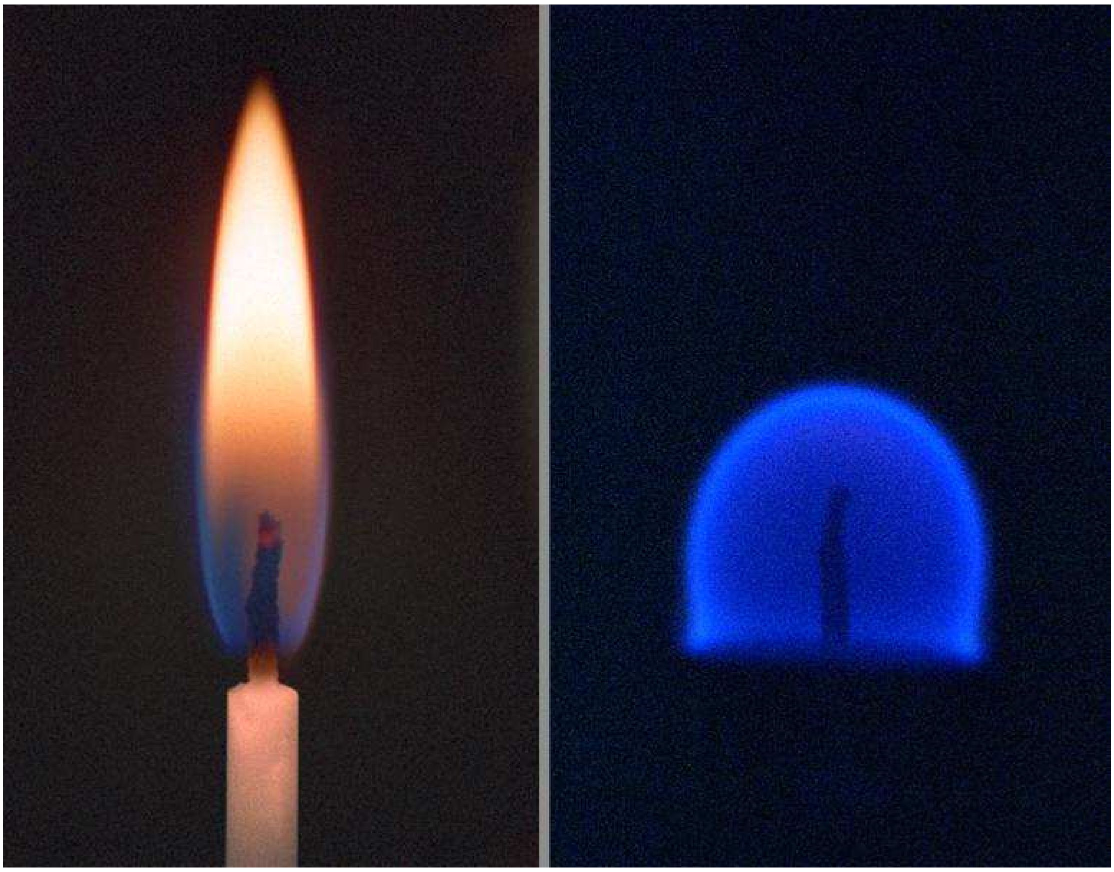
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 175 – Agosto 2013 – Anno Quindicesimo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM174 ha diffuso 3’036 copie e il 04/08/2013 per Google eravamo in 11’800 pagine.

Non ci risulta nessuno abbia mai intitolato un romanzo di fantascienza “Fiamme nello Spazio”, per evidenti motivi. La NASA, però, (http://science.nasa.gov/science-news/science-at-nasa/2000/ast12may_1/) ha voluto capire cosa succede quando qualcuno festeggia il compleanno in assenza di gravità. A sinistra una candela “terricola”, a destra la sua collega sulla ISS.

1. Dove nascono le onde

"Consideravano gli altri nobili come fratelli e tutti gli altri come inferiori. Riservavano le pene più severe a chiunque si spacciasse per nobile senza esserlo e sorvegliavano gelosamente le procedure di nobilitazione. Non si occupavano di affari, tranne che di faccende militari e della direzione delle terre. Andavano in città sempre a cavallo, anche se era solo un ronzino, e indossavano cappe carminie e armi, anche se solo simboliche spade di legno."
(Norman Davies – "*Europe: a history*")

Sua Altezza Reale George Alexander Louis, o più familiarmente Principe George di Cambridge, figlio di William, Principe di Cambridge e di Catherine, duchessa di Cambridge, unico nipote di Charles Philip Arthur George, Principe del Galles, nonché unico bisnipote di Elizabeth Alexandra Mary, sovrana d'Inghilterra e di altri 16 stati del Commonwealth, con ogni probabilità in questo momento starà reclamando la pappa urlando e frignando come fanno tutti gli esseri umani di età inferiore ai due mesi.

Se non fosse che il concetto di "nobiltà" è incompatibile con il ben più sacro principio dell'uguaglianza di tutti gli esseri umani, è indubbio che ci si potrebbe anche divertire nel tentativo di comprendere meglio come siano organizzate le gerarchie delle grandi monarchie. Per ragioni che sono probabilmente facilmente determinabili (anche se essenzialmente irrazionali) i fatti e i misfatti di re, principi e regine esercitano ancora un fascino spropositato sul grande pubblico. Il neonato che ha avuto l'onore e l'onere di aprire quest'articolo ha già fatto versare i proverbiali fiumi d'inchiostro e contribuito sensibilmente alla deforestazione dell'Amazzonia, se si potessero quantificare le pagine di rotocalchi che ne hanno parlato: ma gli va certo riconosciuto che di questo lui non ha davvero nessunissima colpa. E c'è davvero da augurarsi che nessuno gli racconti mai di Jacintha Saldanha[1], almeno finché non avrà l'età sufficiente per razionalizzare senza rischi di illogici, ma non impossibili, sensi di colpa.


1 *Non fate domande sciocche: certo che è falsa, la foto…*

È forse insito nell'uomo interessarsi di tutto, anche di cose evidentemente lontane dai suoi interessi primari (acqua, cibo, riparo) e lontane anche da qualsiasi interesse teorico-pratico: lo dimostra ad esempio il fatto che anche autorevoli giornali hanno commentato con dovizia di particolari che la nascita del principino ha portato a tre il numero di eredi diretti al trono inglese, cosa mirabile che non accadeva più dai tempi della Regina Vittoria. La cosa sarà senza dubbio mirabile, ma poteva serenamente esprimersi dicendo, in modo più

[1] Jacintha Saldanha era l'infermiera 46enne che ha subito lo scherzo telefonico di due disc-jockey australiani che si sono spacciati per la Regina Elisabetta e sono riusciti a farsi passare al telefono Kate Middleton, ricoverata in ospedale per un leggero malore all'inizio della gravidanza. Per quanto lo scherzo non abbia avuto nessuna seria conseguenza e la corte inglese non abbia neppure protestato per la cosa, Jacintha non ha retto alla vergogna e si è uccisa il 7 dicembre 2012.

familiare, che sia Elisabetta II sia Vittoria sono diventate bisnonne mentre erano ancora saldamente sedute sul trono londinese.

A proposito: con tutta evidenza, è in corso una gara spasmodica fra le due signore. Queen Victoria ha regnato per la bellezza di 63 anni e 216 giorni: un periodo spropositato, lunghissimo, durante il quale l'Inghilterra ha vissuto probabilmente il periodo più florido della sua storia. Un regno così lungo e significativo che non per nulla ha generato un solido aggettivo e ha per di più assunto l'appellativo di "era": l'era vittoriana, la Londra vittoriana, il modo di vivere vittoriano. La sua discendente Elisabetta non avrà probabilmente lo stesso onore[2], ma è pienamente in corsa per quanto riguarda il traguardo squisitamente numerico. Ancora giusto un paio d'anni, e potrà schernire la sua trisavola dall'alto di un regno più duraturo.

2 *Royal bookmakers: lo confessiamo, abbiamo perso una mezza sterlina puntandola su "Pocahontas".*

Si farà poi davvero qualche celebrazione, nell'Agosto del 2015, se il regno di Elisabetta Seconda sorpasserà davvero, in durata, quello della regina Vittoria? Non è qualcosa che assomiglia un po' troppo ad un record sportivo? Anche fosse, è verosimile che il morboso interesse verso le teste coronate non sia poi troppo dissimile dal più ordinario interesse suscitato dagli assi dello sport o, meglio ancora, dai protagonisti del mondo dello spettacolo: non può essere un caso che la più celebre delle fusioni dei due elementi – il matrimonio di un'attrice di grido come Grace Kelly con un monarca, per quanto di un piccolo stato come il Principato di Monaco – continui ad alimentare il gossip su carta stampata nonostante sia passato più di mezzo secolo dall'evento. È però altrettanto vero che l'istituzione di titoli nobiliari ha influito sulla storia assai di più di quanto sia riuscita a fare, almeno fino ad oggi, la gente di spettacolo.

Resta comunque indiscutibile che il "sangue blu", di fatto, altro non è che comune sangue di color rosso. Già l'etimologia più probabile dell'espressione ricorda che la distinzione tra nobiltà e popolo comune non era poi tanto divertente, quando i tempi erano diversi. Pare infatti che la prima lingua a introdurre il termine sia stata lo spagnolo, e il "sangre azul" era quello che si riteneva venisse pompato dal cuore delle nobildonne, più ancora che dei nobiluomini, perché la loro carnagione chiara riusciva bene a mostrare l'azzurro delle vene. Carnagione chiara che – a differenza dei giorni nostri, in cui l'abbronzatura estiva è quasi un obbligo estetico sociale – veniva considerata estremamente elegante e seducente, soprattutto perché era del tutto irraggiungibile dalle popolane, perennemente cotte al sole dei campi, dove lavoravano senza requie in ogni ora di luce.

Certo è che la separazione netta tra gli esseri umani dotati di titoli nobiliari e quelli che certi titoli neanche sapevano pronunciarli era un tempo assai vicina alla stessa differenza che tutt'ora sussiste nei significati delle parole contrapposte nobile/ignobile. Per molto tempo i nobili erano semplicemente e definitivamente "proprietari" dei servi della gleba: o meglio, proprietari della terra in cui i disgraziati lavoravano, ma siccome "servo della

[2] Per svariate ragioni. Non ultima, forse, quella puramente linguistica: l' "era elisabettiana" (per non parlare della poesia, del teatro, della letteratura, tutti "elisabettiani") esiste già, ma se l'è accaparrata Elisabetta I, l'indomita, rossa e selvaggia figlia di Enrico VIII.

gleba" altro non significa che "schiavo della terra", il nobile che possedeva i terreni possedeva anche, a fortiori, le persone che la lavoravano.

Per quanto il sopruso dell'uomo sull'uomo sia ancora più vecchio, probabilmente, dell'uomo stesso; per quanto sin dalla più remota antichità si ritrovano continui esempi di prevaricazione, riduzione in schiavitù, commercio e compravendita di esseri umani, il concetto di aristocrazia nobiliare come lo conosciamo oggi è essenzialmente un prodotto dell'Alto Medioevo. Nell'antichità c'erano guerre ed imperi, e la parte vittoriosa metteva spesso, e senza alcuna remora morale, i vinti in condizioni simili a quelle di animali. Esistevano certo differenze di classe, a volte vere e proprie caste, all'interno delle diverse società: ma è solo con la caduta dell'Impero Romano d'Occidente che si formano le condizioni per far prendere forma ad una struttura nobiliare vera e propria. Le caratteristiche più marcate dei titoli nobiliari sono facilmente riassunte: A) il titolo è legato alla terra: non si è mai (o quasi) Marchesi del Cavallo Nero o Principi dell'Estetica Classica; il titolo nobiliare è, prima ancora che un'espressione politica, una definizione geografica, indica le terre su cui il latore del titolo esercita il potere assoluto. B) il titolo è trasmissibile per diritto ereditario; cosa che cristallizza la separazione tra classi (gentiluomini e non gentiluomini) teoricamente in perpetuo, impedendo quasi ogni forma di commistione tra le due tipologie. Infine, C) il titolo è inserito in una sorta di gerarchia piramidale: questo era del tutto evidente durante il feudalesimo[3], quando vennero istituiti vassalli, valvassori, valvassini[4].

Analizzare le cause che hanno condotto ad una simile situazione è cosa quanto mai complessa, e certo non affrontabile da chi non fa della storia la propria professione. È comunque divertente, o quanto meno curioso, notare che le ragioni principali sembrano essenzialmente di ordine militare. L'Impero Romano, una volta raggiunte dimensioni tali da sconsigliare qualsiasi altra avventura esterna, era difeso alle frontiere dal "limes"[5], in maniera in fondo non troppo dissimile da quanto accadeva in Cina con la Grande Muraglia. Con la crisi dell'Impero, il grande muro romano non è più in grado di contenere le migrazioni dei popoli extra-impero[6], e si sfalda; e se cade il muro grande, non si può fare altro – almeno per coloro che possono permetterselo – che costruire muri piccoli. I primi "castelli" nascono a questo scopo, punteggiando l'Europa di piccole fortezze in difesa di pochi esseri umani, una volta che l'unità politica romana non esiste più.

E se non c'è un impero, non c'è una struttura politica: non c'è un esercito organizzato. Per gran parte del Medioevo (e a dire il vero per gran parte della storia antica), l'arma più terribile che si poteva mettere in campo in battaglia era la cavalleria. Quasi sempre, quando si nomina la cavalleria, la mente corre a certe immagini classiche, con cavalieri belli e aitanti che si lanciano al galoppo sfrenato con i biondi capelli al vento e la sciabola sguainata. Niente da dire sull'immagine in sé (a parte l'ovvia e ormai quasi noiosa constatazione che la guerra si dipinge sempre benissimo, ma di fatto resta una porcheria così sporca che non c'è nulla che possa superarla, nella classifica del luridume), ma è bene precisare che solitamente quella che viene in mente è appunto l'immagine di una cavalleria ben precisa, la "cavalleria leggera". Il fraintendimento è splendidamente

[3] "Feudalesimo" ha un'etimologia che può trarre in inganno: basandosi su una sorta di "patto" tra il re e il vassallo (e da patti successivi di ordine minore tra vassallo e valvassore), è facile ipotizzare che la radice possa essere "foedus" ("patto" in latino), che è il termine dal quale deriva anche la parola "federazione". In realtà, sembra proprio che, nonostante l'assonanza e la somiglianza, "feudo" non derivi da "foedus", ma da "fehu", voce di origine germanica che indicava originariamente il bestiame, e successivamente i beni immobili – soprattutto i terreni – in cui il bestiame risiedeva.

[4] Secondo diversi critici moderni, in realtà non è mai esistito realmente il ruolo di "valvassino": verosimilmente, il termine è originato da una filastrocca francese. Esistevano comunque diversi livelli di vassallaggio.

[5] Ne abbiamo già parlato, a dire il vero: cosa che lascia sospettare che gli autori stiano finendo non solo gli argomenti matematici, ma anche gli altri. Dei limina romani parlammo in "Tre Verdi Foreste", RM078, Luglio 2005.

[6] Una volta si chiamavano "invasioni barbariche", palesando il tifo degli storiografi per le popolazioni che stavano dentro il limes rispetto a quelle che bussavano per entrare. Più correttamente, adesso si preferisce usare il termine Volkswanderung, che significa, appunto, "movimento di popoli". L'unico guaio è che lo stesso termine viene usato dalle agenzie di viaggio per riferirsi ai movimenti estivi durante il periodo delle vacanze.

rimarcato anche dal fatto che la parola “cavalleggero” è ormai usata quasi pienamente come sinonimo di “cavaliere”, o al massimo di “soldato a cavallo”, mentre è del tutto evidente, almeno in italiano, che si tratta della contrazione del termine “cavaliere leggero”[7]. La distinzione è però importante, perché al tempo dei castelli e della nascita della nobiltà, il ruolo che nella Seconda Guerra Mondiale hanno avuto i carri armati spettava di diritto alla cavalleria pesante.

Mantenere un cavallo da guerra era cosa estremamente costosa: in estrema (e approssimatissima) sintesi, si può concludere che un capo militare in grado di chiamarsi “re” di un appezzamento di terra più o meno vasto concedesse ai suoi “ufficiali” il governo e il controllo di una regione in cambio della fedeltà militare. Ripetuto su diverse scale, da grande a piccolo vassallo, si può riconoscere nella struttura feudale niente di più che una gerarchia militare riportata su base sociale. Quando il “re” chiamava alla guerra, i suoi vassalli accorrevano in sella ai loro poderosi destrieri, ognuno alla guida di una sezione di “esercito” costituito dai propri valvassori (e, inutile sottolinearlo, a capo di un buon numero di servi della gleba chiamati a fare da fantaccini, probabilmente armati di forconi e bastoni). In cambio, concedeva loro il controllo totale e le rendite di una parte delle terre del regno, che diventavano così la contea (o ducato, principato, marca, baronia) assegnata al cavaliere in questione.

3 *Simboli araldici inglesi: fatevi da soli il vostro stemma nobiliare!*

In tempo di pace, i cavalieri si allenavano con giostre e tornei; sembra però che fosse complicato riconoscere quale cavaliere stesse per scontrarsi con l’altro: la cavalleria pesante medievale prevedeva fior di armature addosso al cavaliere e perfino sopra il cavallo, e non c’era mamma in grado di riconoscere il proprio figliolo, così bardato. A qualcuno venne l’idea di far portare agli scudieri un cartello dove si spiegasse che stava per scendere nell’arena il tal visconte, pronto a massacrare amichevolmente il tal barone. Siccome scrittura e lettura non erano a quei tempi troppo di moda, si preferì usare insegne pittoriche, simboli, immagini che richiamassero il nome dei contendenti. Era la nascita dell’araldica.

Così, con castello, terre da governare e tassare, servi posseduti al pari degli animali e opportuni stemmi di famiglia, l’aristocrazia nobiliare ha segnato un gran bel numero di secoli. Certo, come ogni cosa umana, ha subito cambiamenti ed evoluzioni: sotto il regno del Re Sole, alla *noblesse d’épée*, la “Nobiltà di Spada”, si affiancò piano piano anche la

[7] Fraintendimento di scarso peso, in fondo. Certo non divertente come quello in cui è incorso un ignoto traduttore che, in un testo in cui si parlava della celebre “Carica dei 600” a Balaklava, tradusse frettolosamente con “Cavalleria della Luce” l’inglese “light cavalry”. Il nostro GC (è stato lui ad intercettare l’infelice traduzione), non può fare a meno di ridere di fila per cinque minuti, quando per accidente si ritorna sull’argomento.

noblesse de robe, ("Nobiltà della Roba" è forse traduzione un po' troppo diretta, ma rende bene l'idea) a mostrare che il potere economico cominciava a contare quanto, se non più, di quello militare. Certo è che la "leva nobiliare", almeno in Francia, restò attiva proprio fino al regno di Luigi XIV, e quindi fino a tutto il diciassettesimo secolo, a ratificare che l'istituzione della struttura nobiliare altro non era, in fondo, che il corrispondente delle attuali gerarchie da caserma. Al punto che, dopo la caduta dell'Ancien Régime demolito dalla Rivoluzione Francese, quando Napoleone Bonaparte decise di fondare una nuova dinastia e una nuova struttura aristocratica per il suo impero, non fece altro che tornare indietro di un migliaio di anni, dando a tutti i suoi marescialli e generali dei titoli nobiliari. Non sembrandogli però acconcio distribuir loro titoli legati alla terra (seppur Re e Imperatore, era pur sempre figlio della Rivoluzione), inventò appositamente per la sua corte dei titoli associati alle imprese guerresche in cui i suoi collaboratori si erano meglio distinti. La corte napoleonica si popolò così di una insolita aristocrazia, dove si potevano incontrare il Duca di Montebello (Lannes), il Principe della Moscova (Ney), il Duca di Rivoli e Principe d'Essling (Masséna), e così via, oltre naturalmente ad almeno un paio di re, come Murat e Bernadotte[8].

È indicativo che i titoli nobiliari abbiano non solo una gerarchia[9], ma anche un'etimologia che, derivando quasi senza eccezioni dal latino, palesa nuovamente l'origine militare. Tralasciando gli ovvi "re", "principe", "imperatore" e "cesare[10]" (dal quale derivano, tanto per dire, sia il tedesco "kaiser" sia il russo "zar"), la radice latina è del tutto evidente, la fonte militaresca è riconoscibile in "marchese", che era responsabile della "marca", ovvero della zona del regno vicino ai confini ("marca"= "confine")[11]. Non meno evidente è il titolo di "conte", che discende senza troppe variazioni da "comes", "compagno", con la palese messa in evidenza che il conte altro non è che un "compagno" d'armi del re. "Visconte" è il "vice del conte", tant'è vero che in molti casi i visconti diventano conti non appena muore l'anziano genitore: e resta il "barone", il più basso tra i titoli nobiliari, a difendere l'origine germanica di alcuni titoli: "baro" sembra significare semplicemente "uomo libero" (e quindi, come minimo, non servo della gleba) o direttamente "guerriero", col che si ratifica ulteriormente la gerarchia militare.

Non abbiamo citato l'etimologia di "duca" (e degli apparentati "arciduca" e "granduca") in parte perché anch'essa del tutto evidente, simile com'è al termine "dux" (duce, condottiero, e non andiamo oltre…), in parte perché è un duca ben preciso che ci piacerebbe introdurre a questo punto della storia.

In Alta Normandia, nel dipartimento francese dell'Eure, c'è un piccolo villaggio che fino a metà del XVIII secolo veniva chiamato Chambrais. Il villaggio sta nella valle della Charentonne, fiumiciattolo di una sessantina di chilometri che si getta infine nella Risle, un fiumotto di 150 chilometri che finisce la sua corsa nella Senna (e per questa non useremo diminutivi). Il villaggio conta meno abitanti di un vasto condominio metropolitano: nel 2009, assommavano in tutto a 1110, un numero irrisorio anche senza fare la fatica di leggerlo in binario.

Per mere ragioni di calcolo delle probabilità, è improbabile che il paesino in questione possa vantare grandi celebrità: e potrebbe pertanto ben accontentarsi di poter vantare tra i suoi figli Léonor Mérimée, padre del famoso storico, archeologo e scrittore Prosper Mérimée. Invece, sorprendentemente, il microscopico borgo ha ben altre frecce al suo

[8] Murat fu il napoleonico Re di Napoli; Bernadotte, per la verità, divenne Re di Svezia e Danimarca col nome di Carlo XIV, ma cambiò campo e divenne nemico di Napoleone.

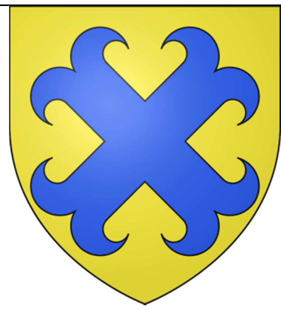
[9] Gerarchia che può comunque variare da luogo a luogo: in alcuni casi, il titolo di "duca" è superiore a quello di "principe".

[10] È però piuttosto curioso che "cesare" abbia molti lemmi derivati, mentre sembrano assai di meno quelli derivati da "augusto": in fondo, più ancora che per la fama del caro vecchio Caio Giulio, "Cesare" come titolo imperiale deve la sua fortuna soprattutto a valle della separazione dell'Impero tra Oriente e Occidente, quando a ciascuno dei due imperatori (appunto, "augusti") vennero affiancati una sorta di vice (i "cesari").

[11] Perfino più evidente in tedesco, dove il titolo corrisponde a quello di "margravio" (*markgraf*), parola che è formata da "mark" (appunto "marca", "confine") e "graf" (conte). Come a dire che il "margravio/marchese" è il "conte delle terre di confine".

arco: è infatti il luogo natale di Augustin Fresnel, uno dei maggiori fisici della sua epoca (1788-1827), universalmente considerato il fondatore dell'ottica moderna e padre della teoria ondulatoria della luce. A dimostrazione della piccolezza del paese, non stupirà che Fresnel fosse cugino di Prosper Mérimée; e visto che stiamo parlando di un genio che è entrato alla famosa Ècole Polytechnique di Parigi a sedici anni e mezzo, che è stato membro dell'Accademia Francese e della Royal Society, grande amico di Arago e Young, e soprattutto tale da poter opporsi, alla tenera età di ventisette anni, all'imperante teoria corpuscolare di un mostro sacro come Newton; con sufficiente abilità matematica da aver dato il suo nome ad una famiglia di integrali, dovrebbe essere del tutto evidente che stiamo parlando del protagonista di questo compleanno. E invece no[12].

Il punto è che il villaggio di Chambrais, nel lontano 1716, fu eretto dal Luigi XV al rango di ducato; il sovrano lo fece in segno di ringraziamento per i servigi resigli da una famiglia del luogo durante le feroci Guerre di Successione di Spagna, Polonia e Austria, e per meglio rimarcare la promozione, il re impose al novello ducato, e inevitabilmente anche al paese, il nome stesso della meritoria famiglia.



4 *Lo stemma nobiliare del Ducato di Broglie*

5 *Louis (etc. etc.) De Broglie*

La famiglia in questione si chiamava Broglie: dal 1716 in poi è esistito pertanto un "Duca de Broglie", e il settimo titolato nella storia del ducato rispondeva al nome di Louis Victor Pierre Raymond de Broglie.

Louis De Broglie nacque a Dieppe[13] il 15 Agosto 1892. Figlio di Victor, quinto Duca di Broglie, non era primogenito, e pertanto non era previsto che riuscisse ad arrivare al titolo di Duca[14]: a dimostrazione che i titoli nobiliari non seguono tutti le stesse gerarchie, ai figli cadetti della *maison de Broglie* spettava il misero titolo di principe, e fu proprio come "*prince de Broglie*" che Louis venne conosciuto per la maggior parte della sua vita e carriera.

La sua formazione iniziale è letteraria: frequenta il liceo a Parigi, prende la licenza in Storia, e solo successivamente comincia ad interessarsi davvero di scienza. Nel 1913 prende anche una licenza in scienze, e durante il servizio militare fa il radiotelegrafista: una specializzazione del tutto nuova e avveniristica, per l'epoca. Ma il

[12] Esistono una ragione particolare e una ragione generale che impediscono che questo di Agosto 2013 possa essere il compleanno di Fresnel: Augustin se ne merita certamente uno, ma essendo nato a Maggio, non è il caso di celebrarlo nel mese più caldo dell'anno. Questa è la ragione specifica. La ragione di ordine più generale è che Fresnel è nato lo stesso giorno (solo 170 anni prima) di colui che solitamente scrive i compleanni. È del tutto evidente che il losco scribacchino spera ancora di diventare più famoso del francese, e di poter autocelebrarsi in un futuro non troppo lontano, lasciando alla sua amata data del 10 Maggio Fresnel come misera "seconda scelta".

[13] Evidentemente, un parto è sempre meglio farlo in una città in grado di fornire un certo grado di assistenza medica. Dieppe è la città degna di questo nome più vicina a Broglie.

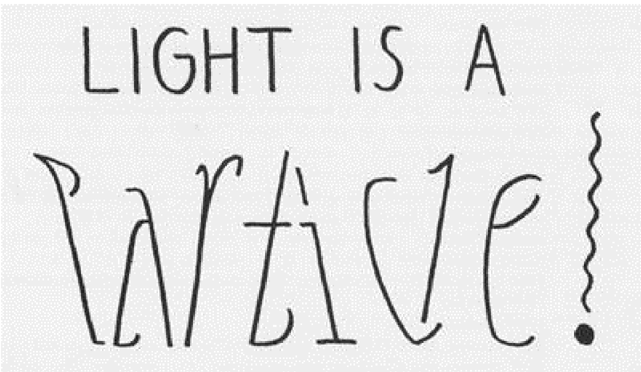
[14] Non era previsto, ma ci arrivò: il padre Victor morì nel 1906, e passò il titolo a Louis César Victor (ma misteriosamente noto come Maurice), fratello maggiore del nostro eroe, che divenne pertanto il sesto duca della lista. Questi morì senza eredi nel 1960, ed è a quel punto che De Broglie diventa effettivamente duca.

1913 è un anno fin troppo vicino all'inizio del disastro, e infatti Louis, allo scoppio della Grande Guerra, si ritrova a servire nella stazione radio posta sulla Torre Eiffel.

Pare evidente che l'interesse per la scienza fosse ancora molto tiepido, nel cuore del principe De Broglie: ad interessarlo seriamente alle scoperte della meravigliosa fisica di quegli anni fu un altro illustre cittadino del suo borgo, ovvero suo fratello maggiore Maurice. È verosimile che in famiglia, se mai avessero avuto sentore dell'arrivo di Premio Nobel per la Fisica, tutti avrebbero pronosticato Maurice: non solo si interessava di fisica moderna, ma era abbastanza preparato e abile da arrivare ad essere membro dell'Accademia delle Scienze (e, già che c'era, anche dell'Académie Française); soprattutto, Maurice de Broglie era il segretario dei Congressi Solvay[15], i leggendari simposi di inizio XX secolo che raccoglievano tutti i maggiori fisici e chimici dell'epoca.

Fatto sta che Louis, lentamente, acquista sempre più interesse ai misteri della fisica moderna. Finalmente, nel 1924, alla non tenerissima età di 32 anni, ottiene un serio dottorato teorico in fisica, di fronte ad una commissione esaminatrice di tutto rispetto, tra cui sedevano anche Paul Langevin e Jean Perrin. Ed è proprio in occasione della discussione della tesi del suo dottorato, che Louis De Broglie iscrive in maniera permanente il suo nome negli annali della fisica.

Senza fargli torto, pare legittimo osservare che il contributo essenziale alla scienza De Broglie lo diede proprio in occasione della sua tesi: in seguito condusse una onesta carriera, anche densa di onori, ma non è eccessivo concludere che tutta la sua fama è riconducibile ad un'unica, grande idea rivoluzionaria.



6 *Ambigramma sul dualismo storico della fisica*

Col senno di poi, è forse anche possibile ricostruire a grandi linee quanto deve aver contribuito alla generazione della sua teoria. Louis era evidentemente un animo indagatore e creativo: e il fatto di aver coltivato anche studi non esclusivamente scientifici gli avrà consentito, probabilmente, di non aver eccessivo timore nello sfidare i mostri sacri, le idee più consolidate (e quindi, quasi per forza di cose, inevitabilmente preconcette) che albergano in ogni ramo della scienza. A ciò si deve aggiungere che, oltre al suo evidente interesse per le scienze (non si prende un dottorato alla Sorbona solo per passare il tempo), la frequentazione scientifica con il fratello Maurice lo teneva verosimilmente aggiornato sulle grandi questioni della fisica del tempo: e l'inspiegabile dualismo della luce, il suo apparire talvolta come onda, talvolta come particella, doveva necessariamente sollecitare fortemente gli interessi di Louis.

Infine, con ogni probabilità deve aver influito proprio anche essere il principe De Broglie, ovvero l'abitante più insigne del natio borgo selvaggio di Fresnel. È in fondo proprio dal suo paese che prende forma la teoria ondulatoria della luce[16]: e non è umanamente possibile pensare che questa consapevolezza possa non aver influito sul giovane futuro duca.

È però verosimile che altri, al suo posto, si sarebbero limitati a rimanere "partigiani dell'aspetto ondulatorio della luce", magari rigettando l'idea (newtoniana prima,

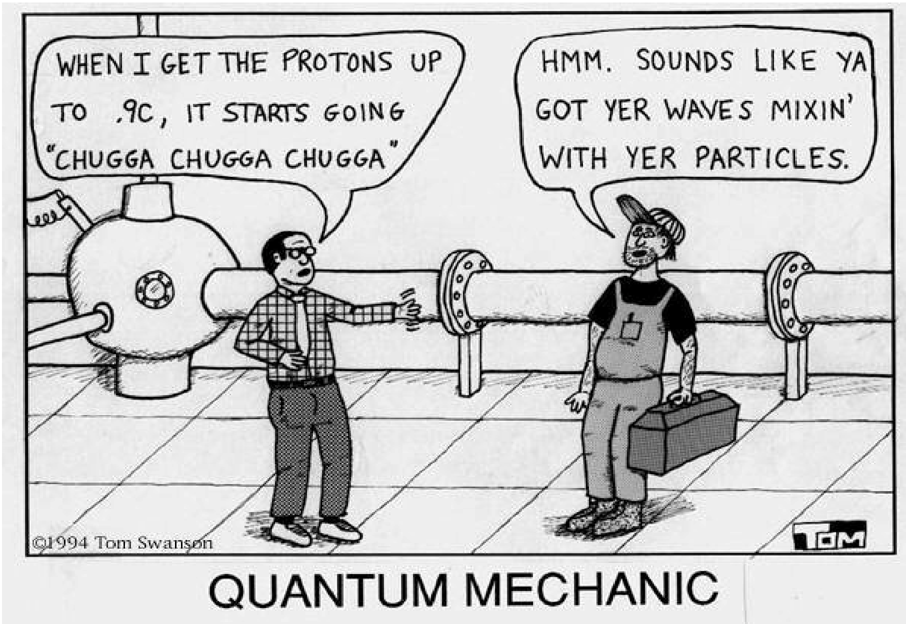
[15] Una delle cose migliori dei Congressi Solvay sono le foto di gruppo dei partecipanti. Ogni giovane aspirante fisico dovrebbe stamparne qualcuna e giocare a riconoscere gli scienziati più noti. Gioco facile, a dire il vero: sono molti di più i mostri sacri che gli sconosciuti.

[16] Non è la prima volta che parliamo nemmeno di questo: in RM161 ricordiamo proprio quanta confusione il dualismo possa causare, persino in una singola famiglia.

einsteiniana poi) dei "quanti di luce", dei corpuscoli che nel giro di poco tempo assunsero il nome di "fotoni". Louis, con innegabile coraggio, anziché limitarsi a questo raddoppia, triplica, decuplica la posta in gioco: nella sua tesi "*Recherches sur la théorie des quanta*" avanza l'ipotesi che non solo la luce, ma tutta la materia, possieda un aspetto ondulatorio. In altre parole, che il dualismo onda-corpuscolo sia una caratteristica non solo di un ente fisico molto ben definito e speciale come la luce, ma sostanzialmente di ogni componente dell'Universo.

È un cambio di paradigma: non è la luce ad essere speciale, è tutta la materia che è così. Gran parte del mondo scientifico non è disposta a prendere sul serio l'ipotesi del nobile francesino: e qualcuno non disdegna di prenderlo in giro, asserendo che l'idea della natura ondulatoria della materia sia argomento buono proprio per la *Comédie Française*.

Ma Louis ha ragione. Sia stato un isolato colpo di genio o un meditatissimo principio che ha preso corpo in lunghi anni di ricerca, non è facile da stabilire. Fatto sta che tre anni dopo due diversi esperimenti (quello di Davisson, Kunsman e Germer negli USA e quello di Thomson in Scozia) rivelano la natura ondulatoria dell'elettrone, dando ragione alla pazzesca idea del principe De Broglie. È anche l'inizio della "meccanica ondulatoria", perché è proprio grazie a questo risultato che Schrödinger, Dirac[17] e altri approcceranno con successo le basi della Meccanica Quantistica tramite la dinamica e cinematica delle onde.



7 – *Quando faccio arrivare i protoni a .9c, comincia a fare "chugga chugga, chugga" – Mmm. Mi sa che avete confuso le vostre onde con le vostre particelle.*

Il Premio Nobel per la Fisica gli venne consegnato nel 1927: è possibile che esistano anche altri aristocratici a poter esibire un Premio tanto prestigioso, ma non è facilissimo farseli venire in mente. Louis potrebbe essere il solo elemento a sguazzare nell'intersezione dei due insiemi.

[17] Questi due grandi sono protagonisti del compleanno di RM103, "Non dire gatto…".

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Guardie e Ladri Teorico			
Il Gioco dei Sette Nani			

2.1 Guardie e Ladri Teorico

...e anche un filino razzista, a voler pensare male. Beh, visto che continuiamo a giocare a scacchi anche se siamo una repubblica, potremo tollerare un momento di segregazione sulla scacchiera. Che poi, a voler fare i pignoli, col *nero* che muove sempre per *secondo*...

Estate, poca voglia di lavorare... e per i VadLdRM, anche solo estrarre dal cestino *tutti* i pezzi degli scacchi è una fatica improba.

Non volendo però affaticare eccessivamente il cervello, non ci pensano neanche a giocare una partita alla cieca: semplicemente, provano a giocare con quello che le loro misere forze hanno permesso loro di estrarre dal cestino[18], a costo di inventarsi un gioco nuovo.

L'ultima idea è quella di piazzare due Torri (una nera e una bianca) in c4 e f4 e due Pedoni (uno nero e uno bianco) in a4 e h4 *[disegno? Naaa! I VadLdRM non sono gli unici con la pressione bassa]*. Le due Torri rappresentano le *Guardie*, e sono di un giocatore; i due Pedoni sono i *Ladri*, e vengono giocati dall'altro. L'idea di avere per ogni giocatore i pezzi di colore diverso non è un'inutile complicazione, come vedrete dopo.

Tutti i pezzi muovono *ortogonalmente* di *un* passo *[...fa caldo!]*, e il gioco finisce quando le due Guardie catturano i due Ladri, finendo sulla stessa casella: ma *attenzione!* Una Guardia di un colore può catturare solo il Ladro *dello stesso colore*, se finisce sulla casella del Ladro di colore opposto, non succede niente.

Il Ladro (insomma, quello con i Pedoni) posiziona i suoi pezzi, e poi la Guardia posiziona i suoi, e si parte con l'emozionante gioco: lombrosianamente, il primo a muovere è la Guardia, e ad ogni mossa ognuno dei due giocatori muove *entrambi* i suoi pezzi *[fatica...]*. Per non collassare, stabiliamo anche che una partita dura *al più* 15 mosse: se i Ladri sono ancora in giro, scatta la prescrizione.

'Sto pezzo sta durando troppo, siamo stanchi e fa caldo: qualcuno dei due giocatori ha una strategia?

2.2 Il gioco dei sette nani

Fermi tutti: prima di leggere il problema, partecipate a un sondaggio.

Quando elencate i Sette Nani, *qual è quello che vi dimenticate sempre?* Lo scrivente (Rudy) ha fatto alcune prove su un campione non significativo (la famiglia, con estensione sino al quarto grado di parentela), e già adesso si profila una bella gara tra Gongolo e Mammolo[19].

---

[18] Beh, no, in realtà non è vero: approfittiamo della nota per aggiornarvi sulla situazione. Fred si è beccato Greco e Latino, salvandosi in Matematica (...secondo voi, tra il fatto che si sia salvato in corner di mate e il fatto che io non trovi più la mia maglietta di RM, c'è una relazione di causa e effetto? Non ditemelo, potrebbe non sopravvivere. Lui.). Alberto, invece, è un po' indietro con gli esami, e si passa questo gelido luglio nel calduccio di un'aula. Fortunello!

[19] Persone di caratura culturale ben più poderosa dello scrivente (sto parlando di Doc) optano per la recitazione dei sette colli di Roma: interessante notare che molti arrivano a sette, inserendo però "Colle Oppio" che è

Bene, veniamo al problema. I Sette Nani, posizionatisi in ordine alfabetico attorno ad un tavolo circolare, stanno inventandosi un gioco. Siccome il primo è *Brontolo* (questo se lo ricordano tutti), vuole un gioco che gli permetta di arrabbiarsi anche quando vince: quindi, decidono che chi *vince* paga ad ogni altro giocatore una posta pari a quello che l'altro giocatore ha in quel momento. Per intenderci, se Brontolo gioca (e vince), darà a Cucciolo (che è seduto di fianco a lui) tanto quanto ha Cucciolo in quel momento, a Dotto (di fianco a Cucciolo) tanto quanto Dotto ha in quel momento... eccetera, sino all'ultimo (seduto di fianco a Brontolo ma dall'altra parte rispetto a Cucciolo) che bisogna svegliarlo per dirgli che deve prendere dei soldi. Se perde, ciascuno si tiene i suoi soldi (e Brontolo si arrabbia perché ha perso).

I Nostri cominciano a giocare, e dopo un po' si accorgono che non solo hanno vinto una partita a testa in ordine alfabetico, ma alla fine ciascuno di loro ha esattamente 1,28 Euro in tasca.

Adesso, quello che vorremmo sapere è quanto aveva in tasca *ciascuno di loro* all'inizio della partita.

Ah, nel caso servisse: BrontoloCuccioloDottoEoloGongoloMammoloPisolo. Certo, ***io*** li so tutti, altrimenti non farei certe domande.

3. Bungee Jumpers

1) Aggiungere alle cifre 523 altre tre cifre in modo tale che il numero sia divisibile per 7, 8 e 9.

2) Quante delle cifre da 0 a 9 sono necessarie per scrivere tutti gli interi da 1 a 100'000'000, estremi inclusi?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Agosto.

Come i più vecchi lettori (cioè quelli che ci leggono da più tempo, lo so che siete tutti ragazzini) ben ricorderanno, agosto comincia per me, Alice, redattrice di queste note, con una festa nazionale: il primo di agosto si celebra la fondazione della Confederazione, ed io ormai da anni me ne vado all'estero (o meglio in Italia) a festeggiare con i miei con gran grigliate e allegra abbondanza di beveraggi. Insomma, ormai da anni usciamo con tanto ritardo ad agosto proprio perché io me la spasso. Ma ormai sono mesi che usciamo tardi comunque, quindi non sprecherò più righe in scuse: la cosa più importante è siamo qui anche quest'anno, caldo permettendo, a riportarvi le vostre soluzioni. Ma chi ci conosce da tanti anni quanti quelli dell'esistenza di RM magari non si sono accorti che io ho conosciuto il Capo al lavoro ad Ivrea, ed ho lasciato l'Italia pochi mesi dopo la nascita di RM: era proprio il primo agosto del '99 quando ho cominciato a vivere al di là delle Alpi, e per me sono anche quattordici anni di Svizzera. Amarcord o meno, la storia di RM è anche la mia storia di vita lontano da un'Italia spesso deludente, e a contatto con il mondo degli orologi, del cioccolato e delle banche, come spesso viene ricordato. RM ha compiuto quattordici anni, la Confederazione ne ha passati settecento, speriamo di prendere esempio, con o senza ritardi… magari, prima o poi, raggiungeremo gli standard di eccellenza svizzera che tutti sognano.

Ed ora le soluzioni, va, che ho scritto pure troppo, tanto per cambiare.

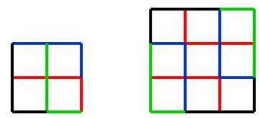
sbagliato. Tra gli esclusi, la gara è tra Esquilino e, stranamente, Quirinale (che è pure il più alto). Alice, da bravo ingegnere, si sta applicando alle Sette Meraviglie del Mondo, con la ragionevole certezza che "crisoelefantina" e "Alicarnasso" non se li ricorderà nessuno.

4.1 [173]

4.1.1 Il "Tetris" magro

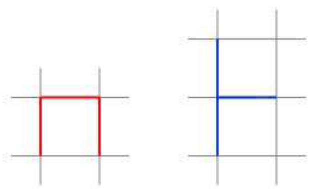
Il mese scorso questo problema – malgrado la complessità – ha fatto divertire i nostri lettori. Avevamo pubblicato il mese scorso il risultato di ***trentatre***, ***Camillo*** e ***Bobbin Threadbare***. ***Trentatre***, dopo aver visto la soluzione precedente, ha deciso di mandare un'aggiunta. Ma rivediamo prima il problema:

> *Rudy ha fatto dimagrire il Tetris: i pezzi, anziché essere formati da quadrati connessi tra di loro attraverso i lati, sono formati da segmenti congiunti attraverso i punti del reticolo degli interi. I pezzi sono praticamente gli stessi, ma sono cambiate le regole: non deve più riempire un'area in un tubo, deve fare dei quadrati, usando un solo tipo di pezzo! Nella figura vedete due soluzioni fatte con il pezzo "a elle": si notano alcune cose interessanti, tipo:*



8 *Due pezzi facili.*

> 1. *Tutti i punti del reticolo sono occupati da dei pezzi.*
> 2. *I pezzi possono avere dei punti di sovrapposizione sul reticolo*
> 3. *I pezzi non hanno dei segmenti sovrapposti*
> 4. *I pezzi sono tutti uguali*
> 5. *Oltre alle solite rotazioni, è ammessa anche la riflessione speculare.*
>
> *Come si può fare, per esempio se in una partita tutti i pezzi sono del tipo indicato nella figura a fianco? Quali quadrati si possono realizzare? E quali rettangoli?*
>
> *Se chiamiamo due pezzi a "u" connessi se hanno almeno due punti in comune: e un insieme di pezzi è connesso se esiste un cammino di pezzi a due a due connessi tra due pezzi qualsiasi dell'insieme. Considerando i quadrati che sono soluzione del Tetris dimagrito con il pezzo a "u", qual è il più grande connesso?*



9 *Due pezzi (tutt'altro che) facili.*

Dicevamo, l'aggiunta di ***trentatre*** alla sua propria soluzione:

> La nota precedente sul pezzo *U* è sbagliata sotto due aspetti: esistono i rettangoli e la classificazione dei quadrati è del tutto incompleta.
>
> In fig. 1 e 2 lo schema di tre diversi rettangoli (9,15) e tre casi (11,11); solo il primo è del tipo già previsto.

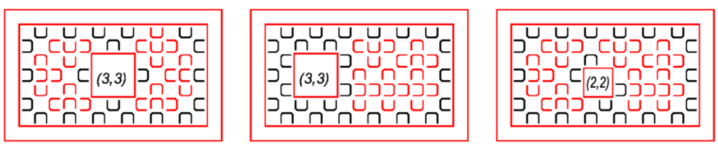


Fig. 1 *(9,15)*

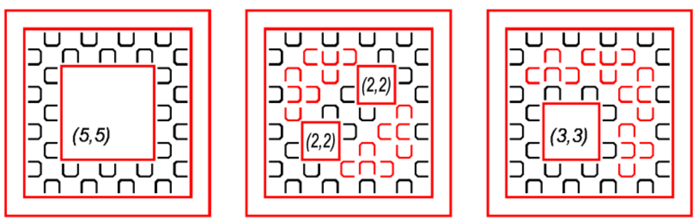


Fig. 2 *(11,11)*

Per gli altri pezzi ho tentato un approccio diverso; tutti i *pezzi lineari* (*U*, *T*, *L* ecc.) possono essere trasformati in *tessere piane* con questa procedura

a) ogni tratto elementare del pezzo è la diagonale di un quadrato unitario

b) la tessera ottenuta va collocata su una griglia quadrata *G* di lato unitario

c) nella tessera va indicato un punto di riferimento *P* che deve stare su di una sotto-griglia *G*2 di lato 2.

La fig. 3 riporta la trasformazione nel caso *U*.

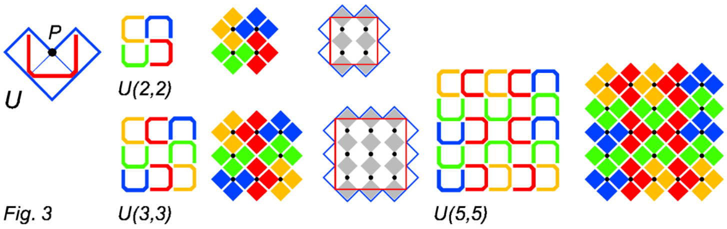


Fig. 3

La condizione c) è imposta per garantire che il bordo del rettangolo (visto con i *pezzi*) sia continuo. Sovrapponendo a *G* una scacchiera a colori alternati, in modo che i tratti orizzontali del pezzo siano nelle caselle grigie e quelli verticali nelle bianche, basta posizionare i punti di *G*2 in modo opportuno e vincolare a questi le tessere per ottenere il bordo continuo[20].

Poiché i tratti dei pezzi riempiono tutto il reticolo senza sovrapposizione, le caselle quadrate riempiono l'area senza sovrapposizione – si ha quindi una *tassellatura* del piano.

I pezzi *U* e *T* (v. fig. 4) generano la stessa tessera – un *polimino* angolare di tre caselle. Quindi *U* ed *T* corrispondono alla stessa tassellatura, e sono un unico problema. La differenza sta solo nel perimetro, cioè nella posizione di *G*2. Nella nota precedente le soluzioni *U* e *T* erano quelle indicate come *chiuse* e *aperte*; si ottiene pertanto una *T* togliendo da una *U* la prima cornice e viceversa – p.es. *T*(2,2) è il nucleo di *U*(5,5).

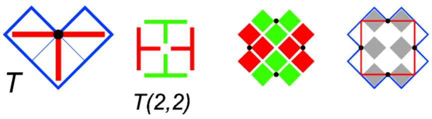


Fig. 4

Il caso *L* è più complesso: non essendo simmetrico, il pezzo può assumere otto posizioni diverse, e può incrociarsi. La tessera – fig. 5 – è ancora un *polimino* che però ammette la connessione dei quadrati anche per gli spigoli; è questo che consente l'incrocio.

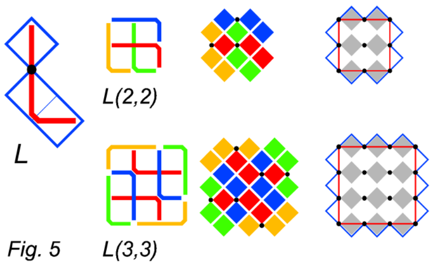


Fig. 5

Nel caso *L* esistono tutte le figure con $A = 3m - 1, 3m,\ m \geq 1$ e $B = A + 3k,\ k \geq 1$, salvo che per *A* = 2 esistono solo (2,2) e (2,8). P. es. in fig. 6 un rettangolo (6,9).

[20] *G*2 corrisponde alle traslazioni che lasciano invariata la scacchiera

Fig. 6

Molte delle tessere (cioè i polimini *regolari* e *diagonali*) consentono una tassellatura infinita del piano. Ma il perimetro limita fortemente i pezzi utili[21].

I polimini *regolari* generano al più due pezzi diversi (come T, U), quelli *diagonali* solo uno (come L). Controllando tutte le tessere con n caselle, per n da 2 a 5, ho trovato che i pezzi utili sono solo

- 2 caselle : i due casi possibili L, I
- 3 caselle : i casi U, T, L, I [22](3)
- 4 o 5 caselle : i casi L, I

(I è un pezzo con n tratti allineati, L con (n-1) tratti allineati e solo uno ortogonale).

Escluso $n = 3$, sembra che gli unici casi siano sempre e solo L e I – che esistono per ogni n. Ma le soluzioni I sono banali e, a parte $n = 3$, con i pezzi L si può costruire solo un quadrato di lato n. Non credo che per $n > 5$ esistano soluzioni, e questo chiude l'elenco dei pezzi *connessi* possibili.

Esistono però pezzi *non connessi* prodotti da tessere *connesse* (in senso diagonale). Il più semplice è in fig. 7, per cui esistono tutte le soluzioni con $A = 3m - 1, 3m,\ m \geq 1,\ B = A + 3k,\ k \geq 0$ (limitate a $B = A + 6k$ se $A < 5$).

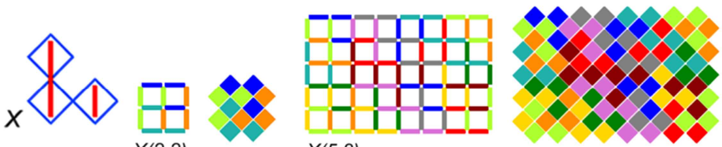


Fig. 7

E vediamo, il Tetris ha avuto tantissimo successo il mese scorso, magari ne riparliamo a settembre. Abbiamo anche ricevuto contatti per i mobili del Capo, e per i suoi giochi… ma qui ci fermiamo, e vediamo di arrivare alle soluzioni del mese passato.

4.2 [174]

4.2.1 Vai col *"fèntasi"*!

Divertire il Capo è il nostro scopo fondamentale, soprattutto quando pubblichiamo le soluzioni ai problemi. Voi non ci crederete, ma da quando non raccoglie più le soluzioni lui stesso, non fa che accogliere con gridolini di piacere la prima versione di questa rubrica, ed aggiungere commenti e annotazioni. A volte i commenti glieli pubblichiamo, a volte no: è una piccola rivincita, ma ognuno fa un po' quello che può.

Allora, il problema di scrittura creativa: sempre della serie ai matematici piace leggere e anche scrivere, si trattava più o meno di questo

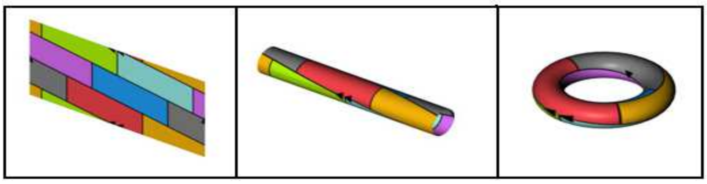
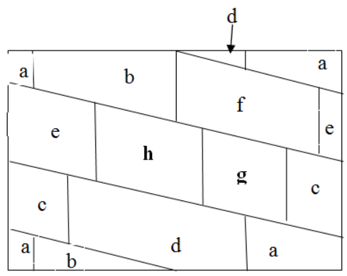
> *La famiglia di Rudy sta scrivendo un romanzo fantasy e affida a Rudy il disegno della mappa rettangolare, con le seguenti regole:*
>
> 1. *Tutte le nazioni sono connesse, e non esistono né isole né colonie, né mari*
> 2. *Ogni paese confina (nel senso di "connesso") con almeno altri p paesi*

[21] Una tassellatura infinita esiste per i polimini regolari con al più 5 caselle; ma una "soluzione" equivale a una parte – ruotata di 45° – con contorno a zig-zag e con il vincolo c).

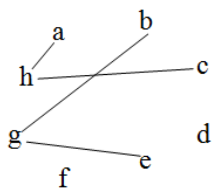
[22] Come ha giustamente osservato ***Camillo***.

> *3. Tra tutte le coalizioni possibili, ne esistono di q nazioni senza frontiere comuni, ma in tutte le coalizioni con più di q nazioni, ci sono sempre alcune nazioni che hanno frontiere comuni.*
>
> *4. Ah, giusto per non fare la cosa troppo facile: $p > 6 - 4/q$.*
>
> *E adesso disegnate la mappa. Poi, per giocare ancora un po', supponiamo un mondo toroidale…*

Che ne dite? Ci si è cimentato con passione il nostro ***Alberto R.***, che da quando ci ha scoperto non ci fa mai mancare una soluzione e noi non facciamo mai a meno di pubblicare senza di lui:

> Sommando i ponti di Konigsberg, l'anello di Moebius, il teorema dei quattro colori e quello della palla pelosa, aggiungendo poi la consapevolezza che è possibile togliersi le mutande senza togliersi i pantaloni, si ottiene oltre il 95% di tutte le mie conoscenze di topologia. Però mi son detto: tre pipe, tre birre, tre conigliette; piatto ricco mi ci ficco; ci provo.
>
> È noto che sul piano o sulla sfera si possono disegnare al massimo 4 regioni ciascuna confinante con le altre 3. Dunque $pmax = 3$.
>
> D'altra parte, per fare una coalizione bisogna essere almeno in 2. Dunque $qmin = 2$.
>
> Pertanto la condizione $p > 6 - 4/q$ non può essere soddisfatta.
>
> Le cose dovrebbero andare meglio su una superficie toroidale cha accetta ben 7 regioni ciascuna confinante con le altre 6, come risulta da questa bella figura policroma, copiata da Wikipedia alla voce "Teorema dei quattro colori".
>
> 
>
> Alla mappa suddetta ho aggiunto un'ottava regione dividendo l'area blu nelle aree g ed h, ottenendo così la figura che segue:
>
> 
>
>
> Ho poi costruito la "tabella dei confini": L'asterisco indica due regioni non confinanti, mentre ad ogni casella vuota corrisponde una coppia di regioni confinanti.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	\							*
b		\					*	
c			\					*
d				\				
e					\		*	
f						\		
g		*			*		\	
h	*		*					\

> Dalla tabella risulta che:
>
> 1) Ogni paese confina con almeno altri 5 paesi (in ogni riga o colonna ci sono almeno 5 caselle vuote);
>
> 2) Esistono 4 possibili coalizioni di 2 paesi non confinanti (ah, bg, ch, eg);
>
> 3) Non sono possibili coalizioni di 3 o più paesi a due a due non confinanti;
>
> 4) In definitiva $p = 5$ e $q = 2$, quindi la condizione $p > 6 - 4/q$ è soddisfatta.
>
> Nota: L'affermazione 3) non è immediatamente evidente. Per renderla tale si possono rappresentare gli 8 paesi come punti sul piano e collegare con un segmento le coppie che non sono confinanti. Salta all'occhio che nel grafo così ottenuto non ci sono triangoli, né, tantomeno, altri sottografi completi.
>
> 
>

Siete impressionati? Noi no, ormai ci siamo abituati. Mentre chiudevamo il numero ci è arrivata la soluzione di ***trentatre***, che volentieri pubblichiamo senza nemmeno guardare (speriamo di non aver perso niente):

Riassumo il problema

a) ci sono n paesi e ognuno confina con almeno p altri

b) sono raggruppati in k coalizioni di almeno q paesi

- in una coalizione q i paesi non confinano fra loro
- esiste almeno una coalizione > q con alcuni paesi confinanati
- deve essere $q \geq 2$ [23]

c) vale la $p > 6 - 4/q$.

Uso la normale terminologia per i grafi.

Il grafo G della mappa è *planare*. Sia G^* il grafo *duale* di G – anch'esso *planare* – con

- *nodi*: in numero di n – un punto (la capitale) per ognuno dei paesi
- *archi*: in numero di e – un percorso (strada fra le capitali) per ogni coppia di paesi confinanti.

p è il *grado minimo* di G^* (n° min di *archi* incidenti in ogni nodo).

Nei nodi di G concorrono 3 archi: le facce di G^* sono triangoli.

Nei grafi planari deve esistere almeno un nodo di grado ≤ 5.

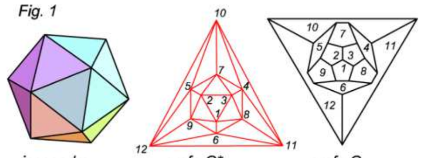
Quindi per a) è $p \leq 5$, e per p = 2,3,4,5, si ha da c) che deve essere p = 5, q =2, 3.

L'*icosaedro* ha facce triangolari e vertici a 5 spigoli. Proiettandolo sul piano si ha il grafo planare G^* di fig. 1, con p = 5, n = 12.

Da G^* si ricava il duale G (la mappa)[24], con ogni paese confinante con 5 altri. In fig. 2 una configurazione semplificata e una più "naturale".

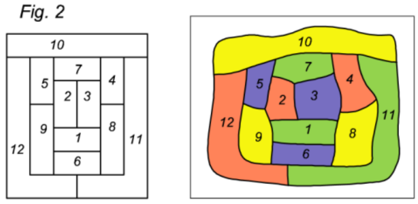
I 12 paesi si possono dividere in vario modo in 4 gruppi di 3 paesi non confinanti (colori), cioè nelle coalizioni (1,7,11), (8,9,10), (3,5,6), (2,4,12), e quindi q = 3. Per b) questa <u>non è una soluzione</u>, perché manca la coalizione > q; ma per questo basta una ulteriore alleanza fra due gruppi qualsiasi - p.es. i verdi e i blu.

Fig. 1



icosaedro — grafo G* — grafo G

Fig. 2



mappa

Anche qui, stesso commento, ormai non ci stupiamo più. Ci fermiamo qui, e andiamo avanti con l'altro problema.

4.2.2 Strani, simpatici, ridicoli numeri

Problema senza molta ambientazione, ma simpatico ai nostri lettori, forse soprattutto per il titolo:

> *Diciamo che un numero n è un anagramma precedente il doppio (APD) se il numero 2n–1 è formato dalle stesse cifre di n in ordine diverso: ad esempio, 37 è un numero APD (ve lo calcolate da soli, che è facile).*
>
> *Trovare delle caratteristiche matematicamente interessanti di questi numeri non è facile, ma ne esiste almeno una che è tanto bella quanto "stupida", almeno a prima vista: e, infatti, vi chiediamo di dimostrarla.*
>
> *Se n è un APD che termina con 3, allora deve contenere un 8.*

[23] Ho aggiunto questa condizione perché con q = 1, per b), una soluzione ammette sempre i due casi estremi: n coalizioni ognuna composta da un singolo paese (tutti contro tutti), oppure una unica coalizione di tutti i paesi (tutti alleati); ho escluso questi casi banali.

[24] G^* e G sono le proiezioni dei due solidi *duali* icosaedro e dodecaedro.

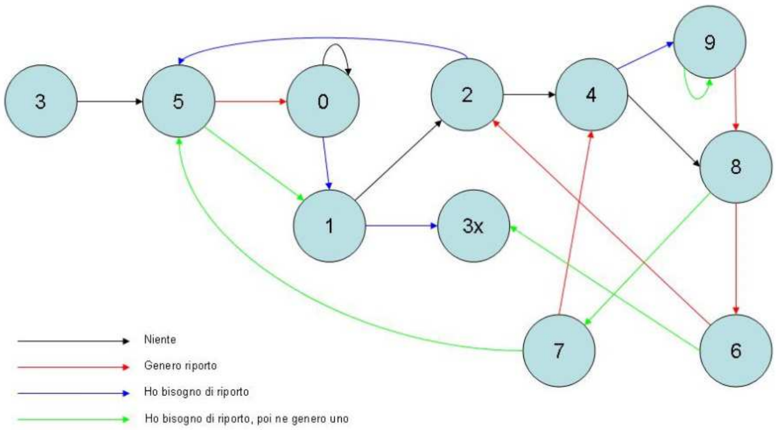
> *Per qualsiasi intero positivo n, esiste un intero positivo k tale che 2km è un anagramma di km.*

Ecco, problema tecnico, direi, ma vediamo che ne dicono i nostri solutori, cominciando da ***Camillo***:

> APD: la cosa si potrebbe collocare in un ambiente di giocatori incalliti. Dove, ad esempio, si hanno 4 dadi a 6 facce ed occorre imbroccare una delle 4 combinazioni che producono un APD. Se poi si usassero 5 dadi a 9 facce occorrerebbe essere dei giocatori veramente incalliti per imbroccare una delle 8 combinazioni.
>
> Per quanto riguarda il nome; perché cambiare un nome così sintetico.
>
> Non so dimostrare che un APD che termina con 3 contiene un 8 ma mi sento di asserire che ne può contenete uno solo, dovrebbe contenere anche un solo 4, degli 1 e almeno un 5 (quest'ultimo riesco a dimostrarlo anch'io).
>
> Proseguendo col finale 3: il primo numero che ha questa caratteristica è il 158743, bisogna arrivare fino al 1122556843 per trovare il primo senza 7 dentro.
>
> Ma con gli altri finali cosa possono contenere?
>
> Vi propino una tabellina dove riporto i finali e le cifre che devono contenere (ho analizzato quasi 2 milioni di APD):
>
> 0) 01...5.7.9
>
> 1) .1..45..8. questo senza considerare l'APD 1
>
> 2) .123.5....
>
> 3) .1.345..8.
>
> 4) .1..45.7..
>
> 5) .1...5..89
>
> 6) .1....6...
>
> 7) ...3...7..
>
> 8) .1..45..8.9
>
> 9) .1..45.7.9
>
> La "stranezza" potrebbe essere, anche se non lo credo, quella dell'inserimento dei 9.
>
> Ad ogni APD che contiene una cifra <5 seguita da una >4 può essere esteso inserendo quanti 9 si vuole tra le due cifre che si ha sempre un APD.
>
> L'esempio più semplice è il 37, 397, 3997, 39.......97.
>
> Un esempio un po' più lungo 100603032652, 1009..96030329..9652 ecc.
>
> Inoltre penso che in qualunque numero contenente 9 si possano affiancare dei
>
> 9 all'infinito.
>
> Ho anche il sospetto che per qualunque coppia affiancata di numeri ci sia un numero che la contenga. 397 con 3016 4397301658.

Camillo ci da sempre delle buone idee, la prossima soluzione arriva da ***Carlo***, che non si fida molto di sé stesso, ma fornisce soluzioni divertenti:

> ci provo a dare la soluzione, ma sono consapevole che se fa acqua da tutte le parti, potrete utilizzarla nei prossimi momenti conviviali attorno a un fuoco, magari assieme a chi di matematica ne capisce qualcosa.
>
> Dopo una decina di giorni di tentativi alla vana ricerca di una "linea di attacco" al problema, i quaranta gradi all'ombra, e soprattutto una buona "ombra de vin" mi hanno fatto pensare ai diagrammi di stato e così è nato il diagramma allegato.



Provo a spiegarmi prima che l'effetto "ombra" svanisca del tutto.

La cifra "3" è la cifra di partenza.

Il numero 2*n–1 finisce sicuramente col "5".

Quindi dal "3" passo al "5".

Poi il diagramma rappresenta le altre cifre che devono essere presenti nel numero e come posso arrivarci.

Dal "5" moltiplicando per 2 (ignoro il –1 perché agisce solo sull'ultima cifra che abbiamo deciso è "5"), posso andare allo "0" o all'"1", in entrambe i casi guadagnerò un riporto, e nel secondo caso ho anche bisogno di un riporto.

Altro esempio: dal "2" posso andare al "4" o al "5" e nel secondo caso ho bisogno di un riporto.

A questo punto il diagramma degli stati ha:

- frecce nere -> transizione di stato senza generare né richiedere riporto;

- frecce rosse -> transizione di stato dove si genera un riporto;

- frecce blu -> transizione di stato dove ho bisogno di un riporto "prima" di fare la transizione;

- frecce verdi -> transizione di stato dove ho bisogno di un riporto "prima" di fare la transizione e dove genero un altro riporto.

Bene, parto dallo stato "3" e il gioco finisce quando arrivo nuovamente al "3" che ho indicato "3x" per distinguerlo dallo stato iniziale.

La transizione è possibile solo se il numero di riporti disponibile è maggiore di 1 prima di fare la transizione.

Quindi, parto da "3"; arrivo al "5"; non posso andare all' "1" adesso, perché ho 0 riporti nel cassetto, quindi vado allo stato "0" e metto un riporto nel cassetto; vado all' "1" e spendo il mio riporto; analogamente non posso andare al "3x" adesso, ma devo passare dal "2"; devo poi andare al "4"; e devo andare all' "8"; devo anche andare al "6" e poi per la prima volta posso andare al "3x".

Posso fare anche altri giri prima di arrivare al "3x", ma sicuramente devo passare almeno una volta dall' "8".

Se poi con la sequenza di cifre che ho, riesco a trovare il simpatico numero che rispetta la regola, non lo so, basta fare un "programmino" al computer e provare tutte le combinazioni.

Va bene, va bene, ho scritto un mucchio di fesserie, ci ho provato, la prossima volta ci penserò un mese e non dieci giorni.

Mah, a noi è sembrato interessante, voi che ne dite? E con questo chiudiamo, che magari il numero di agosto riesce ad uscire proprio ad agosto. A rileggerci a settembre! A presto!

5. Quick & Dirty

Questo problema è stato molto utile per spiegare un concetto qualche anno fa: un Greco è nato il decimo giorno del 40 a.C. ed è morto il decimo giorno del 40 d.C. Quanti anni è vissuto?

6. Pagina 46

1) Il numero che inizia con le cifre 523 ed è divisibile per il numero 7·8·9=504 può essere scritto nella forma 523'00+*X*, dove *X* è un numero di tre cifre.

Attraverso una semplice divisione, si ottiene 523'000 = 504·1037 + 352; ossia, 523'000 dà un resto di 352 quando viene diviso per 504.

Siccome la somma di 532'000 e di *X* deve essere divisibile per 504, segue che *X* può essere uguale a 504 – 352 = 152, oppure a 2·504 – 352 = 656; il numero 3·504 – 352 ha quattro cifre, quindi non viene considerato.

Da cui, le ***due*** soluzioni sono 523'152 e 523'656.

2) Analizziamo, per prima cosa, i numeri nell'intervallo [0;99'999'999]. Per fare questo, saturiamo verso sinistra i numeri con degli zeri in modo da ottenere dei numeri da otto cifre. Abbiamo quindi 100'000'000 numeri, e per scriverli abbiamo bisogno di un foglio a quadretti formato da 800'000'000 quadretti.

Se ora scriviamo 00'000'000 all'inizio del foglio e 99'999'999 alla fine, e riempiamo tutti gli spazi intermedi (sempre utilizzando gli zeri iniziali dove necessario), vediamo che ogni cifra, zero incluso, viene utilizzata lo stesso numero di volte: ossia la nostra colonna contiene 80'000'000 di esemplari per ognuna delle cifre.

Calcoliamo ora quanti zeri abbiamo utilizzato per saturare sulla sinistra i vari numeri per cui questo era necessario: escludendo lo zero, ci sono nove numeri a una cifra, 99 – 9 = 90 numeri a due cifre, 999 – 99 = 900 numeri a tre cifre, e avanti in questo modo.

Per saturare i numeri a una cifra abbiamo utilizzato sette zeri; per saturare quelli a due cifre abbiamo usato sei zeri, eccetera: da cui, se escludiamo gli zeri necessari per riempire 00'000'000, ossia lo *zeresimo* numero, abbiamo che il numero degli zeri di saturazione utilizzati è pari a:

7·9 + 6·90 + 5·900 + 4·9'000 + 2·900'000 + 1·9'000'000 = 11'111'103.

Aggiungendo (in senso posizionale) 1 al numero 00'000'000, otteniamo tutti i numeri da 1 a 100'000'000. Per scrivere tutti questi numeri abbiamo bisogno di 80'000'000 cifre 2, 3, eccetera; inoltre, abbiamo bisogno di 80'000'001 cifre 1 e 80'000'000 – 11'111'103 = 68'888'897 zeri.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Il capitolo inesistente

Longior undecimi nobis decimique libelli
Artatus labor est et breve rasit opus.
Plura legant vacui
Marziale, XII, 4

Nel senso che se mai fosse pubblicata una nuova edizione di *Rudi Simmetrie* ne farebbe sicuramente parte, in quanto la parte è stata appena accennata: visto però che ben difficilmente verrà pubblicata su carta una "Terza Edizione Interamente Riveduta e Corretta" (sì, c'erano un paio di errori) e Rudy ritiene che il passaggio ePub sia estremamente insoddisfacente[25], ben difficilmente vedrete mai tutto questo assieme al resto. Quindi, tenetevi da conto la vostra copia che in giro ci sono più Gronchi Rosa che copie di RS.


10 *Stella Octangula*

È fatto poco noto (e, forse, leggenda) che Keplero[26], trovandosi in difficoltà finanziarie e dovendo fare un regalo al suo mecenate[27] (che, evidentemente, scuciva pochi soldi) scrisse il *Strena seu de nive sexangula*, in cui si poneva la domanda come mai i fiocchi di neve fossero tutti diversi tra di loro, pur mantenendo la simmetria esagonale: i lavori sulla simmetria avevano portato il Nostro a costruire tre interessanti poliedri stellati: il più semplice è la ***stella octangula***, costruibile in due modi: o incastrate tra di loro due tetraedri oppure (e questo è il metodo classico) incollate sulle facce di un ottaedro otto tetraedi di dimensione opportuna: il tutto, una volta costruito, ha una sua potente stabilità, data anche dal fatto che è inscrivibile facilmente (nel senso che "si visualizza facilmente") in un cubo con i vertici dei tetraedri sui centri degli spigoli.


11 *Piccolo Dodecaedro Stellato*

Il prossimo è (di poco) più complicato: trattasi del ***piccolo dodecaedro stellato***, e anche qui la costruzione è duplice: partendo da un dodecaedro, in prima ipotesi potete prolungare gli spigoli (da entrambe le parti) sin quando si incontrano, oppure incollate delle piramidi a base pentagonale (*qualcuno calcoli lo spigolo laterale della piramide! Simpatici risultati assicurati!*) su tutte le facce del dodecaedro: le "punte" della stella, tra le altre cose, coincidono con i vertici dell'icosaedro che inscrive il PDS, e secondo noi questa è una delle più belle visualizzazioni del fatto che il dodecaedro è il duale dell'icosaedro.

Per quanto riguarda l'ultimo, il pubblicarne l'immagine rende Rudy molto triste: infatti, *non ricorda assolutamente di averlo visto, a Praga!* E l'aggeggio è proprio lì. Siamo talmente arrabbiati con l'AMS che non ce l'ha detto prima che le rubiamo tutte e tre le immagini senza citarla. Oh.

[25] Volendo porre la cosa nel nostro abituale modo estremistico, lo standard CSS3 contiene una discreta asinata, consistente nell'aver inserito le *animazioni*, che sugli eBook Reader sono assolutamente impresentabili. "E a cosa ti serve il CSS3?" "Cribbio, finalmente un modo *sensato* per scrivere le formule!". Conscio della noiosaggine di quanto produce, lo scrivente ritiene che il potersi fermare un attimo nella lettura senza consumare energia sia la vera rivoluzione dell'eBook Reader. Ma non potevano fare almeno una "2.5"???

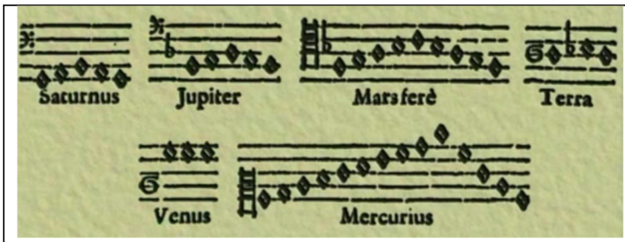
[26] Comunicazione di servizio: Doc, JK è nato il 27 dicembre (1571). Datti da fare.

[27] L'imperatore del Sacro Romano Impero Rodolfo II. Per evidenti motivi, lo teniamo in nota.

Il nome dovrebbe darvi sufficienti informazioni su come costruirlo: noi ci limitiamo a segnalare che, se prendete il suo gruppo delle simmetrie dirette (ossia solo rotazioni, niente riflessioni) ottenete A_5, il gruppo che rappresenta il cardine di tutta la dimostrazione che le equazioni di quinto grado non le risolvete con metodi algebrici.


12 *Il Grande Icosaedro Stellato*

L'altra grande (sì, per noi la *Strena* è un grande libro) opera di Keplero è l'*Harmonices Mundi* e, prima di parlare del tema che ci interessa, vi segnaliamo un interessante fatto.



13 *Harmonices Mundi*

Chi parla dell'HM, di solito vi rifila il frontespizio con tutti i solidi regolari incastrati uno dentro l'altro: per evidenti motivi di copyright[28] non possiamo pubblicarla, quindi vi pubblichiamo una copia di un'altra pagina, nella quale Keplero ha deciso che note fanno i pianeti quando si muovono: le trovate nella figura qui a fianco. Non solo, ma ***Anna Lombardi*** (progetto), ***Arcangelo di Donato*** (musica) e ***Mogi Vicentini*** (grafica) hanno deciso di *suonarla* e, secondo noi, vale la pena di cercarla (eh? Certo, che ho perso l'indirizzo!): ci aspettiamo variazioni sul tema basate sui quadrati delle aree o sui cubi dei tempi, nel caso passatecele (l'originale ci sembra sia basato sui periodi di rivoluzione).

Finita l'introduzione, contenti? Tutto per arrivare all'*Harmonices Mundi*. E adesso arriva la parte che abbiamo già trattato, ma secondo noi in modo insoddisfacente.

Come al solito, per prima cosa inventiamoci una notazione. Per descrivere i vertici di una tassellatura, indichiamo il vertice come $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ se in quel punto si incontrano dei poligoni di $n_1, n_2, \ldots, n_k$ lati: nel caso due poligoni siano uguali ripetiamo il numero, consideriamo equivalenti tra loro $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ e $(n_2, \ldots, n_k, n_1)$. Poniamo poi un'altra condizione (per la quale andiamo a capo, in modo da far arrabbiare Doc).

Consideriamo equivalenti anche le due descrizioni $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ e $(n_k, \ldots, n_2, n_1)$: e adesso vediamo se Doc se ne accorge.

Si ottiene una tassellatura se *tutti i vertici hanno la stessa notazione*: in particolare, se $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$ la tassellatura si dirà *regolare*; in tutti gli altri casi, la tassellatura sarà *semiregolare*.

Keplero scopre un interessante teorema: *Esistono solo undici*[29] *tassellature semiregolari, e tre di queste sono anche regolari.*

Come si arriva ad un risultato del genere? Se fate un po' di conti, vi accorgete che in un poligono regolare di n_i lati gli angoli valgono tutti $180°\cdot(n_i - 2)/n_i$; da questo si ricava che *condizione* ***necessaria*** *(*ma non sufficiente*) per avere una tassellatura regolare è che sia:*

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i - 2}{n_i}\cdot 180\right) = 360$$

E da questa si arriva all'equazione diofantea:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i} = \frac{k-2}{2}$$

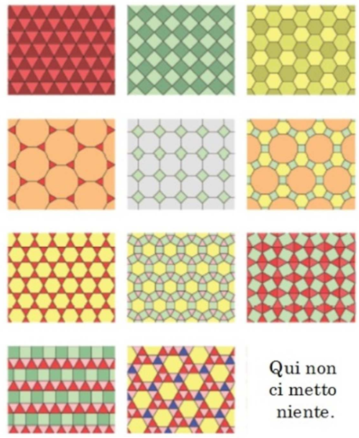
[28] Era il nostro logo quando scrivevamo su Coelum.

[29] Motivo dell'incavolatura di Doc: nell'ultima conferenza lui e Rudy hanno litigato sul fatto che fossero undici o dodici (quella in più nasce dalla condizione per cui siamo andati a capo, secondo Doc la riflessione fa perdere l'equivalenza).

Che è una bestia meno brutta di quanto possa sembrare. Tanto per cominciare, il primo membro deve essere positivo, il che impone $k \geq 3$; se poi consideriamo che di triangoli equilateri ne possiamo mettere al più sei e tutti gli altri poligoni regolari hanno angoli interni maggiori di quelli dei triangoli, è evidente che in ogni vertice possono incontrarsi al più sei poligoni, e quindi $k \leq 6$. E a questo punto, per forza bruta arrivate alle soluzioni[30]:

(3, 7, 42) (3, 8, 24) (3, 9, 18) (3, 10, 15) (3, 12, 12)
(4, 5, 20) (4, 6, 12) (4, 8, 8) (5, 5, 10) (6, 6, 6)
(3, 3, 4, 12) (3, 3, 6, 6) (3, 4, 4, 6) (4, 4, 4, 4)
(3, 3, 3, 3, 6) (3, 3, 3, 4, 4)
(3, 3, 3, 3, 3, 3,)

Scusate il disordine, ma volevamo dividerle per dimensioni.



14 *Le ~~dodici~~ undici tassellature regolari*

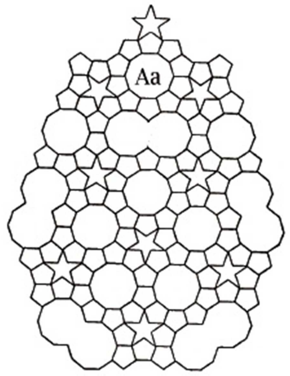
Dicevamo, *necessaria ma non sufficiente*: la prima, ad esempio, non si sogna neanche di diventare una tassellatura. Facendo un po' di prove, ottenete quelle della figura a fianco, dove la dodicesima è stata censurata in quanto speculare: nell'ordine, le definizioni di Keplero sono:

(3, 3, 3, 3, 3, 3) (4, 4, 4, 4) (6, 6, 6)
(3, 12, 12) (4, 8, 8) (4, 6, 12)
(3, 6, 3, 6) (3, 4, 6, 4) (3, 3, 4, 3, 4)
(3, 3, 3, 4, 4) (3, 3, 3, 3, 6)

Per ognuna di queste, se sovrapponete una copia all'originale e cominciate a ruotare rispetto ad un vertice, vi accorgete che riuscite a sovrapporre esattamente i due schemi (a meno dei colori per qualcuna, ad esempio la decima: la cosa è ininfluente, in quanto sono stati aggiunti per puri motivi di visualizzazione) per rotazioni di un qualche k del tipo:

$$\frac{360}{k}, k \in \{2,3,4,6\}$$

E il fatto che *manchi il cinque* infastidisce. Sia noi che Keplero.



15 *Il meglio di Keplero*

Infatti, il nostro nell'*Harmonices Mundi* prova svariate configurazioni che potrebbero portare a una simmetria pentagonale, anche (a nostro giudizio) stressando il concetto di poligono[31]: il miglior risultato che raggiunge, con una simmetria pentagonale ***locale***, è indicato in figura. E non va bene: infatti, se guardate bene i decagoni, vi accorgete che *hanno delle sovrapposizioni* (le aree che sembrano degli orbitali "d" di un atomo... insomma, ci siamo capiti: le robe a forma di otto grasso), il che inficia tutta la costruzione, che comunque resta bellissima: e se a qualcuno di voi "sembra di averla già vista", complimenti per la memoria: l'abbiamo usata come decorazione natalizia per una copertina, tempo fa. E se vi ricordate anche chi l'ha ridisegnata, sapete dove andremo a parare tra un attimo: per punizione, fate i conti sulla sovrapposizione di decagoni (angoli, per esempio), mentre noi parliamo un attimo d'altro.

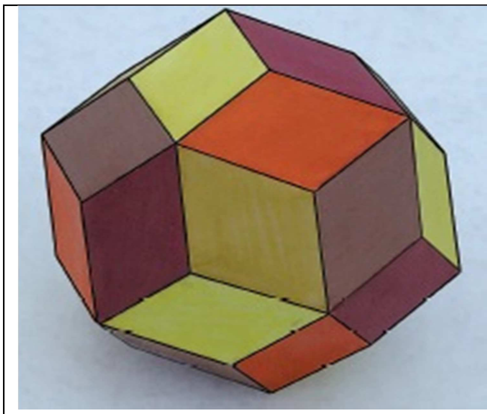
[30] Vorremmo attrarre la vostra attenzione sulla prima: la prossima volta che vi danno risposte imbarazzanti sulla Vita, l'Universo e Tutto Quanto, la domanda è "Cosa riesce a mettere d'accordo un triangolo e un ettagono?".

[31] Abbiamo riletto quanto abbiamo scritto e abbiamo riletto quanto hanno scritto altri: devono essere poligoni *regolari* e, secondo noi, usare dei poligoni *non convessi* significa tirare un po' troppo la corda.

Quando si parla di pentagoni, non si può prescindere da una ben precisa equazione: riassumiamo qui di seguito, introducendo una notazione più comoda.

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

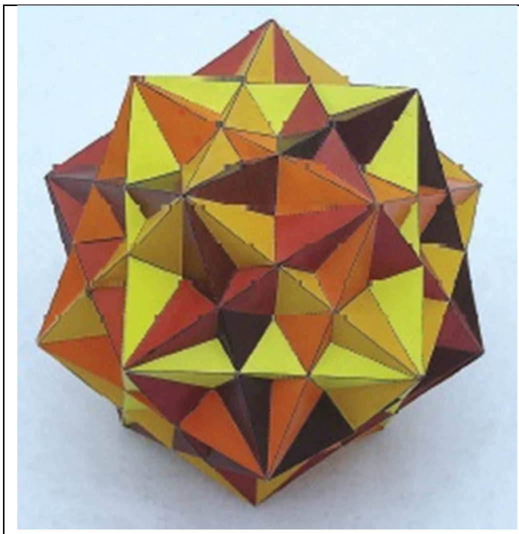
Non staremo a rielencare le sue proprietà, che abbiamo smontato in vari numeri di RM: vogliamo sperare vi ricordiate la stretta correlazione con il pentagono, il dodecaedro e l'icosaedro.



16 *Toh, un cinque…*

Questo aggeggio entra anche in un altro dei solidi scoperti dal Nostro: infatti, nel ***tricontaedro rombico di Keplero***, le facce non sono altro che rombi per cui il rapporto tra le diagonali è pari ad α, ossia alla sezione aurea. E, se avete fatto i conti sulla sovrapposizione dei due decagoni...

Ottenere questo aggeggio (che trovate nella figura) non è facilissimo: infatti, dovete incrociare *cinque* cubi aventi tutti lo stesso centro, e la parte comune a tutti dovrebbe essere questo aggeggio: non solo, ma da qualche parte (no, non lo abbiamo capito) dovrebbe esserci anche un dodecaedro: pur convinti che non aiuti assolutamente, vi facciamo il disegno: lì in mezzo, ci sono il tricontaedro rombico di Keplero, un dodecaedro e un mucchio di altre cose: potreste provare a farlo con l'origami, nel caso mandateci le foto.



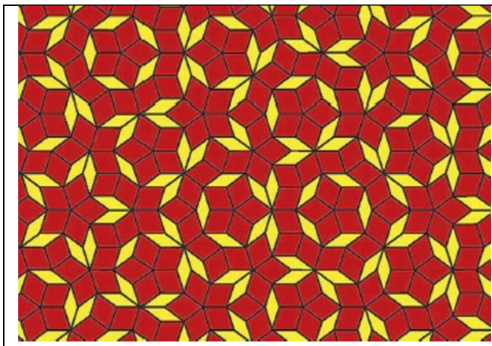
17 *Solo cinque cubi, per fare disordine*

La sezione aurea (visto anche questo) non si ferma alle due o tre dimensioni: se esprimete le coordinate del simplesso unitario quadridimensionale (l'ipertetraedro, per gli amanti della fantascienza), ottenete un'interessantissima commistione degli alfa e dei beta espressi poco sopra: non solo, ma se andate a prendere quel mostro che è il 600-celle (formato da 600 tetraedri "piegati" in quattro dimensioni), anche lì salta fuori continuamente la sezione aurea.

Insomma, con tutte queste graziose simmetrie, diventa molto seccante che da nessuna parte si riesca a trovare una simmetria pentagonale: possibile che non si riesca a fare di meglio, rispetto a Keplero?

Diciamo che si riesce in un modo "insoddisfacente secondo Keplero", ma molto soddisfacente se vi interessate di matematica ricreativa: infatti ci è arrivato ***Roger Penrose***, che nel 1970 ha scoperto una tassellatura rombica del piano che presenta simmetrie pentagonali locali[32] che coinvolge pesantemente la sezione aurea.

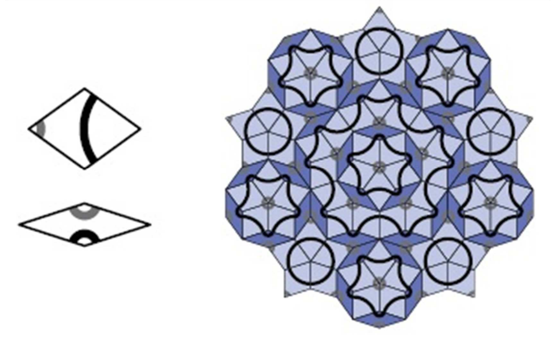
[32] Ci prendiamo la libertà, rispetto alla nostra fonte, di utilizzare il plurale. Per motivi che non siamo in grado di spiegare, ma ci paiono "evidenti".



18 *L'argomento, finalmente*

Questo aggeggio è composto da due diversi tipi di rombi, aventi l'angolo acuto pari per uno a 72°, per l'altro a 36°: guardando il disegno, sembra che la regola base per ottenere una tassellatura con questi aggeggi sia "li tiro sul tavolo, e guardo cosa viene fuori": in realtà, se volete ottenere dei disegni sensati, dovete tanto per cominciare cambiare leggermente il disegno, e poi seguire la cosiddetta ***regola di Penrose***: i pezzi vanno disposti in modo tale che *le curve dello stesso colore si incontrino*. Il che, in certi casi, non è semplicissimo: in figura vi diamo, oltre al disegno "corretto" dei due rombi, anche una figura che presenta un'evidente simmetria pentagonale rispetto ad un punto.

Un matematico, a questo punto, direbbe che le tassellature di questo tipo non ammettono una *simmetria non triviale per traslazione*, e utilizzerebbe questa proprietà per definire la non-periodicità della tassellatura: a noi pare più semplice il contrario in quanto fidiamo nel nostro innato amore per il disordine, che ci permette di riconoscerlo anche a distanza.



19 *Se partite dal punto giusto, c'è.*

Quando si incontrano le tassellature aperiodiche, la prima impressione che si ricava è: "Uh, basta buttare le piastrelle sul tavolo e metterle come capita". Difficile trovare un'opinione più sbagliata: esiste infatti un teorema (che non dimostriamo) sostenente che *ogni tassellatura del piano che soddisfa la Regola di Penrose è non-periodica*. Quando violate la regola, diventa piuttosto facile formare delle tassellature che si rivelano periodiche: il caso classico è di allineare le piastrelle in file, che quindi generano una tassellatura periodica.

Non vorremmo adesso che pensiate che il disordine sia difficile da trovare, al limite può, data la mancanza di periodicità, essere difficile trovare la "regola" di costruzione, e una delle più belle, almeno secondo noi, l'ha trovata ***Stanislaw Ulam***, oltretutto partendo da un qualcosa che sembra il massimo della regolarità: il normale triangolo isoscele rettangolo, quello che ve ne servono due per fare un quadrato. Ci piace pensare che la domanda iniziale di Ulam sia stata un qualcosa del tipo "Cos'è, in matematica, soggetto ad una regola ferrea ma fortemente irregolare?"

Cominciate con il disegnare sul foglio a quadretti una spirale quadrata, e numerate da 1 in avanti tutti i quadretti dal centro; adesso, mettete due triangoli per ogni quadretto in modo tale che le ipotenuse formino delle linee con pendenza 1: la tassellatura, evidentemente, è molto regolare, e sembra si sia perso tempo. Adesso, girate le coppie di triangoli che sottostanno ad una ben precisa regola in modo tale che le ipotenuse abbiano una pendenza –1.

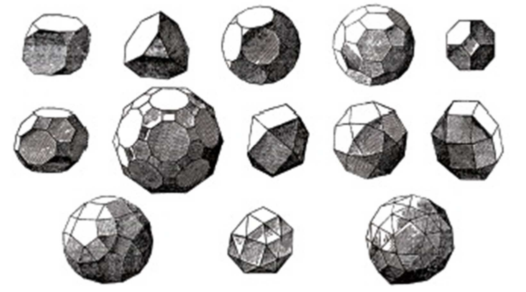
"Rudy, ce la dici 'sta regola o no?" Semplicissima: girate le coppie che *coprono un numero primo*. Bellissima, a nostro parere.

Adesso cambiamo dimensione, come dicono nei romanzi di fantascienza.

Che i poliedri regolari *convessi* siano cinque dovreste saperlo da tempo, e nel caso non ci abbiate mai creduto tempo fa vi abbiamo anche fornito la dimostrazione; esattamente come i poliedri regolari sono composti da un singolo tipo di poligono, nello spazio abbiamo i poliedri *semiregolari*, formati da due o più diversi tipi di poligoni; la loro esistenza si studia, esattamente come per le tassellature del piano, attraverso diseguaglianze diofantee e l'utilizzo del Teorema di Keplero.

Per quanto riguarda i poliedri semiregolari, esiste l'interessante proprietà di dividerli in *tre* diverse classi: oltre ai cosiddetti *poliedri archimedei* (studiati da Archimede), possiamo costruire dei poliedri semiregolari partendo da due generici n-agoni contrapposti e poi unendo le facce tra di loro in due diversi modi: o attraverso dei quadrati, ottenendo i cosiddetti *prismi regolari*, o attraverso dei triangoli, ottenendo i cosiddetti *antiprismi regolari*; formalmente, il cubo è un prisma regolare (essendo composto da due quadrati, la faccia superiore e quella inferiore, uniti da una serie di quadrati, le facce laterali), mentre l'ottaedro è un antiprisma regolare (essendo composto da due triangoli uniti da sei triangoli a comporre la superficie laterale); è ragionevolmente immediato accorgersi che negli antiprismi dovete dare una rotazione a uno dei due poligoni in modo da portare ogni vertice in corrispondenza con il centro di un lato dell'altro poligono. Evidentemente, essendo il numero dei poligoni regolari costruibili infinito, sono infiniti sia i tipi di prisma sia di antiprisma regolari.

Sempre Keplero (e sempre nell'*Harmonices Mundi*), esplora i solidi archimedei conosciuti all'epoca. E la frase che abbiamo usato dovrebbe farvi sospettare che ne esista qualcun altro. Vero: dobbiamo però aspettare sino al 1905 prima che qualcuno[33] si accorga che se prendete il decimo della serie disegnata da Keplero e date alla parte superiore una rotazione di 45° ottenete qualcosa di nuovo (che non ha *nessun punto di simmetria!*).



20 *Gli archimedei di Keplero*

Anche qui, comunque, esiste spazio per litigare: esattamente come per le tassellature semiregolari del piano (dove l'undicesima esisteva in due forme l'una speculare rispetto all'altra), abbiamo degli aggeggi chirali; infatti, gli ultimi due del disegno di Keplero esistono in forma destra o sinistra.

Il fatto che qualcuno di questi aggeggi abbia una simmetria pentagonale potrebbe farvi nascere strane idee sulla tassellazione dello spazio, ma siamo pronti a disilludervi: infatti, l'unico solido regolare che tassella lo spazio è il cubo e, se fate qualche ricerca sulle tassellature semiregolari, vi accorgete che l'unica possibile è quella basata su tetraedro e ottaedro (attaccate a ogni faccia di un tetraedro un ottaedro e viceversa).

E se andiamo avanti? Certo, esistono solidi archimedei anche nelle dimensioni superiori: se escludiamo i politopi regolari, gli *iperprismi* e gli *iperantiprismi* (ce li siamo appena inventati, comunque capite che cosa vogliamo dire), si ricava ne esistono *tre* in quattro dimensioni e *uno* per le dimensioni 5, 6, 7, 8, come hanno dimostrato ***G.*** e ***R. Blind*** [34].

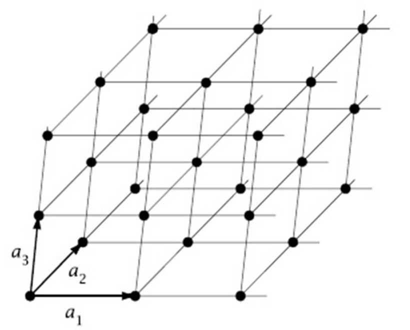
Ci limitiamo a chiudere in una frase quanto varrebbe un'intera serie di PM: nello spazio quadridimensionale si trova un politopo semiregolare con una simmetria pentagonale, formato da cinque tetraedri e cinque ottaedri; in otto dimensioni, esiste un politopo semiregolare che tassella lo spazio e, se ad ognuno di questi aggeggi sostituite la (iper)sfera inscritta, ottenete quello che è l'impaccamento di sfere più denso possibile in questo spazio (e, per quanto ci ricordiamo, in assoluto: con nove dimensioni cominciano a diminuire, per ragioni legate all'ipervolume del cubo inscritto nella sfera unitaria), in cui ogni sfera ne tocca altre 240.

Potete fermarvi qui, a meno che, per parafrasare Lagrange, siate delusi dal fatto che in questo pezzo ci sono troppe figure e troppe poche formule. Qui sotto trovate l'ultima (figura), contenti?

[33] Ci pare evidente che non sappiamo di chi si tratti: se avete notizie, lieti di pubblicare.

[34] La dimostrazione si trova in G. Blind, R. Blind: *The Semiregular Polytopes, Comment. Math. Helvetici*, 66 (1991), 150-154. No, non siamo riusciti a trovarlo. Se lo trovate (legale) e ce lo passate, grazie.

Un *reticolo cristallino* nello spazio "normale" si forma attraverso gli spigoli di celle parallelepipedali mutuamente congruenti definite dai vettori a_1, a_2, a_3 tra di loro linearmente indipendenti; inoltre, si richiede che il reticolo sia infinito e che abbia una simmetria di traslazione rispetto ai multipli interi dei vari vettori a_i. Sempre ignorando riflessioni e rotoriflessioni, ***Auguste Bravais*** si è accorto che per quanto riguarda le rotazioni abbiamo sempre le solite, ossia n={1, 2, 3, 4, 6}, ha deciso di mettere la cosa in modo negativo, che fa più sensazione: il ***Teorema di Bravais*** recita infatti *non esistono reticoli cristallini in* $\mathbb{R}^3$*con simmetria pentagonale.*



21 *Reticolo cristallino (facile)*

Esattamente come per le tassellature, la simmetria pentagonale può comparire solo localmente e, in natura, esistono degli aggeggi di questo genere denominati, con indubbia fantasia, *quasicristalli*.

Come si fa a studiare da un punto di vista matematico oggetti di questo genere? Tanto per cominciare, si generalizza.

Consideriamo un reticolo cristallino in un numero d di dimensioni, definito come sopra da un insieme di vettori linearmente indipendenti $\{a_1, a_2, \ldots, a_d\} \in \mathbb{R}^d$, e indichiamo i vertici come:

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{d} c_i \cdot a_i \, , c_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Se adesso definiamo la *mappa* $A: V \to V$ come *isometria* se $\forall x \in V, \| A(x) \| = \| x \|$, allora abbiamo che un reticolo avrà una simmetria pentagonale se e solo se esiste una isometria $A: V \to V$ per cui:

$$\forall x \in V, A^5(x) = x$$

Sia adesso e_i il versore della base ortonormale del d-spazio[35] e sia

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

una matrice di permutazione $d \times d$: si vede che è:

$$e_{i+1} = Pe_i, i = 1, \ldots, d-1;$$
$$e_1 = Pe_d$$

E quindi, per ogni $d \geqslant 2$, P^d è la matrice unitaria $d \times d$.

"...e allora?" E allora siamo sicuri che almeno *il reticolo ipercubico in* $\mathbb{R}^5$*ha simmetria pentagonale.*

Riassumendo, in tre dimensioni niente da fare, in cinque sì... e in quattro? La buona notizia è che c'è anche in quattro, ma ve la visualizzate voi: noi ci limitiamo a darvi le linee generali.

Riprendendo la notazione iniziale per la sezione aurea e il suo reciproco, definiamo i vettori unitari:

[35] OK, smettiamo di tirarcela. Il vettore con d componenti, tutte pari a zero tranne quella nella i-esima posizione, che è pari a uno.

$$a_1 = (1,0,0,0)$$
$$a_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, 0\right)$$
$$a_3 = \left(0, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$a_4 = (0,0,0,-1)$$

e la mappa:

$$r_i(a_i) = -a_i;$$
$$r_i(a_j) = a_i + a_j, \mid i - j \mid = 1; i, j \in \{1,2,3,4\}$$
$$r_i(a_j) = a_j, \mid i - j \mid > 1$$

che è definita in modo tale che la somma di due vettori unitari adiacenti sia ancora un vettore unitario: per capirci un attimo, il piano r_i è perpendicolare a a_i e passa per l'origine, i piani r_i, r_j, per i e j adiacenti formano un angolo di 60°, per gli altri valori di i e j i piani sono ortogonali.

Se definiamo la mappa (isometria) $A = r_1 r_2 r_3 r_4$, applicando le regole qui sopra si ottiene:

$$A(a_1) = a_2 + a_3$$
$$A(a_2) = -a_1 - a_2 - a_3$$
$$A(a_3) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$A(a_4) = -a_3 - a_4$$

Applicando ripetutamente a ognuno di questi risultati la mappa A, si vede che è:

$$\forall i \in \{1,2,3,4\}, A^5(a_i) = a_i$$

Da cui, *nello spazio quadridimensionale esiste un'isometria che supporta una simmetria pentagonale*. Trovata!

Adesso, spero mi crederete se vi dico che in $\mathbb{R}^6$ esiste un reticolo con una simmetria ettagonale: la dimostrazione è sostanzialmente la stessa, solo più lunga.

E se a qualcuno gira la testa, l'importante è che faccia un numero intero di giri.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms