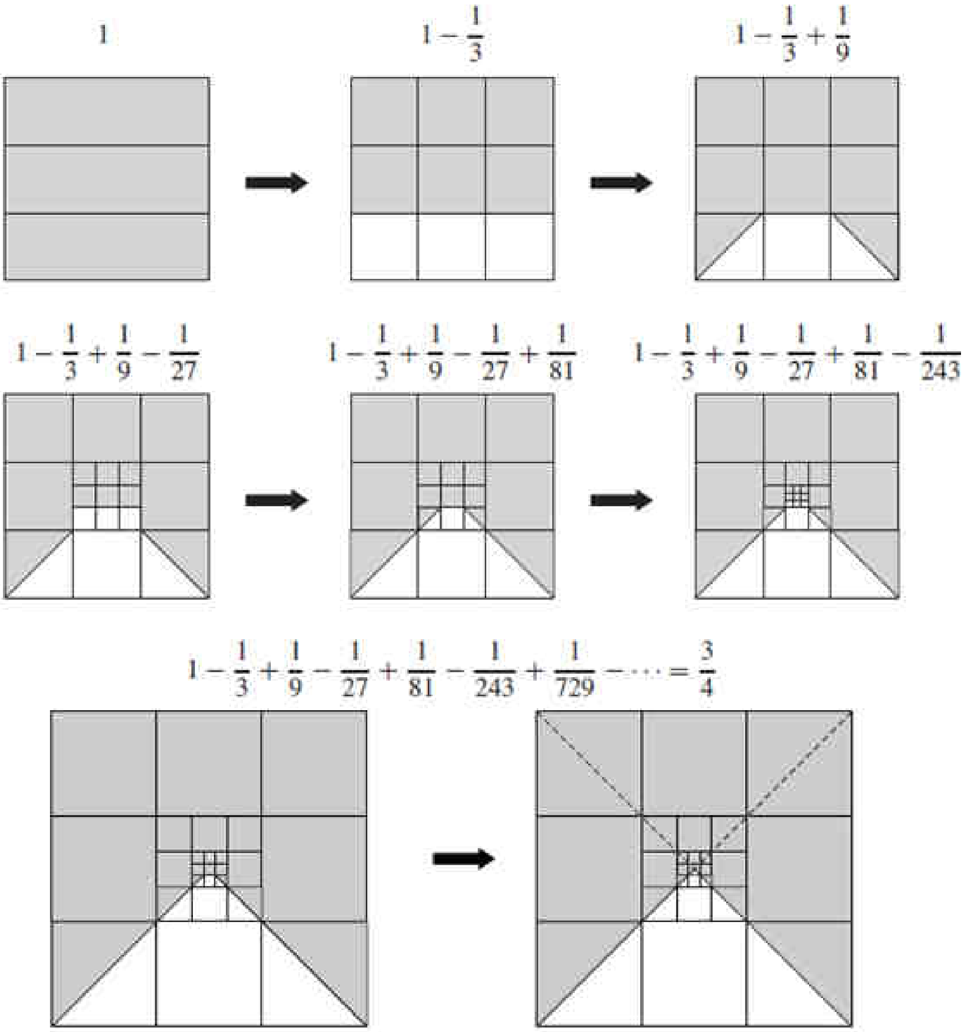
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 192 – Gennaio 2015 – Anno Diciassettesimo

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3}\right)^k = ?$$



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da

Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM190 ha diffuso 3161 copie e il 11/01/2015 per Google eravamo in 12’200 pagine.

Per la serie: dimostrazioni senza parole.

Per quanto ne sappiamo, questa in particolare è da attribuire a Hasan UNAL (Yildiz Technical University, Istanbul), ma lui dice di aver preso ispirazione da Richard MABRY (che non sappiamo cosa faccia). No, non abbiamo dei link.

1. Domande fondamentali

"Quarantadue!" urlò Loonquawl. "Questo è tutto ciò che sai dire dopo un lavoro di sette milioni e mezzo di anni?"
"Ho controllato molto approfonditamente," disse il computer, "e questa è sicuramente la risposta." (Douglas Adams, "Guida Galattica per Autostoppisti")

Della "domanda fondamentale" per eccellenza, per fortuna, conosciamo bene la risposta. Ci vergogniamo quasi a scriverla, tanto è nota. Densa e traboccante di significati, la risposta fatale ha ormai diritto di esistenza in ogni angolo della rete, dei media, del mondo. Se qualcuno decidesse di emulare Diderot e D'Alembert[1] e scrivere un'enciclopedia omnicomprensiva, non potrebbe fare a meno di scrivere una lunga e accurata voce in corrispondenza del fatal numero "quarantadue".

1 *"Towel day" per celebrare Doug (non è difficile capire dove)*

Del resto, l'enciclopedia principale del ventunesimo secolo (che conserva ottime chance di diventare anche l'enciclopedia per antonomasia del terzo millennio), Wikipedia, è già generosa di notizie sulla "Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Vita, l'Universo e Tutto Quanto". Fin troppo, probabilmente: solo ad enumerarle, le possibili (e molto, molto ipotetiche) ragioni per le quali "quarantadue" dovrebbe essere la risposta cruciale ad ogni interrogativo, si raggiungono cifre di tutto rispetto; e alcune considerazioni specifiche sono davvero creative e divertenti.

Naturalmente, appena si sospende un po' la complicità del gioco intellettuale, bisogna ricorrere all'unica e sola autorità riconosciuta nel campo, e cioè all'autore stesso della boutade. Intervistato con la fatidica domanda "*Perché proprio quarantadue?*", Douglas Noel Adams, nato a Cambridge nel 1952[2], candidamente riconosceva: "*era uno scherzo; doveva essere un numero: un numero ordinario, abbastanza piccolo, e ho scelto quello. Rappresentazioni binarie, base tredici, monaci tibetani non c'entrano niente. Sedevo alla scrivania, guardavo il giardino e ho pensato: "42 andrà bene", e l'ho scritto. Fine della storia*".

Uno degli elementi più significativi della risposta fondamentale sta forse proprio nella dimostrazione di come possano essere risvegliate la fantasia e la creatività umana quando sono opportunamente stimolate, perfino quando lo stimolo non è altro che, in ultima analisi, un piccolo scherzo narrativo. O, in modo un po' più serioso, quanto potrebbe essere autentica la teoria di un grande amico di Adams, Richard Dawkins, che dopo aver formulato l'ipotesi del "gene egoista" ha dato un nome a quelle idee che si propagano viralmente da un essere umano all'altro, e che lui ha battezzato "memi". Forse non sarà davvero la risposta fondamentale all'Universo, ma 42 è certamente ormai un

[1] Non il nostro, l'altro.

[2] Era una delle cose che più inorgoglivano Adams: "Sono nato a Cambridge, nel 1952, e le mie iniziali sono DNA", ripeteva, con ovvio riferimento alla scoperta cruciale della genetica.

meme affermatissimo. Samantha Cristoforetti, prima donna astronauta d'Italia, è ben fiera di partecipare alla missione numero quarantadue dell'ESA: il suo blog si chiama "Avamposto 42", e lei stessa non ha esitato a posare, con i suoi compagni di viaggio, nelle foto ufficiali della missione vestita come i personaggi della Guida Galattica per Autostoppisti. E anche se non ne abbiamo la certezza assoluta, siamo pronti a scommettere che non c'è partecipante alla missione che non si sia portato sulla Stazione Spaziale Internazionale almeno un asciugamani.

2 *Un "4" a sinistra e un "II" a destra. Difficile che sia un caso…*

Del resto, anche l'ESA deve aver ritenuto il numero d'ordine particolarmente significativo, se nel logo della missione ha raffigurato la ISS con i pannelli solari sistemati nella maniera che più ricordano il numero fatidico.

Pur con tutti i meriti e le indiscutibili virtù, la Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Vita, l'Universo e Tutto Quanto ha comunque anche qualche pecca, qualche difetto, seppur di carattere puramente generale. Innanzitutto, si tratta di una Risposta, non di una Domanda: peggio ancora, si tratta di una risposta orfana, ovvero di una risposta che perde di valore perché non si conosce la sua diretta genitrice, la Domanda Fondamentale. Dal punto di vista narrativo, questo elemento è tutt'altro che un difetto, ma dal punto di vista gnoseologico è un bel dramma: costruire un computer grande come un pianeta solo per risolvere l'interrogativo è oggettivamente la scelta più logica, avendo a disposizione un budget adeguato.

Un altro problema connesso alla Domanda Fondamentale è invece un mero problema di traduzione. "Fondamentale" è infatti un aggettivo un po' ambiguo: nel senso più colloquiale significa "importantissimo", "definitivo", ed è in questo senso che è stata intesa da Adams: l'originale inglese parla infatti di "Ultimate Question", e "ultimate" (anche grazie alla sua evidente radice latina) è facilmente interpretabile appunto nel senso di ultimo, definitivo, ciò che chiude definitivamente il discorso. I traduttori italiani[3] avrebbero certo potuto decidere di rendere in italiano il termine in maniera più letterale, traducendo la frase con "Domanda Definitiva sull'Universo, la Vita e Tutto Quanto", ma è indubbio che, in tale contesto, "fondamentale" è aggettivo che si attaglia molto meglio di "definitivo". Ciò non di meno, in italiano "fondamentale" significa anche, nel suo significato letterale e originario, "relativo ai fondamenti", ed è indubbio che virtualmente ogni disciplina, scienza, istituzione umana deve di tanto in tanto fare i conti con delle domande fondamentali nel senso letterale del termine.

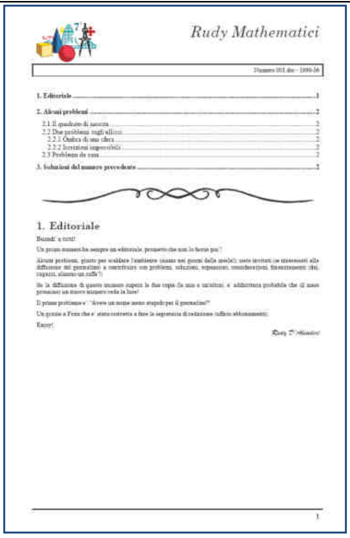
Non c'è scienziato di fama che non si sia sentito chiedere "che cos'è la Scienza?", nessun filosofo ha potuto sottrarsi alla questione "che cos'è la Filosofia?", nessun uomo politico degno di questo nome può evitare di rispondere a cosa gli chiede cosa sia davvero la Democrazia; e in ultima analisi persino soggetti meno nobili non sfuggono, di tanto in tanto, a delle spietate fondamentali: che cos'è l'Alpinismo? Cosa descrive pienamente i fondamenti della Sceneggiata Napoletana? Quale la ragione d'essere del Cricket?[4]

[3] Siamo orgogliosi possessori di una copia del numero 843 di Urania (6 luglio 1980), prima edizione italiana del primo capitolo della somma epopea. La traduttrice di quel testo è Laura Serra, ed è presumibilmente a lei che dobbiamo capolavori di traduzione quali "ciaparche", "sgarbazzoso", "sobobare", e naturalmente del "Gotto Esplosivo Pangalattico". Per questo e per molte altre ragioni, vogliamo bene a Laura quasi quanto ne vogliamo a Douglas.

[4] Anche a questa domanda ha risposto degnamente Douglas Adams, nel suo ciclo immortale. Ma ormai è ora di piantarla con le citazioni in proposito.

Se questa rivista si qualificasse come "giornale di Matematica", non avrebbe troppi problemi a rispondere alla corrispondente domanda fondamentale: "Che cos'è la Matematica?" è infatti quesito ampiamente dibattuto ed esplorato, al punto che è anche il titolo di un celeberrimo libro di Courant e Robbins[5]. E se un intero tomo di biblioteca non dovesse bastare, sarebbe comunque facile ripercorrere la storia della matematica tra fine Ottocento e inizio Novecento, quando "la questione dei fondamenti" era particolarmente sentita, e trattata dai maggiori intelletti matematici dell'epoca.

Questione che ha portato a crisi, crisi che hanno indotto ripensamenti, ridefinizioni, ricostruzioni. Non c'è stato matematico di levatura che si sia sottratto all'impegno, perché è inevitabile: alle domande fondamentali devono rispondere soprattutto i Vecchi Saggi, più che i Giovani Geni. È come se la conoscenza di una disciplina fosse un percorso circolare, più che un continuo progredire in linea retta: quando si è passata tutta una vita ad osservare, coltivare, veder crescere una scienza, è quasi inevitabile ritrovarsi a porsi le domande realmente cruciali, quelle che spietatamente interrogano sull'essenza più profonda del soggetto di studio. Tanto per riutilizzare una vecchia metafora, è un po' quel che succede anche in alcune arti marziali, quando i grandi maestri, dopo aver percorso tutti i *dan*, tutti i gradi della cintura nera, se sono veramente grandi ricevono l'estremo onore di tornare ad indossare la cintura bianca, simbolo del ritorno all'innocenza propria dei fanciulli.


Rudy Mathematici

1. Editoriale

3 *La prima pagina del primo numero della Prestigiosa*

Il problema però sussiste, perché questi fogli non si qualificano come giornale di matematica, ma bensì come "rivista di matematica ricreativa"[6]: e la domanda fondamentale corrispondente, per quanto ridimensionata dall'aggettivo qualificativo, non è per questo meno devastante, specialmente se rivolta a degli arruffoni quali sono i Redattori della Prestigiosa. L'interrogativo "ma che cosa sarebbe, poi, la Matematica Ricreativa?" è in genere mosso non da ardite ore di profonda meditazione trascendentale, quanto da sincera e stupita curiosità. Curiosità che, ad analizzarla solo per un istante, è profondamente rivelatrice. Nessuna persona di normale cultura scolastica ignora il significato del sostantivo "matematica" e dell'aggettivo "ricreativa". Non si tratta di termini tecnici, come possono essere "bosone" o "transaminasi": dovrebbero essere pianamente interpretati, così come è facile interpretare accoppiate di parole quali "casa gialla", "strada diritta", "albero frondoso". Se questo non accade – e in effetti non accade, perché la domanda viene avanzata ad ogni piè sospinto – è perché i due termini sembrano contraddirsi. Nessuno trova niente da obiettare sul colore giallo d'una casa, sulla capacità d'una strada d'essere rettilinea, sulla frondosità di un albero: ma l'idea che la matematica possa avere aspetti divertenti è istintivamente rigettata da un gran numero di persone.

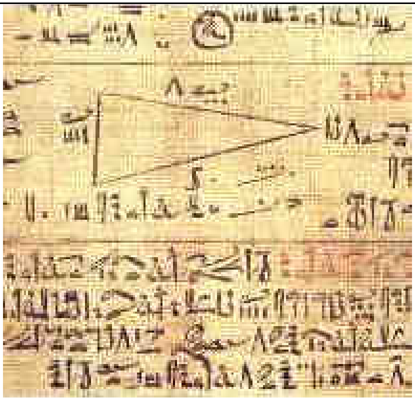
Da queste premesse, risulta evidente che la Risposta Fondamentale sulla Matematica Ricreativa deve innanzitutto sforzarsi di convincere gli scettici che sì, un certo numero di originali riesce a trovare divertenti alcune parti della matematica; e sì, esistono addirittura dei tipi ancora più originali che spendono una considerevole quantità di tempo e risorse nel tentativo di costruire e diffondere problemi divertenti. Solitamente, a questo punto della risposta l'interesse dei comuni mortali decade verticalmente, perché quasi sempre la curiosità iniziale è della stessa natura di chi chiede spiegazioni ad un folle che sostiene che gli asini volano: appena ricevuta conferma dal folle che a suo dire quella specie equina riesce davvero a librarsi per l'aere, un sorriso di compatimento

[5] Ne parliamo più diffusamente in RM156, Gennaio 2012, nel compleanno dedicato proprio a quella strana coppia, "Estetica del Sarchiapone".

[6] "Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa", per la precisione. Ci teniamo molto, specie a quel "Prestigiosa" che ci siamo dati da soli, con insuperata modestia e preveggenza, fin da primo numero o giù di lì.

compare malcelato sul volto della controparte, che subito dopo cerca di chiudere definitivamente il discorso e di allontanarsi nel più breve tempo possibile.

Nei rari casi in cui l'attenzione del questuante è ancora desta, la Risposta alla Domanda Fondamentale sulla Matematica Ricreativa deve per forza avventurarsi in un territorio pericoloso e denso di pericoli. Se perfino la Matematica tout court incontra delle obiettive difficoltà di definizione, la piccola sottoclasse della sezione ricreativa ha le medesime difficoltà moltiplicate per un fattore tutt'altro che piccolo. Alla fin fine, la Matematica vera richiede una metodologia rigorosa di definizioni, regole, processi di calcolo e derivazione logica; e soprattutto non è tenuta a rendere conto delle sue conclusioni al mondo reale, avendo subaffittato questo compito fastidioso alla Fisica. Per contro, la matematica ricreativa, per riuscire ad essere tale – cioè divertente – deve per sopravvivere restare aperta alle umane peripezie, e non può rifiutarsi affatto di trattare oggetti come capre e cavoli, giardini da innaffiare, monete da pesare, dadi onesti e truccati, per non parlare di intere tribù di tipi strani che dicono sempre bugie o sempre la verità, quando non si divertono ad alternare l'una all'altra.



4 *Papiro Rhind: soluzioni nel prossimo numero*

Solitamente, per darsi un alone di antica nobiltà, il difensore della MR ricorre alla storia, cercando di spacciare per prodromi degli aspetti ricreativi della matematica alcuni antichissimi indovinelli. Si inizia a citare il Papiro Rhind, denso di problemi[7], avanzando l'ipotesi che ci saranno ben stati degli strambi antichi Egizi a cui quei problemi interessavano; si passa poi a raccontare di Archimede e della mandria del Sole, di Fibonacci e delle capacità riproduttive dei conigli, del sommo Dürer che nascondeva quadrati magici nelle sue incisioni, e via via tutti i grandi del passato, che tra un teorema e l'altro ogni tanto si rilassavano con giochini curiosi, al punto che non si è ancora ben capito se quel burlone di Fermat stesse facendo sul serio o avesse intenzione di fare un tiro birbone ai posteri, quando annotava commenti a margine dei libri di aritmetica.

Per fortuna di chi è nato nella seconda metà del Novecento, si può approdare in breve a parlare di Martin Gardner, e della sua opera meritoria "Mathematical Games" sulle pagine di Scientific American: a quel punto la via della Risposta Fondamentale è spianata, e si ha la certezza che il messaggio sia arrivato a destinazione, o che non ci arriverà mai. Questa associazione diretta e assoluta tra la matematica ricreativa e Martin Gardner, a ben vedere, è perfino un po' strana. Rende ampiamente giustizia all'opera davvero meritoria dell'americano, ma è curioso notare come il più celebre degli alfieri della matematica ricreativa non fosse un matematico, né tantomeno un creatore di indovinelli matematici. Gardner era (e rivendica con fierezza di esserlo) un giornalista, senza dubbio estremamente curioso e affascinato dalla capacità di seduzione dei problemi insoliti. Così, in qualche modo la fama di un giornalista oscura quella di altri che invece hanno effettivamente creato il "corpus" dei problemi della MR. Del resto, la disciplina, se così può chiamarsi, è ricca di sfumature: è perfino complicato tradurre correttamente una delle parole chiave della matematica dilettevole di matrice anglosassone, e cioè "puzzle", indica certo un interrogativo, ma la traduzione "indovinello" è probabilmente troppo riduttiva, mentre la resa con "problema" corre rischi di esagerazione, o quantomeno di eccessiva generalità. Per altro, non è neanche possibile lasciare il termine non tradotto, visto che in italiano è ormai consolidato il significato di "puzzle" come quello che gli inglese chiamano "jigsaw puzzle", ovvero il rompicapo composto da diverse tesserine di cartone che vanno pazientemente ricomposte per formare un'immagine.

[7] Ad esempio, questo celeberrimo: *in sette case ci sono sette gatti; ogni gatto mangia sette topi, e ogni topo aveva mangiato sette chicchi di grano, ognuno dei quali avrebbe prodotto sette sacchi di farina. Qual è il totale di tutto?*

Tra i suoi molti meriti, Martin Gardner ha anche quello, tutt'altro che secondario, di aver contribuito a far conoscere al grande pubblico i veri iniziatori della matematica ricreativa, coloro che passavano la vita creando problemi. Per lo più, matematici con la voglia di divertirsi: ma un numero davvero ristretto di persone riuscì a trasformare la creazione di indovinelli in una vera e propria professione. Il più celebre di tutti, peraltro, non era un matematico neanche lui: non si laureò mai, e cominciò la sua carriera come scacchista.

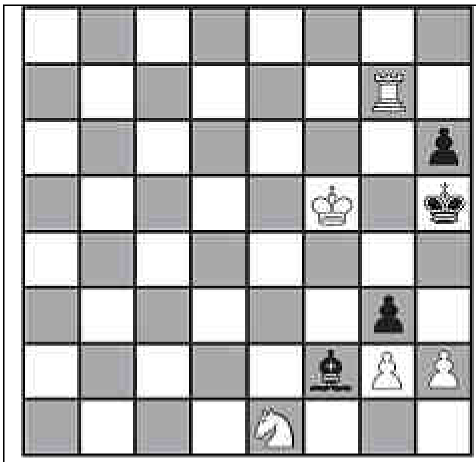

5 *Sam Loyd*

Sam Loyd nasce a Philadelphia il 31[8] Gennaio 1841, e i genitori gli danno il nome di Samuel, anche se per tutta la vita risponderà solo al monosillabo "Sam". Ottavo e ultimo figlio di una famiglia ragionevolmente benestante, come tutti gli ultimogeniti giocava con i giocattoli dei fratelli maggiori, e pare proprio che il passatempo preferito di questi fossero gli scacchi. Sommerso da alfieri torri e regine, Sam si ritrova ad essere esperto del gioco ancor prima di uscire dalla fanciullezza.

Se la passione per gli scacchi è stata verosimilmente il combustibile principale per la somma maestria nel produrre problemi (non solo scacchistici), è verosimile che non sia stata pienamente salutare per i suoi studi: dopo il liceo, Sam inizia gli studi di ingegneria civile, probabilmente sotto i buoni auspici del padre, che commerciava in terre e costruzioni edili, ma non li completerà mai. Da giovanotto eccelle nel nobile gioco, e intraprende di fatto la carriera di scacchista professionista, anche se ai suoi tempi è improprio parlare di "professionismo" negli scacchi. Non è semplice quantificare la sua forza di gioco, se non altro perché l'attuale sistema di valutazione in punti Elo non era ancora stato inventato, ma un sito specializzato nella valutazione della forza dei giocatori di scacchi gli attribuisce una valutazione di 2445[9] punti nel luglio 1870, quando non aveva ancora trent'anni. È un punteggio rilevante ancora oggi, caratteristico dei GM, Grandi Maestri, la qualifica più alta riconosciuta dalla Federazione Internazionale di Scacchi (FIDE); del resto, è relativamente più facile conoscere la sua posizione nella classifica mondiale dei suoi tempi, perché le classifiche andavano di moda anche ai suoi tempi: tra il 1868 e il 1869 raggiunse la quindicesima posizione mondiale. Del resto, fin dal 1857, quando era appena sedicenne, Loyd riveste l'incarico di "problemista ufficiale" sul *Chess Monthly*, il massimo giornale scacchistico americano del tempo, e di lì a poco viene chiamato a tenere la rubrica settimanale di scacchi su *Scientific American*.

[8] Così sostiene la nostra fonte abituale (Università di Saint Andrews), ma il sito ufficiale di Loyd (www.samloyd.com) sostiene che il giorno fatidico fosse il 30, non il 31.

[9] Durante il torneo di New York del 1886, a cui partecipava anche Steinitz, la sua prestazione singola fu da 2477 punti Elo.



6 *La partita dell'assedio turco*

Non c'è amante degli scacchi che non conosce almeno qualche problema inventato da Loyd: anche perché, oltre ad essere problemi legittimi e ottimamente orchestrati, spesso erano corredati da aneddoti o storielle che contribuivano a renderli ancora più intriganti. Lo stesso Martin Gardner ne ricorda uno nel suo pezzo dedicato a Loyd, ipoteticamente ambientato durante l'assedio dei Turchi a Bender, nel 1713: il re di Svezia Carlo XII stava giocando con uno dei suoi ministri fino a raggiungere la posizione del diagramma. A questo punto il re, col bianco, annuncia lo scacco matto in tre mosse. Subito dopo, una pallottola vagante frantuma il cavallo: il sovrano svedese non si perde d'animo, riguarda la posizione, e conclude di poter fare a meno del cavallo, e di avere comunque un matto certo in quattro mosse. Una seconda pallottola turca fa saltar via il pedone in h2: ma il povero ministro non può festeggiare lo stesso, perché Carlo XII, dopo un'ulteriore breve pensata, annuncia il matto in cinque[10].

La capacità di creare problemi scacchistici di Sam Loyd è veramente fuori dal comune, in parte per la mostruosa capacità di corredare con elementi originali e insoliti i suoi problemi (in occasione della sfida mondiale tra Steinitz e Zuketort, tanto per dire, realizzò un problema in cui i pezzi sulla scacchiera disegnavano una Z e una S, iniziali dei due contendenti), ma anche di alto contenuto teorico: è quasi certamente suo il primo problema di analisi retrograda[11] negli scacchi.

Per evitare di riempire queste pagine di diagrammi di scacchi, ma soprattutto per mostrare la capacità di "problematizzare" quasi ogni situazione, riportiamo cinque problemi di Loyd relativi alla posizione iniziale di ogni partita[12]:

1) Se entrambi i giocatori fanno le stesse mosse, come può il Bianco dare scacco matto in Quattro mosse?
2) Se entrambi i giocatori fanno le stesse mosse (finché possibile), come può il Bianco costringere il Nero a dargli matto in otto mosse?
3) Come può realizzarsi in quattro mosse uno scacco macco di scoperta?
4) Come può realizzarsi uno stallo in dieci mosse?
5) Come può realizzarsi una partita in cui uno scacco perpetuo può essere forzato in tre mosse?

Loyd quindi è stato, almeno per i suoi tempi e i suoi luoghi, il più grande creatore di problemi di scacchi: ma ad un certo punto della sua vita la parola "scacchi" ha ceduto il passo alla parola "problema", o meglio al "puzzle". La sua facile predisposizione a comporre problemi di scacchi inusuali, poco ortodossi, era già in fondo un indizio chiaro della sua passione per i problemi curiosi in generale, senza specifiche restrizioni all'universo delle 64 caselle bianche e nere. A ben vedere, Loyd comincia la produzione di problemi non scacchistici ben prima di cessare l'attività da scacchista professionista: il suo primo successo commerciale – il "puzzle dell'asino", basato su un'insolita maniera di sistemare due fantini in groppa a due asini rispettando ben precise regole di taglio dei

[10] Il problema è davvero celeberrimo, al punto che qualcuno è riuscito a scoprire anche che se la prima pallottola avesse polverizzato la torre anziché il cavallo, il re di Svezia avrebbe potuto comunque arrivare al matto in sei mosse.

[11] Come dice il termine stesso, si tratta di problemi che, per essere risolti, richiedono di dedurre alcuni elementi cruciali avvenuti in precedenza perché la posizione del diagramma sia legale.

[12] Disclaimer numero uno: i problemi richiedono termini tecnici (stallo, scacco perpetuo, scacco di scoperta) che evitiamo di descrivere per non annoiare troppo i lettori che non amano gli scacchi. Disclaimer numero due: non conosciamo le soluzioni ai problemi esposti, quindi non scriveteci per conoscerle. Pensateci sopra o, al limite, guglate.

disegni – viene composto da Sam quando è ancora ben lontano dalla maggiore età, nel 1858.

È certo più connotato matematicamente quello che è stato forse il maggior successo commerciale di Sam Loyd, ovvero il celeberrimo "gioco del 15". È probabile che una descrizione del suo funzionamento non sia necessaria neppure in questo 2015, a 137 anni di distanza dalla sua messa in vendita: il gioco è ancora abbastanza diffuso, e difficilmente esisterà qualcuno che non ha mai provato a risolverlo. Si tratta di 15 tesserine quadrate numerate da 1 a 15, scorrevoli all'interno di un telaietto 4x4, e quindi manovrabili facendole scorrere per mezzo del solo spazio vuoto. Obiettivo di base è quello di ordinare in maniera opportuna le tessere.

A suo tempo, il gioco del 15 scatenò una vera mania, anche a causa del tiro birbone che Loyd usò come traino pubblicitario: offrì un premio di mille dollari (dell'epoca) per chiunque fosse riuscito a risolvere il gioco. Il trucco sta tutto nel fatto che il gioco era venduto con una posizione iniziale delle tessere (14 e 15 in posizioni invertite) che rendeva impossibile[13] risolvere il gioco.

7 *Il gioco del* 15

Il solo gioco che ha forse replicato il successo del "15-Puzzle" di Loyd è stato, quasi esattamente un secolo dopo, il Cubo di Rubik. Ed è curioso registrare le somiglianze e le differenze: entrambi di natura geometrica e con elementi quadrati, ma uno a due dimensioni, l'altro tridimensionale. In entrambi i casi gli "elementi" dovevano essere "mossi" (in "spazi delle mosse" vincolati e ben definiti) per raggiungere una configurazione ben precisa. A differenza di quanto avvenne per il Gioco del 15, il Cubo di Rubik venne messo in vendita senza trucchi che lo rendevano irresolubile, anzi: la posizione di partenza era proprio quella ben ordinata obiettivo di ogni manipolazione. Tanto, era inevitabile che un giocatore poco esperto lo avrebbe irrimediabilmente disordinato nel giro di pochi istanti.

Un'altra differenza cruciale è che risolvere il gioco del 15 – quando non è manipolato – è cosa ragionevolmente semplice, mentre la soluzione del Cubo di Rubik è decisamente più complessa. Forse per questo è poco noto che anche il Cubo può essere facilmente manipolato in maniera da renderlo irresolubile: basta invertire (smontandolo fisicamente) i colori di un cubetto a due facce, e si ripropone un problema di parità del tutto analogo, seppur in 3D, del trucco di Loyd. Ovviamente, è un trucco che dà soddisfazione solo se fatto su un cubo il cui proprietario sia usualmente in grado di risolverlo, e forse per questo non è troppo famoso.

[13] Un caro, vecchio, amabile trucchetto basato sul concetto di parità.

Loyd continuò a creare problemi e indovinelli per tutta la vita. È quasi certo che buona parte delle sue invenzioni più redditizie non fossero pienamente originali, ma è sicuro che fu lui a portarle al grande pubblico. E molte di queste erano di natura matematica.

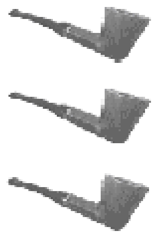
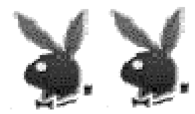
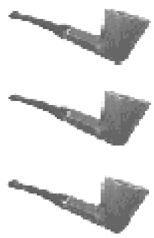
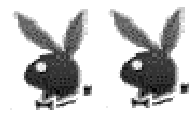
8 *"Indovinello dei Buoni Propositi per il nuovo anno" come indovinello è troppo facile (per chi conosce l'inglese) o troppo difficile (per chi non lo conosce), e in ogni caso è solo un gioco di parole del tutto intraducibile. Ma è adatto alla data di uscita della rivista: Buon anno!*

Suo figlio si chiamava come lui, Sam. E fu questo secondo Sam Loyd a pubblicare la famosa "Cyclopaedia of Puzzles" che raccoglie il lavoro del suo famoso genitore.

È probabile che quando morì, all'età di settant'anni, a New York, il 10 Aprile del 1911, Sam Loyd non si sentisse un matematico, e probabilmente aveva ragione. Vista la natura ambigua e complessa della Matematica Ricreativa, nonché l'estrema difficoltà di rispondere alla sua relativa Domanda Fondamentale, possiamo provare ad eleggere Sam Loyd nume tutelare della disciplina.

Confidiamo che con la sua creatività e faccia tosta sia in grado di disinnescare tutte le domande.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Un casino di Nim!			
Biliardo Americano Quintessenziale			

Una piccola nota prima di iniziare: se i problemi non vi bastano, date un'occhiata dalle parti dello *Zugzwang!*. E, se proprio volete abbuffarvi, una volta tanto potreste anche passare dai *Paraphernalia Mathematica*.

2.1 Un casino di Nim!

Non nel senso del turpiloquio, nel senso che viene meglio se lo giocate in un Casinò (mettiamo l'accento giusto per evitare battutacce).

L'idea è di approfittare della temporanea assenza di Treccia per lanciarci in *supposti* giochi di azzardo: Rudy ne ha appena inventato uno che promette bene, almeno come mal di testa[14].

L'idea è, tanto per cominciare, di far tirare un dado (*normale, cubico e onesto*) a un croupier (*normale, umano e onesto*); il dado, finito di rotolare, indicherà un certo punteggio d.

A questo punto, il croupier si sposterà agilmente alla tavola della roulette (*normale, rotonda e onesta*) per ottenere un certo valore r, quindi metterà un gettone sul valore r del tappeto, e qui inizia la partita.

Doc e Rudy, in quest'ordine, sono liberi di:

1. Lasciare la posizione del dado invariata
2. Incrementare il valore del dado di 1
3. Decrementare il valore del dado di 1

Se il dado segna 1, possono solo lasciarlo invariato o incrementarlo, mentre se segna 6 possono solo lasciarlo invariato o decrementarlo (insomma, il dado non è ciclico); una volta compiuta questa operazione, il dado segnerà il valore x e, essendo al momento il gettone nella posizione k, verrà spostato alla posizione $(k - x)$: nel caso sia $k < x$, allora il giocatore che non può fare la mossa ha perso.

Carino, vero? Vi facciamo notare che sicuramente finiremo prima che torni Treccia, visto che il gioco ha comunque una fine.

Adesso, ci stiamo ponendo una serie di domande.

[14] Mettiamo il *warning* in nota visto che, come ha detto qualche giorno fa un famoso AD di una famosa casa automobilistica, "A Natale siamo tutti più buoni, ma il primo gennaio dobbiamo tornare cattivi": attenti che alcune parti di questo gioco non sono analizzate.

Esistono dei valori di r (quelli della roulette) per cui Rudy è sicuro di vincere, qualsiasi sia il valore d del dado?

Per quali valori d del dado Doc ha almeno una probabilità su due di vincere?

Mai fidarsi di Rudy: prima che cominci la partita, quali sono le sue probabilità di vittoria?

2.2 Biliardo Americano Quintessenziale

Il BAQ è un gioco che sta spopolando tra i fisici, soprattutto quando viene proposto gli esami; nel senso che le aule, a quel punto, si spopolano e tutti si informano sul prossimo appello.

L'idea è di lavorare sul solito tavolo senza attrito e perfettamente in piano, con un po' di biglie: ne poniamo N identiche, ciascuna di massa M/N tra di loro equispaziate su una semicirconferenza con (per intenderci) il lato "aperto" verso sinistra.

A questo punto, prendiamo un'altra biglia di massa m e la lanciamo, da sinistra, con le ragionevoli condizioni iniziali per:

1. Urtare elasticamente la prima biglia e rimbalzare,
2. Urtare elasticamente la seconda biglia e rimbalzare,
3. ...eccetera, eccetera, eccetera,
4. urtare elasticamente l'N-esima biglia, rimbalzare e uscire (dritta) sulla sinistra.

Adesso, una buona domanda potrebbe essere quella di trovare le condizioni iniziali, ma non ve la facciamo, visto che ne abbiamo altre due che ci sembrano più interessanti.

Supponiamo che $N\to\infty$, ossia che la massa di ogni pallina tenda a zero: qual è il minimo valore per M/N che permette alla palla lanciata di uscire dritta a sinistra?

Per questo valore di M/N, qual è il rapporto tra la velocità iniziale e quella finale?

...nel secondo risultato, dovreste ritrovare qualche vecchio amico, se non ho sbagliato i conti...

3. Bungee Jumpers

Sia $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ una sequenza arbitraria di interi positivi; sia inoltre

$$b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,(1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n),$$

e sia infine $c_n = [\sqrt{b_n}]$ la parte intera della radice quadrata di b_n.

Provate che tutti i c_n sono diversi tra loro.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio!

Come promesso, eccoci di ritorno con la nostra bella rubrica di soluzioni e note. Anzi no, visto che ci saranno parecchie soluzioni, facciamo che ridurre le note. Spero che abbiate cominciato l'anno al meglio, RM nel 2015 torna ad essere con voi in tutto il suo splendore.

4.1 [190]

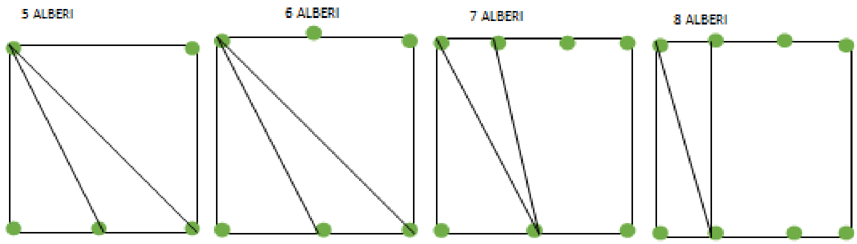
4.1.1 Questa è dura

Mah, "dura" è soprattutto riassumere i problemi del Capo, che riempie i suoi racconti di dettagli inessenziali e mescolati a informazioni assolutamente importanti, ma solo accennate, giusto per confondere il povero lettore. Comunque eccoci qui con il primo problema di novembre:

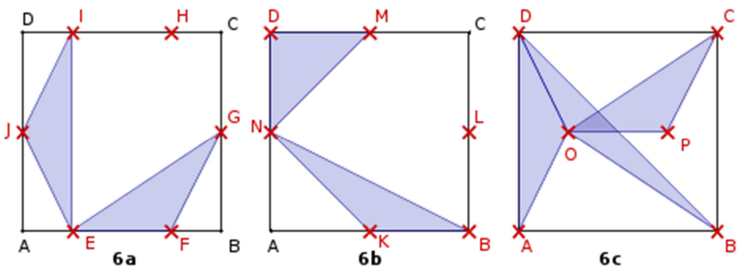
> *Doc sta studiando una decorazione del campo di tiro (*20x20*, bordi inclusi): fermo restando che il fondo resta a prato inglese, intende mettere un certo numero* $k = \{6, 5, 8, 7\}$ *di alberelli, e poi considerare tutti i triangoli costruibili con vertici in questi punti; di questi, sceglierà quello con l'area minore, e l'intero triangolo scelto verrà piantumato ad erica. Il vostro scopo è quello di posizionare i punti (nel numero dato) in modo tale che il triangolo minore abbia l'area massima possibile. In funzione del*

> *numero k di punti, quante piantine di erica, ciascuna coprente area unitaria, deve comprare Doc?*

Cominciamo subito con la soluzione che abbiamo ricevuto dal nostro nuovo lettore ***Lorenz***:

> Poiché l'area di un triangolo è direttamente proporzionale alla base e all'altezza per rendere l'area maggiore possibile bisogna massimizzare le seguenti due distanze: la distanza tra la base e l'altezza e la distanza tra i due vertici della base. Quindi in generale dobbiamo massimizzare la distanza tra i tre vertici del triangolo. Ma poiché bisogna considerare il triangolo con l'area minore dobbiamo massimizzare la distanza tra distanza tra tutti i punti che quindi si andranno a disporre in maniera simmetrica. I primi 4 alberi comuni a tutti e quattro le possibili disposizioni(5, 6, 7 e 8 alberi) vanno quindi disposti ai quattro vertici del quadrato e rispettivamente disporremo così i rimanenti 1, 2, 3, e 4 alberi:
>
> - 1 alla metà di uno dei lati;
> - 2 alla metà di due lati opposti;
> - 3, 1 alla metà di un lato e 2 che dividono in 3 (uno a un-terzo e l'altro ai due-terzi) il lato opposto;
> - 4, 2 che dividono in 3 (uno a un-terzo e l'altro ai due-terzi) un lato e 2 che dividono in 3 (uno a un-terzo e l'altro ai due-terzi) il lato opposto;
>
> 
>
>
> Posizionando gli alberi come scritto sopra le aree del triangolo minore saranno:
>
> - 5 Alberi: A = (L/2·L)/2 = (L^2)/4 = 400/4 = 100
> - 6 Alberi: A = (L/2·L)/2 = (L^2)/4 = 400/4 = 100
> - 7 Alberi: A = (L·L/3)/2 = (L^2)/6 = 400/6 = 66,66666…
> - 8 Alberi: A = (L·L/3)/2 = (L^2)/6 = 400/6 = 66,66666…

A me sembra un buon inizio, ma di ***Lorenz*** sentiremo ancora parlare più avanti. Ora vediamo che cosa ne dice ***Gnugnu***:

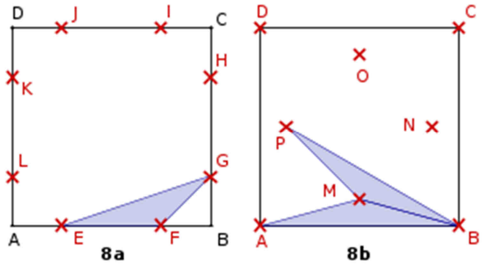
> Disporre gli alberelli quando questi sono in numero pari mi sembra più semplice e siccome mi piace aver la certezza di aver scritto almeno una cosa esatta, cominciamo con n=4: si scelgono i vertici del *campo di tiro*, ottenendo quattro triangoli di area 200 m² ciascuno. Non ho capito se a questo punto Doc sistemerà l'erica solo in uno di questi oppure in tutti, ma questo non è un problema mio.
>
> Passando ad n=6 ho trovato tre sistemazioni diverse che portano tutte alla medesima area per i triangoli meno estesi: 50 m².
>
> 
>
>
> Nelle tre figure, ed in quelle che seguiranno, il campo di tiro, disegnato in nero, ha vertici A, B, C, e D. I punti in cui piantare gli alberi sono indicati con crocette rosse e i triangoli critici, quelli che hanno area minore degli altri, sono colorati in

azzurro, uno per ciascun tipo, cercando di evitare le sovrapposizioni. Siccome ho scelto di studiare solo disposizioni che presentino almeno un asse di simmetria, esistono, quasi sempre altri triangoli critici isometrici a quelli disegnati.

Nella figura **6a** i punti E, F, H ed I distano 5 m dal vertice più vicino, mentre J e G sono i punti medi dei lati: in tutto sei triangoli di area 50 m^2.

Nella figura **6b**, K, L, M ed N sono i punti medi dei lati: quattro triangoli di area 50 m^2.

Nella **6c**, O e P distano 5 m dal lato più vicino e 10 m da quelli orizzontali, qui addirittura la metà dei 20 triangoli possibili ha area 50 m^2.



Per n=8 ho considerato queste due disposizioni.

Nella **8a** i punti rossi distano 5 m dal vertice più vicino e si trovano 8 triangoli di area 25 m^2.

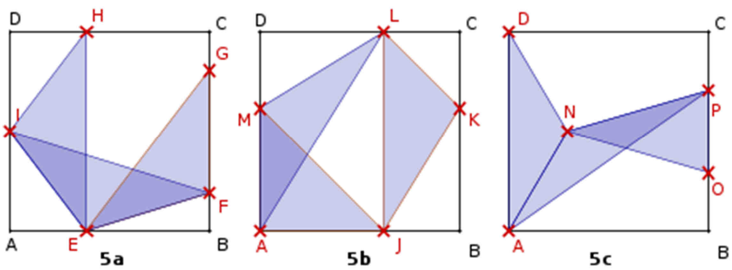
Valore che viene superato, sia pur di poco, dalla disposizione **8b**. Per trovare la distanza x dei punti M, N, O e P dai lati più vicini (sono centrati rispetto agli altri due) occorre qualche calcolo. Si possono eguagliare le aree dei due triangoli, oppure, più rapidamente, osservando che AP è perpendicolare a MB, si può usare un diagramma cartesiano di origine A ed imporre che il punto medio di AP (x/2; 5) sia allineato con M(10; x) e B(20; 0) ottenendo:

$$5 \cdot 10 = (20 - x/2)x \quad \rightarrow \quad x^2 - 40x + 100 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 20 - 10\sqrt{3} \approx 2.6795m.$$

L'altra soluzione non è accettabile. Per un'area di $100\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 26.795m^2$, condivisa da 12 triangoli.

Passando ai valori dispari di n, andiamo sul sicuro con n=3: un solo triangolo di area 200 m^2.

Per n=5 ancora tre disposizioni simmetriche:



La **5c** è la peggiore, O e P distano $10\left(2-\sqrt{2}\right) \approx 5.858m$ da B e C rispettivamente, N ha la medesima distanza dal lato AD. L'area comune ai 4 triangoli meno estesi è di $100\left(2-\sqrt{2}\right) \approx 58.58m^2$.

Le altre due portano al medesimo risultato, la **5a** mi piace decisamente di più, la **5b** è più semplice.

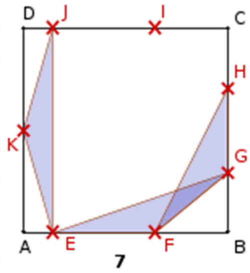
Nella **5a**, posto x=AE=DH e y=BF=CG possiamo calcolare le aree dei triangoli EHI=10x, EFG=(20–x)(10 – y) e EFI=100–5x+xy/2.

Le ultime due saranno uguali se xy=40y+10x–200 e ognuna di esse vale 20y. Allora le tre aree sono uguali sse x è il doppio di y. Sostituendo nell'uguaglianza trovata prima si ottiene 2y^2–60y+200=0, da cui $y = 15 - 5\sqrt{5} \approx 3.82m$.

Metà dei 10 triangoli possibili avrà area pari a $300 - 100\sqrt{5} \approx 76.4\text{m}^2$.

Nella figura **5b** le distanze JB, KC, CL e DM misurano $30 - 10\sqrt{5} \approx 7.64m$ e anche in questo caso abbiamo 5 triangoli di area uguale a quella precedente.

Resta da esaminare n=7, nella figura accanto è riportato il caso della simmetria verticale con punti tutti sul perimetro del campo di tiro. Non sono riuscito a trovare di meglio: la disposizione simmetrica rispetto alla diagonale del quadrato porta ad aree inferiori di pochissimo (circa un decimo di metro quadrato); peggio ancora per i punti interni, mi sono fermato alla configurazione del caso n=8 eliminando un punto.



Posto x=AE=DJ, y=BG=HC, z=FB=IC, le aree dei tre triangoli EJK, FGH e EFG, o meglio il loro doppio (così si elimina uno scomodo denominatore uguale a 2) valgono rispettivamente 20x, z(20– 2y) e y(20–x–z).

Il massimo valore dell'area del triangolo di minor estensione si avrà quando queste tre espressioni saranno uguali.

Dalle ultime due si ottiene 20–2yz=20y–xy–yz, cioè

$$z(20-y)=y(20-x),\ z=y(20-x)/(20-y)$$

che sostituito nell'uguaglianza delle prime due fornisce

$$20x(20-y)=y(20-x)(20-2y).$$

Sviluppando l'ultima espressione si ottiene 400x–20xy=400y–40y^2–20xy+2xy^2 che possiamo scrivere, dividendo per 2, $(20-x)y^2 - 200\text{y} + 200\text{x} = 0$, il più grande valore accettabile per x (e quindi per l'area dei triangoli) sarà quello che annulla il determinante di questa equazione:

$$\Delta/4 = 10000 - 4000\text{x} + 200\text{x}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 20\text{x} + 50 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 10 - 5\sqrt{2} \approx 2.929m.$$

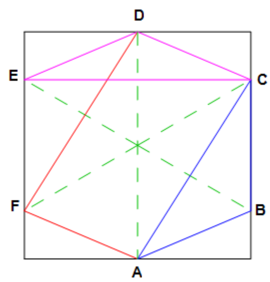
L'altra soluzione è troppo grande. Si trova ancora che y è il doppio di x e la lunghezza dei segmenti EF e JI è esattamente 10 m. La superficie di ciascuno dei cinque triangoli di minor area misura $100 - 50\sqrt{2} \approx 29.29m^2$.

Con questo bel problema geometrico non poteva mancare il contributo di ***Sawdust***, che non è completamente soddisfatto del suo risultato e sarà contento di leggere la soluzione di ***Gnugnu***:

Non sto, per ora, a indagare se questo sia corretto, ma, tanto per cominciare, penso che per avere alla fine un'area massima i punti debbano essere scelti più lontani possibili tra di loro. Inoltre, perché il più piccolo triangolo sia più grande possibile, come caso limite si dovrebbe arrivare a costruire tutti triangoli uguali.

Cominciamo da quello che viene indicato come il caso più semplice (k=6).

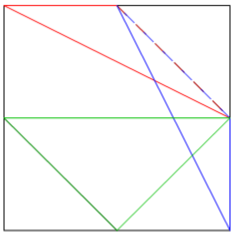
La prima idea che mi è venuta è quella di disegnare un esagono regolare concentrico al quadrato e individuare i punti cercati all'intersezione delle rette, tracciate tra 2 vertici dell'esagono e passanti per il centro, e i lati del quadrato.



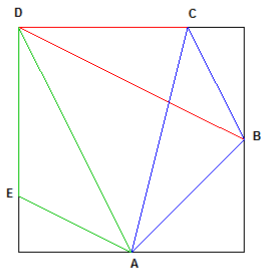
In questo primo tentativo il triangolo più piccolo è CDE, che ha un'area di circa 42 mq, contro i 100 mq di ADF ed ACF, e i quasi 58 di ABC.

Quindi dobbiamo cercare di allargare CDE e ridurre ABC, per fare questo riduciamo i lati BC ed EF fino a una lunghezza pari a metà del lato del quadrato, mantenendoli centrati rispetto al medesimo.

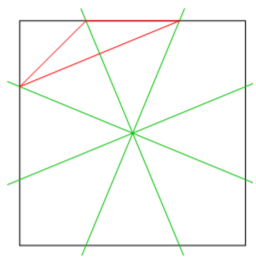
Così facendo entrambi i triangoli CDE ed ABC avranno un'estensione pari a 50 mq esatti, lasciando invariate le estensioni di ADF ed ACF.



Lo stesso risultato si può ottenere posizionando 2 punti alle estremità di una diagonale del quadrato e gli altri 4 alle intersezioni di 2 parallele alla diagonale in questione con i lati del quadrato, se queste ultime tagliano i lati esattamente a metà.



Nel caso di k=5 una soluzione che ritengo soddisfacente e semplice è quella di posizionare un punto in un vertice del quadrato, 2 punti a ¾ dei lati ad esso adiacenti e gli ultimi 2 a metà dei lati opposti. In questo caso i triangoli più piccoli (BCD e ABC) hanno un'area di 75 mq. Un risultato simile si può ottenere anche disegnando un pentagono "quasi regolare" con un lato di 12 metri posto al centro di uno dei lati del campo di tiro, un vertice al centro del lato opposto e gli altri 2 vertici sui lati rimanenti, ma per ora soprassiedo dal calcolarli correttamente.

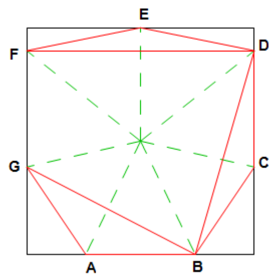


Quando invece passiamo a vedere il caso k=8 dobbiamo innanzitutto chiarire se vanno considerati anche i triangoli "degeneri" originati da 3 punti allineati.

Ovviamente la soluzione avrà una disposizione regolare dei punti e disponendo 4 punti nei vertici e 4 punti a metà dei lati del campo i triangoli più piccoli saranno quelli "nell'angolo", con una superficie di 50 mq, ma se come detto prima consideriamo anche i triangoli degeneri, questi hanno un'estensione pari a zero.

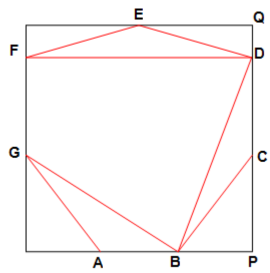
Per non avere triangoli degeneri dobbiamo immaginare un'ipotetica raggiera che unisca i punti visti prima col centro del quadrato e ruotarla di 22° e mezzo, così da ottenere la figura a lato in cui i triangoli più piccoli coprono circa 24,26 mq.

Andiamo quindi ad analizzare il caso che viene prospettato come più difficoltoso: k=7.



Se anche in questo caso tracciamo una raggiera regolare per individuare i 7 punti, centrandola sul quadrato, abbiamo come risultato che i triangoli minori sono DEF e BCD. Però DEF ha un'area di circa 20,5 mq contro i 26,5 abbondanti di BCD.

Per cercare di annullare, o almeno ridurre, questa differenza il modo più semplice mi pare sia abbassare il centro della raggiera.



Se il centro della raggiera viene allontanato dal punto E di circa 13,4 cm la differenza tra i 2 triangoli citati prima si riduce a 0,0015 mq, però, già che ci siamo, notiamo che il triangolo ABG ha ancora un'estensione superiore di circa 4 mq.

Allora forse conviene abbandonare la disposizione con la raggiera regolare e cercare un posizionamento diverso, sempre comunque mantenendo la simmetria rispetto alla verticale passante per E.

Giocando un po' con GeoGebra, visto che non sono riuscito a trovare il modo di calcolarli diversamente, ho trovato questi valori:

DQ=2,8966

DC=9,0426

CP=8,0608

AB=7,1869

Con i quali le aree dei tre triangoli (in realtà sono 5, perché data la simmetria, BGF=BCD e ABC=AGB) sono quasi uguali e pari a circa 28,966 mq. Però alla fine ho deciso di tornare al primo amore e quindi mi sono messo a far lavorare un po' Excel e lui è arrivato, limitando l'indagine alla misura di un millimetro, a questi risultati:

DQ=2,929

DC=10,004

CP=7,067

AB=8,289

Con le 3 aree in questione che risultano

DEF=29,29

BCD=29,289211

ABG=29,2891815

Per cui il triangolo minore di area massima è l'ABG appena citato.

Spingendo ancora più in profondità il calcolo sono riuscito a trovare ancora:

DQ=2,9289321882

DC=9,9999999714

CP= 7,0710678118

AB= 8,284271214

valori con cui le 3 aree risultano

DEF=29,2893218820

BCD=29,2893218812

ABG=29,2893218812

Però, guardando più attentamente questi risultati, si nota che il lato CD è uguale a metà del lato del quadrato di partenza, per cui, per avere il triangolo BCD equivalente al triangolo DEF, BP dovrebbe essere il doppio di QD.

E effettivamente BP=(20–AB)/2, infatti (20–8,289)/2= 5,8555 mentre 2QD=5,858.

Per cui, detto L il lato del quadrato e x l'altezza del triangolo DEF, CP=($\boldsymbol{L}$/2)–x e AB=L–4x.

Ma allora l'area del triangolo ABG è ancora equivalente?

$$S(ABG)=\frac{(L-4x)\left[\left(\frac{L}{2}\right)-x\right]}{2}=\frac{(L-4x)\left(\frac{L-2x}{2}\right)}{2}=\frac{L^2-4Lx-2Lx+8x^2}{4}=\frac{L^2-6Lx+8x^2}{4}$$

$$S(DEF)=\frac{Lx}{2}=S(BCD)$$

Andiamo a vedere per quale valore di x è valida l'equivalenza

$$\frac{Lx}{2}=\frac{L^2-6Lx+8x^2}{4}$$

$$2Lx=L^2-6Lx+8x^2$$

$$8x^2-8Lx+L^2=0$$

Da cui, attribuendo a L il valore 20, si trovano le 2 soluzioni

$$x_1 = 10 - 5\sqrt{2} \cong 2{,}9289321881345$$

$$x_2 = 10 + 5\sqrt{2} \cong 17{,}0710678118655$$

> di cui la prima combacia perfettamente col valore trovato per tentativi e la seconda, che è il complemento a 20 della prima, ridotta di 10 (lunghezza di CD), dà l'ordinata del punto C.

Bellissime soluzioni, vero? Ma non perdiamo tempo in commenti inutili e passiamo al secondo problema di novembre.

4.1.2 Non finisco mai i Carnevali!

Il Capo, per ogni mia critica, ha sempre pronta una scusa, che – vi tocca credermi sulla parola – non mi presenta mai direttamente, ma sotto forma di problema per i nostri lettori. Così mi trovo a riassumere il problema e rimuovere la scusa, abbiate pazienza:

> *Definiamo i Numeri* Trapezici*: se n è un Numero Trapezico, deve essere possibile inserire i numeri da* 1 *a n in un trapezio, in modo tale che ogni numero sia pari alla differenza (in valore assoluto) tra i due numeri sopra di lui: per intenderci,* 14 *è un Numero Trapezico (di base* 5 *e altezza* 4*):*
>
> 9 13 1 11 14
>
> 4 12 10 3
>
> 8 2 7
>
> 6 5
>
> *Un Numero Trapezico n, insomma, deve ammettere tutti i numeri tra* 1 *e n in una costruzione con le righe formate da L, L–*1*, L–*2*, …, L–H numeri: se L=H, il trapezio diventa un triangolo e il numero si dice Numero* Tringolo*. Determinare quali numeri dispari o quali potenze di* 2 *sono Trapezici; fornire una lista di Numeri Trapezici e, l'opportuno sviluppo.*

Ecco. Inventarsi nuove scuse e nuovi numeri allo stesso tempo. Anche questa volta cominciamo con il nostro nuovo lettore ***Lorenz*** e la sua soluzione:

> Tutti i numeri dispari sono trapezoidali, infatti tutti possono essere scritti in un trapezio di altezza 2 secondo i seguenti schemi:
>
> 3:
>
> 3 2
>
> 1
>
> 5:
>
> 5 3 4
>
> 2 1
>
> 7:
>
> 7 4 6 5
>
> 3 2 1
>
> 9:
>
> 9 5 8 6 7
>
> 4 3 2 1
>
> 11:
>
> 11 6 10 7 9 8
>
> 5 4 3 2 1
>
> In generale per *n* dispari:
>
> n (n+1)/2 n-1 [(n+1)/2]+1 n-2 [(n+1)/2]+2 n-3 ....
>
> (n-1)/2 [(n-1)/2]-1 [(n-1)/2]-2 [(n-1)/2]-3 [(n-1)/2]-4 1
>
> Invece per quanto riguarda le potenze di due, a mio avviso non esistono potenze di due trapezoidali. Infatti partendo dal fatto che una condizione necessaria affinché un numero possa essere trapezoidale è che deve rappresentare l'area di un trapezio avente per basi numeri naturali e per altezza un numero naturale secondo la seguente formula: Ntrap=(Bmag+Bmin)*Altezza/2

Quindi condizione necessaria affinché un numero potenza di 2 possa essere trapezoidale è che l'altezza e la somma delle basi siano numeri pari (se così non fosse il loro prodotto non potrebbe mai essere potenza di 2), ma ciò è impossibile infatti se l'altezza di un trapezio è un numero pari allora la somma delle basi (ovvero Bmin+Bmag = Bmin + (Bmin+Altezza–1) = 2*Bmin+Altezza(pari)–1 = Npari–1 = Ndispari) è un numero dispari. Quindi un numero potenza di 2 non può essere trapezoidale.

Trapezoidale o Trapezico, questo è il problema. Comunque ***Gnugnu*** non ha dubbi, e sulla prima parte concorda completamente con ***Lorenz***:

Ogni dispari n=2k+1, con k intero maggiore di 1, è trapezico.

Si può infatti scrivere n=k+(k+1) e i numeri da 1 ad n si possono disporre su due linee, la prima di lunghezza k+1 e la seconda di lunghezza k, in modo che i secondi siano sempre il valore assoluto della differenza fra due successivi dei primi. Basta seguire i seguenti schemi:

```
7   6   8   5   9          8   9   7   10   6   11
  1   2   3   4              1   2   3    4   5
```

Non credo servano '*dimostrazioni*'; i numeri vengono scritti nell'ordine naturale, prima nella seconda riga da 1 a k, poi nella prima iniziando nello spazio fra gli ultimi due sottostanti e tornando verso sinistra, saltando ogni volta una posizione, da k+1 e fin quando è possibile (l'ultimo numero scritto sarà 3k/2 se k è pari, (3k+1)/2 se è dispari); si completa il tutto procedendo nei posti liberi nuovamente verso destra, terminando con 2k+1.

Quando n è pari nasce qualche complicazione. Alcuni di questi sono sicuramente non trapezici, perché è impossibile costruire un griglia trapezoidale di dimensione adeguata.

Se, come vuole Rudy, indichiamo con L quanti numeri stanno nella prima fila e con H il numero delle file, nell'ultima fila dovranno stare U=L–H+1 numeri, con U>1.

Dovrà essere allora n=H(L+U)/2=(L–U+1)(L+U)/2, ma L+U ed L–U hanno necessariamente la stessa parità, quindi i fattori dell'ultimo prodotto saranno sempre uno pari ed uno dispari ed, essendo l>U>1 quello dispari non può valere 1: n, dovendo ammettere anche divisori dispari maggiori di 1, non può essere una potenza di 2.

Escono dal gioco un'infinità di numeri pari. Gli altri saranno tutti possibili? La risposta è ancora negativa: più di 50 altri numeri pari vanno eliminati.

Se n è pari, ma divisibile per un dispari maggiore di 1, possiamo scrivere n come prodotto di un dispari d>1 per un'opportuna potenza di 2 con esponente k positivo, ottenendo:

$$n = d \cdot 2^k = (L-U+1)(L+U)/2 \quad \rightarrow \quad d \cdot 2^{k+1} = (L-U+1)(L+U).$$

Osservato che, per essere L>U>1, L+U è maggiore di L–U+1, possiamo distinguere due casi

1) $d>2^{k+1}$

$$\left.\begin{cases} L+U=d \\ L-U+1=2^{k+1} \end{cases}\right\} \text{che fornisce} \quad \begin{matrix} 2\mathrm{L} = d+2^{k+1}-1 & \rightarrow & L = 2^k + (d-1)/2 \\ 2\mathrm{U} = d-2^{k+1}+1 & \rightarrow & U = (d+1)/2 - 2^k \end{matrix}$$

se $d=2^{k+1}+1$, U vale 1 e la griglia trovata non sarà trapezoidale, ma triangolare;

2) $d<2^{k+1}$

$$\left.\begin{cases} L+U=2^{k+1} \\ L-U+1=d \end{cases}\right\} \text{che fornisce} \quad \begin{matrix} 2\mathrm{L} = 2^{k+1}+d-1 & \rightarrow & L = 2^k + (d-1)/2 \\ 2\mathrm{U} = 2^{k+1}-d+1 & \rightarrow & U = 2^k - (d-1)/2 \end{matrix}$$

se $d=2^{k+1}-1$, U vale 1 e la griglia trovata non sarà trapezoidale, ma triangolare.

Sono del primo tipo i seguenti valori di *n*: 10=5·2, 36=9·4, 136=17·8, 528=33·16 …; appartengono, invece al secondo: 6=3·2, 28=7·4, 120=15·8, 496=31·16 …

Dobbiamo buttarli tutti? La risposta è nuovamente negativa, molti si salvano dalla decimazione.

Dipende da *d*, se è un numero primo non possiamo fare più nulla, se è composto esistono invece altre scomposizioni di *n* nel prodotto di un dispari per un pari che forniscono griglie utilizzabili.

Ad esempio: 36=3·12 con tre linee di lunghezza 13, 12 e 11; 528=3·176 con una griglia 177, 176 e 175, ma anche 528=11·48 che fornisce 53, 52, 51... 43; 120=3·40 con griglia 41, 40, 39 ed anche 120=5·24 cinque righe di 26, 25, 24, 23 e 22 numeri.

Sui valori pari di *n*, non trapezoidali pur non essendo potenze di 2, si potrebbe scrivere un libro od una tesi di laurea, da un paio di millenni ci giocano matematici professionisti e dilettanti. Basta curiosare su un'enciclopedia (i più esigenti possono consultare gli archivi di RM) alle voci: numeri perfetti, primi di Fermat o primi di Mersenne, per scoprire che le congetture sono ancora dominanti.

Tornando al problema resta ancora da vedere se i numeri pari che possono essere sistemati su una o più griglie trapezoidali sono effettivamente trapezici. I più piccoli sono: 12, 14, 18, 20... Il GC ha fornito un esempio per il 14, io ho giocato un po' con il 12 trovando tre soluzioni diverse (credo ve ne siano altre). Le righe devono essere tre di lunghezza 5, 4 e 3, l'unica cosa certa è che il 12 deve stare nella prima riga (l'11 potrebbe anche stare in seconda). Ho provato a porre il 12 nelle tre diverse posizioni possibili, le altre sono simmetriche, ed ho verificato che funzionano queste prime righe: 12, 9, 1, 11, 7; 8, 12, 2, 11, 10; 10, 3, 12, 11, 6.

Non sono andato oltre, anche perché, per dirla in sardo "...*cominzat sa passienzia in su pobulu a faltare*".

Dal nostro ***Gnugnu*** non manca mai una buona parola per il GC, che è uno (ma non l'unico) dei motivi per cui lo pubblico quasi sempre. Concludiamo con la soluzione di ***trentatre***, che ci è sembrata la più generale:

Nel trapezio di base e altezza *L*, *K* vanno inseriti i numeri $(1,2,\ldots n)$; siano $t_m = m(m+1)/2$ i numeri triangolari.

Il trapezio si può vedere come una serie di righe decrescenti, come il triangolo iniziale prolungato con $(L-K)$ colonne di altezza K o come la differenza fra due triangoli, inoltre deve essere $2 \le K \le L$; ne segue

$$[1]\quad n = K \cdot L - K \cdot (K-1)/2 = t_K + (L-K) \cdot K = t_L - t_{L-K}$$

$$3 \le t_K \le n \le t_L .$$

Da queste condizioni – cioè dalla sola forma del trapezio – si ricava

[2] *n* non può essere una potenza di 2

per $K \ge 2$, *n* non può essere un primo

(si dimostrano a partire da [1] come prodotto, cioè da $n = K \cdot (L - (K-1)/2)$).

Indicando con *n** un numero *trapezico* e $n^*(L,K)$ una soluzione, cioè una particolare disposizione dei numeri $(1,2,\ldots n^*)$ nel trapezio (L,K), le soluzioni

- sono simmetriche, cioè continuano a valere se si invertono destra/sinistra tutte le righe

- possono essere diverse entro lo stesso trapezio, p.es.

$$5^*(3,2) = \left|\begin{matrix}1 & & 5 & & 2\\ & 4 & & 3 & \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix}1 & & 5 & & 3\\ & 4 & & 2 & \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix}2 & & 5 & & 4\\ & 3 & & 1 & \end{matrix}\right|, \ldots$$

- lo stesso *n** può ammettere diversi trapezi (ognuno con più soluzioni), p.es. *n**=15

$$15*(8,2)=\left|\begin{array}{ccccccccccccccc}1&&3&&15&&4&&14&&5&&13&&6\\&2&&12&&11&&10&&9&&8&&7&\end{array}\right|$$

$$15*(6,3)=\left|\begin{array}{ccccccccccc}3&&15&&14&&4&&6&&13\\&12&&1&&10&&2&&7&\\&&11&&9&&8&&5&&\end{array}\right|$$

$$15*(5,5)=\left|\begin{array}{ccccccccc}6&&14&&15&&3&&13\\&8&&1&&12&&10&\\&&7&&11&&2&&\\&&&4&&9&&&\\&&&&5&&&&\end{array}\right|.$$

Trovare i numeri *trapezici* n^* e le loro soluzioni è difficile. Ho ripiegato su di un programma di riempimento del trapezio (L,K) con i numeri da 1 a n^*, provando per la 1.a riga tutte le combinazioni possibili. Il metodo è brutale ma fornisce tutte le soluzioni per trapezi piccoli. Il numero di soluzioni diverse (omettendo le simmetriche) è

$$[3]\quad\begin{array}{r|ccccccccc}\underline{L=}&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\\hline K=2&2&6&13&48&m&m&m&m&m\\3&&4&9&6&9&6&12&15&38\\4&&&4&2&0&0&0&0&0\\5&&&&1&1&0&0&0&0\\6&&&&&0&0&0&0&0\\7&&&&&&0&0&0&0\end{array}\quad.$$

$$m(molte)>100$$

P.es. il caso citato nel problema ammette le due sole soluzioni

$$14*(5,4)=\left|\begin{array}{ccccccccc}9&&13&&1&&11&&14\\&4&&12&&10&&3&\\&&8&&2&&7&&\\&&&6&&5&&&\end{array}\right|,\left|\begin{array}{ccccccccc}13&&12&&3&&14&&10\\&1&&9&&11&&4&\\&&8&&2&&7&&\\&&&6&&5&&&\end{array}\right|.$$

Aggiungo le altre soluzioni possibili per $K=4,5$ (per $15*(5,5)$ v. sopra)

$$10*(4,4)=\left|\begin{array}{ccccccc}6&&1&&10&&8\\&5&&9&&2&\\&&4&&7&&\\&&&1&&&\end{array}\right|,\left|\begin{array}{ccccccc}6&&10&&1&&8\\&4&&9&&7&\\&&5&&2&&\\&&&3&&&\end{array}\right|,\left|\begin{array}{ccccccc}8&&3&&10&&9\\&5&&7&&1&\\&&2&&6&&\\&&&4&&&\end{array}\right|,\left|\begin{array}{ccccccc}8&&10&&3&&9\\&2&&7&&6&\\&&5&&1&&\\&&&4&&&\end{array}\right|$$

$$20*(6,5)=\left|\begin{array}{ccccccccccc}5&&18&&20&&3&&19&&12\\&13&&2&&17&&16&&7&\\&&11&&15&&1&&9&&\\&&&4&&14&&8&&&\\&&&&10&&6&&&&\end{array}\right|.$$

La cosa inaspettata della tabella [3] sono i casi impossibili; sembra che esistano soluzioni solo per

$$K=2,\ L\geq 2,\ (n^*=2L-1)$$

$$K=3,\ L\geq 3,\ (n^*=3L-3)$$

$$K=4,\ L=4,5\ \ (n^*=10,14)$$

$$K=5, L=5,6\ \ (n^*=15,20)$$

$$K\geq 6\ \text{ non esistono soluzioni.}$$

Gli unici n^* distinti sono i dispari a partire da 3, i multipli pari di 3 a partire da 6, i numeri 10,14,20 (questo conferma [2]).

Altre soluzioni potrebbero esserci per trapezi più grandi, ma ne dubito.

Per K=2 esiste sempre la soluzione con i numeri $(1,2,3\ldots n)$ disposti in avanti nella 2.a riga, all'indietro nella 1.a riga sfasati di due posti, e di nuovo in avanti per i rimanenti; p.es.

$$(3,2)=\begin{vmatrix} 4 & & 5 & & 3 \\ & 1 & & 2 & \end{vmatrix},\ (7,2)=\begin{vmatrix} 9 & & 8 & & 10 & & 7 & & 11 & & 6 \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \end{vmatrix}.$$

Un altro metodo è disporre i numeri pari in avanti nella 2.a riga, i dispari nella 1.a riga all'indietro sfasati di due posti, e i rimanenti di nuovo in avanti; p.es.

$$(3,2)=\begin{vmatrix} 3 & & 5 & & 1 \\ & 2 & & 4 & \end{vmatrix},\ (7,2)=\begin{vmatrix} 7 & & 5 & & 9 & & 3 & & 11 & & 1 \\ & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & \end{vmatrix}.$$

Per K=3 non ho trovato un metodo che generi una soluzione per ogni L, o una dimostrazione che tutti gli L siano ammessi.

La impossibilità dei casi $18*(6,4)$ e $21*(6,6)$ si può dimostrare direttamente.

Parto da $18*(6,4)$. Se sostituisco in una soluzione ogni numero con il suo modulo a 2, cioè (0) per i pari e (1) per i dispari, la 1.a riga corrisponde a un numero binario B di 6 cifre nell'intervallo $(0_2 \ldots 63_2)$. Indico con $\backslash B /$ il trapezio di (0) e di (1) generato da B e con S(B) il numero totale di (1) in $\backslash B /$.

La funzione $f(a,b)=|a-b|=c$ che genera le righe diventa $f(0,0)=f(1,1)=0,\ f(0,1)=f(1,0)=1$ (corrisponde all'operatore *XOR* fra cifre binarie).

Fra i numeri $(1,2,3 \ldots 18)$ ci sono 9 dispari, e una soluzione corretta deve avere $S(B)=9$. P.es. con $B=27_2=011011$ si ha $\backslash B/=\begin{vmatrix} 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & \\ & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \end{vmatrix}$, $S(B)=12$.

Quindi la 1.a riga non può avere la parità 011011. Controllando tutti i B in $(0_2 \ldots 63_2)$ si ottiene sempre $S(B)$ pari, cioè nessuna permutazione nella 1.a riga produce 9 dispari; quindi $18*(6,4)$ non ha soluzioni.

Ma non occorre trattare tutti i B. Dato un qualsiasi $\backslash B /$, <u>cambiando</u> nella 1.a riga una sola cifra, nelle altre righe cambiano solo alcuni elementi. Per le cifre di B corrispondenti a $1_2, 2_2, 4_2$, gli elementi che cambiano, indicati ancora con (1), sono nelle posizioni

$$\begin{vmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & \\ & & & 0 & & 0 & & 1 & & & \end{vmatrix} S(1_2)=4,\ \begin{vmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & \\ & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & \\ & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \end{vmatrix} S(2_2)=6,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & & 1 & & & \end{vmatrix} S(4_2)=8$$

dove lo schema di produzione delle righe è il solito (deriva da $f(a,1-b)=1-f(a,b)$).

Ma tutti i B si possono ottenere a partire da B = 0 cambiando cifre con gli schemi precedenti (e loro simmetrici).

Ogni schema scambia 0 e 1 in un numero pari $2k=4,6,8$ di elementi; se negli elementi cambiati del $\backslash B /$ iniziale c'erano m valori (1), dopo lo scambio ce ne saranno $2k-m$, e la variazione di $S(B)$ è $(2k-m)-m=2(k-m)$ cioè pari, quindi a partire da $S(0)=0$, $S(B)$ è sempre pari e non può essere 9.

Nel caso $21*(6,6)$ ci sono 11 dispari; basta aggiungere ai tre trapezi precedenti le righe 5 e 6 per verificare che $2k=6,8,8$, $S(B)$ è sempre pari e non ci sono soluzioni.

E qui ci fermiamo, le soluzioni di dicembre attendono.

4.2 [191]

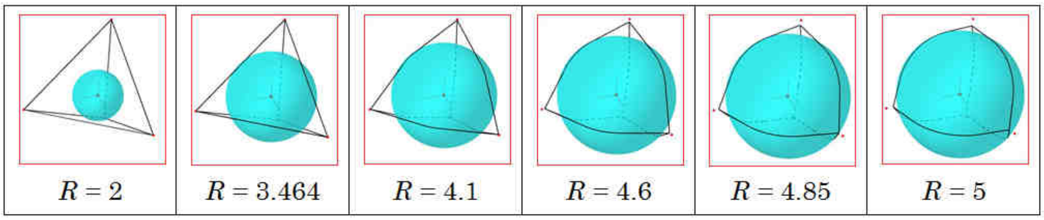
Visto il ritardo con cui siamo usciti, è un miracolo aver ricevuto soluzioni, ma con i nostri lettori più affezionati non si scherza, e quelle che vedete più sotto ci sono ancora giunte nell'anno vecchio.

4.2.1 Ci sarebbe servito prima

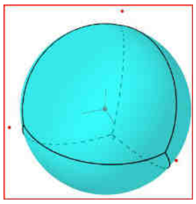
Ecco un buon problema teorico multidimensionale, descritto dal Capo usando tutti i tempi verbali a disposizione. Vediamo se riesco a semplificare:

> *Immaginiamo di gonfiare un palloncino (perfettamente sferico) all'interno di un cubo con gli spigoli deformabili (come di spago) e i vertici rigidamente definiti da nodi, fino a ottenere il massimo volume (*9200 cm^3*) pur mantenendone la forma. Quanto deve valere il lato del nostro cubo di spago? Quanto è vantaggioso gonfiare una sfera in una struttura deformabile piuttosto che in una rigida? Cosa succede con gli altri solidi platonici? E con gli archimedei? E se passiamo ad altre dimensioni?*

La soluzione è quella di ***Gnugnu***:

> Ogni solido platonico ha spigoli tutti della stessa lunghezza s ed è inscrivibile il una sfera di raggio r. Quando il palloncino posto all'interno dello scheletro del solido ha teso i fili, fino a farli aderire completamente alla sua superficie (sempre sferica), gli spigoli, mantenendo la lunghezza originale sono diventati geodetiche della sfera (archi di cerchi massimi) e le loro giunzioni non possono che essere ancora vertici di un solido simile al primo, ma più piccolo, perché le lunghezze dei nuovi spigoli saranno quelle delle corde sottese agli archi.
>
> Sezionando il tutto con il piano passante per il centro della sfera e per gli estremi (originali o modificati, nulla cambia) di uno spigolo il problema diventa di geometria piana.
>
> Metà dell'angolo β al centro, immutato, ha per seno il rapporto fra s e $2r$. Il prodotto di β per il raggio R della sfera su cui stanno i vertici spostati deve dare l'arco di lunghezza s.
>
> Vale dunque la relazione $R\,\beta = s = 2\,r\,\sin(\beta/2)$.
>
> Relazione che, a me pare, continui a valere per qualunque figura avente spigoli tutti della medesima lunghezza e vertici equidistanti da un punto: il centro della sfera circoscritta. I solidi platonici o archimedei, qualunque sia la dimensione dello spazio euclideo considerato, soddisfano queste condizioni, ed allora non capisco dove vorrebbe condurmi il GC. Probabilmente mi sfugge qualche particolare importante!
>
> Non avendo altro da fare ho provato a trastullarmi con i grafici 3D di GeoGebra. Non smette di sorprendermi! Tanti strumenti ed animazione fluida. Purtroppo non esporta (credo) le immagini 3D, quelli che seguono sono fotogrammi copiati brutalmente dallo schermo, scusate la bassa qualità.
>
> 
>
>
> Sono partito dal tetraedro inscritto nella sfera di raggio $r = 6$.
>
> Nel primo fotogramma, la sfera inscritta ($R = 2$) tocca le inesistenti facce.
>
> Nel secondo, con $R = 2$ sqrt(3), la sfera si appoggia agli spigoli.
>
> Seguono, con R crescente, le deformazioni dei medesimi, con i vertici costretti ad abbandonare le posizioni iniziali segnate con i puntini rossi, per avvicinarsi progressivamente, al centro della sfera.

Nella figura accanto la posizione finale con i vertici aderenti alla superficie sferica quando:



$$R=\frac{s}{\beta}=\frac{s}{2\arcsin\frac{s}{2r}}=\frac{2\sqrt{6}}{\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}\approx 5.128.$$

Dunque un 'risparmio' rispetto all'originale r = 6 di quasi il 14%.

Aumentando la dimensione n dello spazio in cui ragioniamo, il risparmio diminuisce, ma rimane comunque sensibile, visto che β che vale 120° nello spazio bidimensionale e più di 109° in quello tridimensionale, procede, senza alcuna fretta, verso l'angolo retto, ma ne resta sempre più grande. Tenendo conto che ai gonfiatori di palloni n-dimensionali non importa tanto del raggio, quanto piuttosto del volume dell'ipersfera, direi che possono essere contenti.

Diverso è il discorso se per imbrigliare usiamo un cubo. L'angolo $\beta/2$ misura 45° in due dimensioni, 30° in quattro e in generale il suo seno vale $1/\sqrt{n}$. Se non dobbiamo allenarci per immersioni subacquee la scelta è ovvia.

Ovvio? Niente è ovvio in matematica. Però le figure in geogebra sono bellissime, e anche l'animazione che ci ha fornito ***Gnugnu*** e che noi, gelosamente, non vi passiamo. Andiamo avanti.

4.2.2 Regalo di Natale!

Un bel problema di impacchettamento, che ben si sposa con il Natale appena passato:

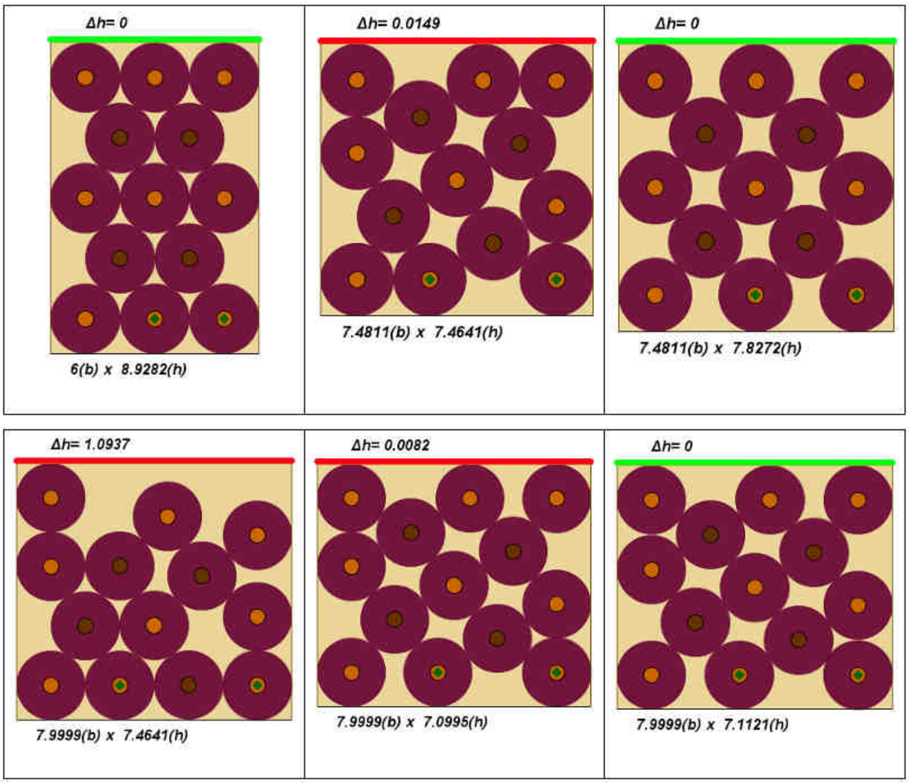
Stiamo preparando un pacco di bottiglie tutte uguali: la scatola a disposizione, pur avendo esattamente la lunghezza di una bottiglia è un po' più larga di tre bottiglie ma un po' più stretta di quattro bottiglie. Aglianico, Barbera e Cerasuolo li mettiamo sul fondo, con la prima e la terza che toccano i bordi verticali: tra le bottiglie avanza spazio (oltretutto, da come le abbiamo messe, disuguale), e quindi mettiamo il Dolcetto e l'Erbaluce nei due buchi: le ultime due bottiglie non toccano il fondo e non sono allo stesso livello. Freisa, Grignolino e CHianti vanno al loro posto, con primo e ultimo anche qui a toccare i bordi, e il secondo nel "buco" centrale. Avanzano due buchi nei quali inseriamo Inzolia e Jesi... Mancano tre bottiglie, che sistemiamo nei buchi, con prima e ultima a toccare i bordi...

L'idea, adesso, è quella di cominciare a spostare il Barbera (bottiglia centrale in basso) in modo tale da avere le ultime tre bottiglie "in piano", per chiudere la scatola e ottenere un sistema bloccato. Si può fare? Che rapporto deve esistere, tra le distanze tra le tre bottiglie in basso e il lato della scatola?

Bene, and che qui, ***Gnugnu*** ci ha mandato una soluzione:

Questa soluzione è opera della cara GeoGebra. Mi sono limitato a spiegarle quel che, per quanto ho inteso, voleva Rudy e, superate un po' di discussioni, ha fatto tutto da sola. Lei fatica a comprendere le stranezze degli umani, ma una volta convinta, sovente ti sorprende.

Nelle immagini successive le disposizioni per alcune significative larghezze della scatola e diverse posizioni della bottiglia intermedia della fila inferiore. Quest'ultima alloggia sempre nella metà sinistra dello spazio disponibile, per ogni disposizione ne esiste un'altra speculare con le medesime caratteristiche. Le misure sono riferite al raggio delle bottiglie ed il colore del coperchio è verde se le ultime sono alla medesima altezza, rosso altrimenti.



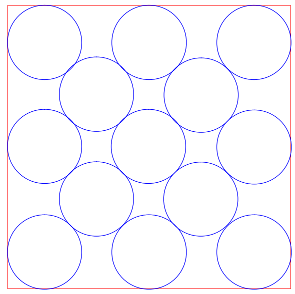
> Nella prima immagine la scatola di minima larghezza b=6 e altezza h=4√3 +2=8.9282..; escludendo le bottiglie d'angolo, le nove restanti assumono una conformazione a rombo che, grazie alla sua simmetria rispetto alla bottiglia centrale garantisce il perfetto contatto con il coperchio, come i graticci a losanghe per rampicanti.
>
> Questa caratteristica si conserva fino a quando non si interrompe il contatto fra queste bottiglie, cioè fino a che quella di destra della fila centrale, costretta dalle disposizioni del GC, a non staccarsi dalle pareti perde l'appoggio sulla bottiglia col tappo scuro. Questo può avvenire solo se la scatola è larga più di b=4+2√3=7.4641..[seconda figura].
>
> La scatola con base ed altezza di questa lunghezza, dovrebbe essere la migliore per confezionare 13 bottiglie: garantisce l'assenza di movimenti ed ha misure bilanciate, ma utilizza solo il 73,3% della superficie, mentre quella della prima figura arriva al 76.2% e le consuete confezioni a scomparti di base quadrata superano il 78.5%.
>
> Naturalmente spostando la bottiglia mobile verso il centro [terza figura] si rimette in bolla il coperchio; questo avviene, però, a scapito dell'altezza della scatola, che aumenta. Caratteristica in fondo positiva, perché implica che le bottiglie, con qualche scossone cerchino autonomamente la posizione ottimale.
>
> Nelle ultime immagini ho riportato, per puro divertimento, la scatola alla massima larghezza consentita (quasi quattro bottiglie) con la quarta figura dove una bottiglia, per restare a contatto con il bordo, sfida la gravità; nelle seguenti la transizione del coperchio inclinato/orizzontale e in quella accanto la posizione centrale con altezza sensibilmente maggiore.

Bello vero? Anche in questo caso c'era allegato un bel file geogebra che ci teniamo noi. Mentre stavamo scrivendo i saluti, è ancora giunta la soluzione di ***Sawdust***, che vi passiamo molto velocemente:

> Tanto per cambiare le informazioni sono sempre un po' carenti, ma ormai ci siamo abituati e vediamo di arrangiarci. Innanzi tutto manca l'indicazione del tipo di

bottiglia e, visto che io sono astemio, ho qualche difficoltà a reperirne per misurarne il diametro, per cui ho pensato a un diametro di 8 cm.[15]

Come secondo dato mancante, la scatola deve essere quadrata (parlo della faccia verso cui sono rivolti i fondi delle bottiglie), o deve essere la più piccola possibile?

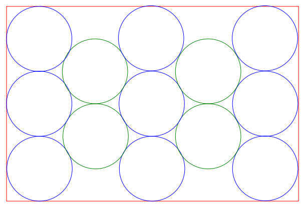


Proviamo a vedere i due casi.

Nel caso della scatola quadrata penso che la soluzione più semplice sia quella di disporre le bottiglie in modo da averne 5 lungo la diagonale del quadrato e il risultato è raffigurato qui a lato.

Il quadrato ha il lato lungo 30,63 cm e quindi un'area di circa 938,2 cm^2.

La distanza tra 2 delle bottiglie in basso è pari a 3,31 cm, per cui il rapporto cercato è circa 1/9.



Nel caso invece della scatola più piccola possibile una soluzione potrebbe essere quella di una base rettangolare come quella qui raffigurata, che ha dimensioni pari a 24 e 35,71 cm, con un'area pari a 857,04 cm^2.

La distanza tra 2 delle bottiglie in basso è pari a 5,85 cm, per cui il rapporto cercato è circa 1/6.

Ecco fatto. Non vediamo l'ora di sapere come avete impacchettato voi le vostre bottiglie… diteci qualcosa. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

È un nostro tormentone ormai assodato che ad Alice non piace il Calcolo delle Probabilità per il fatto che "è troppo facile fregare con le parole": a giudicare da un grazioso problemino che abbiamo trovato, ci sentiremmo di darle ragione. Se avete una moneta perfettamente onesta, scommettere a "testa o croce" di sicuro non vi permette di mantenervi nell'agio. Quindi, su, ad esempio, 100 tiri, ci aspettiamo che ottenere 50 volte testa abbia una probabilità un mezzo. Sicuri?

No. La probabilità di ottenere, su 100 *tiri, esattamente* 50 *volte testa vale:* $\dfrac{\binom{100}{50}}{2^{100}}$, *ossia poco meno dell'*8%.

6. Zugzwang!

Se ce ne siamo ricordati, dovreste avere un rimando qui dai problemi: la versione originale (e la indichiamo specificatamente nel seguito) del gioco è ***analizzata***. Se volete un problema in più, datevi da fare su questo.

6.1 Neutron

Giochino facile, e servono anche pochi pezzi: un foglio di carta, qualche moneta (di taglio e/o metallo diverso, ma non è un problema) e via andare. Per quanto detto sopra, se non lo analizzate ci arrabbiamo.

Scacchiera

[15] Va bene, ho controllato, le bottiglie più comuni hanno un diametro di poco superiore ai 7 cm, però la cosiddetta "Albeisa" è molto vicina agli 8. Sempre parlando di bottiglie da 75 cl, se invece volete fare i grandiosi e regalate delle Magnum...

Nell'**originale**, una normale scacchiera 5×5, e non serve neanche colorare le caselle. Le **variazioni**, prevedono diverse dimensioni di scacchiera: le cose, a quanto pare, si fanno difficili già con la 7×7. Per *evidenti ragioni di simmetria* che saranno chiare al prossimo paragrafo, il numero delle caselle tende ad essere dispari.

Disposizione

Gli umani si siedono ai lati opposti della scacchiera, riempiono la riga di fronte a loro con il corretto numero di pedine (di colori diversi, per esempio bianco e nero) e pongono una pedina *distinguibile* nella *casella centrale* della scacchiera (e adesso avete capito perché è meglio se sono dispari): questa pedina particolare è nota come *Neutron*.

Mossa

Alla prima mossa, il bianco muove una sua pedina (senza toccare il *Neutron*) con la tecnica del movimento generale di pedina (v. dopo).

Per le mosse successive, ogni giocatore muove prima il *Neutron* e successivamente una propria pedina, in orizzontale, verticale, diagonale in una qualsiasi direzione a scelta: il bello (che ci ricorda *Atomic*, sul quale stiamo ancora aspettando le vostre analisi[16]...) è che ogni pezzo (*Neutron* incluso) muove per la *massima mossa possibile*: in pratica, devono fermarsi obbligatoriamente nella casella davanti al pezzo che blocca nella direzione nella quale si sta muovendo (o bordo scacchiera[17]).

Prese

Niente prese: gioco non-violento, una volta tanto.

Vittoria

Se il *Neutron* entra in una delle caselle di partenza delle vostre pedine, avete vinto: non importa se la mossa l'avete fatta voi o il vostro avversario. La vittoria è immediata: non serve muovere la pedina, dopo che il *Neutron* si è fermato sulla casella fatale.

Un'altra possibilità di vittoria è se il vostro avversario non riesce ad effettuare la mossa completa: ossia se non può muovere il *Neutron* o se, mosso il *Neutron*, non riesce a muovere nessuna propria pedina.

Trivia

Il gioco è stato inventato da *Robert Kraus* nel 1978: sino al 1981 ha avuto un discreto successo, ma il fatto che sia stato analizzato lo ha fatto decadere rapidamente.

Variazioni

A parte l'aumentare (sempre restando sul dispari) le dimensioni della scacchiera, *David Ploog* ha inventato alcune sottili vie traverse:

Restrizione singola: al giocatore è vietato muovere i propri pezzi sulla propria linea di partenza.

Restrizione doppia: ad entrambi i giocatori è vietato muovere i pezzi su qualsiasi linea di partenza (quindi, il Bianco non può andare sulla partenza el Nero, e viceversa).

Neutron Hole: (questa, in realtà, l'ha inventata *Luca Cerrato*): sulla sacchiera ci sono una (o due) pedine inamovibili dette *holes*.

O lo analizzate, o la prossima volta vi raccontiamo Testa o Croce.

7. Pagina 46

Chiaramente, $b_{n+1} \geq b_n$ e $c_{n+1} \geq c_n$; se riusciamo a dimostrare che è sempre $c_{n+1} \neq c_n$, allora seguirà che $c_{n+1} > c_n$: a questo punto, la sequenza $\{cn\}$ sarebbe strettamente crescente e quindi la tesi sarebbe dimostrata.

Se due numeri reali differiscono almeno di 1, allora o sono due interi o nell'intervallo tra i due è presente almeno un intero; in entrambi i casi, essi non avranno la stessa parte

[16] Visto che sicuramente state correndo a cercarlo, il riferimento è allo Zugzwang! di RM100.

[17] ...e qui, è immediata l'idea di giocare su una scacchiera toroidale...

intera, e quindi è sufficiente mostrare che $\sqrt{b_{n+1}} - \sqrt{b_n} \geq 1$, ossia che $b_{n+1} \geq b_n + 2\sqrt{b_n} + 1$.

Essendo

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \left[\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) + a_{n+1}\right]\left[\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) + \frac{1}{a_{n+1}}\right] \\ &= b_n + \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) \cdot \frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) + 1 \end{aligned},$$

noi vorremmo mostrare che:

$$\frac{1}{a_{n+1}}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) + a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \geqslant 2\sqrt{b_n}.$$

Ma essendo i numeri tutti positivi, questo segue immediatamente dalla diseguaglianza tra le medie aritmetica e geometrica:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{a_{n+1}}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\right] + \left[a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)\right] \\ &\geqslant 2\sqrt{\left[\frac{1}{a_{n+1}}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\right]\left[a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)\right]} \\ &= 2\sqrt{b_n} \end{aligned}$$

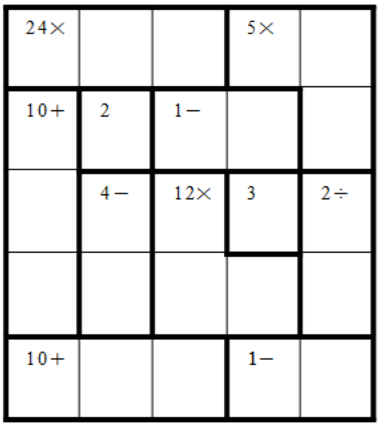
che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Un sudoku che ha "i numeri"

Vi abbiamo detto (qui e altrove) del nostro disamore per il sudoku, in funzione della sua "scarsa matematicità": infatti, potete sostituire ai numeri lettere, disegnini, foto dei parenti o quant'altro possa piacervi, che comunque il risultato non cambia. A quanto pare, qualche giapponese[18] non *mathematically challenged* ha deciso che avevamo ragione, e ha cercato un gioco in grado di occupare suppergiù lo stesso spazio di un sudoku, ma con molta più matematica dentro. Ma, come al solito, prendiamola alla larga, partendo da una delle nostre icone preferite.

Nel novembre del 1959, Martin Gardner pubblicava su Scientific American un pezzo che successivamente sarebbe stato tradotto in italiano con il pessimo titolo di "I guastafeste di Eulero". L'originale rispondeva al molto più interessante e rimato nome di "Euler's Spoiler": non sappiamo se per la rima o per altri motivi, ma il pezzo veniva considerato talmente interessante da aggiudicarsi la copertina.



1 *Un KenKen (facilino).*

L'argomento erano i ***quadrati latini***: dei quadrati $n \times n$ farciti con n oggetti in modo tale che ognuno di essi compaia una ed una sola volta in ogni riga o colonna (e qui, la similitudine con il sudoku dovrebbe essere evidente).

I quadrati latini, oltre ad essere piuttosto divertenti, hanno un'indubbia utilità nella progettazione di esperimenti statistici[19]; Myiamoto, nel 2004, decise che era ora di fare qualcosa per mettere dentro al sudoku un po' di matematica, e inventò i ***KenKen***[20].

Un tipico KenKen ha, esternamente (e anche quando è risolto) l'aspetto di un Sudoku con qualche cosa in più: ne vedete un esemplare nella figura a fianco.

Vedete che alcune righe sono inspessite, e per ogni zona dal bordo spesso è stato inserita una specie di "operazione", che rappresenta l'indicazione di quanto deve risultare: per intenderci, nelle tre caselle in alto a sinistra, dove compare il simbolo 24×, devono comparire tre numeri tali che moltiplicati tra loro diano come risultato 24 *[...e se trovate un modo veloce in Libre Office per disegnare i bordi inspessiti dove ci pare, potremmo anche spiegarvi come mettere le operazioni monche senza far arrabbiare il relativo Formula Editor (RdA)]*: logicamente, essendo il quadrato 5×5, dovete introdurre solo numeri da 1 a 5 in modo tale che ne compia una e una sola istanza in ogni riga e in ogni colonna.

Adesso, possiamo cominciare a pensarci: nelle tre caselle in alto a sinistra, dovendo essere tre numeri diversi e dovendo date come risultato 24, è abbastanza immediato pensare che ci debbano entrare 4, 3 e 2 (ma non sappiamo dove... anche se R2C2 dà l'interessante indizio che in R1C2 non possiamo certo metterci il 2); le tre caselle in alto a destra, essendo 5 un numero primo, si possono costruire solo come 5×1×1: e qui la loro posizione è immediata, visto che i due 1 non possono essere nella stessa riga o nella stessa colonna (e quindi vanno in R1C4 e R2C5).

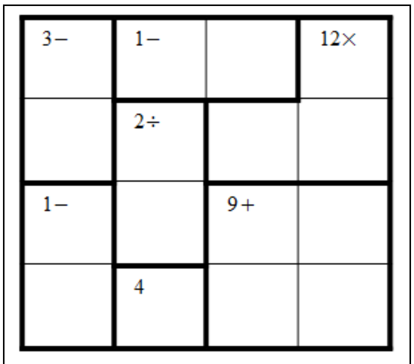
[18] Sappiamo anche il nome, Tetsuya Miyamoto: insegnante di matematica, chiaro.

[19] Ci pare di ricordare che Willliam Gosset (meglio noto come *Student*) costruisse un esperimento basato su luppolo e concimi (lavorava alla Guinness) in forma di quadrato latino. Da cui potete capire per quale motivo sia la miglior birra del mondo.

[20] Attenzione che, come succede spesso nelle lingue orientali, i due "ken" hanno significati completamente diversi: la traduzione del nome, suppergiù, dovrebbe essere un qualcosa del tipo "saggezza quadrata", o "saggezza nel quadrato" o cose del genere. E no, non c'entrano niente le spade, pur chiamandosi "ken" anche loro.

10+ è un po' più difficile: infatti, possiamo dividere il 10 come somma di tre numeri diversi tra loro e minori o uguali a 5 in due modi: 10 = 5 + 4 + 1 o 10 = 5 + 3 + 2… Ma non vogliamo toglierci la gioia di risolvere da soli il vostro primo KenKen, quindi lasciamo perdere l'esempio e proviamo a generalizzare.

È evidente che conoscere la scomposizione in fattori primi e le partizioni di un numero sono molto importanti, quando i tratti di risolvere un KenKen: pensandoci un attimo, però, potreste accorgervi che anche un altro concetto matematico è importante: infatti, dovendo i numeri di una riga (o colonna) essere diversi tra loro e minori o uguali all'ordine del quadrato, avete che la *somma* di ogni riga (o colonna) di un KenKen di ordine *n* deve essere pari a 1 + 2 + … + *n*, ossia l'*n-esimo numero triangolare*: nel nostro aggeggio, quindi, la soma deve essere pari a 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, e quindi, visto che R5C(1-3) deve essere pari a 10, le restanti due caselle devono dare somma 5 e, dovendo dare differenza 1, possono valere solo 2 e 3: R3C4 vi suggerisce piuttosto banalmente dove mettere il 3, quindi non dovreste avere problemi.



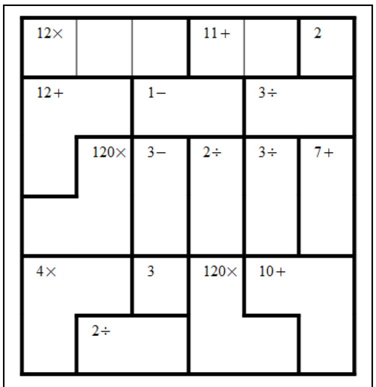
2 *Ingannevolmente semplice….*

Se proprio insistete, andiamo avanti con i suggerimenti: il trucchetto del numero triangolare aiuta anche in un altro modo: se C1 deve dare somma 15, allora i due numeri in R1C1 e R5C1 devono dare somma 5, e possono essere solo {2, 3} o {1, 4}: ma nessuno della prima coppia può stare in R5C1 (li abbiamo già messi in R5C4 e R5C5), quindi devono essere 1 e 4: ma visto che R1C(1-3) deve contenere 4, 3 e 2, R1C1 sarà uguale a 4, e il resto ve lo fate da soli.

Ad un primo sguardo, può sembrare che un KenKen "più è grosso, più è difficile": la cosa non è vera, visto che quello che dovreste avere qui di fianco, pur essendo solo un 4×4, è considerato più difficile del primo: proviamo a pensarci un attimo.

R1C1 e R2C2, dovendo sodisfare il 3–, devono contenere 1 e 4, quindi R3C1 e R4C1 devono contenere 2 e 3: decidere le loro posizioni procedendo per tentativi è però lungo e noioso: anche qui, i numeri triangolari aiutano.

Infatti, si vede che R2C2 e R3C2 devono essere 1 e 2 in un qualche ordine; ma visto che 1 + 2 + 3 + 4 = 10, la somma delle ultime due righe deve essere pari a 20, e quindi R3C2 deve essere un numero pari (visto che R3C3, R3C4, R4C3, R4C4 sommati danno un dispari, la sottrazione generata d R3C1 e R4C1 dà un dispari, quindi lo darà anche la loro somma, e la restante casella è un pari), e quindi R3C2=2: da qui, le cose procedono in modo ragionevolmente semplice[21].



3 *…qui è un guaio.*

La prossima è difficile ma fattibile: coprite la parte di testo che segue, se volete provare a risolverla del vostro; per i *fainéants*, come dice una signora di un blog, studiamo qualche nuovo trucco.

State leggendo? Attenzione che questa è l'ultima occasione per risolvere il puzzle da soli.

Il "trucco" che si può utilizzare è un trucco in comune con il sudoku: se qualcuno vi ha dato un KenKen (o un Sudoku) da risolvere, allora la soluzione deve essere *unica*. E questo fatto, sovente, viene sfruttato in entrambi i problemi.

Infatti, consideriamo il blocco 120× in basso (R5C4, R6C4, R6C5) e il blocco 11+ in R1C4, R1C5: siccome l'unico modo per ottenere questo è con 11 = 5 + 6, possiamo supporre

[21] Era possibile anche basarsi sul fatto che R4C1+R3C1=5 e quindi 20 – (9 + 5 + 4) = 2, ma a nostro giudizio il metodo che abbiamo seguito è più elegante.

che R6C4 e R6C5 ***non*** siano entrambi 5 e 6, altrimenti basterebbe scambiarli tra di loro (scambiando anche 5 e 6 nella prima riga) per avere una soluzione diversa (e quindi perderemmo l'unicità della soluzione); e non possiamo avere 5 e 6 (intesi come *entrambi*) in R5C4 e R6C4, visto che uno dei due compare già in R1C4. Questo significa che R6C4=4. E da qui, si procede come al solito.

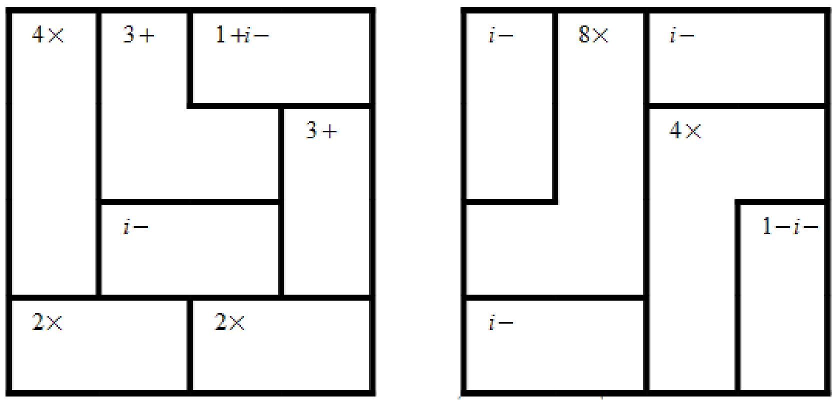
Insomma, qui i trucchetti si sprecano: nel caso di un KenKen 6×6, ad esempio, se compare un 120× formato da quattro quadretti in linea, allora potete essere sicuri che il prodotto delle due caselle restanti sarà 6, visto che 6!/120 = 6; e avanti in questo modo. Insomma, ci pare si debba essere molto "amici dei numeri", per riuscire a risolverne uno, e ci sembrano carini.

Ve la ricordate, la barzelletta del matematico che, quando gli va a fuoco il cestino della carta lo spegne con la caraffa piena d'acqua e il giorno dopo, quando va a fuoco il corridoio, non fa nulla se non emettere un disgustato "triviale estensione di un problema già risolto"? Bene, è successo anche con il KenKen. E infatti qualche bello spirito ha cercato di inventarsi un'*estensione*, e ha provato a farne qualcuno con gli ***Interi Gaussiani***.

Nel caso non ve lo ricordaste, gli Interi Gaussiani sono quei numeri complessi nella forma $a+bi$ per cui a e b sono interi (non necessariamente positivi): qui, le cose sono complicate dal fatto che, ad esempio, 2 e 5 *smettono di essere primi*: infatti possono essere fattorizzati come:

$$2 = (1 + i)\,(1 - i),\text{ e } 5 = (1 + 2i)\,(1 - 2i),$$

e quindi il vostro KenKen rischia di diventare complicato: di solito, nella didascalia (vi ricordate che i numeri complessi non sono ordinabili, vero?) si dice *quali siano* i numeri da utilizzare per la soluzione.

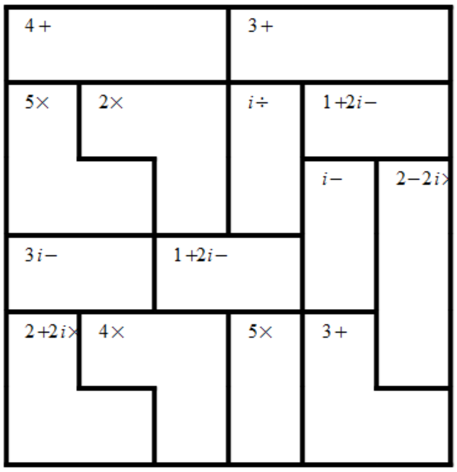


4 *Entrambi da risolvere con* {1, 1+*i*, 1–*i*, 2}.

Volete provarci? Ve ne diamo qualcuno, fermo restando che per il primo, eccezionalmente, forniremo qualche "aiutino".

Proviamo ad iniziare l'analisi del primo? Consideriamo il gruppo 4× in alto a sinistra: non essendo autorizzati a ripetere un 2 nella medesima colonna, l'unico modo per ottenere questo risultato con tre fattori è $4 = 2\,(1+i)\,(1-i)$. Questo ci suggerisce che l'unico valore libero per la casella in basso a sinistra è 1, e quindi possiamo completare il blocco 2× in basso a sinistra con un 2. Notiamo che ci sono due blocchi marcati nel problema: uno potrà contenere solo i valori {1, 1+*i*, 1–*i*}, e quindi l'altro dovrà contenere {1, 2}. Intrigante il blocco avente come risultato *i*–: non può contenere 2, visto che qualsiasi altro numero di quelli a disposizione, sottratto da 2, lascia un 1 (reale) nel risultato; non può contenere {1+*i*, 1–*i*}, visto che in questo caso darebbe risultato 2*i*; quindi, abbiamo due possibilità: {1, 1+*i*} oppure {1, 1–*i*}. Nello stesso modo, il blocco 1+*i*– deve contenere un 2, e quindi l'altro termine deve essere 1–*i*.

Un aiuto può inoltre venire dal fatto che gli Interi Gaussiani sono dei *vettori* sul piano complesso: quindi, considerato che la differenza $\alpha - \beta$ non è altro che il vettore da β a α, si vede che esistono ben pochi modi di riempire il blocco 1–, e lo stesso ragionamento si può compiere per il gruppo 1+*i*–.



5 *Questo lo intitoliamo "Don't Panic!". Va completato utilizzando:* {1, 1+i, 1–i, 1+2i, 1–2i, 2}.

Bene, Assi, adesso provate con quello qui di fianco.

E nel caso non vi bastasse, potete sempre provare a fare un salto a www.kenken.com (esiste sul serio! Auguri).

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms