno) appartiene alla base 3025, con 410 soluzioni.

Adesso, ci sarebbe da coprire i casi in cui semplificate *più di una cifra*, ma ci pare corretto lasciarvelo come esercizio, fornendovi un solo esempio piuttosto inquietante:

$$\frac{2(666)}{(666)5} = \frac{2}{5};$$

Lovecraft sicuramente avrebbe avuto qualcosa da dire, in merito.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms