Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 176 – Settembre 2013 – Anno Quindicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM175 ha diffuso 3’043 copie e il 03/09/2013 per Google eravamo in 12’400 pagine.

Considerate che è esposto al Metropolitan Museum of Art. Considerate che oggi (per chi scrive) è un giorno diverso dal primo aprile. Quello in alto è un ***dado del periodo Tolemaico*** (304-30 aC) in serpentino: per il Manuale del Dungeon Master a geroglifici, sono in corso le ricerche *[…lo sappiamo, che all’epoca usavano i caratteri greci e non i geroglifici. Ma così suonava meglio]*. E gli invidiati amici dell'***Evil Mad Scientist Labs,*** con la loro borsetta da Dungeon Mastera (molto femminile), una volta tanto non hanno inventato niente di nuovo.

1. Il respiro della locomotiva

"In the shuffling madness
of the locomotive breath,
runs the all-time loser,
headlong to his death.
He feels the piston scraping
steam breaking on his brow
old Charlie stole the handle and
the train won't stop going
no way to slow down.
He sees his children jumping off
at the stations one by one.
His woman and his best friend
in bed and having fun.
He's crawling down the corridor
on his hands and knees
old Charlie stole the handle and
the train won't stop going
no way to slow down.
He hears the silence howling
catches angels as they fall.
And the all-time winner
has got him by the balls.
He picks up Gideons Bible
open at page one
old Charlie stole the handle and
the train won't stop going
no way to slow down
("*Locomotive's Breath*" – Jethro Tull)

C'è sempre un momento di silenzio assoluto, ed è cosa insolita, durante un concerto rock. L'ultimo pezzo in scaletta è stato già eseguito: chitarre, batterie, flauti e amplificatori hanno già fatto vibrare le note alte e potenti per due ore buone, i componenti del gruppo si sono già inchinati di fronte al pubblico, hanno salutato in un tripudio di applausi e di fischi d'approvazione e sono spariti dietro le quinte. Il palco è quindi deserto, totalmente buio: e soprattutto, è del tutto silenzioso. Nonostante ciò, il pubblico ha continuato ad applaudire, a fischiare, a urlare refrain e strofe intere; e naturalmente ha insistentemente chiesto il bis. Ma la band è una band anziana, com'è anziana gran parte degli spettatori: tra questi, sono pochi quelli che stanno seguendo il concerto per la prima volta, e in qualche modo la liturgia della rappresentazione è nota a tutti. È per questa ragione che basta poco, forse appena uno scalpiccio, un mezzo effetto Larsen su un microfono, o forse niente del tutto, perché rapidamente cali il silenzio totale: il pubblico sa che ci sarà il bis, e quasi certamente sa che ce ne sarà solo uno. Sono decenni che i concerti finiscono così: da prima che il cantante, flautista, leader assoluto della band perdesse quasi del tutto la voce, da prima che le evoluzioni di quarant'anni di musica consolidassero e fissassero in modo virtualmente immutabile le regole dell'esecuzione dell'ultimo pezzo. Palco buio e silente, pubblico muto e attento.

Senza che le luci si accendano, poche note di pianoforte cominciano ad alzarsi. Note lente, potrebbero sembrare piccole rincorse di riscaldamento di un pianista jazz, o addirittura di musica classica. Girano un po' per l'aria, si rincorrono, cominciano a costruire piccole frasi. Il pianoforte è ormai quasi sparito del tutto, nei concerti rock: eppure una volta era tutt'altro che raro. Tutti i maggiori gruppi avevano il "tastierista", che certo usava più frequentemente tastiere elettriche, organi Hammond o perfino moog, anziché un pianoforte a coda: ma comunque si trattava di musicisti che si erano formati con duri esercizi e scale ripetute fino alla noia sui pianoforti di casa, e non trovavano strano portarseli sul palco. Quasi sempre erano pianoforti verticali, situati negli angoli bui, vicino alla batteria, ma c'erano, eccome. E c'erano i virtuosi degli ottantotto tasti: Keith Emerson degli EL&P, Rick Wakeman degli Yes, e decine di altri; erano spesso un contrappunto fondamentale e irrinunciabile alla formazione di base dell'acustica rock, chitarra-batteria-basso.

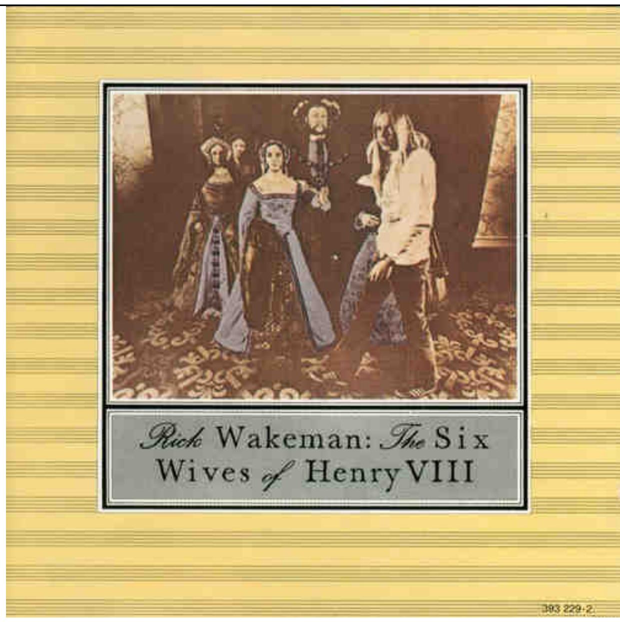
L'arpeggio che parte nel buio è composto – e spesso eseguito, almeno negli anni d'oro della band – da John Evan. Quando le frasi del piano cominciano a rincorrersi e a strutturarsi, nel silenzio ormai rotto e sempre meno silenzioso, arrivano i primi suoni della chitarra. Già violenti, contrapposti all'armonia del piano: se le note del pianoforte potevano sfuggire a classificazione, la chitarra di Martin Barre ricorda subito agli astanti che il concerto è un concerto rock, e comincia a dare ritmo e solidità al pezzo. Di solito, è insieme alle note della chitarra che tornano le luci, e quasi subito basso e batteria si alleano con la chitarra, a ritmare il suono. Il pianoforte modula ancora le sue note, ma ormai è anch'esso evidentemente caratterizzato; non più jazz, o blues, o altro, ma esplicito rock. E infine il ritmo sancito dal basso e dalla batteria diventa violento, ossessivo, e dopo che da dietro le quinte si leva un fischio del tutto simile a quello che un tempo si sentiva spesso alzarsi nelle stazioni, quel ritmo diventa marcia meccanica, perfettamente scandita. La chitarra viene adesso suonata con un barré stretto e opaco, e dopo i primi riff si ritrova a non fare altro che batter il tempo insieme a chitarra e basso: i tre strumenti, in maniera del tutto palese, stanno riproducendo il rumore di un treno lanciato in corsa.

1 *Jethro Tull in concert (millanta anni fa)*

A questo punto le luci esplodono, tutte accese e lampeggianti al ritmo della musica; il pubblico è tutto in piedi e oscilla perfettamente a tempo, almeno finché non si sentono le prime note di flauto che si ricamano sulla trama ritmica del suono ferroviario, si sposano con i residui melodici delle note del pianoforte, dànno un accenno di trama melodica al contrapporsi ossessivo della base ritmica alleata alla chitarra; e finché Ian Anderson, flautista cantante e leader della band, non comincia seriamente a cantare, con un accento scozzese ancora intellegibile: "*Nella serpeggiante follia del respiro della locomotiva…*". È "Locomotive Breath", cavallo di battaglia dei Jethro Tull.

Mentre l'ultima canzone del concerto riempie il silenzio ormai dimenticato della sera estiva, è difficile che qualcuno, tra musicisti e pubblico, si soffermi davvero a considerare il testo del brano. È già stato sentito (o cantato) mille volte, e poi – diamine – in ultima analisi non è né Shakespeare né Leopardi, e non sarà certo il caso di mettersi lì a sviscerare metrica, metafore, sintassi, contenuti. Però, a più di quarant'anni di distanza dalla prima esecuzione, non è neanche troppo ardito provare ad estrarne qualche riferimento che a quei tempi non sembrava insolito, perché caratteristico di quel periodo: riferimenti che non appartengono solo al pezzo, all'album o alla band, ma a tutta la musica pop (nel senso puro di "popolare" e in quello esteso di "giovanile") del tempo. Tanto per dire, nel brano non c'è traccia d'amore romantico; e per quanto la cosa fosse allora tutt'altro che insolita, oggi lo sarebbe già di meno. Era la decima traccia di "Aqualung", long-playing di maggior successo del gruppo, e Aqualung era un "concept-disc”, ovvero un album in cui tutte le tracce avevano una loro coerenza reciproca, sviluppavano grosso modo gli stessi argomenti, quando non, ancora più esplicitamente, raccontavano in sequenza un’unica storia: e anche i concept-disc[1] sono ormai cose da archeologia musicale. Il fil-rouge di Aqualung è apparentemente solo quello legato alla vita di un barbone – Aqualung, appunto – un diseredato che vive di elemosina e che non è certo un tipo raccomandabile: ma il tema vero è centrato sul rapporto tra Uomo e Dio, o meglio ancora sulla visione che l’Uomo ha dell’umano e del divino. In alcuni brani del disco la tensione è esplicitata con particolare decisione (soprattutto nella settima traccia, “My God”), ma anche in “Locomotive Breath” il testo continua a giocare sullo stesso tema: a bordo del treno c’è “*the all-time loser*”, “l’eterno perdente”, che striscia lungo il corridoio senza possibilità di fermare la corsa del treno, perché la leva del freno è stata rubata dal “vecchio Charlie”. Per contrappunto, l’eterno vincente (“*the all-time winner*”), armato di Bibbia, non sembra disposto concedergli scampo.

In un’interpretazione che forse trascende le intenzioni degli stessi autori, il brano sarebbe una metafora dove si dipinge l’uomo come privo di freni religiosi, ma ancora incapace di governare senza di essi la sua esistenza (la metaforica, e letteralmente “sfrenata”, corsa del treno), perché Darwin (“old Charlie”) lo ha finalmente messo di fronte all’evidenza che Dio, anche qualora esistesse, non sarebbe certo quel padre protettivo e attento ad ogni respiro della sua creatura preferita, come racconta la Bibbia.



2 *Come il “progressive” gioca con la storia*

Solo una canzonetta, dicevamo. E tale da meritarsi il posto d’onore nei concerti dei Jethro Tull più per la sua dinamica ritmica rock (assolo di flauto traverso compreso), che per l’ipotetico “messaggio” del testo. E comunque sorprende, quasi mezzo secolo dopo, ritrovare nella musica giovanile d’intrattenimento temi così impegnativi: la locomotiva, metafora al tempo stesso della vita e del nuovo Uomo nato dalla Rivoluzione Industriale, Darwin e l’evoluzionismo, e una sorta di proposta di un nuovo Umanesimo veicolato da quattro o cinque capelloni che si agitano su un palco. Ma a quei tempi non era affatto insolito: i Genesis di Peter Gabriel costruivano nei loro album interi romanzi di fantascienza, gli Yes ripercorrevano i sei matrimoni di Enrico VIII, i Traffic cantavano ballate sul leggendario inventore del whisky, e Emerson Lake e Palmer giocavano e ripetere, con appena tre strumenti, un’intera suite orchestrale di Musorgskij[2].

Anni Settanta, anni in cui imperava il *progressive rock*. Una volta non si chiamava *progressive*. Aveva molti nomi, o nessuno; come capita quasi sempre, nel momento in cui un evento, un’idea, una corrente di pensiero nascono e si sviluppano, non hanno un nome ben preciso ed identificativo, per il semplice fatto che le classificazioni vengono create successivamente, a mente fredda, comparando identità e differenze, e soprattutto

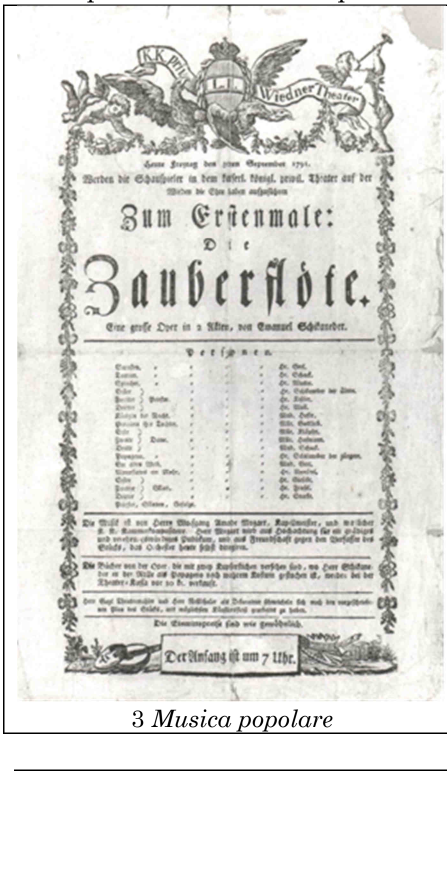
[1] Peraltro, i concept-disc non sono certo vincolati al concetto di “rock anglosassone”, tutt’altro. Alcune delle migliori opere di Fabrizio De André, ad esempio, sono puri concept-disc: *La Buona Novella, Storia di un Impiegato, Non al denaro né all’amore né al cielo*.

[2] Tutte citazioni abbastanza facili per gli ultracinquantenni: evitiamo di annoiare i più giovani specificando a quali dischi ci stiamo riferendo.

inserendo in un contesto storico di più alto respiro l'evento, l'idea, la corrente di pensiero. La Prima Guerra Mondiale si chiama così solo dal momento in cui di guerre mondiali ne è tristemente scoppiata una Seconda: per gran parte del XX secolo ci si è riferiti ad essa solo col nome "Grande Guerra", ed è probabile che anche l'aggettivo "grande" si sia consolidato solo in tempi successivi al 1914, e che coloro che la vivevano si limitassero a chiamarla "la guerra": sostantivo pregnante, attuale e terribile, che non aveva bisogno di nessun attributo per essere messo in evidenza.

Così, i ragazzi che quarant'anni fa ascoltavano quello che adesso si chiama progressive rock dai giradischi e dalle musicassette si limitavano a chiamare "musica" quello che ascoltavano: e riuscivano a capirsi senza bisogno di specificare troppo il tipo, la corrente, il "sound". Certo, alcune cose si davano per scontate: la parola "musica" era certo una scorciatoia riconosciuta e convenzionale. Era certo musica la musica classica, ma era sottinteso che fosse un po' meno "musica" tutta la musica leggera tradizionale italiana; era riconosciuto che il jazz fosse qualcosa che meritava rispetto e che, con ogni probabilità, sarebbe diventato il rifugio degli ultratrentenni, ma nel frattempo si accapigliavano in definizioni di correnti e sottocorrenti, di variazioni di stile, modulazioni di approccio, derivazioni… tutto più o meno perduto sotto un'unica etichetta riepilogativa, ormai, come è normale che sia.

Le differenze resistono solo negli animi dei cinquantenni che ricordano la loro adolescenza, probabilmente: difetto classico della mezza età è quello di elevare al rango di "classici" i propri miti giovanili, a prescindere dal reale valore dei miti stessi. Il compito più serio spetta agli storici, ed è indubbio che è un lavoro serio e difficile: uno storico della musica (e della musica tout-court, non di genere), se volesse raccontare l'evoluzione della sua arte nel ventesimo secolo, si troverebbe a dover raccontare le mille cause e motivazioni che hanno reso la musica così universalmente "consumata" nel mondo occidentale. Dovrebbe prendere in considerazione la drammatica rivoluzione generata dalla possibilità tecnica di riprodurre la musica per via tecnologica, senza la presenza fisica dei musicisti; dovrebbe considerare la rivoluzione sociologica ed economica che ha portato la musica ad essere il genere di consumo preferenziale dalla popolazione giovanile occidentale; considerare come abbia potuto trasformarsi, in molti casi, da elemento culturale a sé stante a veicolo di gran parte delle emozioni ed esigenze dei suoi fruitori: dalle passioni amorose a quelle di lotta sociale, di contenuto creativo e di forza politica. E non potrebbe comunque trascurare tutte le componenti più squisitamente "tecniche": il "rock" influenza tutta la musica popolare successiva (punk, new wave, e le varie coniugazioni etniche), ma è figlio diretto del rock 'n' roll, del jazz, del blues, e di gran parte delle tradizioni folk anglosassoni. Dovrà fare i conti con singoli elementi dirompenti e rivoluzionari, se è vero che i Beatles, ad esempio, sono in ultima analisi responsabili della sparizione di tutte le orchestre da ballo che imperavano ovunque nella prima metà del Novecento. Dovrà in qualche modo risalire alle tradizioni della musica popolare, che non è poi stata davvero troppo distante dalla musica colta, se Verdi e Puccini muovevano intere nazioni dai loggioni, se il concetto stesso di "canzone", nell'accezione moderna del termine, è certo strettamente imparentata alle arie delle opere del melodramma. E dovrà fare i conti con i mostri sacri del genere, ricordando che il Mozart che componeva in italiano alla corte di Vienna per l'imperatore era pur sempre lo stesso Mozart che destinava il suo tedesco "Flauto Magico" ai teatri popolari. E via,



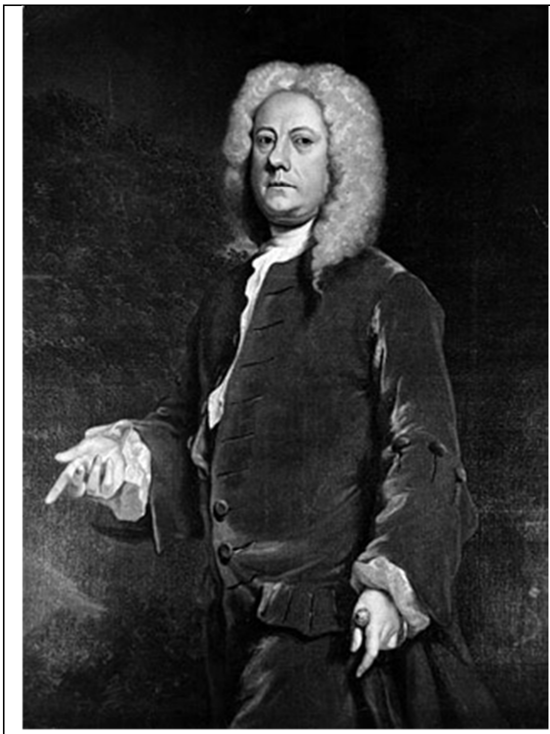
3 *Musica popolare*

ancora più indietro, senza una cesura precisa, senza soluzione di continuità.

La storia è sempre sintesi, e la sintesi, per definizione, è perdita di informazione. Il lavoro dello storico è quindi spietato e crudele, perché destinato non tanto a salvaguardare tutta la memoria possibile, quanto a definire una sorta di percorso nel passato, una guida per turisti del tempo che sia in grado di far loro cogliere gli elementi che è necessario non trascurare al fine di una comprensione organica, ma senza la reale speranza di possedere la conoscenza completa.

Come si può raccontare la Rivoluzione Francese? È probabilmente l'evento più significativo del secondo millennio: i libri di storia sono prevalentemente racconti di gesta di re fino a tutto i Settecento, quando poi, improvvisamente, diventano qualcosa di diverso. Tutto a causa del 14 Luglio del 1789, per la caduta di una fortezza parigina mal difesa e ridotta a prigione?

Ovviamente no. Neanche uno studente delle medie ci crede più, ormai: ciò non di meno, non è oggettivamente possibile riassumere in maniera completa, o anche solo realisticamente accettabile, l'evento dirompente del 1789 (i cui effetti, in ultima analisi, non sono ancora terminati neppure ai giorni nostri) con una buona sintesi della cause. Non se ne può parlare senza raccontare le condizioni della Francia dopo il lungo regno di Luigi XIV; non si potranno trascurare gli effetti delle ricorrenti e devastanti crisi economiche, che a quei tempi si traducevano in carestie e morti per fame in maniera più rapida e diretta di quanto accade oggi; non si potrà certo trascurare l'effetto culturale profondo dell'Età dei Lumi, che restituisce centralità all'Uomo, e soprattutto alla sua Ragione. Ma non sarà possibile neppure trascurare altri eventi più diretti, immediati, vicini: la Rivoluzione Americana, che mostrava come anche gli eserciti dei Re potessero essere battuti da un popolo desideroso di indipendenza; i primi accenni della Rivoluzione Industriale, le prime macchine che riuscivano a mostrare che il lavoro dell'uomo non era poi così imperiosamente un destino di sofferenza e insito nella sua natura, come non era scritto a lettere di fuoco che pochi potenti potessero disporre, possedere addirittura la vita di molti altri uomini.



4 *Jethro Tull (il primo)*

Chi si avventura alla ricerca delle ragioni dovrebbe allora ripercorrere ogni possibile spiraglio, ogni rivolo di informazione che ha condotto alla grande piena dell'evento di studio. Dovrebbe rifuggire dal pensare ai luoghi comuni, e cercare – ad esempio – di associare come si fa sempre la rivoluzione industriale al suo trionfo ferroviario, ma risalire più indietro, ai primi telai, quasi magici, che costruivano in poco tempo quello che i filatori umani riuscivano a fare solo con giorni di fatica, e poi ancora indietro. E magari si stupirebbe nello scoprire che, almeno secondo diverse fonti, il primo esempio di "macchina", nel senso proprio della Rivoluzione Industriale, ovvero di congegno non tradizionale destinato a semplificare le normali attività lavorative, è probabilmente una seminatrice meccanica inventata nel 1701 da un agronomo inglese, tal Jethro Tull.

Se è impossibile ricostruire tutto, è però sempre possibile ritagliare qualche volto, qualche personaggio dalle nebbie degli eventi complessi. Se la Rivoluzione Francese evoca soprattutto immagini di barricate, popolo in rivolta, complicate assemblee tra fazioni rivali e soprattutto ghigliottine crudelmente al lavoro da mattina a sera, si può anche fare lo sforzo di ricercare, tra un Danton e un Robespierre, qualcuno di meno appariscente, ma probabilmente non meno importante, significativo; e forse più rappresentativo del periodo.

5 *Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marchese di Condorcet*

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marchese di Condorcet, nasce il 17 Settembre 1743 a Ribemont, ma il suo titolo nobiliare mostra bene che il suo luogo d'origine è comunque Condorcet, piccola cittadina del Delfinato.

Nobile, non deve condividere le difficoltà economiche che assillano gran parte dei suoi connazionali, nonostante rimanga orfano di padre in giovanissima età. La madre è donna assai religiosa, e provvede all'educazione del figlio affidandolo ad un collegio di Gesuiti a Reims. Il ragazzo è comunque molto dotato, e non tarda a mostrarlo: si trasferisce presto al Collége de Navarre a Parigi, e si narra che già alla tenera età di sedici anni stupisca, con la sua preparazione e brillante mente analitica, quello che sarebbe presto diventato il suo principale insegnante, Jean Le Rond D'Alembert[3].

Da bravo ragazzo prodigio, si dedica inizialmente quasi solo allo studio. All'età di ventidue anni pubblica un saggio sul Calcolo Integrale, e poi sembra non smettere più di pubblicare: a ventisei anni ha già all'attivo più di due dozzine di saggi, ed è abbastanza famoso da essere accolto in seno alla reale Accademia delle Scienze.

Nobile, ricco e famoso, ha evidentemente una carriera aperta e una vita tranquilla di fronte a sé. Oltre a D'Alembert, frequenta molti fra i maggiori intelletti della sua epoca: conosce Voltaire, Eulero[4], Franklin, e naturalmente tutti i matematici di cui la Francia di quei tempi è particolarmente ricca. Quando pubblica nel 1772 una seconda opera sul Calcolo Integrale, a commentarla con le parole "*piena di idee sublimi e promettenti che potranno fornire materia di studio per molti altri lavori*" è lo stesso Lagrange[5]. Poco dopo, Condorcet viene introdotto a quello che potremmo chiamare "il mondo reale" da Turgot, economista abbastanza celebre da diventare il Controllore Generale delle Finanze di Luigi XVI. Grazie a lui, Condorcet viene nominato Ispettore Generale della Zecca.

I suoi impegni professionali gli lasciano comunque sufficiente spazio per mantenere vivi i suoi interessi scientifici: nel 1777 diventa Segretario dell'Accademia delle Scienze, e rimane tale fino a quando la Rivoluzione, nel 1793, la abolirà.

L'influenza di Turgot, economista, e quella di Voltaire, filosofo, producono nella mente del matematico uno strano humus fertile di idee. Condorcet si ritrova ad interessarsi seriamente di aspetti sociali: si occupa di diritti umani, delle minoranze quali donne e persone di colore, si rivela un entusiasta ammiratore dei neonati Stati Uniti d'America. Sull'onda di questa strana commistione tra interessi sociali e matematici, pubblica nel 1785 un'opera originale e per certi versi rivoluzionaria: il "*Saggio sull'Applicazione*

[3] Nome più che noto ai lettori di RM. Oltre che sotto forma di GC, ne parliamo anche in maniera più direttamente connessa all'amico di Condorcet in "La luna di Venere", RM166, Novembre 2012.

[4] Qualcosa (non molto, a dire il vero) su di lui in "Di minuscole forme", RM051, Aprile 2003.

[5] Il primo dei compleanni: "Torino, 1750", RM048, Febbraio 2003.

dell'Analisi Probabilistica delle Decisioni a Maggioranza", che, pur essendo evidentemente destinato a valutare gli aspetti per così dire "operativi" delle votazioni, risulterà decisivo nello sviluppo di tutta la Teoria delle Probabilità.

È in questo saggio che prende forma il cosiddetto "paradosso di Condorcet", che in buona sintesi dimostra che l'apparente transitività delle preferenze (il candidato Tizio è preferito rispetto a Caio, Caio è preferito rispetto a Sempronio, ergo Tizio è preferito rispetto a Sempronio) non vale, ed è possibile che si verifichi una ciclicità delle preferenze, col risultato sconcertante che l'elezione di Tizio, Caio o Sempronio è strettamente influenzabile dal metodo di votazione prescelto. Anche per provare a risolvere l'impasse dato da suo paradosso, Condorcet ideò una metodologia di votazione ("metodo di Condorcet") che, seppur suscettibile di miglioramenti e raffinamenti, è spesso usato ancora oggi[6].

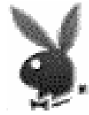
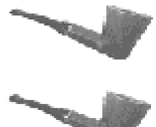
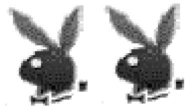
La Rivoluzione, alla fine, lo portò alla massima fama e alla sua definitiva scomparsa. Entusiasta della prima ora, fu eletto nell'Assemblea Legislativa di Parigi, dove lavorò soprattutto al progetto di realizzare un sistema di educazione pubblico per tutti i cittadini. Era uno dei leader Girondini e, ovviamente, quando i Giacobini di Robespierre presero il potere si ritrovò in una situazione fragile e pericolosa. Condorcet aveva scritto le bozze della costituzione della nuova repubblica, e provò a difendere il suo lavoro e le idee che vi trovavano spazio, ma la maggioranza giacobina la sostituì in fretta con una nuova stesura.

Condercet finì con il vivere nascosto, e anche nascosto continuò a scrivere: è di questo periodo il suo trattato filosofico "*Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*". Alla fine, nel marzo del 1794, sì sentì così poco sicuro da decidere di fuggire da Parigi, ma dopo solo tre giorni fu catturato e condotto in prigione. Il 29 Marzo fu trovato morto nella sua cella, e nessuno sa dire ancor oggi se sia morto per cause naturali, per suicidio o se sia stato ucciso.

Rimangono i suoi lavori, e forse ancora più, il suo spirito. Se la metafora della vita umana come viaggio di una locomotiva lanciata in corsa senza freni ha qualche valore, non è difficile immaginarlo come un passeggero incuriosito dal paesaggio, molto cordiale con i compagni di viaggio, e tutto sommato consapevole del fatto che il treno continua a correre senza curarsi troppo delle ambasce degli ignari passeggeri.

[6] Non parleremo più di tanto delle analisi di voto secondo Condorcet per la buona ragione che RM ha sviscerato da tempo (e con brillante successo) tutti i segreti o quasi di tutte le elezioni possibili. Se ve lo siete perso, correte a recuperare "I Sistemi Elettorali", opera maxima del nostro Rudy in quattro parti: RM031, RM033, RM035 e RM037 (Agosto, Ottobre, Dicembre 2001 e Febbraio 2002).

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Pomeriggio nel Luogo del Divano Quantistico			
Parlando di TAV			

2.1 Pomeriggio nel Luogo del Divano Quantistico

...e chiaramente piove, mentre i termometri di tutto il resto d'Italia cominciano a preoccuparsi del fatto di avere solo due cifre sulla scala Reaumur; anzi, ieri per non farci mancare niente grandinava, e la macchina di mia moglie (Rudy speaking) dovrà passare da quello che in famiglia è noto come il Bacio di Bovinelli[7].

Non solo, ma ci girano per casa alcuni Rudolph (vi ricordate che nel LdDQ, quando ci sono anch'io, se ne contano tre su seicento abitanti, vero?), quindi Fred non si sogna neanche di studiare greco o latino; in compenso, per evitare commenti sulla sua presunta ("presunta" secondo lui) asinità, ha intenzione di sfidare i due Rudolph ad un qualche gioco matematico (vi ricordiamo che sono uno un geometra e l'altro un navigatore che si è fatto l'Atlantico in vela con due amici: quindi, a far di conto sono bravini), e non ha trovato niente di meglio che chiedere supporto al R. restante (*c'est moi*).

L'idea è di avere (virtualmente) i numeri naturali da 1 a n su un foglio: il primo giocatore cancella metà dei numeri (approssimazione per difetto se sono in numero dispari), e poi il secondo giocatore fa la stessa cosa sui numeri restanti, e avanti così.

"(Yawn) Emozionante... E quando finisce?"

Finisce quando restano solo due numeri sul foglio. A quel punto si calcola la differenza tra i due numeri.

Il bello è che l'obiettivo del primo giocatore (il quale sceglie anche n) è di ottenere alla fine il valore massimo possibile, mentre il secondo giocatore deve ottenere il valore minimo possibile: e tra il fatto che Fred ha l'appoggio del padre e gli altri due Rudolph si stanno impegnando a non fare figuracce, giocano tutti in maniera ottimale.

Alla prima partita, essendo Fred il primo a giocare, in un eccesso di fantasia ha optato per $n = 2013$; con che valore finirà la partita?

Alla seconda partita, Fred è il secondo, e i due Rudolph scelgono un n tale che permetta loro di ottenere un valore finale una volta e mezzo quello ottenuto al giro precedente da Fred; con che valore hanno iniziato?

Non vorremmo che la domanda cruciale vi impedisca di cercare generalizzazioni a briglia sciolta, quindi ve lo diciamo: Alberto era al mare, con amici, e si è preso la rituale scottatura. Quando torna gli raccontiamo, accompagnando il tutto con robuste, virili ed invidiose pacche sulle spalle.

---

[7] Se non sapete cos'è, rileggetevi *Bar Sport* di Stefano Benni e tenete la macchina sotto una grandinata. Il vostro carrozziere preferito sarà felice di spiegarvelo.

2.2 Parlando di TAV

Nel senso che c'entra un buco. MOLTO lungo.

In realtà, questo aggeggio andrebbe nella rubrica "A.A.A. Soluzione Cercasi", visto che non abbiamo la soluzione: ma siccome abbiamo la risposta (e visto che A.A.A.S.C ha due lettori *[Alice e Doc, che devono correggere i miei strafalcioni grammaticali]*) e vorremmo una buona trattazione del metodo risolutivo, ve lo rifiliamo qui.

L'idea è di fare un tunnel (da cui il titolo), ma in un modo un po' strano: supponendo due città P e T (Paperopoli e Topolinia[8], che altro?), sufficientemente distanziate sul globo terracqueo, prendiamo il cerchio massimo passante per le due città e guardiamo l'opportuna sezione del globo; l'idea del tunnel è di farlo coincidente con la corda PT.

Se fate un po' di ragionamenti, vi accorgete che all'inizio il tunnel è in *discesa*, e alla fine in *salita*: se supponiamo il nostro treno privo di attriti, partendo da P dovrebbe accelerare per metà percorso, poi rallentare e arrivare a fermarsi in T senza bisogno di frenare.

Come tutti sanno, Paperopoli dista da Topolinia esattamente d kilometri, se misurati sulla superficie del globo (poca roba, visto che, come i più anziani Disneyologi ricorderanno dal titolo di un vecchio racconto – che riportava anche la mappa – si ritrovano nello stesso stato. No, non vi diciamo il titolo, vogliamo vedere se ve lo ricordate): basandosi su questo modello a zero consumi (e supponendo si stia parlando della stessa Terra sulla quale viene letta questa Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa), quanto tempo impiegherà il treno a percorrere il tracciato?

Prima che andiate a cercare il pelo nell'uovo sul pelo dell'uovo: Paperopoli e Topolinia sono alla stessa altezza (zero) sul livello del mare. Zio Paperone sente sempre le sue petroliere entrare in porto (e Moby Duck trova parcheggio per la barca vicino a casa di Paperino), e abbiamo la certezza che il Commissario Basettoni abbia, almeno una volta nella seconda metà degli anni Sessanta, convocato Topolino al porto per qualche guaio su una nave. Quindi le acque delle due città forse non saranno un preclaro esempio di balneabilità, ma l'altezza sul livello del mare (e quindi la distanza dal centro della Terra[9]) è la medesima per entrambe.

3. Bungee Jumpers

Provate che ogni intero positivo può essere scritto come somma di al più 53 quarte potenze di interi.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Settembre.

Andiamo. È tempo di tornare al lavoro, sui banchi di scuola, e a tutte le attività che abbiamo temporaneamente lasciato. Va bene, lo sappiamo che anche noi ci siamo stati ben poco, questa estate, o essendo onesti dovremmo dire che siamo un po' presi da qualche tempo, ormai. Però dovete ammettere che ci proviamo, ad essere qui ogni mese, anche se in ritardo, anche se di corsa e con i soliti errori ed omissioni.

C'è di sicuro qualcosa che dovremmo ricordarvi, è settembre, sarà senz'altro successo qualcosa di matematicamente rilevante… ma no, non c'è tempo. Scriviamo queste note che è già settembre, e ciò non è bene. Vediamo almeno di passarvi le soluzioni del mese.

---

[8] Domanda a margine: su quale "i" di "Topolinia" mettereste un accento grave? "Topolìnia" o "Topolinìa"? A Rudy la cosa sembra funzione del tempo: la seconda quando era giovane, oggi pare abbia più piede la prima.

[9] OK, non è proprio vero. Smettetela di fare i pignoli, o risolviamo il problema dell'attrito facendo pedalare voi per la parte mancante.

4.1 [Calendario 2013]

Il nostro ***Sawdust*** è tornato a risolvere i problemi del Calendario, procediamo immediatamente a pubblicare quello che ci scrive, senza i nostri commenti.

4.1.1 Giugno 2013 – Putnam, 1998, A-6

Siano A, B, C punti distinti in R^2 a coordinate intere. Provare che se $(|AB| + |BC|)^2 < 8 \cdot [ABC] + 1$, dove $|XY|$ rappresenta la lunghezza del segmento XY e $[ABC]$ rappresenta l'area del triangolo ABC, allora A, B, C sono tre vertici di un quadrato.

Se chiamiamo a e b i 2 lati del quesito, che chiaramente devono essere i lati minori del triangolo, il quesito stesso può essere riscritto in questo modo:

$$(a+b)^2 < 8\frac{ab}{2}+1 \Rightarrow\Rightarrow a^2+2ab+b^2 < 4ab+1 \Rightarrow\Rightarrow a^2+b^2 < 2ab+1$$

che praticamente mette a confronto le aree di 2 quadrati con il doppio dell'area del rettangolo costruito con i lati dei quadrati stessi. Ma siccome a parità di perimetro l'area di un poligono regolare è maggiore di quella di un poligono irregolare, l'unica possibilità di soddisfare la condizione del problema si ha quando anche il rettangolo diventa quadrato, ossia $a = b$, e l'angolo ABC ha ampiezza 90°.

4.1.2 Luglio 2013 – Putnam, 1998, B-1

Trovare il valore minimo di:

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$$

per x>0.

Con 2 semplici passaggi il numeratore dell'espressione diventa

$$x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}-x^6-\frac{1}{x^6}-2=6x^4+15x^2+18+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}$$

e il denominatore

$$x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}+x^3+\frac{1}{x^3}=2x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}$$

Razionalizzando i due elementi otteniamo

al numeratore

$$\frac{6x^8+15x^6+18x^4+15x^2+6}{x^4}=3\frac{2x^8+5x^6+6x^4+5x^2+2}{x^4}$$

e al denominatore

$$\frac{2x^6+3x^4+3x^2+2}{x^3}$$

che messi assieme danno

$$3\frac{2x^8+5x^6+6x^4+5x^2+2}{x^4}\cdot\frac{x^3}{2x^6+3x^4+3x^2+2}=$$

$$3\frac{2x^8+5x^6+6x^4+5x^2+2}{x\left(2x^6+3x^4+3x^2+2\right)}=\frac{3\left(x^2+1\right)\left(2x^6+3x^4+3x^2+2\right)}{x\left(2x^6+3x^4+3x^2+2\right)}=$$

$$\frac{3\left(x^2+1\right)}{x}=3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

La derivata prima dell'ultima espressione è

$$f'(x)=3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

che si annulla per $x = \pm 1$, con $x = 1$ (il quesito è posto per $x > 0$) si ottiene il valore minimo che è pari a 6.

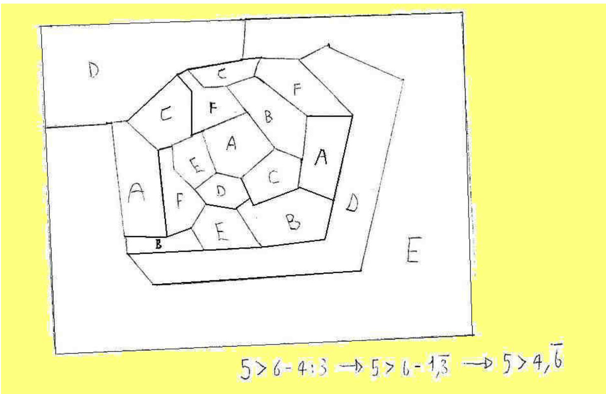
4.2 [174]

4.2.1 Vai col *"fèntasi"*!

Su questo problema si è detto di tutto di più. Il mese scorso avevamo già pubblicato la soluzione di ***Alberto R.*** e ***trentatre***. Prima di passarvi la soluzione che abbiamo ricevuto questo mese, il problema di scrittura creativa:

> *La famiglia di Rudy sta scrivendo un romanzo fantasy e affida a Rudy il disegno della mappa rettangolare, con le seguenti regole:*
>
> *1. Tutte le nazioni sono connesse, e non esistono né isole né colonie, né mari*
>
> *2. Ogni paese confina (nel senso di "connesso") con almeno altri p paesi*
>
> *3. Tra tutte le coalizioni possibili, ne esistono di q nazioni senza frontiere comuni, ma in tutte le coalizioni con più di q nazioni, ci sono sempre alcune nazioni che hanno frontiere comuni.*
>
> *4. Ah, giusto per non fare la cosa troppo facile: p > 6 – 4/q.*
>
> *E adesso disegnate la mappa. Poi, per giocare ancora un po', supponiamo un mondo toroidale…*

Ecco, la soluzione che ci è arrivata è un semplice disegno, ma dato il personaggio che ce l'ha inviato, e il contenuto della soluzione, non possiamo che essere deliziati:



Che ne dite? Si tratta di ***Diego***, un solutore a cui siamo affezionati per molte ragioni, e soprattutto perché è più giovane di RM.

Andiamo avanti con l'altro problema.

4.2.2 Strani, simpatici, ridicoli numeri

Come spesso capita, se non c'è abbastanza tempo per completare l'analisi di un problema interessante, il mese successivo ci arrivano tante nuove soluzioni. Ecco il testo del problema:

> *Diciamo che un numero n è un anagramma precedente il doppio (APD) se il numero 2n–1 è formato dalle stesse cifre di n in ordine diverso: ad esempio, 37 è un numero APD (ve lo calcolate da soli, che è facile).*
>
> *Trovare delle caratteristiche matematicamente interessanti di questi numeri non è facile, ma ne esiste almeno una che è tanto bella quanto "stupida", almeno a prima vista: e, infatti, vi chiediamo di dimostrarla.*
>
> *Se n è un APD che termina con 3, allora deve contenere un 8.*
>
> *Per qualsiasi intero positivo n, esiste un intero positivo k tale che 2km è un anagramma di km.*

Il mese scorso abbiamo pubblicato una soluzione di ***Camillo*** e ***Carlo***, durante questi giorni agostani e festivi ***Sawdust*** e ***trentatre*** si sono dati all'attacco. Cominciamo da ***trentatre***:

> Riassumo il problema
>
> - abbrevio la frase "*n* è anagramma di *k*" con $n\ @\ k$
>
> - *n* è un *APD* se $n\ @\ (2n-1)$ – p. es. $37 @\ (2\cdot 37-1)=73$
>
> - valgono le proprietà
>
> I. se *n* è un *APD* e termina con 3 contiene un 8
>
> II. per ogni intero *m* esiste *k* tale che $2km\ @\ km$.
>
> Le due proprietà riguardano due insiemi di numeri diversi
>
> I. gli *n* per cui $n\ @\ (2n-1)$
>
> II. gli *n* per cui $n\ @\ 2n$.
>
> I. sia $\boldsymbol{V}$ l'insieme di tutti gli *n* per cui $n\ @\ (2n-1)$; i primi $n\in\boldsymbol{V}$ sono
>
> 1 cifra : 1
>
> 2 cifre : 37
>
> 3 cifre : 316, 397
>
> 4 cifre : 3016, 3196, 3367, 3997
>
> 5 cifre : 12574, 25714, 30016, 30196, 30367, 31996, 33166, 33697, 33967, 39997
>
> Come rilevato da ***Camillo*** fra una cifra <5 e una >4 si può sempre inserire un gruppo di 9, e prima di una cifra < 4 si può sempre inserire un gruppo di 0.
>
> Dimostrazione di I.
>
> Dividiamo le cifre decimali in 4 insiemi
>
> $\boldsymbol{A}\equiv\{0,2,4\}$, $\boldsymbol{B}=\{6,8\}$, $\boldsymbol{C}=\{1,3\}$, $\boldsymbol{D}=\{5,7,9\}$
>
> e siano $|c|$ il numero di cifre di *n* uguali alla cifra *c*; $|A|,|B|,|C|,|D|$ i numeri di cifre di *n* dei rispettivi tipi, cioè
>
> $|A|+|B|$: n° di cifre pari ; $|C|+|D|$: n° di cifre dispari
>
> $|A|+|C|$: n° di cifre < 5 ; $|B|+|D|$: n° di cifre > 4
>
> Prendendo come esempio $n=25714\in\boldsymbol{V}$ la somma 2*n*–1 si può scrivere

1)	2	5	7	1	4
2)	2	5	7	1	4
3)					−1
4)	4	0	4	2	7
5)	+1	+1			
6)	5	1	4	2	7

in riga 4) si hanno solo cifre pari, salvo l'ultima

in riga5) i riporti corrispondono alle cifre > 4

il totale in riga 6) ha le stesse cifre di riga 1) con

n° cifre dispari = 1+ n° di riporti = 1+ n° di cifre > 4

da cui $|C|+|D|=1+|B|+|D|$ e quindi[10]

[1] $|C|=1+|B|$ cioè $|1|+|3|=1+|6|+|8|$

- se l'ultima cifra di n è 3 l'ultima cifra di ($2n$–1) è 5
- se la cifra 8 non compare è $|8|=0, |B|=|6|$
- per $|8|=0$, solo i 3 (escluso l'ultimo) possono generare 6 $\to |6|\le|3|-1$
- da [1] $|C|=1+|B|=1+|6|=|1|+|3|\le|3|\to|1|=0\to|C|=1+|6|=|3|$
- per $|1|=0$, solo i 6 possono generare 3 e quindi $|3|\le|6|\to |3|=1+|6|\le|6|$: impossibile
- deve essere $|8|>0$.

Come trovato da ***Camillo*** il primo caso è n =158743.

II. sia $\boldsymbol{U}$ l'insieme di tutti gli n per cui $n \,@\, 2n$; i primi $n\in\boldsymbol{U}$ sono

n° cifre < 6 : nessuna soluzione

6 cifre : 125874, 128574, 142587, 142857, 258714, 258741, 285714, 285741, 412587, 412857, 425871, 428571 (12 valori tutti anagrammi di 124578).

nb. il numero di 9 cifre $q=123456789$ soddisfa a $mq \,@\, q$ per $m=1,2,4,5,7,8$

p.es. $5q=617283945 \,@\, q$ – pertanto $q, 2q, 4q\in\boldsymbol{U}$.

Prima di una cifra >4 si può sempre inserire un gruppo di 9, e prima di una <5 si può inserire un gruppo di 0. In analogia con la [1] si ha, per ogni $n\in\boldsymbol{U}$, $|C|=|B|$ cioè $|1|+|3|=|6|+|8|$.

Indicando con $a\times b$ i numeri a, b scritti di seguito, valgono le[11]

[2] $a, b\in\boldsymbol{U}\to a\times b\in\boldsymbol{U}$

[3] $a\in\boldsymbol{U}, b\in\boldsymbol{V}\to a\times b\in\boldsymbol{V}$

[4] $n\in\boldsymbol{U}\to 10^k n\in\boldsymbol{U},\ \forall k\ge 0$

- se b ha k cifre allora $c=a\times b=10^k a+b$ e nella somma c+c ogni numero resta indipendente (senza riporti da b ad a) quindi in [2] $2(a\times b)=(2a)\times(2b)\,@\,(a\times b)\to(a\times b)\in\boldsymbol{U}$
- analogamente in [3] $2(a\times b)-1=(2a)\times(2b-1)\,@\,(a\times b)\to(a\times b)\in\boldsymbol{V}$
- [4] si ricava direttamente dalla somma n+n.

Le formule precedenti consentono di ampliare i valori in $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$; p.es.

---

[10] Se n termina con k zeri la [1] va sostituita con $|C|=k+1+|B|$ il primo n che termina con zero è 15357790.

[11] Con l'operatore × (concatenazione dei numeri) vale per l'insieme $\boldsymbol{U}$ il prodotto $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}$, in generale per ogni insieme $\boldsymbol{V}=\{n : n\,@\,(\alpha n+\beta)\}$ con α, β interi vale $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}$.

$n = 125874 \times 37 = 12587437 \in \boldsymbol{V}$, $n = q \times 316 = 123456789316 \in \boldsymbol{V}$

$n = q \times 125874 = 123456789125874 \in \boldsymbol{U}$.

Utilizzando q si ricava che gli $n \in \boldsymbol{V}$ e $n \in \boldsymbol{U}$ possono contenere ogni cifra ripetuta un numero qualsiasi di volte.

Da [2], [4] si può ricavare una dimostrazione di II. – per [4] basta dimostrarla per gli m primi con 10.

Con $f = \varphi(m)$: n° di interi $<m$ e primi con m vale il teorema di Euler[12]

$10^f \equiv 1 \pmod m$ da cui $10^h \equiv 1 \pmod m$ per ogni h multiplo di f

- sommando m volte , poiché $m = \sum_{s=1}^{m} 1$

$\sum_{s=1}^{m} 10^{h_s} \equiv \sum_{s=1}^{m} 1 \equiv 0 \pmod m$ con gli h_S multipli di f e grandi a piacere

- moltiplicando per qualsiasi $n \in \boldsymbol{U}$ non multiplo di m

$\sum_{s=1}^{m} (n \cdot 10^{h_s}) \equiv 0 \pmod m$

- per [4] ogni $n \cdot 10^{h_s} \in \boldsymbol{U}$ e quindi, se gli h_S sono scelti in modo che i diversi valori siano separati da gruppi di 0 si ha

$n' = \sum_{s=1}^{m} (n \cdot 10^{h_s}) = n_1 \times n_2 \times \ldots n_M \equiv 0 \pmod m$ con ogni $n_i \in \boldsymbol{U}$ cioè per [2]

$n' \in \boldsymbol{U}$, $n' \equiv 0 \pmod m \rightarrow n' = km @ 2km$.

Bene, sembra che la soluzione di Camillo abbia comunque ispirato i nostri lettori. Vediamo adesso se riusciamo a riportarvi i tratti principali del discorso di ***Sawdust*** (che ci ha mandato parecchie versioni, se vi sembra che non si capisca il filo del discorso la colpa è totalmente mia – di Alice – che non ho saputo scegliere la sequenza giusta di documenti). Il suo primo contributo cercava proprio stranezze e proprietà:

Id	N	2N-1	Secondo "La Sfinge"
1	37	73	Antipodo
2	316	631	
3	397	793	Antipodo
4	3016	6031	
5	3196	6391	
6	3367	6733	Antipodo sillabico?
7	3997	7993	Antipodo
8	12574	25147	
9	25714	51427	
10	30016	60031	
11	30196	60391	
12	30367	60733	
13	31996	63991	
14	33166	66331	Antipodo sillabico?
15	33697	67393	
16	33967	67933	Antipodo sillabico?
17	39997	79993	Antipodo

Diciamo che un numero n è un *anagramma precedente il doppio* (APD) se il numero $2n–1$ è formato dalle stesse cifre di n in ordine diverso.

Inutile precisare (e allora perché lo fai?) che il discorso non vale per numeri di una sola cifra, mentre è da indicare subito che la prima cifra del numero in questione non può essere maggiore di 4. Oltre alla coppia di esempio (37 e 73) saltano subito agli occhi le coppie nella tabella.

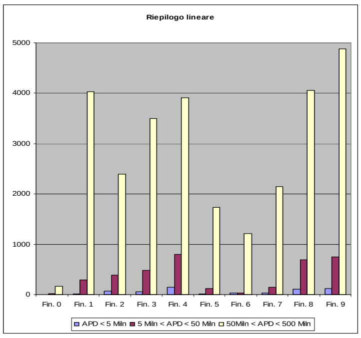
Spingendo più in alto la ricerca (per $N < 500.000.000$) si trovano 32.371 coppie che a prima vista presentano questi fatti notevoli: innanzi tutto la differenza tra un A.P.D. e il successivo è sempre un multiplo di 9, anche nei casi in cui si passa da un A.P.D. che è il primo minore di $5 \cdot 10^n - 1$ a un A.P.D. appena superiore a 10^{n+1}. Tra l'altro in questi casi, ad eccezione di quelli per valori inferiori a 105.000, la differenza è sempre della forma 5x31.315 dove al posto della x c'è un numero di 0 pari a $n – 5$.

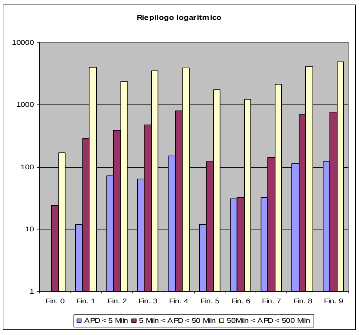
A parte questi casi, la distanza massima tra 2 A.P.D. successivi è 10.009.971, tra 439.997.158 e 450.007.129, la differenza minima è 36 in tantissimi casi.

[12] Con $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots$ è $\varphi(m) = m \cdot (1 - 1/p_1) \cdot (1 - 1/p_2) \ldots$

Poi risulta abbastanza evidente una distribuzione un po' strana se rapportata all'ultima cifra, infatti, mentre ci si potrebbe aspettare una divisione più o meno uniforme, in realtà la situazione è quella in tabella, che graficamente si presenta così:

Finale	APD < 5 Mln	5 Mln < APD < 50 Mln	50Mln < APD < 500 Mln
Fin. 0	0	24	168
Fin. 1	12	288	4032
Fin. 2	72	390	2394
Fin. 3	64	480	3500
Fin. 4	150	796	3910
Fin. 5	12	120	1740
Fin. 6	31	32	1216
Fin. 7	32	140	2152
Fin. 8	112	696	4048
Fin. 9	120	756	4884





0. Se N finisce per 0 (e sono solo 192 casi su 32.371) deve contenere un 9, ma almeno un 9 è sempre al penultimo posto e tutte le cifre che lo compongono sono dispari.
1. Se N finisce per 1 al suo interno ce n'è sempre un altro, ma solo uno, e per N<123.567.841 non compaiono mai le cifre 3 e 6. Tra l'altro qui è carina la serie seguente nella quale compaiono tutte le cifre da 1 a 8, con l'1 ripetuto all'inizio e alla fine

123.567.841	247.135.681
123.576.841	247.153.681
123.657.841	247.315.681
123.675.841	247.351.681
123.756.841	247.513.681
123.765.841	247.531.681

2. Se N finisce per 2, se vi compare il 7 ce ne sono sempre 2, accompagnati da un solo 8, che non compare mai in assenza dei 7.
3. Se N finisce per 3, come citato nel testo del quesito, contiene sempre un 8 (perché??), chiaramente anche un 5, ma non compare mai il 2.
4. Se N finisce per 4, deve contenere almeno un 7, ma tutti gli N appena superiori ai 3.000.000 (e sono 16) sono formati da tutte le cifre tra 1 e 7.

3.125.674	6.251.347
3.126.574	6.253.147
3.156.274	6.312.547
3.157.264	6.314.527
3.157.624	6.315.247
3.162.574	6.325.147
3.172.564	6.345.127
3.175.624	6.351.247
3.215.764	6.431.527
3.217.564	6.435.127
3.256.174	6.512.347
3.256.714	6.513.427
3.257.164	6.514.327
3.261.574	6.523.147
3.265.714	6.531.427
3.271.564	6.543.127

5. Se N finisce per 5 al suo interno ce n'è sempre un altro, e non compare mai il 4, mentre per trovare un 3 e/o un 6 bisogna arrivare fino a 125.678.395.
6. Se N finisce con un 6 deve contenere almeno un 1, ma per N < 50.000.000 la prima cifra è sempre 3, in N compaiono solo 0,1,3,6 e 9 e le cifre 3 e 6 sono sempre rappresentate in pari quantità con un massimo di 3 presenze. Questa situazione si ripete anche negli intervalli 300.000.016<N<303.319.666 e 330.000.166<N<333.316.666, ma in quest'ultimo caso il massimo delle presenze sale a 4. Gli APD presenti tra questi 2 intervalli (e sono 72, oltre al 319.999.996 che ha le stesse caratteristiche degli intervalli citati) e quelli al di sopra di questo limite (che sono 432) sono tutti formati da una cifra per ogni valore più un 1.
7. Se N finisce con un 7, per N < 5.000.000 la prima cifra è sempre 3, il 7 compare una sola volta in ogni N e le cifre che lo compongono sono solo 0, 3, 6, 7 e 9. Carina la serie $3\overline{9}.....7$ con la cifra 9 ripetuta a piacere, che è l'APD di $7\overline{9}.....3$. Per quello che riguarda il 6 in questo caso compare solo se in N ci sono almeno 2 cifre 3, infatti detti **s** e **t** il numero di cifre 6 e 3 all'interno di N, vale la relazione $s = t - 1$.

8. Se N finisce per 8 il 2 compare solo in coppia (non necessariamente vicina) e solo insieme a una coppia di 5 (anche questi non necessariamente vicini).
9. Se N finisce per 9 al suo interno non compare mai l'8 ed è degno di nota l'APD 123.456.799.

Ora resterebbe da chiarire perché se N finisce con 3 contiene anche l'8, ma mi sto divertendo troppo a cercare altre cose strane in mezzo a questi numeri e allora….

Andando ancora più in alto con la ricerca di A.P.D. (e per ora sono arrivato a 3.226.411.558, trovando in totale 162.509 A.P.D.), e continuando a guardare le cifre finali, ho notato una certa frequenza di ripetizioni successive della stessa cifra, anche con serie già a prima vista notevoli. Analizzando meglio la cosa è uscita fuori questa tabellina:

Le serie più lunghe con ripetizione della cifra finale

Ripetiz	Fin	Da	A	Range	Dist. Media
1216	5	2.756.018.395	2.799.985.915	43.967.520	36.187,26
390	3	1.680.035.743	1.689.957.433	9.921.690	25.505,63
316	6	1.170.258.436	1.182.075.436	11.817.000	37.514,29
282	6	1.184.257.036	1.198.743.256	14.486.220	51.552,38
246	5	1.275.680.395	1.279.998.595	4.318.200	17.625,31
224	3	1.865.007.343	1.870.099.543	5.092.200	22.834,98
214	5	2.875.000.915	2.890.010.755	15.009.840	70.468,73
212	5	2.576.018.395	2.579.998.915	3.980.520	18.865,02
192	6	1.710.258.436	1.714.938.256	4.679.820	24.501,68
174	5	275.008.915	279.985.915	4.977.000	28.768,79
168	8	1.100.242.558	1.122.554.908	22.312.350	133.606,89
156	9	459.997.129	465.713.299	5.716.170	36.878,52
132	5	2.675.081.395	2.679.935.815	4.854.420	37.056,64
120	6	1.912.345.786	1.923.148.756	10.802.970	90.781,26
104	6	1.317.042.586	1.319.874.256	2.831.670	27.491,94
96	6	1.150.728.436	1.154.382.706	3.654.270	38.466,00
96	6	1.510.728.436	1.514.382.706	3.654.270	38.466,00
89	3	1.568.003.743	1.568.997.433	993.690	11.291,93
89	3	1.658.003.743	1.658.997.433	993.690	11.291,93
88	6	1.417.025.836	1.418.207.536	1.181.700	13.582,76
84	3	189.345.673	189.995.743	650.070	7.832,17
84	3	1.899.345.673	1.899.995.743	650.070	7.832,17
84	3	1.989.345.673	1.989.995.743	650.070	7.832,17
82	6	1.812.570.436	1.814.207.536	1.637.100	20.211,11
68	5	2.750.008.915	2.751.099.895	1.090.980	16.283,28
58	5	2.751.306.895	2.753.918.065	2.611.170	45.810,00

Le coppie di serie evidenziate hanno tutti i termini al loro interno che differiscono solo per l'inversione della seconda e terza cifra dell'A.P.D. Nel foglio di Excel allegato ci sono queste serie complete, ammesso che possano interessare a qualcuno. Tra i due numeri in rosso ci sono 726 APD, di cui ben 720 terminano col 6 e solo 6 col 3. Le 2 ultime serie riportate non sono tanto grandi, ce ne sono altre più lunghe, ma tra queste 2 serie c'è un solo A.P.D. (2.751.125.590). La grande maggioranza di queste serie termina col 3, col 5 o col 6.

La serie che comincia da 189 milioni penso debba avere una sorella a 198 milioni, ma forse me ne sono perso qualche elemento. Ha però una figlia che nasce clonata solo aggiungendo al suo interno un 9. avrà anche questa una figlia uguale oltre ad avere la sorella? Proverò a vedere andando ancora più in alto.

Per quanto riguarda i salti più grandi tra un A.P.D. e il successivo, finora ne ho trovati 11 superiori a 10 milioni, e il più elevato è di 15.571.530 tra 2.265.584.113 e 2.281.155.643.

Nel seguito, ***Sawdust*** è arrivato ad una formulazione più generale del problema:

Diciamo che un numero n è un *anagramma precedente il doppio* (APD) se il numero $2n–1$ è formato dalle stesse cifre di n in ordine diverso.

In realtà il testo del quesito può essere riscritto (quasi, vedremo poi perché) così:

> Diciamo che un numero n è un *anagramma precedente/successivo il multiplo* (APX o ASX) se il numero $Xn±1$ è formato dalle stesse cifre di n in ordine diverso.

Provando a cercare questi numeri per valori di n inferiori a 100.000.000 viene fuori questo quadro di riepilogo

Presenze in APX e ASX per n<100.000.000						
Fattore	APX	minAPX	MaxAPX	ASX	minASX	MaxASX
2	4.327	37	49.971.259	4.709	125	49.387.715
3	2.445	2.471	32.950.868	2.240	103	32.907.685
4	0			0		
5	496	12.463	19.992.643	2.181	1.748	19.999.748
6	729	11.702	16.599.359	818	1.519	16.593.559
7	0			0		
8	210	10.138	12.397.891	195	1.139	12.315.389
9	276	1.079	11.090.789	154	107.794	10.998.901

Come premesso quel "quasi" è dovuto al fatto che per X uguale a 4 e a 7 non ho trovato nessun valore corretto. Anche provando ad analizzare le cifre finali dei numeri in questione saltano fuori delle cose un po' strane:

Cifre finali (totali) in APX per n<100.000.000										
Fattore	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	24	300	462	544	946	132	63	172	808	876
3	131	297	63	126	436	184	272	376	242	318
4										
5	0	0	0	158	156	0	0	92	12	78
6	26	60	112	39	71	28	67	193	41	92
7										
8	5	4	15	28	31	1	5	11	53	57
9	5	24	16	10	8	23	10	11	52	117

Cifre finali (totali) in ASX per n<100.000.000										
Fattore	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	580	544	444	228	96	648	508	396	396	869
3	138	144	229	268	278	182	250	380	171	200
4										
5	263	12	36	326	268	12	288	296	396	284
6	216	3	64	37	63	91	38	85	84	137
7										
8	22	1	10	6	4	51	4	43	20	34
9	10	36	5	21	16	8	18	6	9	25

La distribuzione di queste cifre è abbastanza irregolare e saltano agli occhi le assenze di 0, 1, 2, 5 e 6 negli AP5.

A riguardo del fattore X=4, di sicuro esistono valori di n che rispondono alla forma $4n$–3, mentre per ora non ne ho trovati della forma $4n$–2.

OK, questa dovrebbe essere l'ultima versione della prima parte. Vediamo la seconda:

Per qualsiasi intero positivo m, esiste un intero positivo k tale che $2km$ è un anagramma di km.

Il fatto più strano(!?!), ma ritengo che voi ne foste già al corrente, a differenza di me, che senza il vostro lancio mai avrei pensato a una cosa simile, è che l'enunciato può essere riscritto in quest'altro modo:

Per qualsiasi intero positivo $\boldsymbol{m}$, esiste un intero positivo $\boldsymbol{k}$ tale che $\mathbf{x}\boldsymbol{km}$ è un anagramma di km, con $2 \leq x \leq 9$.

Ho trovato i valori di k corrispondenti ai valori di m fino a 10.000, questo è un breve[13] esempio per $m \leq 40$.

m	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6	x=7	x=8	x=9
1	125.874	1.035	1.782	142.857	1.386	1.359	113.967	1.089
2	62.937	5.175	891	512.874	693	5.844	507.069	5.445
3	41.958	345	594	47.619	462	453	37.989	363
4	269.631	3.681	4.401	256.437	3.465	2.922	284.787	26.973
5	214.857	207	3.564	34.857	2.772	2.718	227.934	2.178
6	20.979	1.725	297	170.958	231	1.948	169.023	1.815
7	17.982	3.393	2.826	24.975	198	15.369	16.281	1.557
8	157.338	17.307	2.229	196.281	1.899	1.461	144.549	128.682
9	13.986	115	198	15.873	154	151	12.663	121
10	125.874	1.035	1.782	142.857	1.386	1.359	113.967	1.089
11	12.987	225	162	12.987	126	1.173	95.058	99

In questa tabella ho scritto solo i valori di k, che per ogni colonna vanno ancora moltiplicati per m e per il valore di x nell'intestazione. Se pensate possa interessare vi posso passare la montagna di cifre che è venuta fuori. Ci sono un sacco di considerazioni che si potrebbero fare su un simile mucchio di numeri, e la più assillante di tutte mi ricorda molto la battuta trita e ritrita di G.B. Shaw sul golf[14]. Più seriamente:

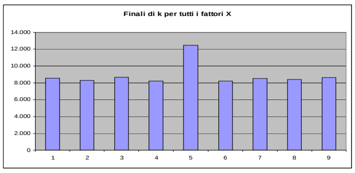
- nella grande maggioranza dei casi k è multiplo di 9

[13] Da noi tagliato, quindi ancora più breve…

[14] Se non ricordo male: "Non è necessario essere stupidi per giocare a golf, però aiuta."

- però nel breve stralcio qui sopra, solo 1, 5, 10, 25, 31 e 37 hanno tutti i valori multipli di 9
- nel caso del fattore 7 solo 7 valori (i precedenti più il 32) sono multipli di 9
- il fattore che richiede i valori di *k* più grandi è il 9, e il maggiore è 22.371.336 per *m*=4.4474
- capita di trovare valori di *k* uguali tra numeri che apparentemente non hanno nessuna relazione (es. *m*=3.136 e *m*=3.209 con *k*8=3.197.223, *m*=579 e *m*=580 con *k*3=2.133, *m*=598 e *m*=791 con *k*2=36.081 o *m*=142 e *m*=143 con *k*6=999)
- ci sono accoppiamenti forse ancora più strani, come *m*=504 / *k*3=494 e *m*=505 / *k*3=495
- la distribuzione delle cifre finali di *k* non è molto uniforme, complessivamente la cifra 5 compare circa il 50% più spesso di ognuna delle altre

Finale	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6	x=7	x=8	x=9	Totale
1	1.237	1.038	1.001	1.105	883	1.063	1.108	1.130	8.565
2	991	961	1.208	1.006	1.226	943	1.146	814	8.295
3	1.233	1.049	1.003	1.157	908	1.143	1.094	1.077	8.664
4	975	942	1.209	1.023	1.189	932	1.163	819	8.252
5	1.178	1.948	1.199	1.475	1.388	1.755	1.191	2.337	12.471
6	966	946	1.214	970	1.265	950	1.096	838	8.245
7	1.222	1.034	1.006	1.129	903	1.062	1.073	1.066	8.495
8	964	994	1.221	1.006	1.311	976	1.078	839	8.389
9	1.234	1.088	939	1.129	927	1.176	1.051	1.080	8.624



- *k*3 vale 1 per *m*=1.035 e *m*=2.475, *k*4 vale 1 per *m*=1.782 e *m*=2.178, *k*6 vale 1 per *m*=1386, *k*7 vale1 per *m*=1359 e *k*9 vale 1 per *m*=1089. Naturalmente *k*2=1 con *m*=125.874, *k*5=1 con *m*=142.857 e *k*8=1 con *m*=113.967, ma siccome la ricerca è limitata a *m*<=10.000 ….. nel complesso i minimi e i massimi di *k* sono indicati in tabella

x	min	per m	Max	per m
2	14	8.991	269.631	4 * 10n
3	1	1.035 e 2.475	429.633	2.359
4	1	1.782 e 2.178	364.716	2.783
5	17	8.721	641.088	$16 * 10^n$
6	1	1.386	1.860.858	5.383
7	1	1.359	2.863.104	3.508
8	21	5.427	16.714.359	5.992
9	1	1.089	22.371.336	4.474

- lo zero non compare come cifra finale in quanto la ricerca riguarda i valori minimi di *k* per ogni *m*, un *k* multiplo di 10 avrebbe comunque un sottomultiplo che genera gli stessi numeri come risultato sia per *km* che per *xkm*, a parte lo 0 finale per entrambi i valori
- nel valore di *km* compare 6 volte il numero 123.456.789, di queste per 2 volte con *x*=8, e 2 volte il numero 1.234.567.890

x	m	k	km	kmx
2	3.803	32.463	123.456.789	246.913.578
4	3.803	32.463	123.456.789	493.827.156
5	3.607	34.227	123.456.789	617.283.945
7	3.803	32.463	123.456.789	864.197.523
8	3.607	34.227	123.456.789	987.654.312
8	3.803	32.463	123.456.789	987.654.312
7	7.214	171.135	1.234.567.890	8.641.975.230
8	7.606	162.315	1.234.567.890	9.876.543.120

- ci sono 44 casi in cui *m* è anagramma di *k* e 4 casi in cui *m* e *k* coincidono per cui *km* è un quadrato
- sia nei valori di *k* che nei valori di *km* ci sono tanti doppioni, il numero dei valori distinti è nella tabella seguente

x	k	km
2	4.817	3.710
3	5.072	3.747
4	5.736	3.515
5	6.021	3.555
6	6.053	3.397
7	7.707	3.602
8	8.698	3.481
9	8.154	3.636

- invece i valori più ripetuti sono

m Anagramma di **k**

x	m	k		x	m	k
2	1.311	3.111		4	2.463	4.263
2	3.111	1.311		4	4.263	2.463
2	3.426	6.234		4	5.421	2.145
2	3.891	3.819		5	1.155	1.515
2	4.362	3.264		5	1.395	9.153
2	4.692	6.942		5	1.515	1.155
2	5.664	4.656		5	1.788	8.781
2	6.234	3.426		5	2.496	6.294
2	6.753	3.567		5	2.547	5.724
2	7.410	1.407		5	3.159	3.915
2	7.461	1.467		5	3.714	4.713
3	456	546		5	3.915	3.159
3	1.461	1.641		5	4.317	4.137
3	1.641	1.461		5	4.713	3.714
3	1.848	1.488		5	5.328	3.285
3	4.536	3.465		5	6.072	2.607
3	4.539	3.945		5	6.294	2.496
3	5.343	5.343		5	8.781	1.788
3	8.193	3.819		5	9.117	1.791
3	8.682	2.868		5	9.717	1.779
3	9.132	3.129		6	1.236	1.326
4	219	912		9	33	33
4	912	219		9	3.183	3.183
4	1.581	1.518		9	3.285	3.285

x	k	Rip	km	Rip
2	9.999	31	1.258.740	55
3	225	45	248.976	59
4	18	30	178.200	40
5	19.998	18	10.257.408	72
6	198	29	1.006.848	59
7	15	11	116.688	59
8	12.663	5	101.638.152	65
9	135	12	10078992	47
8	37.989	5	121.576.896	64
8	113.967	5	101.442.528	57
8	136.476	5	10.645.128	53
8	169.326	5	11.396.700	51
2			1.485.792	55
9			102.424.896	45

> Queste ultime 2 tabelle sono state realizzate senza tenere conto, per ora, dei multipli di 10, che forse sarebbe meglio raggruppare come valori quasi simili. Infatti, come esempio, col fattore 9 il valore k=1.089 compare 9 volte, il valore k=10.890 compare 26 volte, il valore k=108.900 è presente 35 volte, il valore k=1.089.000 è presente 32 volte, il valore k=10.890.000 c'è per 19 volte, k=108.900.000 5 volte, ma 1.089.000.000 non c'è più. Troveremo altri multipli decadici di 1.089 con valori di m più grandi?
>
> Tornando a parlare di accoppiamenti "strani", quando il fattore x vale 2 per m=6.425 k=6.426, ma per m=6.426 k=3.386 così come per m=4.634 k=4.635, ma m=4.635 k=2.677. Invece se x vale 7 c'è la coppia speculare m=365 k=366 e m=366 k=365.
>
> Un altro fatto che mi ha colpito si verifica quando il valore di k non cambia per 2 valori successivi di m. Nell'intervallo di valori di m esaminati questo si verifica in 125 casi (di cui ben 33 con x=3 e solo1 con x=8) e per 1 volta succede con 3 valori successivi di m con x=6 (per m=1.414, 1.415, 1.416 il valore di k è sempre 99).
>
> Notevole il fatto che la coppia m=1.110, 1.111 compaia per tutti i valori di x escluso l'8.
>
> Analogamente si verificano casi in cui per m e m+2 il valore di k non cambia e ciò succede per 82 coppie (e il numero maggiore di casi, 20, sempre per x=3) e nuovamente un terzetto che torna con x=6 e, sorpresa (!?), m=2.828, 2.830, 2.832 che sono il doppio dei componenti il precedente trio, e k=495, quintuplo del precedente 99, per cui i 3 valori di km sono uguali ai precedenti moltiplicati per 10 e quindi nuovamente anagrammabili nel sestuplo.
>
> Indiscutibile, almeno per me, che a questo punto il loro nome debba essere A.M.X (anagrammi multipli di X) eventualmente suddivisibili in A.M.2, A.M.3 ….A.M.9.

Bene. L'ultima mail conteneva un bel foglio excel per calcolare i vari tipi. Ma noi non vi passiamo niente, ci saranno altre occasioni, crediamo. Anche perché sono sicura di aver mancato il contributo essenziale di cui il foglio excel era il sommario. Ed ora basta, non abbiamo nemmeno sfiorato i problemi di agosto.

4.3 [175]

4.3.1 Il gioco dei sette nani

Vi chiederete perché cominciamo con il secondo problema… beh, la risposta non è difficile: nessuno ci ha mandato soluzioni per il primo! Sarà un problema postale? Speriamo di sentire novità il mese prossimo, nel frattempo ecco qui il secondo problema ad ambientazione disneyana:

> *I Sette Nani, posizionatisi in ordine alfabetico attorno ad un tavolo circolare, stanno inventandosi un gioco. Chi vince paga ad ogni altro giocatore una posta pari a quello che l'altro giocatore ha in quel momento. Se perde, ciascuno si tiene i suoi soldi. I Nostri cominciano a giocare, e dopo un po' si accorgono che non solo hanno vinto una partita a testa in ordine alfabetico, ma alla fine ciascuno di loro ha esattamente* 1,28 *Euro in tasca. Quanto aveva in tasca ciascuno di loro all'inizio della partita?*

Avendo tagliato la maggior parte delle parentesi, probabilmente ho eliminato qualche parte essenziale del problema: in caso fate riferimento a RM175, che è meglio.

Bene, cominciamo da ***Carlo V***, che ha un approccio per passi:

Situazione iniziale:

Riga	Situazione iniziale	Nano 1	Nano 2	Nano 3	Nano 4	Nano 5	Nano 6	Nano 7
1	Dopo vittoria del nano 1							
2	Dopo vittoria del nano 2							
3	Dopo vittoria del nano 3							
4	Dopo vittoria del nano 4							
5	Dopo vittoria del nano 5							
6	Dopo vittoria del nano 6							
7	Dopo vittoria del nano 7	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28

Dato che il nano 1 raddoppia la cifra quando vincono gli altri nani, posso costruire a ritroso la colonna 1 fino alla riga 1.

E analogamente: dato che il nano N raddoppia la cifra quando vincono gli altri nani, posso costruire a ritroso la colonna N fino alla riga N.

Riga	Situazione iniziale	Nano 1	Nano 2	Nano 3	Nano 4	Nano 5	Nano 6	Nano 7
1	Dopo vittoria del nano 1	0.02						
2	Dopo vittoria del nano 2	0.04	0.04					
3	Dopo vittoria del nano 3	0.08	0.08	0.08				
4	Dopo vittoria del nano 4	0.16	0.16	0.16	0.16			
5	Dopo vittoria del nano 5	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32		
6	Dopo vittoria del nano 6	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	
7	Dopo vittoria del nano 7	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28

Poiché la somma dei soldi che gira sul tavolo è 1.28 * 7 = 8.96 €, posso dire che nella riga 1 i nani dal 2 al 7 hanno in totale 8.96 – 0.02 = 8.94 €.

Quindi il nano 1 elargisce 8.94 / 2 = 4.47 € e la sua situazione iniziale è 4.47 + 0.02 = 4.49€.

In modo analogo:

- nella riga 2 tutti i nani diversi dal nano 2, hanno in totale 8.96 – 0.04 = 8.92 €;
- il nano 2 elargisce quindi 8.92 / 2 = 4.46 €;
- il nano 2 nella riga 1 deve avere 4.46 + 0.04 = 4.50 €;
- la sua situazione iniziale deve essere 2.25 €.

E così via, e si completa tutto lo schema:

Riga	Situazione iniziale	Nano 1	Nano 2	Nano 3	Nano 4	Nano 5	Nano 6	Nano 7
		4.49	2.25	1.13	0.57	0.29	0.15	0.08
1	Dopo vittoria del nano 1	**0.02**	4.50	2.26	1.14	0.58	0.30	0.16
2	Dopo vittoria del nano 2	0.04	**0.04**	4.52	2.28	1.16	0.60	0.32
3	Dopo vittoria del nano 3	0.08	0.08	**0.08**	4.56	2.32	1.20	0.64
4	Dopo vittoria del nano 4	0.16	0.16	0.16	**0.16**	4.64	2.40	1.28
5	Dopo vittoria del nano 5	0.32	0.32	0.32	0.32	**0.32**	4.80	2.56
6	Dopo vittoria del nano 6	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	**0.64**	5.12
7	Dopo vittoria del nano 7	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	**1.28**

Direi che se la cava in maniera egregia. Il nostro immancabile ***Alberto R.*** comincia subito controllando se il problema è ben posto (visto che con noi non è quasi mai il caso):

Cominciamo con l'esegesi del testo.

"...*Se perde ciascuno si tiene i suoi soldi*..." Viene da pensare che una siffatta giocata, essendo *inefficace*, può essere trascurata e si possono considerare la sole partite in cui chi gioca vince. Sarebbe un ragionamento errato perché le partite inefficaci pur non comportando movimenti di denaro, alterano l'ordine delle partite efficaci e quindi cambiano il risultato finale. Faccio un esempio indicando i nani (già disposti in ordine alfabetico) con i numeri da 1 a 7 e mettendo tra parentesi le giocate inefficaci.

1 (2) (3) 4 5 6 7 (1) 2 3 (4) (5) (6) (7)

Queste 14 partite equivalgono alla seguente successione di 7 partite efficaci:

1 4 5 6 7 2 3

Ma gli Autori (questa volta) sono stati attenti e hanno precisato che *"... hanno vinto una partita a testa in ordine alfabetico..."*. Questa precisazione rende determinato il problema e ci consente di risolverlo supponendo che si siano svolte solo 7 partite, tutte efficaci e nell'ordine naturale da 1 a 7.

E veniamo alla soluzione.

Alla fine del gioco ogni nano possiede 128 centesimi per un totale di 896 centesimi. Questo totale è invariante ed era presente fin dall'inizio.

Una piccola astuzia consente di semplificare il ragionamento: anziché dire che il vincitore paga *agli altri* una somma pari a quanto già possiedono, diciamo che egli paga *tutti sé stesso compreso*, il che, ovviamente, è la stessa cosa, ma in tal modo l'effetto di una giocata può essere riassunto in queste due semplici regole:

Tutti raddoppiano il loro capitale

Il vincitore, dopo aver (come gli altri) raddoppiato, detrae 896 centesimi.

In definitiva il nano *N*esimo, che inizialmente possiede X_N centesimi, dopo che hanno giocato gli N–1 nani che lo precedono possiede $2^{N-1}\cdot X_N$ centesimi. Con la sua giocata raddoppia ancora giungendo $2^N\cdot X_N$, poi detrae 896 e passa la mano avendo in tasca $2^N\cdot X_N - 896$ centesimi. Con le restanti $7-N$ partite quest'ultimo importo raddoppia $7-N$ volte e alla fine egli possiede $2^7 \cdot X_N - 2^{7-N}\cdot 896$ centesimi, quantità che, per ipotesi, vale 128 centesimi.

Abbiamo dunque le 7 equazioni: $2^7 \cdot X_N - 2^{7-N}\cdot 896 = 128$ le cui soluzioni sono:

X_N = 449, 225, 113, 57, 29, 15, 8 (per N=1...7)

E i numeri risultanti sono gli stessi, che è un gran bel risultato. ***Luke Kleinwalker*** questa volta ha lavorato ad una versione word:

Supponiamo che il denaro circolante sia $7x$ e che quindi alla fine del gioco ogni nano abbia x. Ad ogni giocata, il denaro p di un nano può:

1. Raddoppiare nel caso di una perdita: $p'=2p$
2. Diminuire di una quantità pari alla somma dei saldi dei rimanenti: $p' = p - (7x - p) = 2p - 7x$

Adesso immaginiamo che la partita si svolga a "ritroso", ovvero che sia Pisolo il primo a vincere e Brontolo l'ultimo e che:

Per chi perde $p' = \frac{p}{2}$

Per chi vince $p' = \frac{7x+p}{2}$

Pisolo, vincendo all'inizio e perdendo poi sempre, avrà alla fine una somma di $\left(\frac{7x+x}{2}\right)\frac{1}{2^6} = \frac{x}{16}$

Mammolo, vincendo unicamente per secondo, avrà alla fine $\left(\frac{7x+\frac{x}{2}}{2}\right)\frac{1}{2^5} = \frac{15x}{128}$…

In generale l' n-esimo nano (n=1,2,…7) avrà alla fine $\left(\frac{7x+\frac{x}{2^{7-n}}}{2}\right)\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{7\cdot 2^{7-n}+1}{2^7}x$

Nel nostro problema il nano n-esimo avrà dunque una quota iniziale di $(7 \cdot 2^{7-n} + 1) \cdot 0{,}01$

Brontolo: 4,49

Cucciolo: 2,25

Dotto: 1,13

Eolo: 0,57

Gongolo: 0,29

Mammolo: 0,15

Pisolo: 0,08

> Se i nani fossero stati h, l'ammontare dell'n-esimo alla fine sarebbe stato pari a $\frac{h \cdot 2^{h-n}+1}{2^h}$

Beh, un numero di nani imprevisto, h, ma si può fare… certo che inventarsi i nomi diventa poi più complicato. Concludiamo con ***Franco57***, che al solito ci spiega tutto:

> Il quesito si risolve bene partendo dalla fine, quando tutti hanno 128 centesimi, e risalendo all'indietro. L'ultima partita l'ha vinta Pisolo, perciò al turno precedente tutti gli altri avevano 64 cent, che è la metà dei 128 che hanno alla fine, mentre Pisolo aveva i 128 cent che gli sono rimasti alla fine maggiorati dalle 6 quote di 64 cent che ha dovuto distribuire, cioè 512 cent.
>
> Continuando in questo modo si trova quanto possedeva ciascun nano all'inizio (i conti me li fa il foglio elettronico nella riga evidenziata):

nano								
1	2	3	4	5	6	7	turno	vince
Brontolo	Cucciolo	Dotto	Eolo	Gongolo	Mammolo	Pisolo		
128	128	128	128	128	128	128	7	
64	64	64	64	64	64	512	6	Pisolo
32	32	32	32	32	480	256	5	Mammolo
16	16	16	16	464	240	128	4	Gongolo
8	8	8	456	232	120	64	3	Eolo
4	4	452	228	116	60	32	2	Dotto
2	450	226	114	58	30	16	1	Cucciolo
449	225	113	57	29	15	8	0	Brontolo

> Per la naturale generalizzazione con n nani, sia $V_{p,k}$ quanto possiede il k-esimo nano dopo che ha giocato e vinto il p-esimo nano e $V_{0,k}$ quanto egli ha in saccoccia a inizio partita.
>
> Se $\boxed{V_{0,k} = 1 + n \cdot 2^{n-k}}$ è la quota a iniziale si dimostra che alla fine tutti hanno 2^n, cioè $V_{n,k} = 2^n$ (quindi, con debita proporzione, per ottenere S per tutti ala fine occorre partire da $V_{0,k} = S \cdot \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^k} \right)$)
>
> Più in generale vale la formula:
>
> $$V_{p,k} = \begin{cases} 2^p & se \quad k \le p \\ 2^p \left(1 + n \cdot 2^{n-k}\right) & se \quad k > p \end{cases}$$
>
> infatti per $p = n$ evidentemente siamo solo nel caso $k \le p$ e quindi $V_{n,k} = 2^n$.
>
> La dimostrazione è per induzione.
>
> Per $V_{0,k}$ la formula è verificata per definizione.
>
> Se la formula è valida per $p-1$ al posto di p allora vale anche per p:
>
> Per definizione se $k \ne p \quad V_{p,k} = 2 \cdot V_{p-1,k}$ e in particolare:
>
> per $k < p$ si ha $k \le p-1$ e quindi $V_{p,k} = 2 \cdot V_{p-1,k} = 2 \cdot 2^{p-1} = 2^p$
>
> per $k > p$ si ha $k > p-1$ e quindi $V_{p,k} = 2 \cdot V_{p-1,k} = 2 \cdot 2^{p-1}\left(1 + n \cdot 2^{n-k}\right) = 2^p\left(1 + n \cdot 2^{n-k}\right)$
>
> che confermano la formula.

Rimane da provare la formula solo nel caso $k = p$, per il quale occorre fare il calcolo:

$$V_{p,p} = V_{p-1,p} - \sum_{h \neq p} V_{p-1,h} = 2^{p-1}\left(1 + n \cdot 2^{n-p}\right) - \sum_{1 \leq h < p} 2^{p-1} - \sum_{p < h \leq n} 2^{p-1}\left(1 + n \cdot 2^{n-h}\right) =$$

$$= 2^{p-1}\left(1 + n \cdot 2^{n-p}\right) - 2^{p-1} \sum_{1 \leq h < p} 1 - 2^{p-1} \sum_{p < h \leq n} 1 - n2^{p-1} \sum_{p < h \leq n} 2^{n-h} =$$

$$= 2^{p-1} + n2^{n-1} - 2^{p-1}(p-1) - 2^{p-1}(n-p) - n2^{p-1} \cdot \sum_{o \leq k < n} 2^k =$$

$$= 2^{p-1} + n \cdot 2^{n-1} - p \cdot 2^{p-1} + 2^{p-1} - n \cdot 2^{p-1} + p \cdot 2^{p-1} - n2^{n-1} + n2^{p-1} =$$

$$= 2^{p-1} + 2^{p-1} = 2^p$$

La formula è quindi provata.

Nella ricerca di soluzioni più lampanti mi sono imbattuto in una simpatica proprietà (che poi non ho usato): se i nani posseggono inizialmente potenze del 2 decrescenti fino all'ultimo che ha 1, ad esempio per i 7 nani, nell'ordine di vincita $2^6, 2^5, \ldots, 2^0$ cent, allora a fine torneo tutti hanno esattamente quanto avevano all'inizio. Lascio il gusto della facile dimostrazione all'eventuale lettore.

Ah, dimenticavo, il nano che non ricordiamo non potrebbe essere *omettilo*?

Può essere… Ma adesso è proprio ora di smetterla. A presto!

5. Quick & Dirty

Questo problema è stato molto utile per spiegare un concetto qualche anno fa: un Greco è nato il decimo giorno del 40 a.C. ed è morto il decimo giorno del 40 d.C. Quanti anni è vissuto?

Non essendo esistito l'anno zero, settantanove anni. Con questa domanda siamo riusciti finalmente a convincere un mucchio di gente che il secondo millennio cominciava il primo gennaio del 2001.

6. Zugzwang!

"*This phrase no verbs*" è un gioco di parole che ci è sempre piaciuto. Questo gioco NON si chiama come vi diciamo.

6.1 (NON si chiama) Tic-Tac-Chess

Per due motivi.

Tanto per cominciare, quel-nome-lì è marchio depositato della Dream Green, la quale sarà felice di vendervelo se inviate loro la richiesta (Weirton, West Virginia).

Infine, ci pare un nome fetente.

Il gioco, anche se piuttosto difficilmente analizzabile, ci pare comunque interessante, permettendo il riciclo di scacchi spaiati e scacchiere mutilate: secondo noi, successivamente al prossimo cataclisma planetario (fonti confidenziali ci assicurano che il prossimo meteorite si accanirà su pezzi e scacchiere) potrebbe avere un certo successo.

Come al solito, cominciamo con il ***materiale***: vi servono un pezzo di scacchiera, nel senso che basta di dimensione 4x4, e pochi pezzi, un esemplare bianco e uno nero rispettivamente di ***pedone***, ***cavallo***, ***alfiere*** e ***torre***.

"Niente Re?" No, altrimenti sarebbero nanoscacchi, e "Tic-Tac" non c'entrerebbe niente.

A ***inizio gioco*** la scacchiera è vuota: il Bianco, posa un proprio pezzo in una casella a scelta della scacchiera, e lo stesso fa il Nero alla sua prima mossa.

A ogni ***mossa***, il giocatore di turno può scegliere: o mette uno dei pezzi non in scacchiera sulla scacchiera (dove vuole, basta che sia una casella libera), oppure muove uno dei propri pezzi presenti sulla scacchiera. I pezzi muovono esattamente come negli scacchi, con l'unica differenza che quando il pedone arriva "in quarta" (OK, fine scacchiera), comincia a muoversi nell'altro senso, e avanti così (meglio mettergli una freccia in testa, per ricordarsi in che direzione sta andando).

Le ***prese*** sono esattamente come negli scacchi, con la "piccola" differenza che quando prendete un pezzo ***lo rendete al vostro avversario***, che in seguito (dalla prossima mossa in poi) lo può rimettere in campo dove vuole.

"E quando si ***vince***?" Beh, "Tic-Tac" dovrà pure significare qualcosa: quando riuscite ad allineare tutti i vostri pezzi, facendo filetto/triadiquattro/tictactoe/quelchevipare[15].

Provate a giocarci, secondo noi vale la pena: almeno, rispetto al filetto/tria/TTT, la patta sembra piuttosto difficile.

7. Pagina 46

Dalle espansioni:

$$(a+b)^4 = a^2 + 4a^2b + 6a^2b^2 + 4ab^2 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^2 - 4a^2b + 6a^2b^2 - 4ab^2 + b^4$$

segue l'identità:

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^2$$

da questa si ha:

$$\begin{aligned}
&\left[(a+b)^4 + (a-b)^4\right] + \left[(a+c)^4 + (a-c)^4\right] \\
&+ \left[(a+d)^4 + (a-d)^4\right] + \left[(b+c)^4 + (b-c)^4\right] \\
&+ \left[(b+d)^4 + (b-d)^4\right] + \left[(c+d)^4 + (c-d)^4\right] = \\
&= 6a^4 + 6b^4 + 6c^4 + 6d^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 12a^2d^2 + 12b^2c^2 + 12b^2d^2 + 12c^2d^2 = \\
&= 6\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
&6\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2 = \\
&= (a+b)^4 + (a-b)^4 + (a+c)^4 + (a-c)^4 + \\
&+ (a+d)^4 + (a-d)^4 + (b+c)^4 + (b-c)^4 + \\
&+ (b+d)^4 + (b-d)^4 + (c+d)^4 + (c-d)^4
\end{aligned}$$

Il che, in parole suona come: *se un numero può essere espresso come la somma di quattro quadrati, allora sei volte il suo quadrato può essere espresso come la somma di dodici interi, ognuno elevato alla quarta potenza.* Ma nel BJ di RM162 abbiamo dimostrato che ogni intero può essere espresso come somma di quattro quadrati interi (alcuni dei quali possono essere zero); questo implica che sei volte il quadrato di ogni intero può essere espresso come la somma di dodici interi, ognuno dei quali elevato alla quarta potenza (alcuni di questi possono essere zero).

Nella parte (b) del BJ di RM147 abbiamo dimostrato che ogni numero può essere espresso come somma di quattro quadrati (alcuni dei quali possono valere zero), ossia $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.

Da quanto detto, ognuno dei numeri $6x^2$, $6y^2$, $6z^2$, $6t^2$ può essere espresso come somma di dodici interi ognuno dei quali elevato alla quarta potenza (alcuni dei quali possono valere zero), quindi ogni multiplo di 6 si può esprimere attraverso la somma di $4 \cdot 12 = 48$ interi, ognuno elevato alla quarta potenza.

[15] Il nostro testo dice *"all four of your pieces in a row"*: qui interpretiamo "row" non come "riga", che ci pare limitativo, ma come "allineati", che ci permette di fare "filetto" anche in verticale e in diagonale.

Consideriamo ora che ogni intero può essere espresso nella forma $N = 6n + r$, con $r = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 e possiamo esprimere:

$$r = \sum_{i=0}^{4} a_i^{\,4}, a_i = \{0,1\}.$$

Che sono cinque valori alla quarta potenza, e quindi qualsiasi numero, preventivamente posto nella forma $N = 6n + r$ si può esprimere come somma di $(4 \cdot 12) + 5 = 53$ interi (alcuni dei quali possono valere zero).

8. Paraphernalia Mathematica

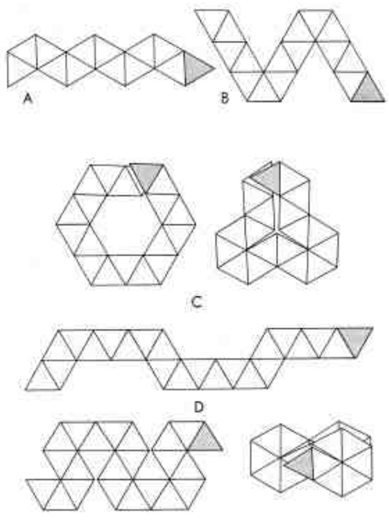
8.1 (quasi) Tutto Quello Che Avreste Voluto Sapere Sugli Esaflexagoni Ma Non Avete Mai Osato Chiedere (a Martin).

The reader is urged...
Martin GARDNER
"Urged" un par de ciufoli, se nun te spieghi...
Il lettore medio

E siamo abbastanza tentati dal dare ragione al lettore medio, soprattutto quando si tratta del mitico Primo Articolo su Scientific American di Martin Gardner, relativo agli esaflexagoni.

Lo scrivente (Rudy) ha sempre avuto degli enormi problemi già anche solo a flexare il triesaflexagono: se andate a riprendere la vostra copia di E&OMD[16], alla parte su come eseguire la flexagonazione, vi ritrovate un testo complesso (e il compulsare il testo originale non aiuta, non possiamo neanche dare la colpa al traduttore) e due disegni che, a essere gentili, spiegano un emerito nulla e vi spingono ad effettuare ricerche puramente teoriche nel campo.

Quando poi arrivate all'appendice al capitolo, il Nostro si pregia di rifilarvi un'immagine del tipo di quella a fianco (Figura 7 del E&OMD).



E a questo punto, non ci provate neanche, a costruirli: infatti MG tanto per cominciare non vi dice come si piegano (qualcuno vuole provare, con i due mostri in ultima riga?) e poi una volta piegati, vista l'inettitudine al flexaggio, non saremmo mai sicuri che la piegatura fosse giusta.

Perché Martin non è entrato nei dettagli?

Secondo noi, per due motivi: tanto per cominciare, era disponibile un articolo di Stones[17] in merito, in cui l'intera teoria era accuratamente spiegata; secondariamente, il Nostro aveva dei vincoli di lunghezza dell'articolo che gli impedivano di monopolizzare l'intera rivista per una rubrica che era al suo primo, timido apparire.

Nella prossima frase cerchiamo di dire tre cose contemporaneamente, quindi meglio partire con un paio di premesse:

1. Sì, il "quasi" del titolo nasce da questo
2. No, i vostri occhi funzionano: è scritto proprio più grosso.

L'articolo di Stones era complicato e, a quanto ci risulta, non pubblicato in rete. Ammettiamo che la nostra ricerca si è svolta in venti minuti sotto l'ombrellone, ma non siamo riusciti a trovarlo: se qualcuno lo trova (legale e gratuito) e ce lo manda, grazie (questo scritto più grosso di tutti). Fortunatamente ***Sidney Scott,*** dalle parti del 1961 (quindi, quattro anni dopo Gardner) lo ha trovato e portato a dimensioni ragionevoli e semplificato. Piccolo problema, per fare tutto questo ha bellamente *saltato le dimostrazioni*! Quindi, il primo che chiede "Perché?" riceve in risposta un "Boh...". Capito, il "quasi"? E capito perché cerchiamo l'articolo?

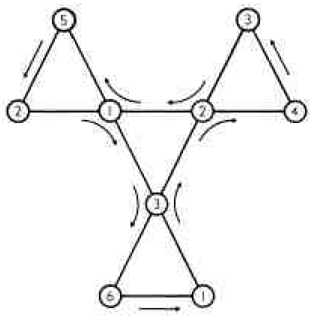
[16] "Exaflexagons and Other Mathematical Diversions". O, se preferite, EeGM_1 (Enigmi e Giochi Matematici 1). Capitolo uno, in entrambi. Versione italiana recentemente ristampata.

[17] L'inventore di tutto l'ambaradan.

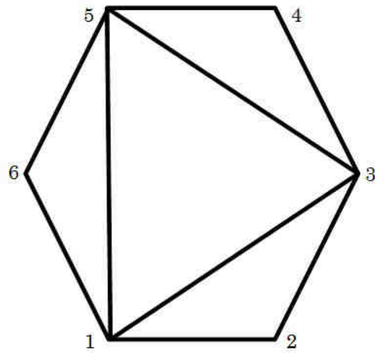
Bene, cominciamo. Partiamo dal caso semplice.

Se costruite un triesaflexagono e cominciate a flexare il tutto, non ci mettete molto ad accorgervi che l'oggetto ha un *diagramma di struttura* semplice: prendete un triangolo, numerate in senso trigonometrico[18] i vertici, *et voilà*. Niente di trascendentale.

Solo un po' più complicato diventa il diagramma di struttura dell'esaesaflexagono: flexando (e anche dal nome) si vede che ha *sei* facce e che le facce sono suddividibili in due gruppi: uno di tre facce, da ciascuna delle quali potete raggiungerne altre due, e un altro sempre di tre facce da ciascuna delle quali potete raggiungerne altre quattro.

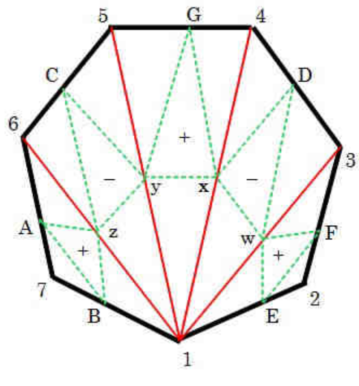


La cosa di solito viene visualizzata attraverso i cosiddetto *diagramma di Tuckerman, e* MG ci fornisce quello dell'esaesaflexagono (figura 4 di MG). Anche se il diagramma di Tuckerman fornisce una buona visualizzazione di "dove ci si trova" e "dove si può andare", va detto che aiuta molto poco a costruire fisicamente l'esaesaflexagono: non solo, ma risulta ance difficile vedere che ha sei facce, visto che alcune sono duplicate.



Il diagramma di struttura risulta invece più chiaro: dato il triangolo che rappresenta il triesaflexagono, attaccate un ulteriore triangolo ad ogni lato e ottenete la struttura dell'esaesaflexagono. Ogni stato (o faccia) è rappresentata una volta sola, si vede benissimo che è un *esa*esaflexagono (visto che è esagonale) e, se andate avanti, è un ottima base per costruire il tutto: trovate il disegno qui di fianco, e secondo noi è più chiaro; se volete confrontare i due disegni, attenzione che nel diagramma di Tuckerman gli stati multipli sono (1,2,3), mentre nel diagramma di Scott sono (1,3,5).

...ma a costruire un esaesaflexagono son bravi tutti. Complichiamoci la vita.



Per costruire un ***eptaesaflexagono***, partiamo da un ettagono[19] *[lo trovate in nero nella figura]*, e dividiamone l'interno in $n-2$ triangoli a mezzo di $n-3$ diagonali non intersecantesi *[le trovate in rosso nella figura]*: in funzione del gruppo di diagonali che scegliete otterrete diverse strutture, ma il risultato finale dal punto di vista flexagonativo) sarà lo stesso. Indi, procedete a numerare come vi pare (anche in disordine, se vi piace complicarvi la vita) i vari vertici, e tracciate, all'interno di ogni triangolo, il triangolo che ha i vertici suppergiù a metà dei lati (la cosa non è fondamentale, ma semplifica il disegno) *[li trovate in verde tratteggiato nella figura]*.

Dovreste avere *almeno* due triangoli aventi come lati due lati dell'ettagono iniziali: sceglietene uno e denominate i vertici del triangolo interno che si trovano sui lati dell'ettagono come A e B.

Partendo da A e passando a B, è possibile tracciare il *poligono intrecciato* che percorre tutti i segmenti verdi (mi raccomando, *deve* essere quello intrecciato!): quando finiamo in un vertice su un lato dell'ettagono iniziale, nominiamo il vertice di conseguenza:

[18] O *antiorario* o, come useremmo nel seguito, *positivo*. Il senso *geometrico* o *orario* sarà invece definito *negativo*.

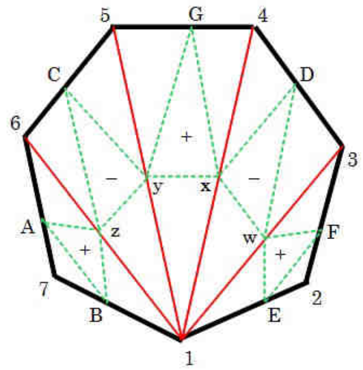
[19] Vi diamo un aiutino per costruire un ettagono *esattamente* come quello in figura: l'ultimo lato è fuori quadra di tre gradi.

dovremmo quindi ottenere la sequenza (le lettere minuscole tra parentesi sono solo per chiarezza) *AB(z)C(yx)D(w)EF(w)G(yz)*.

Ultimo passo (disegnato) sulla figura: se segnate i sensi di percorrenza dei segmenti (non lo abbiamo fatto), vi accorgete che ogni singolo triangolo verde tratteggiato ha un "senso", positivo o negativo. All'interno di ogni triangolo, trovate il segno opportuno. Adesso potete spegnere le matite e accendere i neuroni ragionando sul disegno, che si chiama *diagramma aumentato di struttura* (bruttissimo nome, proponiamo *Struttura (espansa) di Madachy-Scott*), e per festeggiare (e per comodità: dovremmo aver cambiato pagina) duplichiamo il disegno.

Anche se non sembra, lì dentro c'è tutto. Per avere le idee più chiare dal punto di vista operativo, cerchiamo di raggruppare i concetti in un altro modo: scopo del prossimo passo è costruire una matrice 4×n che contenga tutte le informazioni necessarie.

Come *prima riga* della matrice, inseriamo le lettere che abbiamo sui lati.



Per costruire la *seconda riga*, consideriamo il fatto che ogni lettera della Struttura di Madachy-Scott compare sempre tra due numeri: per raggiungere uno dei numeri dovremo muoverci in senso positivo (trigonometrico o antiorario), per raggiungere l'altro in senso negativo (geometrico o orario). Per ogni lettera *P*, sia il numero raggiunto nel verso positivo p_1, e sia p_2 quello raggiunto nel verso negativo: la riga della nostra matrice deve essere composta dei numeri a_1, b_2, c_1, d_2, …, g_1 (no, non lo abbiamo capito, nessuna delle nostre fonti ne spiega il motivo, e questa è una delle ragioni per cui chiediamo se avete una copia dell'articolo di Stones).

La *terza riga* è strettamente correlata alla seconda: si compone infatti dei numeri ignorati precedentemente, ossia a_2, b_1, c_2, d_1, …, g_2.

La *quarta riga* è facilissima: prendete il segno del triangolo cui appartiene la lettera in prima riga. Gusto per tirare lungo il periodo, notiamo che siccome il nostro conto inizia da *A* e *B*, *ogni quarta riga di una Matrice di Madachy-Scott inizia con due segni positivi*. E abbiamo inventato anche un altro nome. Siamo fieri di noi.

A	B	C	D	E	F	G
7	7	6	3	2	2	5
6	1	5	4	1	3	4
+	+	-	-	+	+	+

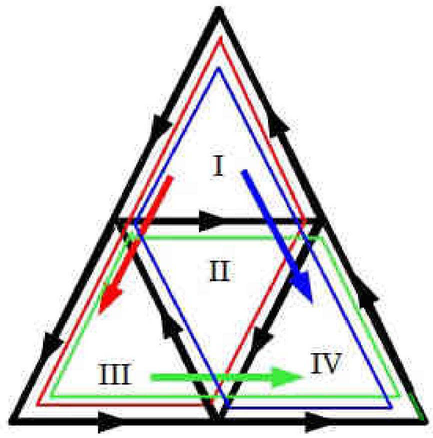
"Rudy, ma quando si usano le forbici?" Il più tardi possibile: qui la cosa più tagliente che mi lasciano maneggiare è una palla di gomma. Scherzi a parte, adesso potreste cominciare a procurarvi un *grosso* foglio di cartoncino.

Cominciate disegnando un triangolo e orientate i lati in senso positivo (nel senso di "disegnate le opportune freccette percorrendolo in senso trigonometrico): scopo di questa parte è avere una sequenza di 3n triangoli in modo tale che, *percorrendo la striscia da un triangolo al suo vicino, si ottenga una sequenza di direzioni coerente con l'ultima riga della Matrice di Madachy-Scott*. Il che non significa assolutamente nulla, senza una spiegazione[20].

Si tratta di attaccare dei triangoli tra i loro per i lati: ogni triangolo deve in pratica avere un lato in comune con ogni vicino, e i modi possibili sono raggruppabili in una singola figura, che trovate qui di fianco. Tranquilli, arriva la spiegazione, ma prima vi diciamo l'altra frase cabalistica associata al metodo: "*Due triangoli non definiscono una direzione,*

[20]...che nessuno dei Nostri dà. Probabilmente si trova nell'articolo di Stones *[vi muovete a trovarlo???]*. Quanto segue sono deduzioni basate sulla frase che abbiamo messo in corsivo.

ma tre sì". Se secondo voi queste due cose vogliono dire una cosa diversa rispetto a quella che diciamo qui di seguito, scrivete: felici di essere smentiti.

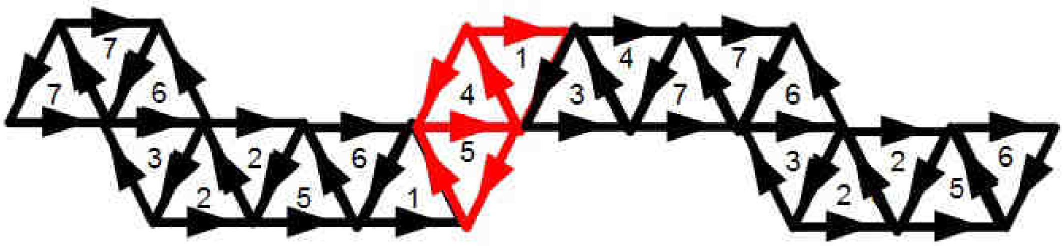


Disegnate i quattro triangoli e orientate quello indicato con "I": potete, richiedendo la coerenza dei lati in comune, orientare anche gli altri tre.

Adesso, prendete il gruppo di *tre* triangoli I-II-III identificato dal trapezio rosso e definitene la direzione, indicata dalla freccia rossa: la freccia va nella stessa direzione delle freccette sulle due basi del trapezio, quindi definiamo la sequenza i triangoli I-II-III come *positiva*: stessa cosa per la sequenza III-II-IV (quella in verde), mentre la sequenza I-II-IV (blu), con la freccia blu orientata in senso inverso a quelle delle basi, è una sequenza *negativa*.

Quindi, si tratta di partire dalla sequenza nell'ultima riga e fare in modo che il gruppo avente al centro l'i-esimo triangolo sia tale che la sequenza $(i-1)$ (i) $(i+1)$ sia coerente con il segno della sequenza (estesa a $3n$ termini).

Come al solito, prima il disegno totale e poi la spiegazione: il primo passo è "orientare" il primo triangolo, e poi da lì si parte; i numeri, che dovreste riconoscere, sono le sequenze della seconda, della terza e poi di nuovo della seconda riga della matrice, chiusi da a_2.



Tutto chiaro, vero? Domande? Probabilmente, un paio.

"Cosa ci fanno quei triangoli rossi?" Evidenziano il fatto che sono fiero di me: immagine su doppia pagina, i margini hanno fatto danni, cancellando alcuni triangoli: quelli rossi me li sono ricalcolati io.

"Sicuro che per i flexagoni pari funzioni allo stesso modo?" Qualcuno, qui, ne sa più di quanto voglia mostrare. Vero, qui il metodo è leggermente diverso: si scrive la seconda riga, poi la seconda riga, poi la seconda riga e si chiude con a_1 che, preghiamo notare, è uguale a b_2. E questo ve lo disegnate voi.

Siccome sul retro la striscia resta bianca (E Ciò Non È Bello), vi diamo la sequenza che dovrebbe essere scritta sul retro per l'eptaesaflexagono, cominciando dal triangolo con il 7 (quindi, se girate la striscia, la sequenza va da *destra* a *sinistra*): 6, 1, 5, 4, 1, 3, 4, 7, 7, 6, 3, 2, 2, 5, 6, 1, 5, 4, 1, 3, 4, 7. La trovate, comunque, nella matrice.

Adesso, si tratta di piegare il tutto, ottenendo una cosa vagamente esagonale da questi aggeggi. Da bravi teorici, vi diamo la regola e vi lasciamo giocare (no, non lo abbiamo fatto; già era complicato arrivare fin qui, non vorremmo scoprire all'ultimo passo che abbiamo sbagliato tutto).

Come abbiamo detto precedentemente, ci devono essere almeno due vertici poligono che rappresenta la struttura del nostro esaflexagono che non hanno una diagonale in comune (A e B – oppure E e F – nel nostro schema dell'eptaesaflexagono); uno di questi (A), nella nostra matrice, è numerato a_1 (vale 7, nel nostro caso): l'altro vertice (B) ha un qualche valore c (nel nostro caso vale 2). Il valore c ricorre nella nostra striscia su *tre* coppie di triangoli adiacenti: scopo del gioco, è piegare la striscia in modo tale che i valori di c

adiacenti *scompaiano tutti*. Se (*non fatelo!*) incollassimo assieme queste facce, otterremmo una striscia per costruire, nel nostro caso, un *esa*esaflexagono[21].

Quindi, la procedura è: trovate un simbolo che compare in coppie di triangoli adiacenti ma non nel primo triangolo; piegate la striscia in modo da farlo sparire; ripetete l'operazione su un altro simbolo con le stesse caratteristiche.

Alla fine, dovrebbero restarvi solo i triangoli con a_1 e a_2, che devono essere incollati assieme: a questo punto, dovreste avere un esagono formato tutto da simboli a_1 da una parte e simboli a_2 dall'altra. Finito!

Bene, se siete riusciti a costruire il tutto, potete cominciare a divertirvi: vi lasciamo con qualche domanda.

Esiste un tipo particolare di flexagoni (che Stones chiama *street-flexagons*) tali che sulla striscia i numeri 1, …, n compaiono in sequenza: esiste un solo flexagono per ogni n che abbia questa caratteristica, e potreste cercare cosa hanno di speciale nella costruzione: la cosa non è difficile da intuire, ma non vorremmo mai privarvi della gioia di darne la dimostrazione formale.

Gli esaflexagoni più facili da costruire sono quelli con tutti i triangoli in fila, senza "saltelli": la loro caratteristica è quella di avere la quarta riga della matrice formata unicamente di segni positivi. Purtroppo non è possibile costruirli per tutti gli ordini, e potreste cercare per quali ordini la cosa è possibile, e se ne esistano, per un dato ordine, più di uno.

Adesso, se vi restano dei dubbi sugli esaflexagoni, i casi sono due: o trovate l'articolo di Stones, lo capite tutto e ce lo spiegate, oppure vi mettete lì con calma, forbici, colla, carta e matita e fate i conti.

Noi abbiamo altro da fare e non intendiamo rispondere alle vostre domande: il mese prossimo arriva uno *scoop*, come dicono i giornalisti.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[21] *Pare* (come detto prima, non abbiamo l'articolo), che questa riduzione al livello $n - 1$ sia la base di tutte le dimostrazioni dell'articolo di Stones, riducendo tutti i casi a quello base.