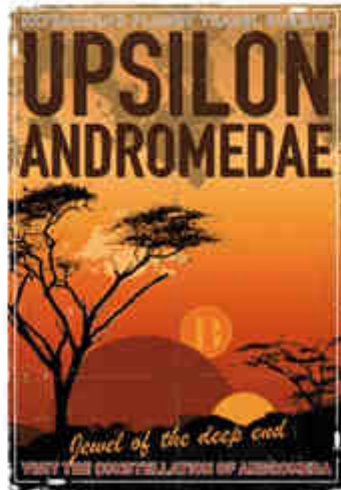
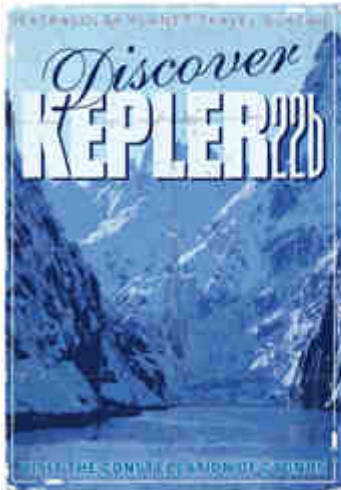
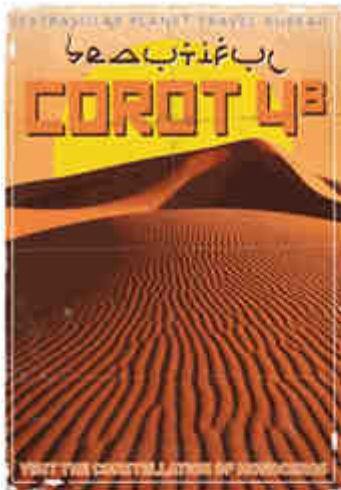




Rudi Mathematici



Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 184 – Maggio 2014 – Anno Sedicesimo



1. Vizi virtuali, virtù veneziane	3
2. Problemi.....	10
2.1 I guardiani del bosco matematico	10
2.2 Tiro di campagna	11
3. Bungee Jumpers	12
4. Soluzioni e Note	12
4.1 Calendario 2010 – Maggio – 4th IMO (1962) – 6	12
4.2 [182].....	14
4.2.1 Agosto, grazie a Carlo	14
4.3 [183].....	16
4.3.1 <i>Le Rouge et le Noir</i> : omaggio ad Henry	16
4.3.2 Un altro tre per due.....	21
5. Quick & Dirty.....	31
6. Zugzwang!	32
6.1 Ney-pat-ko-no.....	32
7. Pagina 46.....	32
8. Paraphernalia Mathematica	34
8.1 Oltre Platone III – Non è la parte più difficile	34



	Rudi Mathematici Rivista fondata nell'altro millennio da <i>Rudy d'Alembert</i> (A.d.S., G.C., B.S) rudy.dalembert@rudimathematici.com <i>Piotr Rezierovic Silverbrahms</i> (Doc) piotr.silverbrahms@rudimathematici.com <i>Alice Riddle</i> (Treccia) alice.riddle@rudimathematici.com
	www.rudimathematici.com
RM183 ha diffuso 3'097 copie e il 15/05/2014 per  eravamo in 10'100 pagine.	
Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto <i>concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione</i> alle condizioni indicate alla pagina diraut.html del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.	

La gioia di ogni agente di viaggio è di trovare un cliente completamente indeciso sulla sua destinazione, in modo da potergli magnificare luoghi ancora poco frequentati dalle orde dei vacanzieri: Vincent Vermeji (<http://www.chungkong.nl>), considerato che ormai i pianeti extrasolari vanno a un soldo la dozzina, ha provato a rendere indeciso qualsiasi giramondi.

1. Vizi virtuali, virtù veneziane

*“In Italia seicento e quaranta;
in Alemagna duecento e trentuna;
cento in Francia,
in Turchia novantuna;
ma in Ispagna son già mille e tre.”*
 (“Don Giovanni”,
 atto primo, scena quinta
 W.A. Mozart – L. Da Ponte)

Se non ci fosse il mondo virtuale della Rete, questa riga non esisterebbe.

Se questa riga non esistesse, tutti coloro che l’hanno letta (o la leggono adesso, o la leggeranno prima o poi), avrebbero fatto altro invece di leggerla. Non dubitiamo minimamente che un’ottima percentuale di questi ci avrebbe guadagnato molto nel cambio, ma non siamo neppure così immodesti da non prendere in considerazione l’ipotesi che, per contro, una limitata frazione del medesimo insieme sarebbe invece finita a far persino di peggio: ma il punto qua non è tanto il bilancio del meglio/peggio, guadagno/perdita, bene/male, quanto la semplice, banale, piana constatazione che, non facendo una cosa, inevitabilmente se ne fa un’altra. Come minimo, appellandoci alla logica formale e al caro vecchio principio del Terzo Escluso, possiamo affermare senza tema di smentita che non leggendo la prima riga di quest’articolo si compie proprio l’azione del non-leggerla o, traslando la negazione, sancire addirittura che non leggendola si è compiuta una non-azione; e, perdinci, se la si è compiuta la si è evidentemente fatta.

Ma è inutile giocare troppo con negazioni e meta-azioni, il nocciolo è molto più semplice; pur se questa riga appartiene al Mondo del Virtuale, esso Mondo interagisce con noi, miseri comprimari del Mondo del Reale, e con le nostre azioni, che inevitabilmente sono sempre acriticamente reali. Quindi che la si piantì, una buona volta, nel titillare la celebre dicotomia, che tanto proprio dicotomia non è. Quando si ascolta in macchina un mp3, si è nel virtuale o nel reale? Quando si gioca a scacchi con un tredicenne nepalese scambiandosi bit contro bit, la batosta che si raccoglie è meno dura di quella propinata in salotto dal nipotino tramite graziose figurine di legno? Certo, lo sappiamo bene anche noi che nel secondo caso si può reagire allo scaccomatto spaccando soavemente la scacchiera sulla testa del contendente dopo avergli infilato i due alfieri negli orecchi; ma qui si parla della partita, non del post-partita.

Il Virtuale è solo un sottoinsieme del Reale, e il fatto che i termini siano etimologicamente contrapposti mostra solo che la scelta iniziale dei termini era sbagliata o, più serenamente, che quella che qualche tempo fa sembrava netta disgiunzione ha ormai cambiato natura.

Sottoinsieme implica inclusione: ma quando è definito in senso stretto implica anche che esiste qualcosa esterno al sottoinsieme che continua ad appartenere all’insieme principale. In breve, che esiste anche il Reale non Virtuale; tanto per mantenere viva la metafora scacchistica di poco fa, il tredicenne nepalese corre assai meno rischi dell’incauto nipote di finire al pronto soccorso.

Il rischio maggiore risiede pertanto nel pensare che un’esperienza virtuale, per quanto profonda, possa coincidere pienamente con la controparte reale. Si potrebbe rischiare, così facendo, in quello che il vostro umile cronista è solito chiamare “effetto Venezia”.

Una classifica¹, anni fa, sanciva che Venezia fosse la città più fotografata del mondo. Non sappiamo se l'affermazione sia assolutamente veritiera o meno, ma basta e avanza per ribadire che è quasi impossibile giungere a visitare la città senza averne visto prima qualche immagine. Il turista medio, quando mette piede per la prima volta sulle centodiciotto isolette che formano la Serenissima, ha piuttosto in mente tutta una serie di immagini che non vede l'ora di mettere alla prova; una pletora di scorci da visitare, confrontare, vidimare. In altri termini, Venezia è così nota "a priori" (o se preferite "virtualmente") che il turista medio si aspetta certo meraviglie e conferme, ma certo non vere sorprese.

Ed è a questo punto che il Reale si prende la rivincita: per quante foto, film, racconti e resoconti sulla città lagunare possano essere stati visti e sentiti, il primo impatto reale con Venezia resta assolutamente sorprendente; soprattutto qualora avvenga in età adulta. Non c'è dubbio che il tapino sappia già che troverà canali invece di vie, gondole e motoscafi al posto delle automobili, ponti in luogo delle strisce pedonali, eccetera, eccetera, eccetera: ma immancabilmente, per quanto virtualmente informato possa essere, passerà i primi minuti guardandosi intorno e ripetendosi sottovoce con aria ebete: "ma sono matti, questi? Hanno costruito le case sull'acqua!".



1 Venezia (vista dal Canaletto)

Manco fossero stati gli unici a farlo, poi, i veneziani. Non c'è dubbio che nessuno li abbia eguagliati, ma il mondo è pieno di pittoreschi paesaggi urbani conditi di canali spudorati che si infilano nei portoni delle case. Qui il Virtuale si prende la rivincita: poche ditate sulla tastiera, e si può subito vedere quante città si attribuiscono il titolo secondario di Venezia del Nord (o magari dell'Est, del Sud, del Circolo Polare). Amsterdam, la Venezia del Nord; Stoccolma, la Venezia del Nord; San Pietroburgo, la Venezia del Nord; Bruges, la Venezia del Nord. Chianalea di Scilla, la Venezia del Sud; Modica, la Venezia del Sud; Bangkok, la Venezia del Sud-Est Asiatico. Budapest, la Venezia dell'Est; Suzhou, la Venezia dell'Est; Praga, la Venezia dell'Est (ma perché?); San Pietroburgo, la Venezia dell'Est (ma non era già del Nord?); Bangkok, la Ven... doppia anche questa; Udaipur (e questa dove sta?), la Venezia dell'Est. Nantes, la Venezia dell'Ovest; Bruges, anche lei. Per non parlare poi di tutto il Venezuela, che per quanto grande possa essere, si porta a vita il nome che porta, che non significa altro che "piccola Venezia".

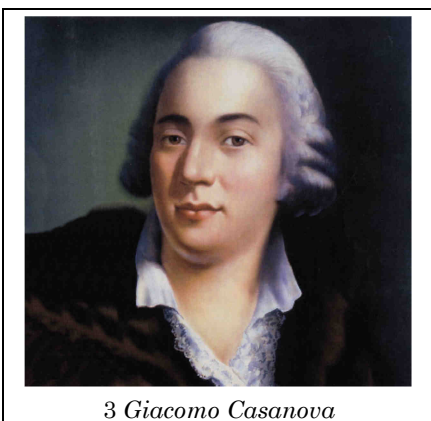
¹ Con quali criteri fosse stata stilata, secondo quale metrica e con quali razionali sviscerata, è cosa di cui naturalmente non abbiamo idea. Ma sulle classifiche torneremo più avanti, pur senza la minima speranza di riuscire a oggettivare alcunché.



2 Bruges (su una cartolina postale)

Occorre agire d'autorità, eleggere a "clone ufficiale di Venezia" una città sola, e Bruges² vince facile. Come vince nuovamente il Reale, perché è abbastanza certo che andare in Belgio a vedere Bruges (anziché andare a Venezia) è comunque esperienza molto più vicina all'obiettivo di quanto possa esserlo qualsiasi viaggio virtuale a Piazza San Marco. Almeno per ora.

C'è, insomma, qualcosa che resta ancora ben lontano dall'essere pienamente virtualizzabile. L'esempio della visita ad una città è un esempio anche ragionevolmente onesto: i sensi chiamati in causa in un'esperienza del genere sono principalmente la vista e l'udito, che sono certo i principali canali di sensazioni per gli esseri umani, ma nel contempo sono anche quelli meglio riprodotti per via virtuale. Le "visite virtuali" raggiungono ormai un gran bel livello di virtualizzazione, ma la distanza con l'esperienza reale è ancora alta. La presenza nel luogo reale non è ancora perfettamente riprodotta dalle tecniche 3D; i suoni hanno fedeltà altissima, ma non la spazialità imprevedibile della realtà; olfatto, gusto e tatto restano all'asciutto.



3 Giacomo Casanova

Proprio quando i tre sensi negletti dalla virtualizzazione assurgono ad importanza speciale, la distanza tra Virtuale e Reale si fa poi sentire in modo preponderante. La visita virtuale di un negozio di profumi non è ancora troppo diversa da quella (parimenti virtuale) ad una concertia; il forte vento delle costiere della Bretagna non sposta di un millimetro neppure il mouse più leggero, e per quanto affascinanti possano essere i sorrisi che piovono sul nostro schermo, ci è ancora del tutto negata la possibilità di farli seguire da una carezza su una guancia.

A questo proposito, uno dei veneziani più famosi avrebbe molto da ridire: Giacomo Casanova, per quel che ci è dato di sapere, avrebbe ben difficilmente trovato affascinante un qualsiasi tipo di rapporto puramente virtuale. Scrittore, avventuriero, galeotto, diplomatico, evaso, agente segreto, perfino poeta; eppure

² Vince per molte ragioni, ma ne elencheremo solo una: Bruges piace da matti ad Alice, che va matta perfino per "In Bruges", bel film d'azione (e di paesaggi *bruges*) con Colin Farrell.

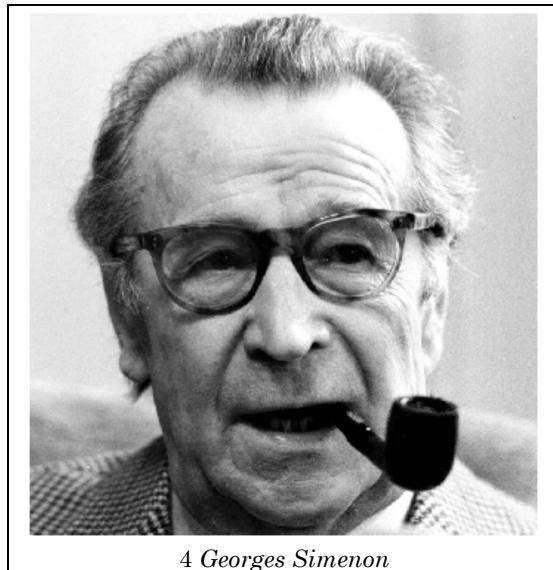
passa alla storia soprattutto per la sua capacità di superare facilmente quella distanza che nel Mondo Virtuale è ancora del tutto invalicabile. Il suo cognome è diventato nome comune, sostantivo da dizionario. E i maniaci delle classifiche non hanno certo mancato di stilarne una nella quale egli finisce inevitabilmente tra i primi posti: quella dei Grandi Seduttori.

Tra i primi posti, ma quasi mai tra i primissimi. Perché la compilazione di una classifica richiede almeno la parvenza d'una metrica, e quella dei seduttori ha un parametro apparentemente obiettivo e oggettivo: il numero delle fanciulle conquistate. E qui sorgono subito le sorprese, perché il sublime Giacomo non si presenta poi con uno score particolarmente rilevante: c'è chi si è preso la briga di contare le sue donne, e il veneziano si ferma presto: chi dice centosessanta, chi arriva sulla fiducia a duecentoquaranta, ma insomma l'ordine di grandezza è chiaro. E pare che sia un record tutt'altro che rimarchevole. Ma è forse l'unico, tra i non troppo lusinghieri record di questa natura, a mantenere una sorta di umanità, o per meglio dire, di aderenza al Mondo Reale. Duecento avventure galanti sono abbastanza per assurgere a mito, ma la fedele aritmetica riconduce tutto a numeri possibili: dieci conquiste l'anno, in una ventina d'anni di attività seduttoria. La metrica – così difficile da formalizzare in casi come questi – può perfino essere soddisfatta. C'è il tempo per gli sguardi e per i sorrisi, per le parole e gli appuntamenti, per i piccoli litigi e le grandi passioni, anche se senza dubbio non c'è quello per la fedeltà perenne e l'amore solido e continuato.

Metrica che invece perde rapidamente di significato quando si guarda ai posti alti della classifica: non val la pena di contare il mozartiano Don Giovanni, per la buona ragione che si tratta di personaggio e non persona, e per di più personaggio che sembra sia stato ispirato a Da Ponte da Casanova stesso. E infatti, il celebre "catalogo" che Leporello enumera alla "madamina" è facilmente riconoscibile come niente più che una esasperazione da licenza artistica dei numeri del veneziano: 640 più 231 più 100, poi 91 fino alle 1003 spagnole: totale duemilasesantacinque. Dieci volte tanto, come quando all'osteria si esagera da ubriachi la dimensione della trota pescata, niente di più. Ma resta niente, a giudicare da quanto si racconta sia avvenuto nel Mondo Reale. Hugh Hefner, fondatore di Playboy, che vanta migliaia di conquiste; Warren Beatty, attore perlomeno belloccio (non si può dire lo stesso di Hefner) che ne ha contate quasi tredicimila; Wilt Chamberlain, duecentodiciassette centimetri di statura e una sfilza di record nel basket americano, che ne ha dichiarate ventimila.

La metrica salta in fretta, e basta poco per scoprirne le falle: diamine, è già difficile contare poche decine di pecore prima di addormentarsi o sbagliare, che cosa potrà mai voler dire aver avuto tredicimila fidanzate? Ovvio, non si fa altro che dichiarare "una al giorno per trentacinque anni", come in effetti ha fatto Beatty; o come ha fatto Chamberlain, che però si è concesso un fattore moltiplicativo quotidiano maggiore di uno. Non fosse che è l'idea stessa d'una classifica del genere, a non avere senso, verrebbe da chiedersi quanto conta l'analfabetismo matematico persino nelle stupidaggini che alimentano il pettegolezzo.

Se proprio volessimo mantenere in vita la sfida al veneziano, anche in questo caso dovremmo rivolgerci al Belgio, come già fatto eleggendo Bruges a vice-Venezia. Perché le diecimila donne dichiarate da Georges Simenon, creatore del commissario Maigret, sono il frutto più di una confessione che di un vanto. Lo scrittore belga ne parlò a Federico Fellini, altro radicale estimatore dell'universo femminile, come se ne parla a un medico,



4 Georges Simenon

più che ad un amico: elencando più i sintomi che le passioni, le ansie più che i corteggiamenti, i parossismi più che le emozioni. Quasi tutti incontri a pagamento, e la metrica di valutazione, per quanto ridicola, si rivolta su sé stessa, disinnescandosi.

Rivincita del Virtuale, forse: se le metriche saltano, che restino vive le emozioni non quantificabili. E in fondo, a ben vedere, in una chat rubata alle ore notturne tra quaranta gradi di longitudine può esserci più passione autentica di una serie di incontri reali, ma dimenticabili e dimenticati in tutto, a parte forse il numero d'ordine.

Alla fine, resta la curiosità di aver incontrato per due volte il Belgio a confrontarsi con la città più caratteristica del mondo. E forse la cosa non dovrebbe stupire: il Belgio è terra mobile, attraversata da guerre periodiche e da confini che si spostano nei secoli di pari passo con l'alternarsi delle grandi potenze vicine che se ne appropriano; quasi come quelli liquidi tra le isole che reggono le case della città veneta. Il Belgio è diviso tra due lingue diverse e quasi complementari, come sono diverse e complementari la terra e il mare che si mescolano per dar vita a Venezia. Lingue che poi hanno nazioni cui appartengono più pienamente: il fiammingo così vicino all'idioma dell'Olanda, la più piccola delle grandi nazioni europee, e il vallone figlio del francese di Francia, al punto che i belgi di lingua francese sono il più delle volte presi per francesi tout-court, come Georges Simenon, appunto, che i più pensano francese; o persino come Hercule Poirot, belga inesistente e letterario, che probabilmente anche Agatha Christie, talvolta, scambiava per parigino.

E allora può anche starci che nasca a Bruges, città belga indecisa tra acqua e terra, un uomo di matematica dal cognome che richiama un'altra nazione e un'altra minoranza linguistica, e che riesce ad essere nonostante ciò uno dei più fervidi e orgogliosi francesi dei suoi tempi.



5 Eugène Charles Catalan

Eugène Charles Catalan nasce a Bruges il 30 Maggio 1814, quando Bruges era in tutto e per tutto città francese, residuo dell'Impero Napoleonico che l'aveva strappata all'Austria. Catalan nasce dunque francese e tale resta fortissimamente per tutta la vita, pur se Bruges passa ai Paesi Bassi quando egli ha appena un anno. Figlio di una ragazza madre, Jeanne Bardin, ottiene il suo legittimo cognome solo a sette anni, quando suo padre, il parigino Joseph Catalan si decide a sposare sua madre. La famiglia si insedia a Lilla, e Eugène comincia il suo apprendistato come gioielliere, seguendo le orme paterne.

Né Lille né l'apprendistato durano a lungo: i Catalan si trasferiscono presto a Parigi, dove Catalàn comincia degli studi consoni alla sua età e fa in tempo a diventare ferocemente antimonarchico alla tenera età di dodici anni, dopo aver visto con disgusto una processione che celebrava l'erezione di un monumento a Luigi XVI. È ancora molto giovane quando muore sua madre; suo padre cambia lavoro, diventando architetto, e l'istruzione di Eugène cambia di conseguenza: si iscrive alla Reale Scuola Pubblica di Disegno e Matematica per le

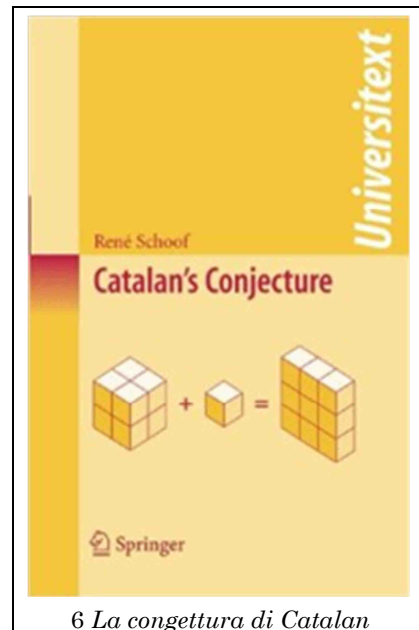
Arti Meccaniche, proprio per diventare architetto a sua volta.

Qui incontra Louis Lefébure de Fourcy, che riconosce in lui uno spiccato talento per la matematica e gli consiglia di prepararsi in modo da poter superare l'esame di ammissione alla prestigiosa École Polytechnique. Nonostante Catalan non si dannasse l'anima per superare l'esame di ammissione (partecipa a concorsi di matematica, vincendoli; passa due mesi dalla nonna a Bruges, e così via), alla fine riesce ad essere ammesso: ed è qui al Politecnico che comincia a seguire lezioni di professori di fama come Liouville e Lamè.

Ma è anche qui che la sua passione politica si infervora, fino al punto di distrarlo dalla matematica. Qui si forma definitivamente la sua connotazione repubblicana e antimonarchica; e questi sono tempi duri per chi si oppone alla monarchia. Completa il primo anno di corso, ma non può iscriversi al secondo: i disordini politici sono tali che tutti gli studenti della sua classe si vedono negare l'accesso all'anno successivo.

Con molto senso pratico, Eugène mette a frutto il suo anno di riposo forzato fidanzandosi e sposandosi con Charlotte Augustine Renée Perin. L'anno successivo, dopo aver firmato delle scuse formali per "atti di insubordinazione", Catalan viene riammesso al Politecnico; i suoi studi riprendono e finalmente riesce a laurearsi, sedicesimo nel suo corso di 140 studenti, nel 1835. È il periodo in cui Liouville fonda il suo "Giornale di Matematiche Pure e Applicate": nel secondo numero compare già una memoria di Catalan sul Calcolo delle Probabilità. Poco dopo, nel 1838, il medesimo giornale ospiterà l'articolo in cui vengono per la prima volta introdotti i "numeri di Catalan"³.

La sua carriera accademica procede, come spesso accade, tra alti e bassi: tenta di ottenere delle cattedre, non ci riesce facilmente, quando finalmente la stessa École Polytechnique gli offre un posto da assistente nel corso di Geometria descrittiva. Ne approfitta per completare il suo curriculum, raggiungendo il baccalaureato nel 1839 e finalmente il dottorato nel 1841. Catalan è ormai sul punto di entrare nel gotha dei matematici francesi del suo tempo: protetto da Liouville, conosce in seguito Cauchy (con il quale non andrà mai troppo d'accordo, se non altro perché questi era tanto filomonarchico quanto Catalan era visceralmente repubblicano) e Lejeune Dirichlet. Continua a pubblicare memorie sul giornale di Liouville e sull'ancor più prestigioso Giornale di Crelle: è qui che vede la luce la famosa "Congettura di Catalan". La congettura è tanto semplice nell'esposizione e tanto difficile da dimostrare da far quasi coppia con la Congettura di Goldbach: sancisce che 8 e 9 siano gli unici interi consecutivi che siano potenze esatte (2^3 e 3^2).



Negli anni successivi stringe amicizia con Chebyshev, diventa Segretario generale della Società di Matematica, e produce una quantità di teoremi e dimostrazioni di grande valore; è forse il suo periodo più fecondo, ma la sua produzione matematica subisce rallentamenti e ostacoli a causa della sua appartenenza politica all'estrema sinistra repubblicana. Nel 1844 nonostante le sue posizioni ai concorsi glielo consentirebbero, non ottiene cattedre al Politecnico né alla Sorbona, e viene espulso dal Reale Consiglio Accademico. Quando è ormai deciso di trasferirsi in Belgio, viene chiamato al Collège de Charlemagne per tenere una cattedra, ma prima delle sue lezioni scoppiano i moti del 1848, ai quali Eugène naturalmente partecipa.

Nel gran rimescolamento che segue la politica francese di quei tempi complicati, Catalan si fa notare sempre più come sostenitore della Seconda Repubblica, cosa che gioca a suo favore per un po', anche perché inizialmente Luigi Napoleone Bonaparte diventa



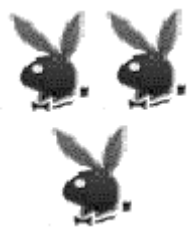


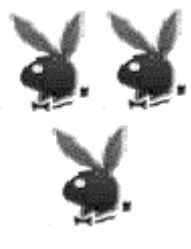
³ Che sono l'argomento di uno dei primissimi PM del GC: roba del Gennaio 2001, RM024, "I numeri catalani"

presidente della repubblica e Catalan si candida all'Assemblea Nazionale. L'École Polytechnique resta sempre una via chiusa per lui, ma quantomeno ottiene un buon posto nel prestigioso Lycée Saint Louis nel 1849. E poi le cose precipitano: il presidente Luigi Napoleone diventa l'imperatore Napoleone Terzo, e Catalan ha in visi i Bonaparte almeno tanto quanto i Re. Quasi rinuncia ad una carriera accademica attiva, pur continuando a pubblicare una gran quantità di articoli e memorie matematiche. Il suo precariato – per dirlo con una parola di moda – dura tredici anni, fino al 1865, quando riceve un'offerta dall'università di Liegi. Il Belgio, patria rinnegata, offre la sua mano a Eugène. Accetterà l'incarico, e lo terrà per trentatré anni, fino al suo ritiro nel 1884.

Due patrie, il natio Belgio e l'amatissima Francia; due passioni, la politica e la matematica. Una sola vita, ma intensa e vissuta con la passione di un grande seduttore.



2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
I guardiani del bosco matematico			
Tiro di campagna			

2.1 I guardiani del bosco matematico

OK, il titolo fa l'effetto di una camomilla.

Tranquilli, non abbiamo intenzione di scrivere *fèntasi*: molto semplicemente, il “Bosco Matematico” si chiama così in quanto trattasi di un perfetto quadrato boschivo pianeggiante, con alberi tutti della stessa altezza e superficie pari a 100 chilometri quadrati.

Ma a rischio incendio quanto, se non più di, tutti gli altri boschi.

Per evitare questi incresciosi incidenti, sono state giustappunto installate delle torrette antincendio dalle quali dei validi guardiani (reclutati tra i più prestigiosi fuoricorso del locale istituto matematico) osservano indefessamente l'orizzonte pronti a segnalare al più vicino *Canadair* l'inizio di un incendio.

Accurati calcoli hanno permesso di verificare che, per evitare sia la noia sia il ritardo nella segnalazione, lo spazio di osservazione di ogni torretta debba essere un cerchio di 3 chilometri di raggio: si provvede, quindi, al calcolo della posizione e del numero (minimo, che ci hanno tagliato il budget) delle torrette necessarie per garantire che qualsiasi punto del bosco (del resto, come per il Deserto di Oz, non ce ne importa nulla) sia all'interno dei tre chilometri di distanza da almeno una delle torri: la buona notizia è che questo incarico è stato affidato a voi. Come mettete le torri?

Prima delle ovvie generalizzazioni, una variazione sul tema. Tranquilli, non pretendiamo la risposta. Anzi, se la trovate provate ad informarvi se quanto detto di seguito è vero: lo era una decina di anni fa, a quanto ci pare di ricordare.

Ve lo ricordate l'atomo di Thompson? È quello che viene prima di quello di Rutherford: cominciamo da questo, che è più famoso.

Nel 1909, Hans Geiger e Ernest Marsden, per verificare l'ipotesi di Nagaoka sull'atomo, fanno un interessante esperimento, noto come “Esperimento di Rutherford” [*si nota, la sottile ironia? RdA*]: prendono una foglia d'oro (che, essendo un metallo molto pesante, ha atomi massicci e può essere ridotto in fogli molto sottili) e cominciano a sparargli contro particelle alfa (ovvero, nuclei di elio): in breve, si accorgono che pochissime particelle venivano deviate in modo significativo, segno, questo, che l'atomo d'oro era composto per lo più da spazi vuoti, e che quindi Nagaoka-Rutherford avevano ragione, e Thompson torto.

Ma com'era fatto, l'atomo di Thompson?

Semplicissimo: una sfera di carica positiva (carica pari al numero atomico dell'atomo in oggetto) sulla cui superficie stazionavano delle cariche negative: capite che se impaccate degli oggetti di questo genere avete pochissimo spazio libero tra un nucleo e l'altro, e quindi se fosse vero un mucchio di particelle alfa (che hanno la carica dello stesso segno di quella del nucleo) sarebbero respinte.

Bene, non funziona, possiamo buttarlo nel Dimenticatoio della Scienza: senonché, da quelle parti sono passati i trovarobe della matematica e l'idea sembrava divertente. Infatti, qualcuno si è posto la domanda topica: ma supponendo cerchino lo stato di minima energia, gli elettroni, che sono liberi di muoversi sulla superficie sferica, *dove si mettono?* Insomma, come si fa a trovare la generica posizione di equilibrio stabile?

Si tratta di trovare una posizione stabile, a energia minima, per degli oggetti che si respingono tra loro ma sono vincolati sulla superficie della sfera.

Possiamo anche ammettere che qualche caso sia "ovvio" (a occhio, quelli che generano i solidi regolari e semiregolari), ma a quanto ci risulta il caso generale non è ancora stato risolto (e vorrete mica lasciarci nel dubbio di come sia fatto l'*Unumbium Thomsoniensis?*).

Eh? Ah, le generalizzazioni (quelle *serie!*)! Beh, piuttosto semplice: non fermatevi a 3 chilometri. A 2.5? a 2?

Oh, se risolvete quello di Thompson fatecelo sapere, ma l'articolo mandatelo a qualcuno più serio.

2.2 Tiro di campagna

Cominciamo con le buone notizie: siamo riusciti, sabato scorso, a tirare di nuovo con l'arco, e lo scrivente [*Rudy speaking*] è convinto di aver (quasi) corretto un suo vecchio errore di impostazione: infatti, ci sono state solo *quattro* "padelle" (alias "ricerca della freccia in un fortunatamente ancora aspirante campo di granturco").

La cattiva notizia è che Rudy ha perso una delle vecchie frecce di Doc, una specie di palo della luce pesantissimo che utilizzavamo per fare le prove del "tiro di campagna": freccia a 45°, tiro a parabola, se ci fosse il bersaglio, sarebbe una serie di cerchi per terra attorno ad una bandierina.

Il tiro, data la perizia dei Nostri, rappresenta una perfetta simulazione della distribuzione uniforme con la singolarità che, se ci fosse una bandierina, sarebbe probabilmente l'unico punto sicuro dell'intero campo: tornando a casa (il poligono di tiro è a quattro metri da casa di Doc e a cinquanta chilometri da quella di Rudy), al Vostro Umile Narratore è venuto in mente un interessante problema.

Definiamo, come area nella quale posizionare il bersaglio, un cerchio di 10 metri ben visibile al tiratore: all'interno di quest'area (non necessariamente al centro) sono definiti da parte di Doc tre punti che definiscono un triangolo; il bello è che il triangolo è *nascosto*, nel senso che i suoi tre vertici non sono noti a Rudy, che ha a disposizione un numero ben preciso e finito di frecce. La successione delle operazioni diventa circa questa:

1. Rudy tira una freccia, esattamente dove vuole lui
2. Doc misura la distanza di quella freccia dal vertice *non individuato* più vicino del triangolo e la comunica a Rudy
3. Rudy, controllando i risultati dei tiri precedenti, comunica se ha individuato eventualmente qualche vertice e ricomincia da 1

Nel momento stesso nel quale ha individuato i tre vertici, Rudy tira tutte le frecce all'interno del triangolo, e solo queste fanno punti (le precedenti, anche se dentro al triangolo, non contano); capite quindi che per massimizzare il punteggio Rudy deve individuare il triangolo con il minor numero di tiri possibili: riuscite a fornirgli una strategia?

Il problema è facilmente generalizzabile in entrambe le direzioni: se il bersaglio fosse un punto unico? O il segmento definito da due punti? O, dall'altra parte, un generico poligono con n lati?

Si dice sempre che tra matematica e realtà non ci sono collegamenti, e qui la cosa ci pare evidente: presumere anche un minimo di precisione in un tiro di Rudy è come trovare un quadrato rotondo.

3. Bungee Jumpers

1. Scrivete gli interi da 1 a 100 in modo tale che non ne appaiano mai undici in ordine ascendente o discendente
2. Dimostrate che, indipendentemente dal riaggiustamento degli interi da 1 a 101, è sempre possibile trovarne undici in ordine ascendente o discendente.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Maggio.

Questo è il terzo mese di compleanni e la Redazione è a questo punto un po' provata da tutti i ponti di aprile e inizio maggio (si capisce che siamo di nuovo in ritardo?), condite da festeggiamenti vari.

Probabilmente nel mondo succedono tante cose matematiche di cui varrebbe la pena parlare, e siamo molto indietro con la nostra rubrica di recensione libri dei nostri abbonati e collaboratori, per non parlare di tutte le mail nella nostra inbox che aspettano ancora una risposta... no, non parliamo di niente di tutto questo, vi presentiamo le soluzioni del mese scorso e andiamo avanti così. Anche perché questo mese Sawdust ha mandato un bel regalo per il Doc, cioè una bella soluzione calendaristica, che come da tradizione vi passo senza commenti né introduzione.

4.1 Calendario 2010 – Maggio – 4th IMO (1962) – 6

Il raggio della CFR circoscritta a un triangolo isoscele è R e il raggio della cfr inscritta è r . Provate che la distanza tra i due centri vale $\sqrt{R(R-2r)}$

Entrambi i centri si trovano ovviamente sulla retta che contiene l'altezza CH del triangolo ABC . L'enunciato del problema equivale a $R : x = x : (R - 2r)$.

Innanzitutto va evidenziato che ci sono almeno 2 casi molto particolari, quello in cui il triangolo è equilatero, e quindi i due centri coincidono e i 2 raggi sono uno il doppio dell'altro (e perciò, anche se in una maniera un po' estrema, la proporzione è verificata), e quello in cui il triangolo è rettangolo e perciò la circonferenza inscritta passa per il centro di quella circoscritta.

In questo secondo caso $R = r(\sqrt{2} + 1)$ e la proporzione diventa

$$r(\sqrt{2} + 1) : r = r : [r(\sqrt{2} + 1) - 2r]$$

che equivale a

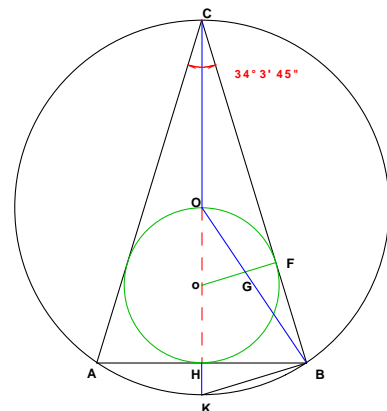
$$(\sqrt{2} + 1) : 1 = 1 : (\sqrt{2} - 1)$$

che chiaramente è corretta.

Ma c'è ancora almeno un caso particolare, quello in cui ancora una volta la circonferenza inscritta passa per il centro di quella circoscritta, ma, se così si può dire, "dall'altra parte".

Stavolta il triangolo non è rettangolo e quindi proviamo a calcolarne l'angolo al vertice e il rapporto tra i raggi.

Se stabiliamo per R un valore arbitrario (in questo caso proviamo con 5, ma ovviamente andrebbe bene qualunque altro valore), possiamo provare a determinare le grandezze del caso particolare in figura. In formule (indicando con α la metà dell'angolo ACB)



$$2R \sin \alpha * \frac{r}{\sin \alpha} = 2Rr$$

perciò possiamo scrivere

$$R^2 - \overline{oO}^2 = 2Rr \quad \text{da cui} \quad \overline{oO}^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \quad \text{e} \quad \overline{oO} = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

c.v.d.

La sorpresa è che la relazione del quesito non è solo valida nel caso in cui il triangolo è isoscele, ma vale per qualsiasi triangolo.

Come prova disegniamo un triangolo rettangolo pitagorico (questo solo per semplificarci i calcoli) di lati 6, 8 e 10 unità. Ovviamente la circonferenza circoscritta avrà raggio 10, mentre quella inscritta avrà raggio 2. Nel caso in figura il centro di quella inscritta è spostato di 1 unità verso destra e 2 unità verso l'alto, quindi la distanza oO vale

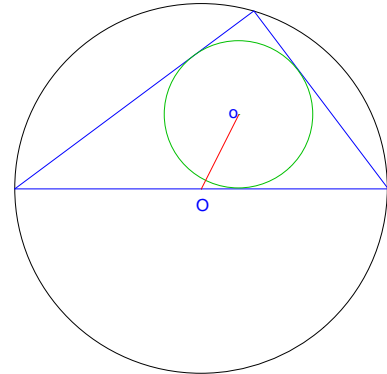
$$\overline{oO} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Se riprendiamo la relazione da cui siamo partiti abbiamo

$$\overline{oO} = \sqrt{5(5-4)} = \sqrt{5}$$

La relazione tra i 2 raggi presentata nel quesito conferma anche il fatto che il rapporto tra R e r per qualunque triangolo deve essere maggiore o uguale a 2, caso in cui il triangolo è equilatero.

Auguroni, Doc, anche se qualcuno dice che farli in anticipo non sia troppo bello⁴.



4.2 [182]

4.2.1 Agosto, grazie a Carlo

Ritorniamo su questo problema perché proprio colui che l'ha originato, **Carlo il Grande**, ci ha scritto con la sua versione. Prima di riferirvi le sue considerazioni, il riassunto del problema:

In quanti modi diversi si può riempire una borsa con N frutti rispettando i seguenti vincoli?

- *Il numero delle mele deve essere pari.*
- *Il numero delle banane deve essere multiplo di cinque.*
- *Ci devono essere non più di quattro arance.*
- *Ci deve essere almeno una pera.*

Il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di **GaS, Alberto R., Trentatre, Gnugnu**, tutte versioni che hanno fatto molto felice **Carlo**, che ci ha persino raccontato la storia del problema:

Il problema della frutta la cui soluzione è comparsa sul numero di Aprile di Rudi Mathematici ha una storia che ti voglio raccontare.

Antefatto.

Anni fa ero in DEC (Digital Equipment Corporation) e, come rappresentante italiano del nucleo di "Artificial Intelligence", mi occupavo soprattutto dell'analisi e dell'implementazioni di Sistemi Esperti. Ad un certo punto, La DEC Corporation (Maynard, Mass) chiamò i rappresentanti di Italia, Francia, Inghilterra, Olanda e Germania a Boston, insieme a cinque USA e un australiano, per frequentare un semestre al MIT. Il corso era di Computer Science applicata all'Artificial Intelligence ed era tenuto dalla Prof.ssa Ronitt Rubinfeld, validissima insegnante

⁴ Non fa niente, tanto di sicuro poi la rivista arriva in ritardo e compensiamo il tutto...

che ci aiutò a capire un insieme di tecniche e metodologie che hanno per oggetto l'estrazione di un sapere o di una conoscenza a partire da grandi quantità di dati. Era il presupposto per il "Data Mining" che stava sorgendo in quel periodo.

Dopo un mese dall'inizio del Corso in cui avevamo trattato linguaggi di programmazione con metodi induttivi e deduttivi, La Prof.ssa Rubinfeld annunciò che dalla settimana successiva avremmo iniziato un altro argomento e che, come preparazione, avremmo dovuto risolvere un problema. Precisò che il problema aveva la caratteristica di tenere separata la soluzione generale dalle soluzioni numeriche associate alle varie istanze. La settimana successiva iniziò il corso sulle funzioni generatrici e la Prof.ssa raccolse le soluzioni al problema proposto: erano tutte soluzioni per particolari valori di N (noi della DEC avevamo lavorato intensamente su alcuni PDP 11/60 per tutto il week-end). Nessuno, neppure tra gli studenti dei corsi normali del MIT, aveva proposto la famosa $f(N)$.

Il corso sulle funzioni generatrici è durato due settimane, al termine, la Prof.ssa Rubinfeld ha dato la soluzione generale basata sulle funzioni generatrici e, immediatamente dopo, ha proposto la versione due del problema: quella in cui le pere sono al massimo 1 anziché almeno 1. La soluzione è stata svolta immediatamente in classe con il risultato di $f(N) = N+1$ accolto da un applauso.

La professoressa ha giustificato la proposta di due varianti del problema per ostacolare al massimo la $f(N)$ ricavata per via induttiva.

Soluzione con le Funzioni Generatrici (versione 2, ci può essere al massimo una pera)

Costruiamo la funzione generatrice per le mele. Possiamo scegliere un insieme di 0 mele in 1 modo, un insieme di 1 mela in 0 modi in quanto le mele devono essere pari; un set di 2 mele in un modo; un set di 3 mele in 0 modi, ecc. Così abbiamo:

$$M(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

Uguualmente, la funzione generatrice le banane è:

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5}$$

Per le arance possiamo scegliere 0 arance in un modo, 1 arancia in un modo e così via. In ogni modo non possiamo scegliere più di 4 arance, così la funzione generatrice è:

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

Finalmente, possiamo scegliere solo 1 pera o nessuna pera:

$$P(x) = 1 + x$$

La regola di Convoluzione per la funzioni generatrici dice che la scelta fra questi frutti è data da:

$$\begin{aligned} M(x) B(x) A(x) P(x) &= \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^5} \frac{1-x^5}{1-x} (1+x) = \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 9x^8 + 10x^9 + 11x^{10} + \dots \end{aligned}$$

Quindi il coefficiente di x^N è dato da $N+1$ C.V.D. e $F(N) = N+1$

Soluzione con le Funzioni Generatrici (versione 1, ci può essere al minimo una pera)

I passaggi non sono ripetuti e sono descritti benissimo nella soluzione di **trentatre**

$$F(N) = \text{Floor} \left(\frac{N^2}{4} \right)$$

Le soluzioni particolari che noi della Digital avevamo trovato erano (nella forma $\{N, f(N)\}$):

$$\{6,12\}, \{7,16\}, \{8,20\}, \{9,25\}, \{10,30\}, \{11,36\}, \{12,42\}, \{13,49\}, \{14,56\}$$

Ebbene, sì. Avevamo cercato di trovare la soluzione generale per induzione, ma non ci siamo riusciti. Tutte queste soluzioni particolari erano state ricavate risolvendo un sistema di disequazioni che traducevano le condizioni al problema. **trentatre** ha ottenuto con [3] l'espressione non ricorsiva che è equivalente a quella data utilizzando il metodo delle funzioni generatrici. In più ha illustrato il metodo che utilizza un grafo e il metodo di conteggio sul tetraedro. Eccezionale !!

Conclusione

Avrei potuto proporre subito la versione 2 del problema, la soluzione è di notevole effetto, ma ho voluto evitare anch'io un utilizzo dell'induzione.

A noi la storia è piaciuta molto e la volevamo condividere con voi... ma adesso andiamo alle soluzioni dello scorso numero.

4.3 [183]

Bene, in tanti mi hanno preso in castagna. Non ho messo le difficoltà il mese scorso, ho usato il template senza cambiare i punteggi. Probabilmente dovremmo smettere di mettere punteggi di difficoltà, visto che non sono mai molto indicativi (dopotutto tutti i problemi di probabilità si beccano tre birre di default, che non dicono poi molto), però il primo problema, geometrico e carino, non ha trovato nemmeno una soluzione... Ho una lista con tutti i problemi e tutte le soluzioni di RM e negli ultimi mesi ho collezionato un po' di problemi che non sono ancora mai stati risolti... che ne faccio? Li riproponiamo tutti ad agosto, così che il Capo fa un mese di ferie sul serio?

In ogni caso, cominciamo con il secondo.

4.3.1 *Le Rouge et le Noir*: omaggio ad Henry

Omaggio a Stendhal da Rudy, con un problemino con colori e numeri, il cui testo era suppergiù:

Abbiamo due poligoni convessi P_1 e P_2 su due diversi piani nello spazio, per i quali ciascuno degli n lati è etichettato con un numero $1, 2, 3, \dots, n$; consideriamo l'insieme E dei segmenti che uniscono ciascuno dei vertici di P_1 ai vertici di P_2 : tutti questi segmenti, così come i lati dei poligoni, sono tracciati con l'inchiostro rouge o noir in modo tale che non esiste nessun triangolo monocromatico tra tutti quelli che sono formati da un lato di un poligono e da due elementi di E . Il lato 1 di P_1 è rosso: nei due casi $n=2012$ e $n=2013$, di che colore sono il lato 1783 di P_1 e il lato 1842 di P_2 ?

La prima, e simpaticissima, soluzione giunta a noi è quella di **Alberto R.**:

Ecco la mia meta-soluzione, metà seria e metà birichina come tutte le meta-cose.

Il lato 1783 di P_1 (come qualunque altro lato) può essere rosso, infatti colorando di rosso entrambi i poligoni e di nero i segmenti dell'insieme E , non si formano triangoli monocromatici.

Ma se detto lato **può** essere rosso, allora **deve** essere rosso. Diversamente il problema sarebbe indeterminato, in palese contrasto con lo stile di RM che non propone mai quesiti privi di soluzione.

Capite che in questi casi non gli si può dire niente né contro né a favore, per cui andiamo subito avanti con la versione di **GaS**, anche lui sbrigativo:

Il problema mi sembra molto semplice in quanto permette una facile soluzione "standard" che va bene per tutti gli N e anche nel caso in cui P_1 e P_2 abbiano un numero di lati differente. Anzi, va bene anche nel caso in cui P_1 e P_2 siano concavi o siano insiemi di poligoni sui due piani. Vale pure se i poligoni non sono 2 ma un numero a piacere (basta che non si "tocchino" o intersechino).

Per evitare di avere triangoli monocromatici basta colorare di rouge tutti i lati dei poligoni e di noir tutti i segmenti di E : essendo i triangoli formati da un lato di un poligono e da due elementi di E siamo sicuri che tutti i triangoli avranno un lato rosso e due lati neri.

Venendo alla domanda specifica possiamo quindi dire che entrambi i lati indicati sono rossi.

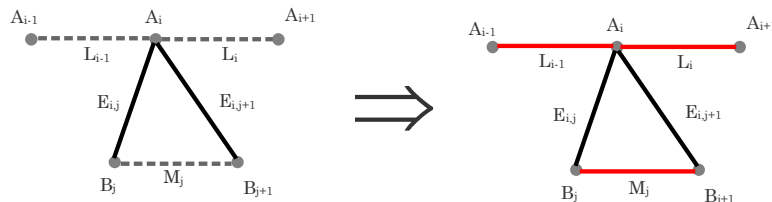
Direi che ci siamo, vediamo che cosa ne pensa **Franco57**:

Se ci fosse un'unica soluzione, non potrebbe essere che rosso in tutti i casi richiesti, poiché se tracciamo in rosso i lati di entrambi i poligoni e in nero quelli dei segmenti E di collegamento, otteniamo sempre triangoli con un lato rosso e due neri, quindi mai monocromatici, e si rispetta la condizione iniziale che il lato 1 di P_1 è rosso.

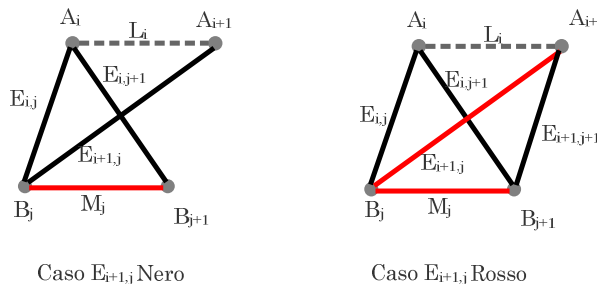
Per n pari abbiamo invece più soluzioni, infatti tutte le possibilità di colorazione per i lati dei poligoni sono possibili definendo E in modo opportuno, tale da avere sempre due colori diversi per i segmenti che formano uno dei triangoli da considerare.

Si può infatti partire da un segmento di E e colorarlo in un modo, poi mantenendo uno dei vertici cambiare l'altro scorrendo in modo circolare i vertici del suo poligono, variando ogni volta colore. Visto che n è pari non abbiamo due segmenti adiacenti dello stesso colore nemmeno quando si chiude il giro con il segmento di partenza e il suo precedente. Si continua in questo modo cambiando vertice fisso fino a colorare tutto E . Ne segue che nessun triangolo è monocromatico perché i due segmenti di E adiacenti che contiene sono sempre di colore diverso.

Più formalmente, chiamando L_i il lato i -esimo di P_1 da A_i a A_{i+1} , M_j il lato j -esimo di P_2 da B_j a B_{j+1} , $E_{i,j}$ il segmento di E che congiunge A_i e B_j (con il + modulo n , variando i e j da 1 a n) possiamo ad esempio colorare di nero $E_{i,j}$ se e solo se $i+j$ è pari. Per trattare il caso n dispari mi servo una semplice proprietà: se due segmenti adiacenti di E sono dello stesso colore ($E_{i,j}$ e $E_{i,j+1}$ neri nel disegno) allora i lati del poligono che contengono il vertice in comune sono di colore opposto (L_{i-1} e L_i rossi nel disegno), oltre ovviamente al lato del poligono che ha gli altri vertici come estremi (M_j nel disegno).



Infatti se $E_{i+1,j}$ è nero allora L_i deve essere rosso affinché il triangolo (A_i, B_j, A_{i+1}) non sia monocromatico; se invece $E_{i+1,j}$ è rosso, poiché M_j deve essere rosso per la non monocromaticità del triangolo (A_{i+1}, B_j, B_{j+1}) deve essere nero $E_{i+1,j+1}$ e quindi infine L_i a causa del triangolo (A_i, B_{j+1}, A_{i+1}) . Simmetricamente anche L_{i-1} deve essere rosso.



Nel caso n dispari con L_1 rosso, di tutti i segmenti di E che partono da A_2 ce ne devono essere due adiacenti dello stesso colore poiché due colori circolarmente alternati si ottengono solo se n è pari. Se il loro colore fosse il rosso, per la proprietà appena vista, L_1 sarebbe nero. Quindi da A_2 esistono due segmenti di E adiacenti neri. Si riapplica la proprietà e si ottiene che anche L_2 deve essere rosso e continuando in questo modo anche tutti gli altri L_i . Ma si è visto che anche un M_j deve essere rosso, quindi, invertendo il ruolo dei due poligoni nel ragionamento, anche tutti i lati di P_2 devono essere rossi. Dunque per $n=2013$ il lato 1783 di P_1 e il lato 1842 di P_2 , come tutti gli altri, devono essere effettivamente essere rossi, mentre per $n=2014$ possono essere come ci pare.

Nella buona tradizione di RM **Franco57** ha anche inviato un'estensione:

Come estensione mi sono chiesto come sarebbe stato il problema se il numero di lati dei due poligoni fosse stato genericamente m ed n , quindi non necessariamente uguale. In altre parole, prescindendo dal colore del primo lato, quali colorazioni dei lati dei poligoni sono compatibili, tali cioè che esista una colorazione degli $m \times n$ elementi di E che garantisca la non monocromia di ogni triangolo? (*biscromia* mi sembrava brutto). In effetti mi sono accorto che nel ragionamento che ho fatto si sfrutta solamente la parità di n e mai il fatto che i due poligoni abbiano realmente lo stesso numero di lati. Questo significa che per il caso più generale due sotto-casi sono già stati risolti:

- 1) m ed n entrambi pari implica che qualsiasi colorazione dei lati dei poligoni è compatibile;
- 2) m ed n entrambi dispari implica che solo due colorazioni sono possibili: entrambi i poligoni completamente neri o entrambi i poligoni completamente rossi.

Rimane il terzo caso, m pari ed n dispari, che in effetti si è rivelato per me più impegnativo.

Dichiaro subito il risultato: il poligono *pari* con m lati deve essere monocromatico, diciamo rosso per fissare le idee – ma nero sarebbe la soluzione duale – mentre il poligono *dispari* con n lati può avere qualsiasi colorazione purché contenga almeno due lati rossi consecutivi. Che il poligono pari debba essere monocromatico in realtà lo ho già stato dimostrato per il problema originario con $m = n$, infatti per affermare che P_1 è tutto rosso per n dispari ho usato solo il fatto che P_2 ha un numero dispari di vertici.

Per il poligono dispari vediamo prima che la condizione dei due lati rossi consecutivi è necessaria. Se non fosse vero ogni suo vertice B sarebbe l'estremo di almeno un lato nero, b nella Figura 1.

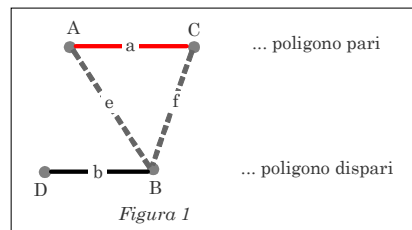


Figura 1

Presi due suoi collegamenti e ed f a vertici consecutivi del poligono pari: non possono essere entrambi rossi altrimenti si formerebbe un triangolo rosso (BAC in figura); non possono essere neanche entrambi neri altrimenti per la *semplice proprietà* (quella dimostrata per il problema originario) i lati che hanno B come estremo sarebbero rossi, invece b è nero; quindi devono essere uno rosso ed uno nero.

Prendiamo adesso un lato nero del poligono dispari, b nella Figura 2, e colleghiamo i suoi estremi ad un vertice C del poligono pari con i segmenti g ed f . Anche in questo caso non possono essere né entrambi neri per non creare un triangolo tutto nero, né entrambi rossi, altrimenti i lati collegati a C sarebbero neri per

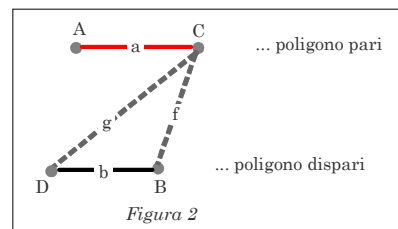
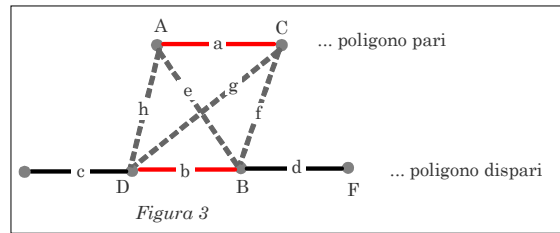


Figura 2

la *semplice proprietà*.

Infine se b fosse un lato rosso contiguo a due lati neri come in Figura 3, anche in questo caso i collegamenti g ed f dei suoi estremi D e B ad un vertice C del poligono pari non potrebbero essere entrambi rossi, perché formerebbero con esso un triangolo rosso, ma neanche entrambi neri, perché allora per quanto visto con Figura 1, i collegamenti h ed e di D e B ad un vertice A contiguo a C nel poligono pari, dovrebbero essere rossi, chiudendo ancora una volta un triangolo rosso. Quindi anche in questo caso g ed f devono essere di colore differente.

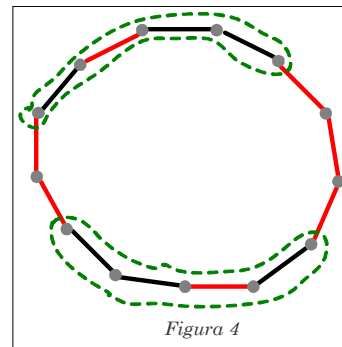


Per quanto visto, se nel poligono dispari non ci fossero mai due rossi consecutivi avremmo che tutti i suoi lati rientrano nel caso della Figura 2 oppure della Figura 3. Perciò fissato un vertice A del poligono pari e scorrendo in ordine i suoi collegamenti con i vertici del poligono dispari, otterremmo sempre colori alternati, cosa impossibile perché il numero dei vertici è dispari.

Per vedere che la condizione di contenere almeno due lati rossi consecutivi è sufficiente, sostanzialmente il lavoro è già fatto, si tratta solo di fare delle verifiche.

Prima di tutto coloriamo sempre di nero i collegamenti ai vertici del poligono dispari che sono tra due lati rossi, che un'azione obbligata sempre per la *semplice proprietà*.

I vertici che rimangono sono sempre riconducibili ai casi delle Figure 2 o 3 e sono da considerare in blocchi di vertici consecutivi, come nel tratteggio verde della Figura 4 per un poligono di 13 lati. Il fatto che esista almeno un vertice tra due lati rossi, garantisce che ogni blocco è staccato dagli altri e da sé stesso da un vertice, cioè da almeno due lati.



Fissando uno dei due sensi circolari, ogni blocco ha un inizio e una fine. Al collegamento del primo vertice del poligono pari col primo vertice di un blocco assegniamo un colore a caso. Per le proprietà delle figure 1, 2 e 3 tutti gli altri collegamenti con vertici del blocco sono fissati, perché cambiano ogni volta che cambio il vertice con uno adiacente del poligono pari oppure con un vertice adiacente del poligono dispari ma restando dentro il blocco.

Il pratica se i la posizione di un vertice pari e p la posizione relativa di un vertice dispari nel suo blocco, posso definire il colore in base alla parità di $i+p$.

La verifica che la colorazione è compatibile non è difficile: se il lato del triangolo è del poligono dispari ed è dentro un blocco, per costruzione ha collegamenti di colore differente; se è fuori è un rosso che ha un collegamento nero con il poligono pari. Se il lato del triangolo è del poligono pari e il vertice del poligono dispari è dentro un blocco i collegamenti sono di colore diverso per costruzione; se il vertice è invece tra due rossi ha i collegamenti neri, ma il lato è rosso.

In questo modo abbiamo anche trovato tutte le colorazioni possibili di E che sono 2^k se k è il numero dei blocchi.

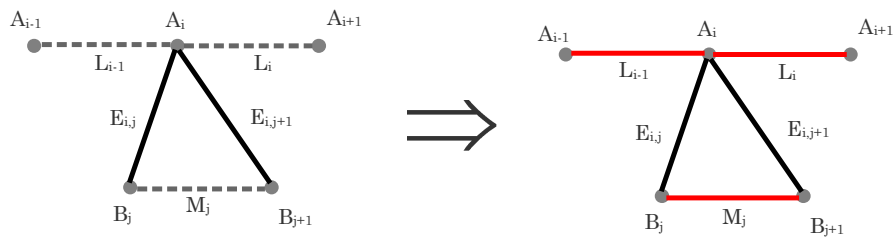
Se ci fosse un'unica soluzione, non potrebbe essere che rosso in tutti i casi richiesti, poiché se tracciamo in rosso i lati di entrambi i poligoni e in nero quelli dei segmenti E di collegamento, otteniamo sempre triangoli con un lato rosso e due neri, quindi mai monocromatici, e si rispetta la condizione iniziale che il lato 1 di P_1 è rosso.

Per n pari abbiamo invece più soluzioni, infatti tutte le possibilità di colorazione per i lati dei poligoni sono possibili definendo E in modo opportuno, tale da avere sempre due colori diversi per i segmenti che formano uno dei triangoli da considerare.

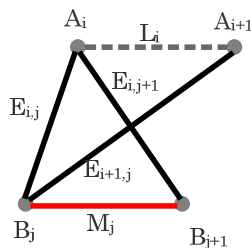
Si può infatti partire da un segmento di E e colorarlo in un modo, poi mantenendo uno dei vertici cambiare l'altro scorrendo in modo circolare i vertici del suo poligono, variando ogni volta colore. Visto che n è pari non abbiamo due segmenti adiacenti dello stesso colore nemmeno quando si chiude il giro con il segmento di partenza e il suo precedente. Si continua in questo modo cambiando vertice fisso fino a colorare tutto E . Ne segue che nessun triangolo è monocromatico perché i due segmenti di E adiacenti che contiene sono sempre di colore diverso.

Più formalmente, chiamando L_i il lato i -esimo di P_1 da A_i a A_{i+1} , M_j il lato j -esimo di P_2 da B_j a B_{j+1} , $E_{i,j}$ il segmento di E che congiunge A_i e B_j (con il + modulo n , variando i e j da 1 a n) possiamo ad esempio colorare di nero $E_{i,j}$ se e solo se $i+j$ è pari.

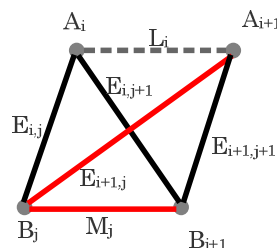
Per trattare il caso n dispari mi servo una semplice proprietà: se due segmenti adiacenti di E sono dello stesso colore ($E_{i,j}$ e $E_{i,j+1}$ neri nel disegno) allora i lati del poligono che contengono il vertice in comune sono di colore opposto (L_{i-1} e L_i rossi nel disegno), oltre ovviamente al lato del poligono che ha gli altri vertici come estremi (M_j nel disegno).



Infatti se $E_{i+1,j}$ è nero allora L_i deve essere rosso affinché il triangolo (A_i, B_j, A_{i+1}) non sia monocromatico; se invece $E_{i+1,j}$ è rosso, poiché M_j deve essere rosso per la non monocromaticità del triangolo (A_{i+1}, B_j, B_{j+1}) deve essere nero $E_{i+1,j+1}$ e quindi infine L_i a causa del triangolo (A_i, B_{j+1}, A_{i+1}) . Simmetricamente anche L_{i-1} deve essere rosso.



Caso $E_{i+1,j}$ Nero



Caso $E_{i+1,j}$ Rosso

Nel caso n dispari con L_1 rosso, di tutti i segmenti di E che partono da A_2 ce ne devono essere due adiacenti dello stesso colore poiché due colori circolarmente alternati si ottengono solo se n è pari. Se il loro colore fosse il rosso, per la proprietà appena vista, L_1 sarebbe nero. Quindi da A_2 esistono due segmenti di E adiacenti neri. Si riapplica la proprietà e si ottiene che anche L_2 deve essere rosso e continuando in questo modo anche tutti gli altri L_i .

Ma si è visto che anche un M_j deve essere rosso, quindi, invertendo il ruolo dei due poligoni nel ragionamento, anche tutti i lati di P_2 devono essere rossi.

Dunque per $n=2013$ il lato 1783 di P_1 e il lato 1842 di P_2 , come tutti gli altri, devono essere effettivamente essere rossi, mentre per $n=2014$ possono essere come ci pare.

E con questo passiamo al terzo problema, che ha avuto un discreto successo.

4.3.2 Un altro tre per due

Come tutti i problemi da tre-per-due, niente de-matematizzazione, eccolo:

Una curva C è espressa nell'intervallo $[0,2014]$ dalla funzione:

$$f(x) = \left| \left| \left| \left| x - 1 \right| - 2 \right| - 3 \right| \dots \right| - 2014 \right|$$

Dimostrate che il massimo e il minimo assoluti (di ordinata rispettivamente h e b) sono unici nell'intervallo.

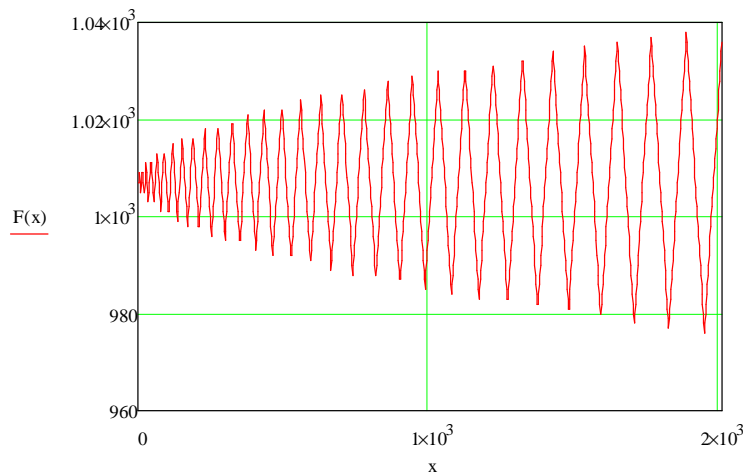
Una formica parte dal punto $D_1 = (0, f(0))$ e, camminando sempre sulla curva data, arriva sino al punto di massimo assoluto, che marca con una croce; procede quindi sino al punto di minimo assoluto, che viene anch'esso marcato con una croce; quindi si reca nel punto di massimo assoluto non marcato nell'intervallo, e lo marca, per procedere quindi al punto di minimo assoluto non marcato, che viene anch'esso marcato, e avanti in questo modo sin quando non restano punti da marcare nell'intervallo: nel caso (posto che si presenti) di uguali coordinate, la formica marca il più vicino al punto dal quale sta partendo.

In che punto si ferma la formica, e dopo aver percorso quanta strada?

Una seconda formica parte dal punto $D_2 = (0, b)$ (ricordate che b è l'ordinata del minimo assoluto) sulla retta $y = b$ e procede sino al punto di minimo assoluto della curva: a questo punto, la formica torna al punto di partenza lungo la curva C , il punto D_1 e la parte necessaria dell'asse y .

Qui cominciamo da Alberto R., che ha le idee molto chiare:

La funzione $F(x)$ può essere definita come il 2014esimo termine della successione $F_j = |F_{j-1} - j|$ con $F_0 = x$. Il suo grafico è la spezzata di figura



I vertici della spezzata si trovano alle ascisse corrispondenti ai numeri triangolari $T(N) = N \cdot (N+1) / 2$ e sono minimi relativi se N è pari e massimi relativi se N è dispari.

Notare che 2014, estremo dell'intervallo, non è un vertice della spezzata perché 2014 non è un numero triangolare e non è lì che si raggiunge il massimo assoluto, essendo $F(2014) = 1037$, mentre il massimo assoluto è $F(T(61)) = F(1891) = 1038$

Il minimo assoluto è $F(T(62)) = F(1953) = 976$.

E qui mi fermo perché la figura è completamente determinata: è composta solo di segmenti e sono note le coordinate cartesiane di tutti i suoi vertici, quindi il calcolo della lunghezza del percorso della prima formica o dell'area racchiusa dal percorso della seconda non sarebbe né difficile né interessante, ma solo lungo e noioso.

Va bene, allora vediamo cosa scrive **Gerardo**, che non ci scrive spesso, ma quando lo fa ci mette molta cura:

$$f_n(x) = || \dots || |x - a_1| - a_2| - a_3| \dots | - a_n|$$

Considero le funzioni traslate $\forall n \geq 1$, $g_n(x) = f_n(x + a_1)$ che soddisfano la medesima ricorsione infatti:

$$g_1(x) = f_1(x + a_1) = |x| \text{ e } g_{n+1}(x) = f_{n+1}(x + a_1) = |f_n(x + a_1) - a_{n+1}| = |g_n(x) - a_{n+1}|$$

($\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $f_n(x) \geq 0$ e $g_n(x) \geq 0$)

L'obiettivo è studiare la successione di funzioni $\{g_n\}_{n \geq 1}$ mediante semplici osservazioni. Se l'obiettivo fosse di rispondere esclusivamente alle domande del problema allora la notazione sovrastima il contenuto veicolato. Spero di aver risposto correttamente alle domande ma perché fermarsi? Infatti è un sistema dinamico discreto e mi ha interessato la sua analisi. Infine, a beneficio della comprensione, ho evitato di saltare passaggi ma allungando notevolmente lo svolgimento (la sostanza è molta meno). Questo digitare è un primo((co)rdiale) approccio al problema esteso.

OSS. 1)

Sia la successione di funzioni $\{T_n\}_{n \geq 1}$ dove $T_n(x) = |x - a_n|$ allora $\forall n \geq 2$, $g_n(x) = (T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|x|)$

infatti per induzione:

Base) $n = 2$; $T_2(|x|) = ||x| - a_2| = g_2(x)$;

Passo induttivo) Sia vero fino ad n , in particolare $(T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|x|) = g_n(x)$ provo per $n+1$:

$$(T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n \circ T_{n+1})(|x|) = T_{n+1}((T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|x|)) = T_{n+1}(g_n(x)) = |g_n(x) - a_{n+1}| = g_{n+1}(x) \blacksquare$$

Da cui si osserva:

$\forall n \geq 1$ $g_n(x)$ è pari, infatti $g_1(x) = |x| = |-x| = g_1(-x)$ e $\forall n \geq 2$ si ha che

$$g_n(x) = (T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|x|) = (T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|-x|) = g_n(-x).$$

$\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ è continua poiché composizione di funzioni continue.

Definiamo: $S_n = \sum_{k=2}^n a_k$ con la usuale convenzione che $S_n = 0$ se $n \leq 1$.

OSS. 2)

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [S_n, S_{n+1}], g_n(x) \leq a_{n+1}$$

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [S_{n+1}, +\infty), g_n(x) \geq a_{n+1}$$

i) Per induzione:

Base) $n = 1$; $\forall x \in [S_1, S_2] = [0, a_2] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a_2 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq a_2 \Rightarrow g_1(x) \leq a_2$

Passo induttivo) Sia vero fino ad n , in particolare $0 \leq g_n(x) \leq a_{n+1}$ provo per $n+1$:

Quindi $-a_{n+1} \leq g_n(x) - a_{n+1} \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} = |-a_{n+1}| \geq |g_n(x) - a_{n+1}| \geq 0$, ovvero $g_{n+1}(x) \leq a_{n+1} \leq a_{n+2}$ ■

ii) Se $n = 1$; $\forall x \in [S_2, +\infty) = [a_2, +\infty) \Leftrightarrow 0 \leq a_2 \leq x < +\infty$ allora $g_1(x) = |x| = x \geq a_2 \geq 0$;

Se $n \geq 2$; $\forall x \in [S_{n+1}, +\infty)$ posto $x = y + S_{n+1}$, $\forall y \in [0, +\infty)$ dunque sia $\forall k \in \mathbb{N}$ t. c. $2 \leq k \leq n$

$$T_k(y + S_{n+1}) = T_k(y + \sum_{j=2}^{n+1} a_j) = |y + \sum_{j=2}^{n+1} a_j - a_k| = y + \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \neq k} a_j$$

$$g_n(y + S_{n+1}) = (T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(y + \sum_{j=2}^{n+1} a_j) = y + \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \notin \{2,3,\dots,n\}} a_j = y + a_{n+1} \geq a_{n+1} \blacksquare$$

OSS. 3)

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, S_{n+1}], g_{n+1}(x) = a_{n+1} - g_n(x)$$

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [S_{n+1}, +\infty), g_{n+1}(x) = g_n(x) - a_{n+1}$$

Infatti per induzione:

Base) $n = 1$; iii) $\forall x \in [0, S_2] = [0, a_2] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a_2 \Rightarrow x - a_2 \leq 0$

$$g_2(x) = |g_1(x) - a_2| = |x - a_2| = -(x - a_2) = a_2 - x = a_2 - g_1(x) ;$$

iv) $\forall x \in [S_2, +\infty) = [a_2, +\infty) \Leftrightarrow 0 \leq a_2 \leq x < +\infty \Rightarrow x - a_2 \geq 0$

$$g_2(x) = |g_1(x) - a_2| = |x - a_2| = x - a_2 = g_1(x) - a_2 ;$$

Passo induttivo) iii) e iv) Siano vere fino ad n , provo per $n+1$:

In particolare so che $\forall x \in [0, S_n], g_n(x) = a_n - g_{n-1}(x)$

$$\forall x \in [0, S_n], g_{n+1}(x) = |g_n(x) - a_{n+1}| = |a_n - g_{n-1}(x) - a_{n+1}| = |-(a_{n+1} - a_n + g_{n-1}(x))| = a_{n+1} - a_n + g_{n-1}(x) =$$

$$= a_{n+1} - (a_n - g_{n-1}(x)) = a_{n+1} - g_n(x) ; \text{ infatti: } a_{n+1} - a_n \geq 0 \text{ e } g_{n-1}(x) \geq 0$$

$\forall x \in [S_n, S_{n+1}]$, Da i) segue che $g_n(x) \leq a_{n+1} \Leftrightarrow g_n(x) - a_{n+1} \leq 0$; quindi

$$g_{n+1}(x) = |g_n(x) - a_{n+1}| = -(g_n(x) - a_{n+1}) = a_{n+1} - g_n(x)$$

c) $\forall x \in [S_{n+1}, +\infty)$ Da ii) segue che $g_n(x) \geq a_{n+1} \Leftrightarrow g_n(x) - a_{n+1} \geq 0$; quindi

$$g_{n+1}(x) = |g_n(x) - a_{n+1}| = g_n(x) - a_{n+1} \blacksquare$$

Siano gli intervalli $U_k^{(n)} = \begin{cases} [S_k, S_{k+1}] & \text{se } 1 \leq k \leq n-1 \wedge n \geq 2 \\ [S_n, +\infty) & \text{se } k = n \wedge n \geq 1 \end{cases}$

OSS. 4)

$$v) g_n(x) = (-1)^n (\sum_{i=2}^n (-1)^i a_i - 2(-1)^k \sum_{2 \leq j \leq k \wedge j \equiv k(2)} a_j + (-1)^k x), \forall x \in U_k^{(n)}$$

Per induzione:

Base) $n = 1 \Rightarrow k = 1$;

$$\forall x \in U_1^{(1)} = [S_1, +\infty) = [0, +\infty),$$

$$(-1)^1 (\sum_{i=2}^1 (-1)^i a_i - 2(-1)^1 \sum_{2 \leq j \leq 1 \wedge j \equiv 1(2)} a_j + (-1)^1 x) = -(0 + 0 - x) = x = g_1(x)$$

Passo induttivo) Sia vero fino ad n , verifico per $n+1$ (suddiviso per casi relativi agli $U_k^{(n)}$):

a) $\forall x \in U_k^{(n+1)} = U_k^{(n)} \subset [0, S_{n+1}]$ e $k \leq n-1$ da iii) $g_{n+1}(x) = a_{n+1} - g_n(x)$ segue per induzione $g_{n+1}(x) = a_{n+1} - (-1)^n (\sum_{i=2}^n (-1)^i a_i - 2(-1)^k \sum_{2 \leq j \leq k \wedge j \equiv k(2)} a_j + (-1)^k x) =$

$$= (-1)^{n+1} ((-1)^{n+1} a_{n+1} + \sum_{i=2}^n (-1)^i a_i - 2(-1)^k \sum_{2 \leq j \leq k \wedge j \equiv k(2)} a_j + (-1)^k x) =$$

$$= (-1)^{n+1} (\sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i a_i - 2(-1)^k \sum_{2 \leq j \leq k \wedge j \equiv k(2)} a_j + (-1)^k x) .$$

b) $\forall x \in U_n^{(n+1)} = U_n^{(n)} \cap U_n^{(n+1)} \subset [0, S_{n+1}]$ Per induzione $g_{n+1}(x) = a_{n+1} - g_n(x)$ quindi per

$$k = n \text{ osservo che } g_n(x) = (-1)^n (\sum_{i=2}^n (-1)^i a_i - 2(-1)^n \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + (-1)^n x) =$$

$$= (-1)^n \sum_{i=2}^n (-1)^i a_i - 2 \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + x =$$

$$= (-1)^n \sum_{2 \leq i \leq n \wedge i \equiv n(2)} (-1)^i a_i$$

$$+ (-1)^n \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \not\equiv n(2)} (-1)^j a_j - 2 \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + x = (*)$$

Usando che $(-1)^i = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } i \equiv n(2) \\ -(-1)^n & \text{se } i \not\equiv n(2) \end{cases}$ in c) sarà comodo usare che $i \not\equiv n(2) \Leftrightarrow i \equiv n+1(2)$

$$(*) = (-1)^n \sum_{2 \leq i \leq n \wedge i \equiv n(2)} (-1)^n a_i - (-1)^n \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \not\equiv n(2)} (-1)^n a_j - 2 \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + x =$$

$$= \sum_{2 \leq i \leq n \wedge i \equiv n(2)} a_i - \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \not\equiv n(2)} a_j - 2 \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + x = - \sum_{i=2}^n a_i + x$$

Quindi $g_{n+1}(x) = a_{n+1} - g_n(x) = a_{n+1} - (-\sum_{i=2}^n a_i + x - a_{n+1}) = \sum_{i=2}^{n+1} a_i - x$

Infatti dalla formula di $g_{n+1}(x)$ per $k = n$ cioè in $U_n^{(n+1)}$ si ha:

$$g_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} \left(\sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i a_i - 2(-1)^n \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + (-1)^n x \right) =$$

$$(-1)^{n+1} \left(\sum_{2 \leq i \leq n+1 \wedge i \equiv n(2)} (-1)^i a_i + \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \not\equiv n(2)} (-1)^j a_j - 2(-1)^n \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + (-1)^n x \right) =$$

$$(-1)^{n+1} \left((-1)^n \sum_{2 \leq i \leq n+1 \wedge i \equiv n(2)} a_i - (-1)^n \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \not\equiv n(2)} a_j - 2(-1)^n \sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} a_j + (-1)^n x \right) =$$

$$= - \left(\sum_{2 \leq i \leq n+1 \wedge i \equiv n(2)} a_i - \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \not\equiv n(2)} a_j - 2 \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \equiv n(2)} a_j + x \right) = (*)$$

$$= - \left(- \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \not\equiv n(2)} a_j - \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \equiv n(2)} a_j + x \right) = - \left(- \sum_{i=2}^{n+1} a_i + x \right) = \sum_{i=2}^{n+1} a_i - x$$

(*) segue dal fatto che $\sum_{2 \leq j \leq n \wedge j \equiv n(2)} \dots = \sum_{2 \leq j \leq n+1 \wedge j \equiv n(2)} \dots$ essendo $n+1 \not\equiv n(2)$ non compare nella sommatoria.

$$c) \forall x \in U_{n+1}^{(n+1)} = U_{n+1}^{(n+1)} \cap U_n^{(n)} = [S_{n+1}, +\infty) \text{ da iv) } g_{n+1}(x) = g_n(x) - a_{n+1}, \text{ in questo caso}$$

$k = n$ e da b) sappiamo che $g_n(x) = -\sum_{i=2}^n a_i + x$

Per induzione $g_{n+1}(x) = g_n(x) - a_{n+1} = -\sum_{i=2}^n a_i + x - a_{n+1} = -\sum_{i=2}^{n+1} a_i + x \blacksquare$

Quindi in modo meno criptico possiamo affermare che:

$$g_n(x) = \begin{cases} (-1)^n \left(\sum_{i=2}^n (-1)^i a_i + 2 \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} a_{2j+1} - x \right), \forall x \in U_k^{(n)} \text{ se } k \equiv 1(2) \\ (-1)^n \left(\sum_{i=2}^n (-1)^i a_i - 2 \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} a_{2j} + x \right), \forall x \in U_k^{(n)} \text{ se } k \equiv 0(2) \end{cases}$$

Infine è sufficiente ri-traslare per riottenere $f_n(x)$ infatti: $g_n(x) = f_n(x + a_1) \Leftrightarrow f_n(x) = g_n(x - a_1)$

Definiamo: $R_n = S_n + a_1 = \sum_{i=1}^n a_i$ con la usuale convenzione che $R_n = 0$ se $n \leq 0$

Siano gli intervalli

$$V_k^{(n)} = \begin{cases} a_1 + U_k^{(n)} = [S_k + a_1, S_{k+1} + a_1] = [R_k, R_{k+1}] \text{ se } 1 \leq k \leq n-1 \wedge n \geq 2 \\ a_1 + U_n^{(n)} = [S_n + a_1, +\infty) = [R_n, +\infty) \text{ se } k = n \wedge n \geq 1 \\ [0, a_1] = [R_0, R_1] \text{ se } k = 0 \wedge n \geq 1 \end{cases}$$

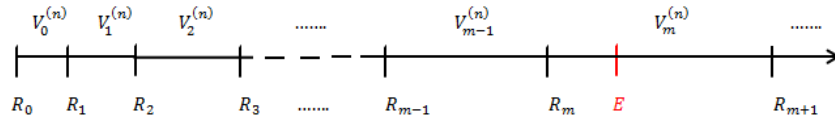
Quindi:

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i + 2 \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} a_{2j+1} - x \right), \forall x \in V_k^{(n)} \text{ se } k \equiv 1(2) \\ (-1)^n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i - 2 \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} a_{2j} + x \right), \forall x \in V_k^{(n)} \text{ se } k \equiv 0(2) \end{cases}$$

Poiché $g_n(x)$ è pari allora la retta in $V_0^{(n)}$ è la simmetrica della retta in $V_1^{(n)}$ (rispetto all'asse $x = a_1$ passante per il punto $(a_1, f_n(a_1))$). Dunque

$f_n(a_1) = (-1)^n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i + 2 \sum_{j=0}^{\frac{1-1}{2}} a_{2j+1} - a_1 \right) = (-1)^n \sum_{i=2}^n (-1)^i a_i$ mentre il coefficiente angolare della retta cercata è $(-1)^n$. Comunque rientra nel caso $k \equiv 0(2)$.

I massimi e i minimi locali in un intervallo $[0, E]$ saranno i valori assunti da queste rette negli estremi degli intervalli $V_k^{(n)}$ (che, escludendo $V_n^{(n)}$, sono tutti compatti) contenuti in $[0, E]$.



Sia $n \geq m \geq u \geq 0$ t.c. $E \in V_m^{(n)}$ associo l'estremo sinistro di un intervallo al medesimo cioè $R_u \leftrightarrow V_u^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \text{Se } u \equiv 1(2) \Rightarrow f_n(R_u) &= (-1)^n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i + 2 \sum_{j=0}^{\frac{u-1}{2}} a_{2j+1} - R_u \right) = \\ &= (-1)^n \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i a_i + 2 \sum_{1 \leq j \leq u \wedge j \equiv 1(2)} a_j - \sum_{1 \leq i \leq u} a_i \right) = \\ &= (-1)^n \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i a_i + 2 \sum_{1 \leq j \leq u \wedge j \equiv 1(2)} a_j - \left(\sum_{1 \leq i \leq u \wedge i \equiv 1(2)} a_i + \sum_{1 \leq j \leq u \wedge j \equiv 0(2)} a_j \right) \right) = \\ &= (-1)^n \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i a_i + \sum_{1 \leq j \leq u \wedge j \equiv 1(2)} a_j - \sum_{1 \leq i \leq u \wedge i \equiv 0(2)} a_i \right) = \\ &= (-1)^n \left(\sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i a_i - \sum_{1 \leq j \leq u} (-1)^j a_j \right) = (-1)^n \sum_{i=u+1}^n (-1)^i a_i ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } u \equiv 0(2) \Rightarrow f_n(R_u) &= (-1)^n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i - 2 \sum_{j=1}^{\frac{u}{2}} a_{2j} + R_u \right) = \\ &\text{quasi identici passaggi} = \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \sum_{j=u+1}^n (-1)^j a_j ; \text{ Infine la natura di } f_n(E) \text{ dipende dalla parità di } n.$$

Quindi due massimi (o minimi) locali consecutivi cioè in R_u ed R_{u+2} distano in ordinata di:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,u} &= f_n(R_u) - f_n(R_{u+2}) = (-1)^n \sum_{i=u+1}^n (-1)^i a_i - (-1)^n \sum_{i=u+3}^n (-1)^i a_i = \\ &= (-1)^n \left((-1)^{u+1} a_{u+1} + (-1)^{u+2} a_{u+2} + \sum_{i=u+3}^n (-1)^i a_i - \sum_{i=u+3}^n (-1)^i a_i \right) = \\ &= (-1)^{n+u+1} (a_{u+1} - a_{u+2}) = (-1)^{n+u} (a_{u+2} - a_{u+1}) \Rightarrow |\Delta_{n,u}| = \Delta_u = a_{u+2} - a_{u+1} ; \end{aligned}$$

Se la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ è anche strettamente crescente (ed escludendo il valore di f_n in E) allora si ha che $\Delta_u > 0$ e quindi avremo una successione strettamente crescente di massimi ed una successione strettamente decrescente di minimi.

Sia L_u la lunghezza del segmento di retta appartenente a $V_u^{(n)}$ (di ampiezza a_{u+1}) $\Rightarrow L_u = \sqrt{2} a_{u+1}$ poiché tutte le rette sono inclinate di $\pm \pi/4$ rad quindi: $L_u \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = a_{u+1}$ e $\cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Considero anche A_u l'area sottesa dal segmento di retta appartenente a $V_u^{(n)}$, è un trapezio rettangolo:

$$\begin{aligned} A_u &= \frac{1}{2} (f_n(R_u) + f_n(R_{u+1})) a_{u+1} = \\ &= \frac{1}{2} \left((-1)^n \sum_{j=u+1}^n (-1)^j a_j + (-1)^n \sum_{j=u+2}^n (-1)^j a_j \right) a_{u+1} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \left(2 \sum_{j=u+1}^n (-1)^j a_j - (-1)^{u+1} a_{u+1} \right) a_{u+1} = f_n(R_u) a_{u+1} + \frac{(-1)^{n+u}}{2} a_{u+1}^2 \end{aligned}$$

Sia la successione $\{a_n\}_{n \geq 1}$ così definita $a_n = n$ e sia $E = n$.

Sia m tale che $V_m^{(n)}$ contenga il punto $E = n$ e quindi $R_m \leq n \leq R_{m+1}$.

$$R_m = \sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2} ; \text{ da cui } \frac{m(m+1)}{2} \leq n \leq \frac{(m+1)(m+2)}{2} \wedge n \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8n+1}-3}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$$

posto $n = 2014 \Rightarrow m = 62$;

$$f_n(R_u) = (-1)^n \sum_{j=u+1}^n (-1)^j a_j = (-1)^n \sum_{j=u+1}^n (-1)^j j = \frac{2n+1}{4} - (-1)^{n+u} \frac{2u+1}{4} ;$$

$$f_{2014}(R_u) = \frac{4029}{4} - (-1)^u \frac{2u+1}{4} \Rightarrow \text{Il massimo fra gli } R_u \text{ è per } u = 61 \Rightarrow f_{2014}(R_{61}) = 1038$$

$$f_{2014}(E) = f_{2014}(2014) = (-1)^{2014} \left(\sum_{i=1}^{2014} (-1)^i i - 2 \sum_{j=1}^{\frac{62}{2}} 2j + 2014 \right) = 1037$$

Quindi il massimo assoluto è $\hat{M} = (R_{61}, f_{2014}(R_{61})) = (1891, 1038)$.

Mentre il minimo assoluto fra gli R_u è per $u = 62 \Rightarrow \hat{m} = (R_{62}, f_{2014}(R_{62})) = (1953, 976)$.

Dunque la lista dei massimi locali è:

$$\begin{aligned} & \{((2t + 1)(t + 1), 1008 + t) : 0 \leq t \leq 30\} \cup \{(2014, f_{2014}(E))\} = \\ & = \{(1, 1008), (6, 1009), (15, 1010), \dots, (1653, 1036), (1770, 1037), (1891, 1038)\} \\ & \quad \cup \{(2014, 1037)\}; \end{aligned}$$

E la lista dei minimi locali è: $\{(t(2t + 1), 1007 - t) : 0 \leq t \leq 31\} =$

$$= \{(0, 1007), (3, 1006), (10, 1005), \dots, (1711, 978), (1830, 977), (1953, 976)\};$$

Una formica parte da $D_1 = (0, f_{2014}(0)) = (R_0, f_{2014}(0)) = (0, 1007)$ (tra l'altro è un minimo locale) e arriva fino al punto di massimo assoluto $\hat{M} = (R_{61}, f_{2014}(R_{61})) = (1891, 1038)$ poi procede fino al punto di minimo assoluto $\hat{m} = (R_{62}, f_{2014}(R_{62})) = (1953, 976)$, da qui si dirige al massimo assoluto non ancora marcato.

Si presentano due possibilità: $(E, f_{2014}(E)) = (2014, 1037)$ oppure $(R_{59}, f_{2014}(R_{59})) = (1770, 1037)$ ma il primo dista dal minimo assoluto $d = \sqrt{(2014 - 1953)^2 + (1037 - 976)^2} = 61\sqrt{2} = L_{60}$ mentre il secondo dista $L_{61} + L_{60} + L_{59} > L_{60}$.

Quindi la formica si dirige fino al culminare in $(E, f_{2014}(E))$ della curva C e così facendo la percorre tutta. Dopodichè deve tornare indietro fino al minimo assoluto non marcato che è $(R_{60}, f_{2014}(R_{60}))$ poi al successivo massimo assoluto non marcato $(R_{59}, f_{2014}(R_{59}))$ d'ora in poi massimi e minimi locali non marcati si alternano (rispettivamente decrescendo e crescendo) in direzione dell'asse y: ovvero la formica ripercorrerà tutta la restante curva C fino a tornare in D_1 (poiché sappiamo essere un minimo locale). Pertanto la formica percorrerà la curva C due volte, la distanza percorsa sarà (per Talete): $L = 2\sqrt{2}n = 4028\sqrt{2}$

La seconda formica parte da $D_2 = (0, f_{2014}(R_{62}))$ e procede lungo la retta $y = f_{2014}(R_{62})$ fino al punto di minimo assoluto $(R_{62}, f_{2014}(R_{62}))$ torna indietro lungo C fino a $(0, f_{2014}(0))$ e quindi il restante tratto di asse y per ritornare in D_2 . L'area delimitata dalla curva sarà l'area sottesa da C detta A_C meno l'area del rettangolo di vertici

$O = (0, 0), D_2 = (0, f_{2014}(R_{62})), \hat{m} = (R_{62}, f_{2014}(R_{62}))$ e $(R_{62}, 0)$ la cui area è $R_{62} \cdot f_{2014}(R_{62})$

$$\begin{aligned} \text{Area delimitata} &= A_C - R_{62} \cdot f_{2014}(R_{62}) = \sum_{i=0}^{61} A_i - R_{62} \cdot f_{2014}(R_{62}) = \frac{3934303}{2} - \\ 1906128 &= \frac{122047}{2} \end{aligned}$$

CONCLUSIONI

È naturale voler generalizzare il problema ad esempio ponendo $g_1(x) = |\varphi(x)|$ per qualche funzione φ e $g_{n+1}(x) = |g_n(x) - a_{n+1}|$ (ad esempio $\varphi(x) = \alpha x$).

In generale sia φ biiettiva su \mathbb{R} allora si ricade nel caso studiato: ponendo $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y)$, $g_1(x) = g_1(\varphi^{-1}(y)) = |\varphi(\varphi^{-1}(y))| = |y| = (\varphi^{-1} \circ g_1)(y)$ ed analogamente $g_{n+1}(x) = |g_n(x) - a_{n+1}|$ con la stessa sostituzione $g_{n+1}(x) = g_{n+1}(\varphi^{-1}(y)) = (\varphi^{-1} \circ g_{n+1})(y) = |g_n(\varphi^{-1}(y)) - a_{n+1}| = |(\varphi^{-1} \circ g_n)(y) - a_{n+1}|$ pertanto ponendo $h_n = \varphi^{-1} \circ g_n$ si ottiene la medesima ricorsione studiata infatti $h_1(y) = |y|$ e $h_{n+1}(y) = |h_n(y) - a_{n+1}|$ da cui si riottenrebbe $g_n(x) = h_n(\varphi(x))$. Ovvero:

$$g_n(x) = (-1)^n \left(\sum_{i=2}^n (-1)^i a_i - 2(-1)^k \sum_{2 \leq j \leq k \wedge j \equiv k(2)} a_j + (-1)^k \varphi(x) \right), \forall x \in \varphi^{-1}(U_k^{(n)})$$

Da cui si deduce che l'andamento dei massimi e minimi locali è determinato dal carattere di φ : i massimi e minimi locali di h_n sono nei punti S_u e quindi i massimi e minimi di g_n saranno in $\varphi^{-1}(S_u)$.

In questo caso possiamo far rientrare anche quelle curve biettive solo su R^+ ma con simmetria: infatti g_n sarebbe comunque pari (ovvio se φ è pari) se φ è dispari ci pensa il modulo

$$g_n(-x) = h_n(\varphi(-x)) = (T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|\varphi(-x)|) = (T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|-\varphi(x)|) = (T_2 \circ T_3 \circ \dots \circ T_n)(|\varphi(x)|) = h_n(\varphi(x)) = g_n(x)$$

Cosa accadrebbe se φ non fosse simmetrica e ne biettiva su R ? Oppure con simmetria ma non biettiva su R^+ ?

Un'altra osservazione consiste nel notare l'imponente restrizione nelle ipotesi e cioè $0 < a_n \leq a_{n+1} \forall n \geq 1$, rimuovendola cosa accadrebbe? Purtroppo il programma che uso per rappresentare grafici sul PC è fuori combattimento e non posso sperimentare come vorrei, ma dopo titanici sforzi sono riuscito, con un programma per smartphone, a fare alcuni esempi del tipo: $a_n = n \sin(n)$ oppure $a_n = \frac{1}{n}$ sempre con $\varphi(x) = x$ ed emerge erraticità! Non stupisce ma rallegra! Si potrebbe dire ancora dell'altro: come divertirci a calcolare la serie di Fourier di g_n riscalata in $[0, 1]$ cioè del tipo $\frac{1}{P_n}(g_n(Q_n x) - g_n(0))$ per opportuni P_n e Q_n (intendo la parte interessante di g_n poiché ad esempio se $\varphi(x) = x$ allora $\forall x \geq S_n$ è definitivamente una retta) etc...

P.S. Nei casi trattati la serie di Fourier è facilmente accessibile al calcolo diretto, ma come sarebbe negli altri casi più complessi?

P.P.S. È interessante l'esempio $a_n = \frac{1}{n}$.

Ma non finisce qui! La versione di **trentatre** è la prossima:

Per le funzioni $f_N(x) = |||x - 1| - 2| \dots | - N|$ vale la ricorsione

1) $f_0(x) = x, f_N(x) = |f_{N-1}(x) - N|$

Con i numeri $q_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$ (incluso $q_0 = 0$) si ha

2) $f_N(x) = x - q_N, x \geq q_N$, da cui

$f_N(q_N) = 0$ e applicando la 1)

$f_N(q_{N-1}) = |f_{N-1}(q_{N-1}) - N| = N$

$f_N(q_{N-2}) = |f_{N-1}(q_{N-2}) - N| = |(N-1) - N| = 1$

$f_N(q_{N-3}) = |f_{N-1}(q_{N-3}) - N| = |1 - N| = N - 1$ ecc.

$f_N(0) = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$.

Negli altri punti $f_N(x) = \text{cost.} \pm x$; la funzione si può costruire a partire da $f_N(0)$ con tratti inclinati di larghezza $1, 2, 3, \dots, N-1, N$ fino all'unico zero in $x = q_N$.

In figura i due casi $f_7(x), f_8(x)$.

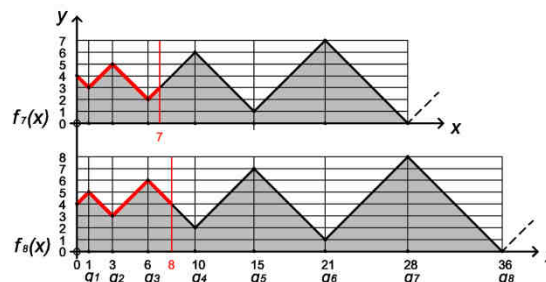


Fig. 1

3) i punti 2) sono i max e min della funzione, tutti con ordinata diversa

- le coordinate dei punti P_k di ascissa q_k sono

$$N = 2n - 1 \text{ dispari}$$

$$\max : P_{2k}(q_{2k}, n+k), k = 0 \dots n-1 \text{ fra cui } P_0(0, n) \equiv f_N(0)$$

$$\min : P_{2k-1}(q_{2k-1}, n-k), k = 1 \dots n$$

$$N = 2n \text{ pari}$$

$$\max P_{2k-1}(q_{2k-1}, n+k), k = 1 \dots n$$

$$\min P_{2k}(q_{2k}, n-k), k = 0 \dots n$$

$P_0(0, n) \equiv f_N(0)$ è un max/min nei due casi.

4) la lunghezza della curva nell'intervallo $0 \leq x \leq q_N$ è $L_N = q_N \sqrt{2}$

5) l'area S_N nello stesso intervallo (in grigio) è

$$S_{2n-1} = n^2(4n-3)/2, S_{2n} = n^2(4n+3)/2$$

- si ricava osservando che f_7 , ribaltata e spostata su f_8 , genera un trapezio, cioè

$$S_1 = 1/2, S_{n-1} + S_n = n(q_{n-1} + q_n)/2 = n^3/2, \text{ ecc.}$$

Quanto sopra vale per l'intervallo *esteso* $x \in [0 \dots q_N]$; ma il problema riguarda

l'intervallo *ridotto* $x \in [0 \dots N]$ (in rosso). I punti P_k vanno limitati a $0 \leq k \leq m$ con

$q_m \leq N < q_{m+1}$ da cui sviluppando i q

$$m = \left\lfloor \left(\sqrt{1+8N} - 1 \right) / 2 \right\rfloor.$$

Nel caso $N = 2n = 2014$, $m = 62$ i max/min e i valori assoluti h, b sono

$$\max P_{2k-1}(q_{2k-1}, 1007+k), k = 1 \dots 31, h = 1007 + 31 = 1038$$

$$\min P_{2k}(q_{2k}, 1007-k), k = 0 \dots 31, b = 1007 - 31 = 976.$$

Formica 1

Il percorso dipende dalla posizione di P_m

- se $N + m$ è dispari P_m è un max; il percorso è $P_0, P_m, P_{m-1}, \dots, P_1$, termina sempre in P_1 e la lunghezza è $L / \sqrt{2} = 2q_m - 1 = m^2 + m - 1$

- se $N + m$ è pari P_m è un min e il percorso è più complicato.

Nel nostro caso (N e m pari) il percorso è $P_0, P_{m-1}, P_m, P_{m-3}, P_{m-2}, P_{m-5} \dots P_3, P_4, P_1, P_2$ che termina in P_2 .

In fig. 2 il caso semplice $m = 8$

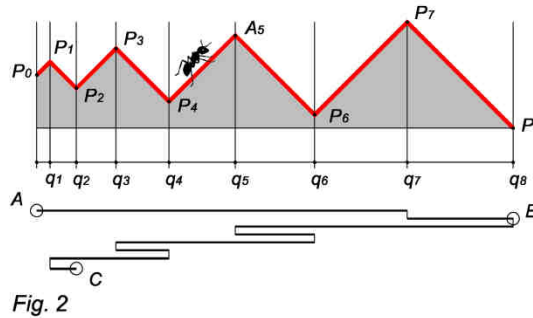
- la formica passa per $P_0, P_7, P_8, P_5, P_6, P_3, P_4, P_1, P_2$ (in basso la proiezione)

- la lunghezza (in orizzontale) è data da $AB = q_m, BC = q_m - q_2$ e dai tratti di lunghezza $2, 4, 6, \dots, (m-2)$ ripetuti due volte, quindi

$$L / \sqrt{2} = 2q_m - q_2 + 2(2 + 4 + 6 + \dots + (m-2)) = 2q_m + 4q_{m/2-1} - 3 \text{ da cui}$$

$$L = 3(m^2 / 2 - 1)\sqrt{2}$$

- per $N = 2014, m = 62$ $L = 5763\sqrt{2}$.



Formica 2

L'area dipende dal minimo assoluto (P_m opp. P_{m-1} se $N + m$ pari o dispari) e quindi è S_m o S_{m-1} data da 5); nel nostro caso con $m = 2n = 2 \cdot 31$

$$S = 31^2(4 \cdot 31 + 3) / 2 = \boxed{122047 / 2}.$$

E, *last but not least*, fa il suo ingresso **Mirhonf**, con le sue considerazioni:

In generale, la funzione $f(x) = ||||x - 1| - 2| - 3| \dots | - n|$, è una funzione che assume sempre valori maggiori o uguali a zero, e gode delle seguenti proprietà:

PROPRIETÀ 1: La funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto all'ascissa $x=1$.

Quindi da ora in poi possiamo limitarci a studiare il comportamento di f per $x \geq 1$.

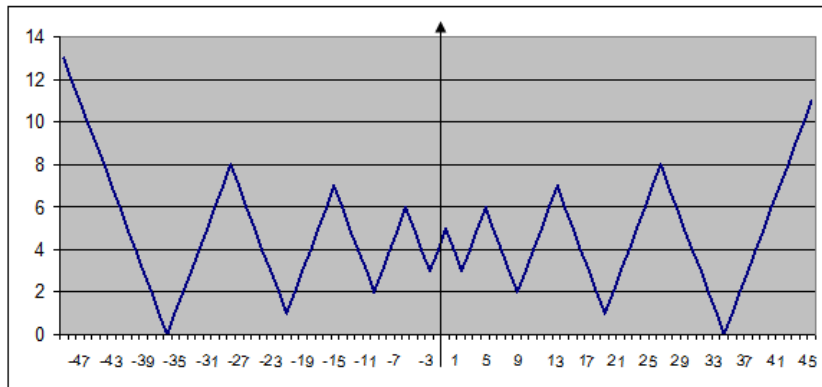
PROPRIETÀ 2: $f(1 + 2 + \dots + n) = f\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 0$ qualunque sia n . Poiché f è sempre non negativa, il punto $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ è un punto di minimo assoluto per f .

PROPRIETÀ 3: $f(1 + 2 + \dots + n - 1) = f\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = n$ qualunque sia n .

PROPRIETÀ 4: In generale, se $t_k = \frac{k(k+1)}{2}$, $1 \leq k \leq n$, $f(t_k)$ è un punto angoloso e risulta essere o un minimo o un massimo relativo. In particolare, se $n-k$ è un numero pari, allora $f(t_k)$ è un minimo relativo e vale $f(t_k) = \frac{n-k}{2}$; se $n-k$ è un numero dispari, allora $f(t_k)$ è un massimo relativo e vale $f(t_k) = n - \frac{n-k-1}{2} = \frac{n+k+1}{2}$.

Ne deriva che f ha un andamento oscillante (con pendenza ± 1) da 1 sino al valore t_n e poi diventa sempre crescente. Riporto di seguito il grafico della f per $n=8$.

Come si può vedere, il grafico è sempre non negativo, ha pendenza ± 1 , è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x=1$; $t_8=36, f(36)=0$; $t_7=28, f(28)=8$; $t_6=21, f(21)=1$; $t_5=15, f(15)=7$; $t_4=10, f(10)=2$; $t_3=6, f(6)=6$; $t_2=3, f(3)=3$; $t_1=1, f(1)=5$.



Cosa succede in $[0,8]$? f è ivi continua e limitata e quindi è dotata di minimo e massimo: $f(8)=4$; $f(0)=4$; $f(6)=6$; $f(3)=3$. In $[0,8]$ il massimo assoluto è 6, il minimo assoluto è 3. Cosa accade in generale in $[0,n]$?

Bisogna trovare il valore di k tale che $n \geq \frac{k(k+1)}{2}$. Noto il valore di k ($1 \leq k \leq n$),

valuto f nei t_k , e negli estremi dell'intervallo per stabilire minimo e massimo assoluti. Ad esempio, se $n=2014$, risolvo la disequazione $2014 \geq \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow k^2 + k - 4028 \leq 0$

$$1 \leq k \leq \frac{\sqrt{16113}-1}{2} \Rightarrow 1 \leq k \leq 62.$$

Per $k=62$, $n-k=1952$ è pari, quindi $t_{62}=1953$ è un punto di minimo e $f(1953)=976$.

Per $k=61$, $n-k$ è dispari, quindi $t_{61}=1891$ è un punto di massimo $f(1891)=1038$.

Inoltre, $f(2014)=1037$ (infatti, poiché $t_{62}=1953$ è un punto di minimo e da quel punto in poi la pendenza è 1, allora $f(2014)=f(1953)+(2014-1953)=1037$).

$f(0)=1007$ (infatti $t_1=1$ è un punto di massimo e vale $f(t_k) = \frac{n+k+1}{2} = 1008$).

Quindi in $[0,2014]$ esiste un minimo assoluto $b=976$, e un massimo assoluto $h=1038$.

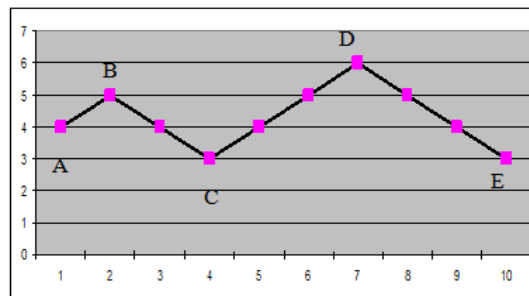
Come detto sopra, $f(0)=1007$, quindi D_1 ha coordinate $(0,1007)$. D_1 è un punto di minimo relativo.

$f(2014)=1037$ è un punto di massimo relativo.

Tra 0 e 2014 ci sono 62 punti angolosi, di cui 31 sono di minimo e 31 di massimo. In tutto ci sono 32 punti di minimo e 32 punti di massimo.

ascissa →	0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	...	t_{56}	t_{57}	t_{58}	t_{59}	t_{60}	t_{61}	t_{62}	2014
min	1007		1006		1005				979		978		977		976
MAX		1008		1009		1010				1036		1037		1038	

Faccio una breve digressione sul calcolo della distanza percorsa da una ipotetica formichina che si muove su un grafico simile a quello della funzione f costituita da tratti di retta con pendenza ± 1 , ad esempio muovendosi da A sino ad E. Il tratto $AB = \sqrt{2}(x_B - x_A)$; $BC = \sqrt{2}(x_C - x_B)$; $CD = \sqrt{2}(x_D - x_C)$; $DE = \sqrt{2}(x_E - x_D)$; quindi il percorso da A a E è lungo $AE = \sqrt{2}(x_E - x_A)$. Quindi per calcolare la distanza percorsa sul grafico, basta moltiplicare per $\sqrt{2}$ la differenza tra le ascisse dei punti estremi.

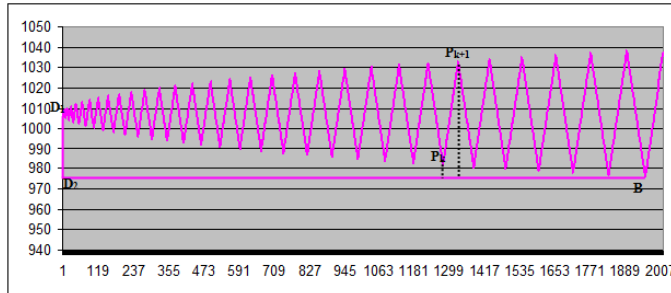


Torniamo alla nostra formichina. Essa, partendo da D_1 deve prima di tutto raggiungere il massimo assoluto (1038) in $t_{61}= 1891$ percorrendo una distanza di $1891\sqrt{2}$. Dopo deve raggiungere il minimo assoluto 976 in t_{62} ; il percorso totale sarà, sino a questo punto, $\sqrt{2}[t_{61}+(t_{62}-t_{61})]= \sqrt{2}t_{62}$. Dopo raggiunge il punto di coordinate (2014,1037) percorrendo in tutto una distanza di $\sqrt{2}(t_{62}+2014- t_{62})=2014\sqrt{2}$. Ora si sposta in $(t_{60},977)$: distanza totale $\sqrt{2}(2014+2014-t_{60})= \sqrt{2}(4028-t_{60})$. Poi si sposta in t_{59} , poi in t_{58} , ecc, poi in t_3, t_2, t_1 e infine 0 percorrendo in tutto $d=\sqrt{2}(4028-t_{60}+(t_{60}-t_{59})+(t_{59}-t_{58})+ \dots\dots\dots +(t_3-t_2)+(t_2-t_1)+(t_1-0))=4028\sqrt{2}$.

Quindi la formica si ferma in $D_1(0,1007)$ percorrendo la distanza $d=4028\sqrt{2}$.

L'area da calcolare è quella delimitata dai punti $D_2(0,976)$, $B(1953,976)$, il grafico di f e $D_1(0,1007)$.

Per il suo calcolo, potremmo ragionare in questo modo: osserviamo l'area compresa tra la curva delimitata dal generico punto angoloso $P_k(t_k,f(t_k))$, il punto angoloso immediatamente successivo $P_{k+1}(t_{k+1},f(t_{k+1}))$ e la retta $y=976$; essa è l'area di un trapezio A_k .



$$A_k = \frac{(f(t_{k+1})+ f(t_k))(t_{k+1} - t_k)}{2}. \text{ L'area totale è la somma di tutte le } A_k: A = \sum_{k=1}^{62} A_k .$$

A questo punto, potrei facilmente calcolare l'area con una procedure iterativa. Oppure seguire il seguente ragionamento.

Comincio a calcolare gli A_k : $A_{62} = \frac{(0+62)(1953-1891)}{2} = \frac{62 \cdot 62}{2}$,

$$A_{61} = \frac{(62+1)(1891-1830)}{2} = \frac{63 \cdot 61}{2}, A_{60} = \frac{(1+61)60}{2} = \frac{62 \cdot 60}{2}, A_{59} = \frac{63 \cdot 59}{2}, A_{58} = \frac{62 \cdot 58}{2}, \dots$$

$$A_2 = \frac{62 \cdot 2}{2}, A_1 = \frac{63 \cdot 1}{2}.$$

Raggruppando i termini pari ed i termini dispari separatamente, si ottiene:

$$A_{pari} = \frac{62}{2}(62+60+58+\dots+2) = 62(1+2+\dots+30+31) = 62 \frac{31 \cdot 32}{2} = 31^2 \cdot 32$$

$$A_{dispari} = \frac{63}{2}(61+59+57+\dots+1) = \frac{63}{2} 31^2 \text{ (la somma dei primi } n \text{ numeri dispari è } n^2\text{)}.$$

$$\text{Da cui } A = A_{pari} + A_{dispari} = 32 \cdot 31^2 + \frac{63}{2} 31^2 = 31^2 \left(32 + \frac{63}{2} \right) = 31^2 \frac{127}{2}.$$

Siamo giunti finalmente alla fine. Grazie a tutti quanti, e alla prossima!

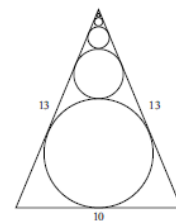
5. Quick & Dirty

La somma delle circonferenze della serie infinita di cerchi in figura è finita o infinita?

La somma delle circonferenze vale:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \pi \cdot 2 \cdot r_i = \pi \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot r_i .$$

Ma l'ultima sommatoria non è altro che l'altezza del triangolo,



che attraverso il Teorema di Pitagora si ricava essere pari a 12. Quindi la somma della circonferenza vale: $S = 12 \pi$.

6. Zugzwang!

Con questo gioco (che non ci pare un gran che, sia detto per inciso) poniamo finalmente fine ad una ricerca che procede dal *maggio 2006* (RM088) e della quale non importa niente a nessuno. Contenti?

Se vi ricordate (seh...) nello *Zugzwang!* Di quel numero presentavamo *Ultima*, gli scacchi eterodossi concepiti con l'apposito scopo di utilizzare *tutti* i possibili modi di presa: la nostra ricerca in questi anni (*tutti i mesi*, mica solo uno ogni quattro!) è consistita nel cercare un gioco con un modo di presa non contemplato da Robert Abbott, e siamo convinti di averlo trovato: proponiamo di chiamarlo "presa del fantino", ma se non vi piace liberi di cambiargli nome.

6.1 Ney-pat-ko-no

Come potete facilmente dedurre dal nome, il gioco è coreano: ed è un gioco da tavolo, o meglio da tavolino (va bene anche quello della Barbie).

La *scacchiera*, in effetti, è minuscola: 4x4 e via andare. Come *pedine*, poi, siccome sono tutte uguali, potete usare qualunque cosa, visto che vi basta riuscire a distinguere i bianchi dai neri. Se volete usare i pedoni degli scacchi ne avete facoltà, visto che ve ne servono otto per parte: da qui, la facile deduzione che dovete riempire due file con i bianchi e due file con i neri.

E qui abbiamo già la prima stranezza: non sono molti, a quanto ricordiamo, i giochi che partono con una scacchiera completamente piena.

I pezzi muovono (se non prendono) su una qualsiasi casella libera adiacente ortogonale, e se la seconda domanda che vi state ponendo è la stessa che ci siamo posti noi, la risposta è "Sì, anche all'indietro".

La seconda domanda in quanto la prima, se siete stati attenti, somiglia più che altro ad un'affermazione: "...ma all'inizio nessuno dei due può muovere, senza prendere!".

Vero. Infatti, con la ferocia tipica dei *makò*, si parte mangiando, e qui arriva la stranezza di cui parlavamo prima. Per prendere una pedina deve *saltare* una pedina amica in posizione di mossa e atterrare sulla pedina nemica in posizione di mossa (la stessa): per intenderci, se avete una pedina in A1 e una pedina in A2, con una pedina nemica in A3, potete, con la pedina A1, prendere la pedina A3. Capito perché la chiamiamo "presa del fantino"?

Il tutto in orizzontale e in verticale, avanti o indietro, ma (evidentemente, mantenendo la direzione di mossa iniziale: per intenderci, se la pedina nemica fosse stata in B2, non avreste potuto prenderla con A1.

Vince chi riesce a impedire all'avversario di giocare, o perché le sue pedine sono bloccate o perché non ne ha più.

Scriviamo queste brevi note davanti ad un bellissimo vassoietto quadrato di paste, metà al cioccolato e metà al pistacchio... Provate a immaginare a cosa stiamo pensando.

Ci avete azzecato: "...secondo me, è analizzabile".

7. Pagina 46

Per quanto riguarda il **primo quesito**, è immediato che la successione:

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11,
30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31,
50, 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41, 60, 59, 58, 57, 56, 55, 54, 53, 52, 51,
70, 69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 80, 79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71,
90, 89, 88, 87, 86, 85, 84, 83, 82, 81, 100, 99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91

soddisfa la condizione richiesta.

Per quanto riguarda il **secondo quesito**, da un qualsiasi riaggiustamento dei 101 interi scegliamo il primo intero, e sia esso $a_1^{(1)}$; indi, procedendo lungo la successione, scegliamo l'intero $a_2^{(1)}$ maggiore di $a_1^{(1)}$. Questo produce la successione:

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_i^{(1)}$$

(che, in alcuni casi, può essere composta da un unico termine). Se nella successione così generata compaiono 10 o più termini, il problema è risolto. Se invece $i < 10$, cancelliamo gli interi selezionati e applichiamo lo stesso procedimento ai restanti $101 - i$ interi, ottenendo la successione:

$$a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_i^{(2)}$$

La ripetizione di questo processo genera un certo numero di sequenze crescenti, se qualcuna di queste è composta da almeno dieci elementi, il problema è risolto: dobbiamo quindi considerare unicamente il caso in cui nessuna delle sequenze generate contiene più di dieci interi.

Essendoci in totale 101 interi, il numero k delle sequenze, il numero di queste deve essere almeno pari a 11: ma, come mostreremo nel seguito, in questo caso diventa possibile scegliere tra i 101 interi una sequenza **decrescente** di 11 interi.

Infatti, scegliamo come elemento finale della sequenza da costruire l'elemento finale della sequenza finale $a_{i,k}^{(k)}$. Se ora scegliamo dalla sequenza precedente il numero non ancora barrato immediatamente precedente $a_{i,k}^{(k)}$, questo numero sarà maggiore di $a_{i,k}^{(k)}$, in quanto in caso contrario $a_{i,k}^{(k)}$ apparterebbe alla sequenza precedente. Questo numero $a_j^{(k-1)}$ viene posto alla sinistra di $a_{i,k}^{(k)}$ nella sequenza che stiamo generando. Lavoriamo ora con $a_j^{(k-1)}$. Nella sequenza che precede immediatamente la $(k-1)$ -esima, l'elemento che compare immediatamente prima di $a_j^{(k-1)}$ tra quelli non barrati nella sequenza originale sarà maggiore di $a_j^{(k-1)}$. Questo numero viene posto alla sinistra di $a_j^{(k-1)}$ nella nuova sequenza. Continuando in questo modo, selezioneremo valori sempre maggiori, ciascuno dei quali appare a monte nella sequenza originale di 101 numeri, e potremo effettuare almeno 11 di queste selezioni, il che risolve il problema.

Nota: In modo analogo si può dimostrare che $(n - 1)^2$ interi positivi possono essere organizzati in modo tale che nessuna successione di n termini in ordine crescente o decrescente si individuabile, ma che per una successione formata da $k > (n - 1)^2$ termini è sempre possibile estrarre una successione crescente o decrescente.



8. Paraphernalia Mathematica

Se i più malpensanti tra voi pensano che l'altra volta si sia saltato questo pezzo perché non ci avevamo capito niente, avete quasi ragione: è il prossimo, che non ci è chiaro...

8.1 Oltre Platone III – Non è la parte più difficile

E questa non è la buona notizia: quella più difficile deve ancora arrivare. La buona notizia è che con questo giro dovremmo aver finito l'introduzione.

Riprendiamo il filo dalla volta precedente: avevamo detto che dato il caleidoscopio ABC , potevate piazzare il punto (che, nella costruzione finale, farà da vertice) nei punti:

Posizione	Simbolo
1. Il vertice viene posizionato nel punto A	a b c
2. Il vertice viene posizionato sul lato AB (c), in modo tale che la retta passante per il vertice e l'angolo C bisechi l'angolo C	a b c
3. Il vertice viene posizionato nell'incentro di ABC	a b c
4. Il vertice viene posizionato in un punto tale che, quando viene ruotato attorno ad un qualsiasi angolo del doppio del valore dell'angolo, si sposta della stessa distanza da ogni angolo	a b c

Adesso, se sostituite ai lati del triangolo degli specchi e tracciate dei segmenti che dal punto ("vertice") arrivino perpendicolarmente ai lati, avete un grazioso metodo (noto come **Metodo di Wythoff** – sì, *quel* Wythoff) per inventarvi tassellature; non solo, ma potete indicarle con un grazioso simbolo, noto come **Simbolo di Wythoff**. Che, giusto per riprendere la nostra polemica preferita, è stato usato per la prima volta da Coxeter, Longuet-Higgins e Miller ("E cosa c'entra Wythoff?" Beh, lui aveva trovato il metodo. Poi i conti li hanno fatti gli altri, ma almeno sono stati onesti e li hanno attribuiti a W.).

Spostiamo come al solito la cosa fuori dallo spazio euclideo e usiamo la nostra notazione usuale, con il triangolo rettangolo (per semplificarci la vita, in realtà potete fare un mucchio di calcoli anche con il triangolo generico): vi accorgete che vengono fuori alcuni oggetti che dovrete conoscere:

Descrizione	S. di Wythoff	S. di Schläfli	
Regolari e quasiregolari	q p 2	$\{p,q\}$	
	p q 2	$\{q,p\}$	
	2 p q	$r\{p,q\}$	$t_1\{p,q\}$
Troncati e espansi	q 2 p	$t\{p,q\}$	$t_{0,1}\{p,q\}$
	p 2 q	$t\{q,p\}$	$t_{0,1}\{q,p\}$
	p q 2	$rr\{p,q\}$	$t_{0,2}\{p,q\}$
A facce pari	p q 2	$tr\{p,q\}$	$t_{0,1,2}\{p,q\}$
Camusi	p q 2	$sr\{p,q\}$	

E, a parte qualche libertà che ci si prende nelle definizioni, la cosa ha una potentissima simmetria, e permette di gestire facilmente alcuni mostri: ad esempio, preferite scrivere

Grande Icosidodecaedro Camuso, $sr\left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$ o $\left|3, \frac{5}{2}, 2\right|$? Non solo, ma a noi pare

particolarmente interessante la *complementarietà* dei due simboli: uno (Schläfli) vi spiega *come è fatto*, l'altro (Wythoff) vi spiega *come farlo*.

Purtroppo, anche qui ci mancano dei pezzi: il poliedro preferito di Doc, ad esempio, non è costruibile con il metodo di Wythoff, e quindi dovete continuare a chiamarlo *Grande Dirombododecaedro Camuso di Skilling*. Non per niente Skilling se l'è attribuito.

Siccome siamo dei buoni, per darvi qualcosa di più comprensibile, vi diciamo che l'icosaedro, che potete vedere come un tetraedro camuso o come un ottaedro troncato, si ritrova il simbolo di Wythoff $|3\ 3\ 2$, e non dovrebbe essere un problema piazzare gli specchi nel modo giusto; gli altri, ve li lasciamo calcolare, contenti?

Oh, giusto per sprecare un paio di righe in un commento inutile: qui sopra ci siamo limitati al caleidoscopio sferico, ma quello euclideo e quello iperbolico funzionano lo stesso, chiaro. E lo stesso discorso (anche se piazzare gli "specchi" in questo caso può diventare "sfidante" [Vi ricordate tutti che Rudy odia questa parola, vero?]) vale per le dimensioni superiori.

Un attimo di pausa: parliamo d'altro, un po' più semplice, ricominciando dall'inizio, nel senso che introduciamo un altro paio di notazioni che potreste incontrare girellando da queste parti.

Se ricordate il simbolo di Schläfli, sapete che descrive *cosa* arriva in un vertice e *quanti* ne arrivano: ad esempio, $\{3,4\}$ rappresenta quattro triangoli (regolari) che convergono in un punto, e quindi descrive l'ottaedro; la cosa funziona benissimo sin quando avete degli oggetti molto regolari (i solidi platonici, o i loro equivalenti in più dimensioni, ad esempio), ma quando andate su degli oggetti "non così tanto" regolari (solidi troncati, cantellati, camusi... Sapete tutto, in merito) non è così facile descrivere la cosa. Per rimediare a questo problema, si utilizza un'estensione (che a prima vista potrebbe sembrare una semplificazione) del simbolo di Schläfli, la **rappresentazione del vertice**: si tratta di descrivere, esattamente come sopra, cosa arriva in un vertice, ma con una maggiore precisione. Ad esempio, visto che nell'ottaedro quattro triangoli convergono in un vertice, indichiamo la cosa come 3.3.3.3, e fatto⁵.

La cosa può sembrare non molto intelligente, visto che la notazione è più lunga e dice esattamente la stessa cosa, ma rappresenta un'indubbia comodità quando dovete descrivere ad esempio il cubo troncato: in un vertice si incontrano nell'ordine due ottagoni e un triangolo, quindi 3.8.8; e qui dovrebbe sorgervi un dubbio, perfettamente giustificato, sul come mai si parla prima del triangolo e poi degli ottagoni. La ragione è molto insoddisfacente, ma funzionale: per convenzione, si comincia da quello con "meno lati". La cosa, logicamente, porta a dei guai (come ogni convenzione, giusto per citare John Brunner... O era Heinlein?): ad esempio, il *cubo camuso*, che sappiamo essere *chirale*, in entrambe le forme ha rappresentazione di vertice 3.3.3.3.4 (ve lo disegnate voi: avete tutti i dati, perdiana!). Portarsi dietro aggeggi di questo genere può però essere piuttosto scomodo, soprattutto quando la differenza tra 3.3.3.3 e 3.3.3.3.3 è la stessa che c'è tra un ottaedro e un icosaedro: per questo, come dicevamo in nota, preferiamo la notazione "a punto", in quanto ricorda la moltiplicazione: per l'icosaedro, infatti:

$$\{3,5\} = 3.3.3.3.3 = 3^5,$$

che diventa notazione comodissima (e la regola del duale secondo Schläfli la ricavate agilmente voi). Notate che, come sempre con la matematica e con i maiali, non si butta

⁵ Attenzione che potreste trovare la forma in cui i numeri sono separati da virgole e non da punti: significano esattamente la stessa cosa, ma per motivi legati alla similitudine con il segno di moltiplicazione noi preferiamo usare i punti.

via niente: potete allegramente trasferire quella notazione simpaticamente balorda per le stelle direttamente senza colpo ferire (quasi... graficamente, fa senso) e il *piccolo dodecaedro stellato* diventa un simpatico $\left(\frac{5}{2}\right)^5$. Non che non manchino i guai, anche

qui... se volete cimentarvi nella costruzione via origami del *grande dirombicosidodecaedro*, sappiate che dovrebbe essere una cosa del tipo:

$$4 \cdot \frac{5}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2},$$

e auguri per la costruzione (...o, se vi ricordate come si tracciano le stelle, per spiegare la differenza tra cinque terzi e cinque mezzi... No, non lo facciamo. Lo faremo il giorno che ci servirà, forse).

Adesso ripetiamo una cosa già detta: per “chiudere” un poliedro, la somma degli angoli che si incontrano in un vertice deve essere minore di 360° : e più è minore, prima si chiude il poliedro. Enunciata in questo modo, la cosa sembra un’ovvietà, e lo è, nel senso di Doc e di Hardy: la parola “ovvio”, in matematica, è pericolosissima. Infatti questa “ovvietà” è riformulabile come “il **difetto angolare** su un vertice è pari alla curvatura in quel punto”, o (cercate *Teorema di Gauss*, per ulteriori dettagli):

$$\int_M k dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M),$$

e $\chi(M)$ è la *caratteristica di Eulero*, ossia il secondo membro della più bella formula di tutta la matematica (secondo Rudy: Doc non è d’accordo):

$$\sum_{i=0}^N (-1)^i e_i = \chi(M);$$

tutti la conoscono nella formulazione “semplice” (Vertici-Spigoli+Facce=2), nella quale non vengono evidenziate le *celle*, ci si limita a *tre dimensioni* e si ignora il fatto che alcune ciambelle riescono col buco (nel senso che $\chi = 2 - 2 \cdot g$, e “g” è il “genus”, ossia quanti buchi ha l’aggeggio: chiediamo anticipatamente scusa ai topologi per le improprietà di queste righe, ma andiamo di fretta). Insomma, in un concetto così semplice c’è dentro un mucchio di roba.

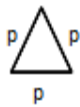
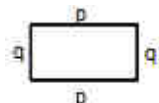
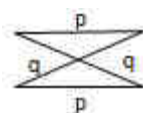
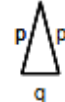
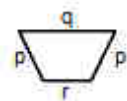
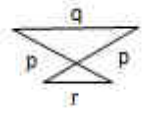

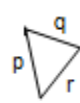
Tornando alle cose più normali, se fate i conti sui solidi platonici vi accorgete facilmente che per i vertici di ognuno di loro i difetti angolari sono (“ovviamente”) decrescenti, variando tra pigreco (per il tetraedro) e pigreco quinti (per il dodecaedro): ma provate a calcolare il difetto angolare *totale* di ogni figura: viene sempre lo stesso, pigreco quarti. E questo è noto come il **Teorema di Descartes** (sì, *quel* Descartes, *aka* Cartesio).

Come al solito, adesso complichiamola. Esistono un paio di notazioni particolari (una l’avete già incontrata, ve ne siete accorti?): “-3”, ad esempio, indica sempre un triangolo, ma con *orientazione al contrario*: la cosa può essere utile se vi serve tener conto dell’orientamento delle facce, visto che (ad esempio quando trattate gli stellati) si incrociano; con un vero lampo di genio, qualcuno si è accorto che, nel caso particolare del triangolo, il triangolo al contrario non è altro che un “triangolo stellato” $\frac{3}{2}$; carino, vero?

L’altra complicazione nasce sempre dai “lati che si incrociano”, e viene indicata con un asterisco: per far vedere come funziona abbiamo bisogno di un concetto molto semplice e ne approfittiamo per introdurre un’ulteriore classificazione, secondo noi tanto inutile quanto divertente.

Il concetto è quello di **figura di vertice**: prendete un vertice, troncatelo e vedete che figura viene fuori: fatto. Semplice, vero? Anche il calcolo lo è: tornate al simbolo di Schläfli di un politopo regolare {a, b, c, d, ..., z}, la sua figura di vertice sarà

semplicemente $\{b, c, d, \dots, z\}$. Chi ha fatto un grande lavoro in merito (anche se secondo noi scarsamente utile) è **Johnson**, che ha catalogato i poliedri uniformi in dieci categorie:

Nome	Rappresentazione di Vertice	Simbolo di Wythoff	Esempio
Regolare	p^q	$q p^2$	
Quasi-Regolare	$(p.q)^2$	$2 p q$	
	$(p.q)^3$	$3 p q$	
Versi-Regolare	$p.q.p.q$	$q q p p$	
Tronco-Regolare	$p.p.q$	$q 2 p$	
Versi-Quasi-Regolare	$p.q.p.r$	$q r p p$	
Quasi-Quasi-Regolare	$p^*.q.p^*.r$	$q r p p$	
	$p.q^*.r.p.q^*$	$p q r $	
Tronco-Quasi-Regolare	$p.q.r$	$p q r $	
Camuso-Quasi-Regolare		$p q r $	
Prismi			
Antiprismi			

...a noi, una cosa che si chiama “quasi-quasi-regolare” piace da matti: quelle mancanti, ve le abbiamo lasciate come esercizio, contenti? Ma per questa volta basta, che la signora D’Alembert sta preparando gli zaini: andiamo a trovare Platone un paio di giorni.

E già è stato problematico raccontarlo a voi, figurarsi a lui, valendosi della traduzione del VAdLdRM Fred D'Alembert.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms