Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 173 – Giugno 2013 – Anno Quindicesimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM172 ha diffuso 3’025 copie e il 02/06/2013 per Google eravamo in 13’700 pagine.

Thomas Lamadieu (noto anche come ***Roots Art***) ha deciso di disegnare sul cielo. Non volendo inquinare con scie colorate emesse dall’aereo, si limita a scattare foto di palazzi cittadini e ad inserire disegni nelle fette di cielo risultanti.

Purtroppo, non ci risulta lavori su commissione.

1. Peccati Originali

matematica
[ma-te-mà-ti-ca]
s.f. (pl. -che)
***1** Scienza che, servendosi di metodi deduttivi, studia i numeri, le misure, le figure geometriche e sim., considerando le relazioni che intercorrono tra di loro e le possibili applicazioni dei risultati ottenuti da altre scienze*

(Grande Dizionario Italiano
di A. Gabrielli
Dizionari Hoepli online)

Quasi tutte le grandi costruzioni intellettuali dell'uomo sono complicate e complesse, e soprattutto di difficile lettura per chi le affronta per la prima volta. Partecipare a un convegno di cardiochirurgia senza aver pagato pegno con un discreto numero di anni spesi sui libri delle facoltà di Medicina e lungo i corridoi dei Policlinici è quantomeno frustrante, per l'evidente incapacità di capire anche solo un quarto dei termini che popolano le dissertazioni degli oratori. Per quanto apparentemente meno tecnica, la filosofia è forse di comprensione ancora più ardua: oltre ai tecnicismi veri e propri, le conferenze e i testi filosofici abbondano di termini che paiono del tutto comuni e comprensibili, ma che trasposti nel contesto filosofico assumono in realtà un significato del tutto diverso.

In realtà, è cosa del tutto normale: ogni disciplina si costruisce un proprio vocabolario, e in fondo non è neppure necessario scomodare filosofi e cardiochirurghi per accorgersene. Si creano grammatiche interne e specializzate persino all'interno dei circoli scacchistici, degli uffici del catasto, nelle curve degli stadi e – Natalia Ginzburg insegna – anche nelle stesse famiglie. Più ancora della terminologia, è allora interessante cercare di capire quali siano le regole che si formano, all'interno delle varie consorterie, perché una frase, un concetto, siano ritenuti accettabili e di conseguenza abbiano diritto di cittadinanza all'interno del gruppo.

Perché delle regole esistono sempre: in un fan club calcistico potrete dire peste e corna di un allenatore che viene considerato il messia in terra da parte di altri soci, e non sarete neppure tenuti a giustificare rigorosamente con prove e argomenti i vostri giudizi; ma se non sapete distinguere un portiere da un centravanti non avrete diritto di parola. Ciò non di meno, a ben vedere le regole di coerenza interna non sono sempre rigide: è pur vero che, perché una qualunque asserzione sia accettabile, questa deve essere comprensibile, e pertanto deve rispettare quantomeno le regole grammaticali, sintattiche e logiche richieste dalla lingua in cui è espressa, ma sono innumerevoli le situazioni in cui non è richiesto quasi nient'altro. Sono in realtà ben poche le discipline che si appellano a un codice per così dire "esterno" alla disciplina stessa: e, quasi senza eccezione, quelle che si adeguano ad un tale sistema di riferimento sono le discipline scientifiche.

Il metodo scientifico, proprio perché "metodo", funge da sistema di controllo delle asserzioni legittime delle scienze. Naturalmente, la messa in pratica di questo sano principio è quanto mai complicata: le cosiddette "scienze dure" sono chiamate a rispettarlo con il massimo impegno possibile, ma hanno diritto a essere chiamate "scienze" anche quelle che, per necessità, non possono richiedere a loro stesse un simile grado di coerenza. Un fisico è tenuto ad abbandonare un'affascinante teoria non appena rileva con sicurezza anche un solo controesempio in natura; un medico che trova un farmaco in grado di salvare la vita al 90% dei malati di un morbo precedentemente ritenuto incurabile ha tutti i diritti di essere straordinariamente soddisfatto del suo lavoro. Un matematico, paradossalmente, ha come unica guida la coerenza interna delle sue asserzioni, visto che in natura non troverà neppure una retta euclidea o un numero reale da mettere a cuocere su un becco Bunsen.

Ma molte altre discipline utilizzano metodi diversi. Materie interessanti e dignitosissime si basano essenzialmente sulla codifica di esperienze e artifici usati in precedenza, a prescindere dalla loro coerenza logica. L'apprendista di un artigiano riuscirà, nel tempo, a ricostruire oggetti meravigliosi partendo essenzialmente sulla ripetizione acritica di azioni e movimenti tramandati nel tempo, affinati da generazioni di artigiani suoi predecessori. Gran parte delle professioni umanistiche seguono la stessa metodologia; i codici che raccolgono le leggi di una comunità, in gran parte, si basano su casi precedenti e sulla memoria della loro precedente risoluzione.

La teologia, da questo punto di vista, ha un compito oggettivamente improbo. Al pari della filosofia e della matematica ha come oggetto centrale di interesse qualcosa di intangibile, che non è possibile mettere alla prova nel mondo fisico. Al pari di alcune discipline tecniche o umanistiche, ha però come guida incontestabile almeno un testo[1], generalmente assai antico, che è ritenuto di origine non umana ma che ha al tempo stesso il compito di regolamentare virtualmente ogni possibile comportamento umano. Oltre a ciò, i libri sacri hanno anche il compito (questo improbo davvero), di dover giustificare anche la natura e l'origine del mondo e dell'universo, e farlo a prescindere dal progredire delle informazioni che in merito fornisce e affina la scienza laica. Almeno dal punto di vista della cosmogonia, è infatti innegabile che le sacre scritture abbiano più punti in comune con la narrazione mitologica (quando non proprio epica) che con la letteratura scientifica; e, del resto, è altrettanto vero che quanto al giorno d'oggi viene rubricato sotto la categoria "mitologia" è stata in tempi passati considerata degna di venerazione religiosa. In altri termini, il linguaggio che una volta poteva effettivamente competere, anche dal punto di vista della credibilità, con le conoscenze dell'uomo comune del tempo, adesso risulta meno appropriato per competere con quello usato nelle raccolte ufficiali della conoscenza, ovvero le pubblicazioni scientifiche.

Inoltre la teologia deve farsi carico – e indubbiamente ci prova con molta intelligenza e creatività – appunto delle esigenze di "coerenza interna" che in qualche misura sono richieste anche ai testi sacri: e duemila anni di esegesi e profonda dedizione alla disamina dei libri ha prodotto dei concetti interessanti, anche se certo non privi di incredibili acrobazie logiche.

Uno di questi è certamente quello di Peccato Originale. È facile *calembour* asserire che si tratta davvero di un concetto "originale", nel senso di poco frequente e niente affatto banale: in fondo, quasi ogni sistema di valutazione e di metrica parte da zero, e poi stabilisce criteri di meriti e demeriti, premi e castighi. Nella tradizione giudaico cristiana, invece, l'istituzione del peccato originale (che naturalmente qui ha il senso di "iniziale": in inglese viene spesso chiamato direttamente "peccato ancestrale") sembra avere, tra le molte altre caratteristiche, anche quella di handicap, di svantaggio iniziale. Per quanto un neonato sia regolarmente utilizzato come esempio di innocenza e purezza in gran parte delle culture, per il Cristianesimo questo non vale, perché egli eredita appunto il peccato originale commesso da Adamo ed Eva, progenitori di tutta la razza umana.

[1] Naturalmente, non tutte le religioni hanno come riferimento un libro sacro. Ce l'hanno però quasi tutte quelle di maggior successo (considerando come metrica del "successo" il numero di proseliti), quali il Cristianesimo, l'Islamismo e l'Ebraismo. E anche molte religioni asiatiche hanno, se non proprio un libro-guida, diversi testi sacri che rivestono ruoli analoghi.

In verità, anche su questa caratteristica dell'ereditarietà, della "trasmissibilità" del peccato originale dai primissimi antenati agli urlanti marmocchi che affollano le nursery odierne è stata molto dibattuta nei tempi andati, e come sempre ci sono state correnti, più o meno eretiche, che negavano la possibilità che la macchia di un peccato potesse davvero trasmettersi da una generazione all'altra. Fatto sta che questo è quanto insegna la dottrina ufficiale, e uno dei compiti essenziali del sacramento del battesimo è proprio quello di liberare il bambino da questo debito atavico.

1 *Il peccato originale secondo Rubens*

Per la totalità dei non credenti, e certo per la gran parte dei fedeli scarsamente praticanti, il peccato originale è probabilmente riassumibile in un flash di poche immagini e una trama ragionevolmente semplice e dinamica: Adamo ed Eva sono nell'Eden, nel Paradiso Terrestre, e come tutti gli abitanti di tutti i paradisi non hanno bisogno di niente. Nell'Eden c'è comunque qualcosa che è loro proibito, apparentemente senza alcuna ragione: i frutti di un albero. Eva (a sua volta tentata dal Serpente, che altri non è che il Diavolo in uno dei suoi più riusciti travestimenti) convince Adamo a violare la proibizione: mangiano la mela, vengono smascherati dall'Onnipotente, e conseguentemente cacciati dal Paradiso Terrestre, dando inizio alla vita agra e dura dell'Uomo così come noi la conosciamo.

La storia è talmente nota e talmente variamente interpretata che è abbastanza difficile persino ricordare con esattezza cosa narra la Bibbia in proposito. A titolo di esempio, basti pensare al "frutto proibito": la totalità o quasi degli interrogati in proposito non avrebbe alcuna incertezza nel riconoscerla come "la mela proibita", e rimarrebbero pertanto stupiti nello scoprire che la Bibbia non specifica mai di quale frutto, in realtà, si tratti. La ragione per cui la mela ha così indubitabilmente preso le sembianze del frutto proibito dipende dal fatto che in latino "malum", che significa "cattivo" (aggettivo da sempre associato al frutto proibito), significa anche "mela". Il "frutto cattivo" è pertanto diventato "il frutto mela" quasi subito[2].

2 *Diversi tipi di mele*

Ma le implicazioni teologiche connesse al concetto di peccato originale vanno ben oltre gli accidenti dovuti alle cattive traduzioni. Se il frutto è indeciso, ancora più complessa è l'interpretazione dell'albero: appare evidente anche a una lettura frettolosa che in esso convergono diversi concetti inquietanti. Ci si riferisce spesso ad esso come "Albero della Conoscenza del Bene e del Male", ma curiosamente spesso nelle tradizioni popolari si sdoppia, e a volte passa solo l'Albero della Conoscenza, altre

[2] Il valore simbolico della mela è comunque impressionante, nella cultura occidentale. Si ritrovano facilmente almeno quattro valenze di grande successo: oltre a quella di Adamo ed Eva (religione), sono celebri la mela della discordia (mitologia), quella di Newton (matematica/fisica), quella dei Beatles (musica/intrattenimento) e quella di Biancaneve/Turing/Apple, che non sappiamo bene se si tratti di quattro mele diverse o di quattro diverse coniugazioni della stessa.

volte solo l'Albero del Bene e del Male. Nella versione della generica "Conoscenza", l'etichetta inquieta molto chi è attratto dall'indagine scientifica: sembrerebbe infatti che Dio, per ragioni sue e non facilmente comprensibili, desideri fortemente che le sue creature restino ignoranti, se l'unico serio divieto che gli impone è quello appunto di "conoscere"; ed è inevitabile restare perplessi, visto che dovrebbe essere sempre tramite il suo sommo progetto che gli uomini sono stati dotati di sofisticati organi di senso e di un cervello in grado di trarre piacevoli deduzioni logiche. Più che altro, è in generale difficile associare alla conoscenza il valore negativo di peccato mortale, per lo meno ai tempi nostri.

Un altro termine che identifica l'Albero cruciale dell'Eden è "Albero del Bene e del Male", e in questo caso non è tanto la conoscenza ad essere messa sotto accusa, quanto la capacità di Giudizio, e per certi versi la cosa è forse ancora più preoccupante. Davvero il Creatore desiderava che i suoi figli fossero privi della capacità di distinguere il bene dal male? Tutto questo non è in palese contrasto con il principio del Libero Arbitrio, che in fondo è quanto regge tutta la costruzione teologica del peccato? Una delle domande più pregnanti, dal punto di vista teologico, è infatti quella che chiede come sia possibile che possa esistere il male, se Dio è assolutamente e infinitamente buono. La risposta usuale è proprio basata sul concetto che Dio non crea il male, ma ha lasciato all'Uomo la possibilità di scelta se agire bene o male esercitando appunto il Libero Arbitrio. Ma se si arrabbia perché Adamo ed Eva vogliono distinguere Bene e Male, sembrerebbe invece che il desiderio iniziale del Creatore fosse che il libero arbitrio, il giudizio, non dovesse essere esercitato dagli uomini, nonostante in seguito sia questo il principio cardine che farà distinguere coloro che hanno vissuto nella grazia, meritandosi il premio del Paradiso, da coloro che invece dovranno essere puniti nell'Inferno.


3 *Sant'Agostino di Ippona*

Un'ulteriore e frequente interpretazione del racconto del Peccato Originale è meno filosofica e spirituale: è infatti opinione comune che il reale peccato commesso da Adamo ed Eva sia stato il loro (primo) rapporto sessuale. Opinione comune e popolaresca, ma che ha comunque radici assai profonde e antiche. Secondo l'interpretazione di uno dei maggiori Padri della Chiesa, Sant'Agostino, c'è infatti una relazione abbastanza diretta tra la "disobbedienza" di Adamo ed Eva e il desiderio sessuale, anche se causa ed effetto sono invertiti rispetto a quanto sarebbe lecito aspettarsi. In buona sostanza, non è che i nostri due progenitori hanno avuto desiderio l'uno dell'altro, si sono incontrati carnalmente e sono stati puniti da Dio per questa loro unione (albero, frutto proibito, serpente tentatore, in quest'interpretazione, diventano tutte facili metafore); piuttosto, secondo il santo di Ippona, è accaduto esattamente il contrario. La Bibbia asserisce infatti che, non appena commesso il peccato, Adamo ed Eva "si accorsero di essere nudi", ed è affermazione in ogni caso di interpretazione non facile, visto che per gente che è sempre stata nuda e non ha mai visto né immaginato un vestito, la rivelazione deve essere stata davvero di difficile comprensione. Il punto è che il Peccato provoca la Cacciata dal Paradiso Terrestre, ed è bene rammentare che la Cacciata implica anche una cosuccia di un certo rilievo immediato, ovvero la perdita dell'immortalità; è solo a questo punto, secondo Agostino, con Adamo ed Eva improvvisamente divenuti mortali, che scatta in loro qualcosa di assolutamente nuovo e inaudito, ovvero la concupiscenza reciproca; cosa peraltro che ha una sua logica, visto che altrimenti alla perdita dell'immortalità avrebbe fatto subito seguito la rapida estinzione della (non ancora nata) razza umana.

Le possibili conclusioni che possono trarsi dal racconto biblico e dalla sua interpretazione agostiniana sono davvero tante, e in alcuni casi sorprendenti. Ad esempio, se la concupiscenza è il frutto ultimo del peccato originale, e se il peccato originale si lava con il battesimo, come si può spiegare che gran parte dei battezzati rimanga comunque, per gran parte della vita, sensibile alle lusinghe della concupiscenza? Soprattutto, i due personaggi che popolavano l'Eden, prima di commettere il Peccato Originale, sembrano avere queste caratteristiche principali: privi della paura di morire, privi della curiosità, privi della capacità di giudizio, privi di desiderio sessuale. Privi insomma di quattro elementi che sono, con ogni probabilità quelli che più marcatamente caratterizzano la natura umana. Se ne dovrebbe concludere che, sotto quasi tutti i punti di vista, Adamo ed Eva non erano in realtà veramente un Uomo e una Donna.

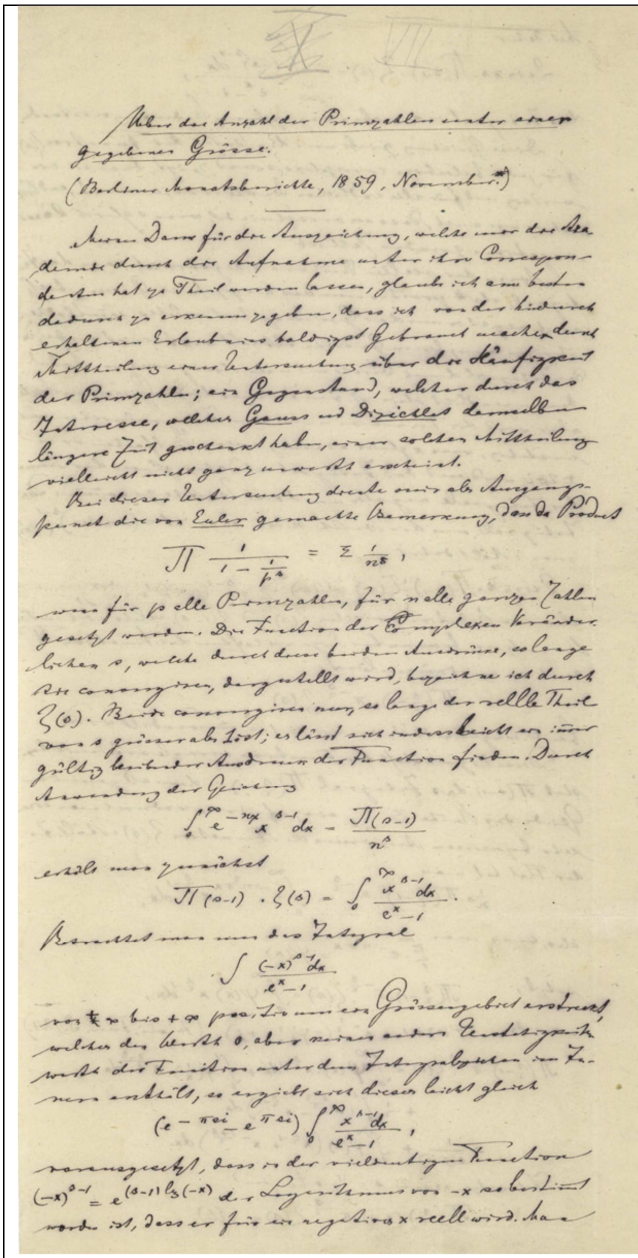
Più di ogni altra cosa, comunque, quel che sorprende è come la religione cristiana, fin dalle origini, riservi un'attenzione del tutto particolare al corpo. Anche se l'equazione mentale religione=spiritualità scatta in automatico quando si affronta l'argomento teologico, alla prova dei fatti è indubbiamente sorprendente che le avventure e le disavventure della carne abbiamo un ruolo così predominante nella nostra religione di riferimento. Fin dalle prime pagine della Bibbia si trovano ragioni in merito alla nascita della sessualità, e alla relativa consapevolezza (o forse direttamente vergogna) della nudità, e quindi del controllo del desiderio erotico. E se l'Antico Testamento resta dopotutto un sacro testo condiviso da più religioni, è indubbio che il successo del Cristianesimo sia dovuto in gran parte proprio alla esplicita promessa della "resurrezione della carne": promessa certo impegnativa, perché non sono molte le religioni che promettono il pieno recupero del corpo; diverse non promettono alcun aldilà, altre si limitano a promettere la salvaguardia dell'anima (qualunque cosa essa sia) o dello "spirito", mentre il Cristianesimo si sbilancia verso la promessa più piena.

Il termine "peccato originale", in un'accezione appena un po' traslata, ha preso anche il significato di "difetto iniziale", una sorta di pecca fondamentale che, proprio perché presente già nei fondamenti, è del tutto ineliminabile dall'organismo che ne è affetto. In questo senso, è quasi impossibile trovare una disciplina che non ne abbia almeno uno: e a volerne cercare, ci sono diversi candidati anche nella nostra amata matematica.

A ben vedere, forse l'esempio migliore sta proprio nella sua denominazione: che cosa si intende veramente per "matematica"? La scienza che più di ogni altra è attenta e rigorosa nelle definizioni, che trattamento riserva a sé stessa? È verosimile che la maggior parte delle persone possa trovare accettabile l'immediata locuzione di "scienza dei numeri", ma è assai improbabile che un matematico professionista troverebbe la definizione soddisfacente: in fondo, basta sfogliare un qualsiasi testo di matematica superiore per constatare che i numeri sono in spaventosa minoranza rispetto ad una valanga di altri simboli, per lo più di natura letterale o del tutto specialistica. Anche la definizione dei dizionari, come quella riportata in testa a quest'articolo, è con tutta evidenza imprecisa o quantomeno incompleta.

Si potrebbe obiettare che questo tipo di anomalia è abbastanza frequente quanto l'oggetto di riferimento è di origine così remote (e la matematica può certo vantarle) che, quasi per necessità, nella sua storia si registrano tali evoluzioni che inevitabilmente spostano nel tempo il centro dell'attenzione. E certo è vero che la matematica contemporanea si occupa oggigiorno di oggetti che Euclide faticherebbe molto a riconoscere come enti matematici: nodi, gruppi, caos, distribuzioni, funzionali, e mille altre entità parimenti aliene per un geometra greco, per quanto erudito e geniale potesse essere. Ma anche l'obiezione potrebbe essere rintuzzata facilmente mostrando come un peccato originale ancora più evidente giace già negli oggetti più cari ai matematici della prima ora.

L'attenzione dei primi studiosi che noi riconosciamo come matematici era rivolta essenzialmente alla geometria e alla natura dei numeri. Gli "Elementi" di Euclide spaziano dallo studio delle forme piane a quelle solide, ma non tralasciano concetti cruciali della teoria dei numeri, e vi si ritrova infatti anche la splendida dimostrazione dell'infinità dei numeri primi. Ed ormai tanta l'abitudine consolidata di considerare geometria e aritmetica come i due pilastri fondamentali della matematica classica che quasi non ci si accorge più della sostanziale ginnastica mentale che è necessario attuare per considerarli oggetti della stessa disciplina.



Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.
(Berliner Monatsberichte, 1859. November.)

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\,dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}.$$

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1}$$

$$(e^{-\pi s i} - e^{\pi s i}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

4 *Uno dei documenti più importanti della matematica. I "numeri" veri e propri scarseggiano in maniera impressionante*[3].

Eppure, salta agli occhi: i numeri, così come si insegnano ai bambini (e come Kronecker era disposto a giurare ancora nel XIX secolo[4]) sono istintivamente intuiti come passi discreti: uno, due, tre, e così via. Una linea, che è l'elemento base della geometria, nella visione originale è disposta a rinunciare a molte sue caratteristiche fisiche (basti considerare la sua proprietà di non avere spessore, di qualificarsi come oggetto monodimensionale in un universo tridimensionale), ma conserva e difende nella geometria euclidea la sua caratteristica più peculiare, che è la continuità. Una linea, nel momento in cui non è più continua, non è più tale.

L'ambivalenza, l'eterno contrasto tra "discreto" e "continuo" è già presente fin dai primissimi vagiti della matematica: e gran parte dei problemi storici di definizione che si ritrovano ancora oggi sono probabilmente, in ultimissima analisi, ancora legati a questo peccato originale. A ben vedere, anche le diverse nature del concetto di infinito possono farsi risalire a questa differenza genetica: senza tirare in ballo la rivoluzione di Cantor[5], è ragionevolmente evidente che, dalla parte del discreto, il primo approccio all'infinito è quello che si presenta notando che la progressione dei naturali non ha fine, e può procedere appunto all'infinito, passo uguale dopo passo uguale. Dal punto di vista della geometria, fatta di linee continue e senza spessore, si rivela in fretta che, più ancora che la "prolungabilità all'infinito" delle linee colpisce la possibilità di suddividerle infinitamente senza mai

[3] Abbonamento gratis a chi riconosce testo e autore.

[4] "Dio ha creato i numeri interi; tutto il resto è opera dell'Uomo".

[5] Di cui si parla abbondantemente nel compleanno di RM062 "Consecutio Temporum".

raggiungere una situazione qualitativamente diversa da quella di partenza: qualsiasi frazione di linea ha la possibilità di suddividersi all'infinito, e quindi qualsiasi minuscola sezione è vasta quanto la linea infinita stessa.

Si tratta sempre di fare i conti con l'infinito, certo, ma anche in questo caso ci vuole applicazione, studio e autoconvincimento per accettare l'idea che siano infiniti della stessa natura.

L'esempio più clamoroso di peccato originale è però quello che sta alla base del Calcolo. In verità, è possibile, forse addirittura probabile, che si tratti in realtà della messa in evidenza dei peccati ancora più remoti (la dicotomia tra continuo e discreto e la difficoltà di maneggiare infiniti e infinitesimi) che si sono alleati nel portare a battesimo la grande scoperta di Newton e Leibniz, appunto il calcolo differenziale. Certo è che lo studente di matematica, quando deve affrontare per la prima volta limiti, derivate e integrali, sente istintivamente che il campo di studio sta cambiando natura, rispetto alle regole aritmetiche, il calcolo delle aree degli esagoni e perfino alla risoluzione di equazioni di secondo grado.

Non ci vuole molto per rendersene conto: gli oggetti matematici, prima del calcolo, sono tutti oggetti belli fermi, statici; e ormai, dopo centinaia di esercizi di algebra, è facile capire che ciò che conta in matematica non sono i valori assoluti delle grandezze, ma le loro relazioni e interazioni. "Numero grande" e "numero piccolo" sono espressioni che hanno senso soltanto se esprimono una relazione, altrimenti sono prive di significato.

Eppure, il concetto di limite stravolge tutto. L'espressione $1/x$, per $x=0$, non ha senso, ma si inventa un sistema – ragionevolmente arbitrario – per decidere che, anche se non ha senso, probabilmente può essere valorizzata basandosi sui valori dati quando la x è "prossima" a zero. In un colpo solo, la matematica diventa dinamica (cosa vuol dire "prossimo", in fondo, in matematica?) e viola il principio base che non ha senso parlare di numeri piccoli e grandi, non solo, si permettono di ignorare numeri "più piccoli" in quanto trascurabili in confronto ad altri già piccoli. I vantaggi sono così forti che i due grandi decidono di non preoccuparsene: l'universo dischiuso dalle equazioni differenziali è troppo affascinante. Dai limiti alle derivate il passo è breve, soprattutto dopo aver perso la paura delle espressioni indefinite: e come le nuove notazioni (quella di Leibniz ancora oggi utilizzata con successo) riescono a semplificare i conti, il loro genio è libero di trovare interpretazioni geometriche ai nuovi concetti. Newton e Leibniz si sfidarono molte volte ad applicare le loro scoperte risolvendo problemi di tangenza e curvatura, usando le tecniche che avevano sviluppato indipendentemente, ma completamente dimentichi del loro peccato originale.

Pare proprio appropriato che un cristiano, in risposta all'affermazione che la scienza deduceva i propri concetti in modo ben più evidente della religione, e per questo era più attendibile, si schierasse contro il metodo del calcolo infinitesimale. Berkeley, dopo aver sentito del rifiuto di un amico sul letto di morte di ricevere conforti spirituali perché convinto della superiorità del metodo scientifico, si impegna a dimostrare proprio come non sia corretto utilizzare incrementi infinitesimali in un primo tempo, per poi eliminarli perché prossimi a zero, definendoli "fantasmi di quantità decedute". Toccherà agli analisti successivi provare a dimostrare il contrario, ma il dialogo tra scienza e religione continua a essere pieno di spunti per l'una e l'altra parte, per nuove scoperte e nuovi orizzonti: spinto dalla critica di Berkeley, MacLaurin rivedrà l'intera teoria con metodi più classici, trovando numerosi risultati originali.

Sono già Leibniz e Newton stessi a studiare il calcolo integrale come una forma di operazione inversa alla derivazione, e loro stessi ne vedono l'applicazione per il calcolo di aree, ma – come insegna Berkeley – non furono in grado di formalizzarne il calcolo. La loro idea era quella di sottendere ad una curva una serie di rettangolini, e di far tendere a zero la dimensione della base: idea che si scontra facilmente con le problematiche di una funzione con forme poco ortodosse.

Fu Cauchy[6] ad affermare che non era sufficiente definire l'integrale come operazione inversa della derivata, occorreva anche dimostrare che la funzione esista, e non ci fu matematico dell'epoca che non volesse definire condizioni di continuità e funzioni più o meno integrabili. Basti pensare a nomi come Dirichelet[7] e alla sua funzione sempre discontinua o a uno dei suoi (di Dirichelet) più grandi studenti, Bernhard Riemann[8]: quest'ultimo propone una definizione formale che permette la definizione di integrale solo in intervalli definiti e per determinate classi di funzioni.

La ricerca di funzioni integrabili – secondo una o l'altra definizione – in diversi tipi di intervalli fu il cardine della ricerca del calcolo del diciannovesimo secolo. Peano[9] estese le ricerche di Riemann trovando le condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione sia integrabile. Ma ci fu un uomo che superò tutte le definizioni precedenti: Lebesgue.

5 *Henri Léon Lebesgue*

Henri Léon Lebesgue nacque il 28 giugno 1875 a Beauvais, e la sua biografia sta tranquillamente in un paio di righe: nacque, crebbe, studiò matematica e divenne una figura essenziale del firmamento matematico. D'altra parte il suo lavoro nella definizione di misura e di integrale è una pietra miliare della storia dell'analisi e se la volessimo riferire qui avremmo bisogno di molte altre pagine.

Ma forse una buona idea della sua idea si può leggere dalle sue stesse parole:

"Si può dire che con la procedura di Riemann si cercasse di sommare gli indivisibili mettendoli nell'ordine dato dalla loro variazione in x, come un commerciante pasticcione che conta monete e banconote casualmente nell'ordine in cui gli vengono in mano, mentre noi operiamo come un commerciante metodico, che dice: ho $m(E_1)$ penny che valgono $1\cdot m(E_1)$, ho $m(E_2)$ nickel che valgono $5\cdot m(E_2)$, ho $m(E_3)$ dime che valgono $10\cdot m(E_3)$, etc… Le due procedure [l'altra conta le monete individualmente secondo la somma di Riemann] porteranno senz'altro il commerciante allo stesso risultato, perché comunque conti i suoi soldi c'è sempre un numero finito di monete e banconote da contare. Ma per noi che dobbiamo sommare un numero infinito di indivisibili la differenza tra i due metodi è di importanza capitale."

Questo è un pezzo del suo famoso "Linea, Area, Integrale", solo una delle tante pubblicazioni che rivoluzioneranno il modo di vedere le funzioni e la loro misura. Perché grazie a Lebesgue l'infinito è ora misurabile, non solo immaginabile.

È impressionante immaginare quanto siamo andati lontano, dalla prima astrazione, dalla paura dell'infinito. La funzione di Dirichelet, secondo Lebesgue, è integrabile, così come altre che per Riemann erano ancora inaffrontabili. Mettiamo in ordine gli infiniti, e contiamoli. Numeri più grandi o più piccoli, non fa differenza. Alla fine siamo riusciti di nuovo a metterli a confronto tra loro, grazie ad Henri, per il momento, il peccato originale

[6] Anche lui protagonista di una conversione sul letto di morte, quella di Hermite (RM095), di cui parliamo tra le altre cose nel suo compleanno "L'antipatico", RM127.

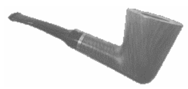
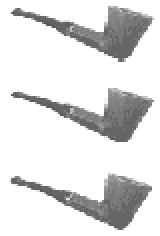
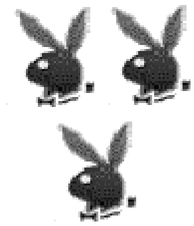
[7] Sì, anche lui celebrato dalla nostra prosa in RM145.

[8] "Pellegrinaggio a Thule", RM068.

[9] "Sineddochi", RM067.

è stato redento. E forse ci pare anche più plausibile che sia necessario, per ottenere grandi risultati, compiere degli errori, provare a fare delle astrazioni, fare qualche salto non ammesso dalle regole. Perché in questo modo si superano i propri limiti, ed è forse un altro tratto di quei famosi Uomo e Donna che si aggiravano nel Paradiso Terrestre.

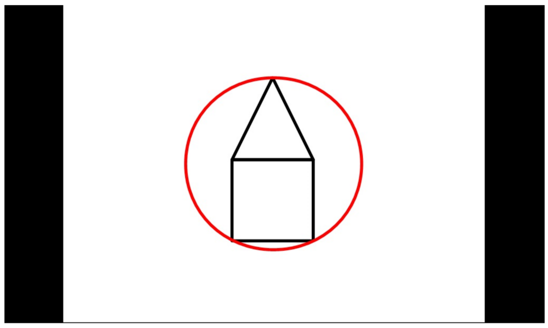
2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Il WiFi del Medio Evo			
"Tetris" magro			

2.1 Il WiFi nel Medio Evo

O meglio, a casa mia *[Rudy speaking]*.

Conoscete tutti la mia ormai comprovata inettitudine al disegno, e il titolo deriva dal fatto che quando io disegno una casetta, questa sembra tracciata da un artista di quelli scarsi dell'Alto[10] Medio Evo: sopra un triangolo equilatero, sotto un quadrato e via andare.



6 *Casa di Rudy, nella formulazione di Pauli-Gamow (questa la capisce solo Doc)*

Ora, in casa stiamo installando il WiFi[11], e io vorrei che fosse limitato alla casa, ma la coprisse tutta: trattasi di calcolare la potenza dell'antenna e, forte del fatto che la potenza del segnale viaggia come uno su erreallaqualcosa[12], sul retro di un biglietto del tram ho fatto un "progettino" come quello che trovate in figura.

"Ovvio, in questo modo copriamo tutta la casa e il minimo possibile attorno".

Gli sguardi perplessi della famiglia chiariscono immediatamente che nessuno sta seguendo l'autore di queste note, il quale prosegue imperterrito.

"E quindi, supponendo la casa avente lato di base pari a uno, possiamo calcolare il raggio del cerchio. Voi fate questo, poi io penso a calcolare la potenza".

Paola (D'Alembert) speaking: Mi raccomando, prendetevela molto calma. Per una serie di motivi correlati con il rendimento scolastico dei "piccoli" (quelli che voi chiamate i VAdLdRM), meglio se la connessione alla rete resta scarsa, lenta e ballerina...

Tranquilli, tanto poi devo determinare il "qualcosa" e ci metto tutto il tempo che serve...

2.2 "Tetris" magro

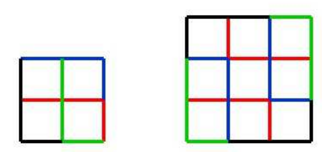
Il titolo è una schifezza, ma non sappiamo come si dice "magro" in russo[13].

[10] Qualcuno sa perché il Medio Evo più "vecchio" si chiami "alto", e l'altro "basso"? Un amico suggeriva una derivazione dal tedesco "Alt" (antico), ma un *false friend* che dura un migliaio di anni ci pare un'enorme asinata... Ipotesi?

[11] O meglio, ci stiamo pensando. La Signora d'Alembert (Paola) non è d'accordo. Sa che al WiFi seguiranno un server, un gateway, una stampante, eccetera. E lei certe cose non le vuole in giro per casa.

[12] Il "qualcosa", come ben sanno gli ingegneri, è spesso strettamente maggiore di due.

[13] Vi ricordate, vero, che il "Tetris" lo ha inventato uno da quelle parti?



1 *Due pezzi facili.*

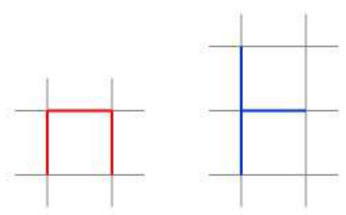
Data la conservazione del numero di nucleoni nell'universo, il fatto che Rudy sia ingrassato di *un intero chilo* ha causato la perdita di massa da qualche altra parte: questa volta, gli è dimagrito il Tetris[14], e si è ritrovato con dei pezzi che, anziché essere formati da quadrati connessi tra di loro attraverso i lati, sono formati da segmenti congiunti attraverso i punti del reticolo degli interi. Per fortuna, i pezzi sono praticamente gli stessi.

Non solo, ma gli sono cambiate anche le regole: non deve più riempire un'area in un tubo, deve *fare dei quadrati! E usando un solo tipo di pezzo!*

Don't panic, e cerchiamo di definire la cosa: forse è meglio partire dal fondo.

Nella figura vedete due soluzioni fatte con il pezzo "a elle": si notano alcune cose interessanti, tipo:

1. Tutti i punti del reticolo sono occupati da dei pezzi.
2. I pezzi possono avere dei punti di sovrapposizione sul reticolo
3. I pezzi non hanno dei segmenti sovrapposti
4. I pezzi sono tutti uguali
5. Oltre alle solite rotazioni, è ammessa anche la riflessione speculare.



2 *Due pezzi (tutt'altro che) facili.*

Siccome per quanto riguarda il Tetris si può quasi parlare di tossicodipendenza, nonostante questo *dimagrimento* della versione Rudy ha continuato imperterrito a giocare: il guaio è che si è ritrovato con alcune partite che gli hanno generato dei clamorosi dubbi: in particolare, quelle nelle quali tutti i pezzi erano del tipo indicato nella figura a fianco.

Rudy è convinto che non sia possibile realizzare *qualunque* quadrato, con questi aggeggi: e anche sulla realizzazione di tutti i rettangoli, ha dei forti dubbi, gli date una mano? Quali quadrati si possono realizzare? E quali rettangoli?

Primo warning: sulla parte dei rettangoli, le idee sono decisamente nebulose. Attenti, *Terra Incognita*.

Presa una certa confidenza con questi pezzi, il finire la partita ha cominciato per Rudy ad essere di secondaria importanza, e ha cominciato ad inventarsi degli strani arzigogoli relativamente al pezzo rosso della figura prima (quello a "u" rovesciata). Diciamo che due pezzi a "u" sono *connessi* se hanno almeno due punti in comune: e, generalizzando, diciamo che un insieme di pezzi è *connesso* se esiste un cammino di pezzi a due a due connessi tra due pezzi qualsiasi dell'insieme. Adesso, considerando i quadrati che sono soluzione del Tetris dimagrito con il pezzo a "u", qual è il più grande connesso?

Secondo warning: sono fermamente convinto di non avere abbastanza pipe per esprimere la valutazione di questo problema. Se per voi è facile, vuol dire che ho sbagliato a spiegarvelo.

Terzo warning: nel problema qui sopra ci siamo limitati ai pochi pezzi di cui avevamo una vaga idea della soluzione, se volete fare i creativi e provare con altri pezzi del Tetris magro, fate pure. Basta che non ci chiediate quanto fa, che non ci sogniamo neanche di pensarci.

Adesso sono problemi vostri, quindi smetto di pensarci sino al mese prossimo.

[14] Non è vero: Rudy non ha ancora trovato un Tetris decente e gratuito che giri sotto Windows7.

3. Bungee Jumpers

Provare che, se $x, y \in R, n \in N$ per la funzione "parte intera", indicata dalle parentesi quadre, valgono le seguenti proprietà:

1. $[x+y] \leq [x] + [y]$
2. $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \frac{[x]}{n}$
3. $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Come sapete questa rubrica, di cui non garantiamo la periodicità, è dedicata alle recensioni dei libri scritti da voi, da noi, da amici o da qualcun altro: l'ultimo caso, evidentemente, implica che il libro noi lo si sia pagato, letto e valutato, quindi è con giusta e orgogliosa soddisfazione che Rudy annuncia un evento di quest'ultimo tipo.

4.1 Quadrivium

Una certezza della nostra vita con la quale a breve festeggeremo le nozze d'oro è che Cauchy è il matematico più antipatico di tutti. Vuoi per la noia della sua dimostrazione più famosa, vuoi per le sue idee politiche che non condividiamo, questo concetto è, dall'esame di Analisi Matematica I, un pilastro incrollabile della nostra esistenza.

Alcuni anni fa, il buon Lucio Russo, con il suo bellissimo "La Rivoluzione Dimenticata"[15], ci aveva convinto che il secondo posto, nella graduatoria degli antipatici, andava a Boezio, il quale aveva tradotto gli *Elementi* di Euclide, ma *limitandosi ai teoremi* e ignorando completamente le dimostrazioni!

Recentemente, però, è successa una cosa. Ma per un attimo, parliamo d'altro.

Alzi la mano chi, frequentando una facoltà scientifica, durante gli studi (forse dopo qualche esame superato con particolare successo), *non* ha accarezzato l'idea di fare ricerca. Deserto di mani, vero? Bene, almeno con i vostri sogni siete onesti.

È molto probabile che quel *salto quantico* tra l'essere un buon solutore di problemi nel vostro ambito specifico di studi e la capacità creativa necessaria al fare ricerca, con tutto quanto segue il *publish or perish* della scienza moderna vi abbiano dissuaso e siate ripiegati su lavori più abitudinari, e oggi ne siate anche soddisfatti. Però, ogni tanto, la sera, quando *l'ora volge il*[16] *disìo*, un pensierino al fatto che forse avreste potuto provarci, probabilmente, nasce.

Ma (Cesare[17] ci perdoni) *quanto è quantico* quel salto? Possibile che tra il risolvere un problema di quelli tosti e il *"...boldly go where no man has been before"*[18] non esistano livelli intermedi?

[15] Ben supportato da Boyer (*Storia della Matematica*) che, vi ricordiamo, è la nostra lettura da spiaggia preferita da molti anni.

[16] "Il", non "al", come ci ha spiegato Doc tempo fa.

[17] Rossetti, che ha insistito il giusto (alcuni anni) nello spiegarci la meccanica quantistica. Voi lo conoscete come *Caronte*.

[18] Citazione da Star Trek "per arrivare là dove nessun uomo è mai giunto prima", l'immagine del ricercatore secondo qualsiasi non-ricercatore.

Adesso, prendete un Codice Leonardesco. Disegni, frasi (pure scritte al contrario) e quant'altro ammucchiate in poche pagine che, a cercare anche solo di capire se sia possibile realizzarle o no ci vuole un mucchio di tempo.

Boezio.

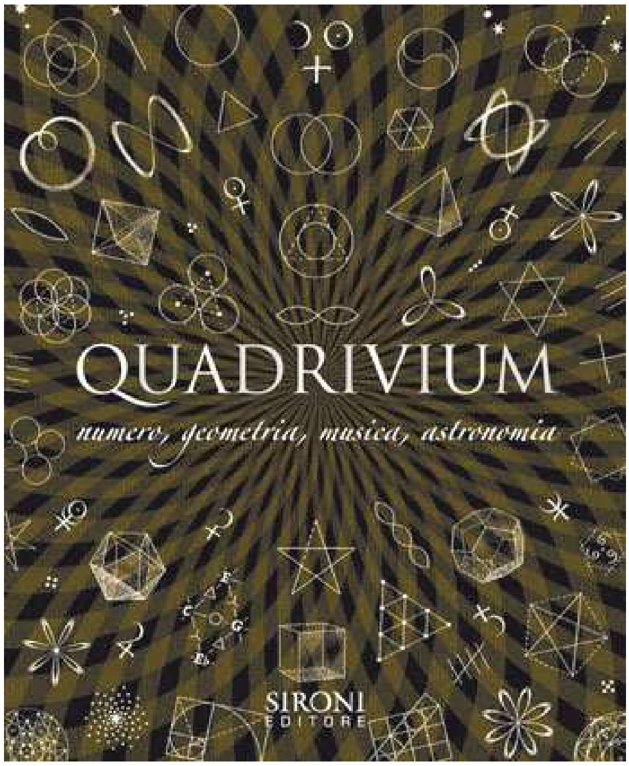
Lo abbiamo rinominato per spingervi a trovare una connessione.

Eccolo, il livello in mezzo al salto quantico. "Caro, questa è roba di cui siamo sicuri. Se riesci a convincerti che è vera *dimostrandola*, senza saltare all'*ipse dixit*, allora hai qualche speranza di inventare qualcosa del tuo". Il dubbio che ci ha colto recentemente è che se Boezio conoscesse lo sgrammaticato italiano dei bassifondi, farebbe immediatamente sua questa frase.

Mettiamo un po' di scenografia: vivete in un'epoca nella quale i libri costano uno sproposito, e volete dedicare il vostro tempo libero a cercare cose nuove, oltre ad imparare tutto quello che hanno fatto gli altri, è fondamentale che impariate un *metodo*. O andate a studiare (pagando un ulteriore sproposito) da qualcuno che *sa* come si fa, o lo imparate da soli. C'è un libro che lo spiega?

Prima di Gutemberg (e anche un po' di tempo dopo, in verità) i libri costavano un occhio della testa: avere a disposizione in un agile libretto (che quindi costava anche un po' meno del volumone istoriato) con le sole *affermazioni* e dover fare una "quasi-ricerca" per dimostrarle esatte era, probabilmente, il miglior allenamento per i futuri scienziati. Passati da questo calvario, eravate pronti per fare il prossimo passo e comunicarlo al mondo[19]: ricerca!

Aprile è stato talmente crudele da cullarci ancora nella convinzione che oggi questa strada sia impossibile: ma a maggio, a Torino, c'è il Salone del Libro. E abbiamo trovato un passo (neanche tanto timido) in questa direzione.



L'insegnamento, nel Medio Evo, procedeva secondo due vie: le scienze del *Trivium* (Grammatica, Logica e Retorica) e, certamente più interessanti per noi, quelle del *Quadrivium* (Aritmetica, Geometria, Musica e Astronomia).

Ora, pensate ad un libro che, fermo restando il fatto che queste scienze sono basate su una serie di idee accettate e *dimostrate*, si limiti a enunciare i concetti, senza preoccuparsi di dimostrarli: ci porta, una cosa di questo genere, esattamente nella condizione dei *clericus* medievali; sappiamo dove arrivare, ma la strada la dobbiamo trovare noi.

Il testo *Quadrivium*, splendidamente edito da Sironi Editore, curato da John Martineau e scritto da Miranda Lundy, Daud Sutton, Anthony Ashton, Jason e John Martineau è un perfetto esempio di cosa cercare, oggi, se si vuole *studiare da ricercatori*: solo gli enunciati, corredati da bellissimi disegni molto stimolanti

[19] E il mondo all'epoca, era piccolo e lo sarebbe stato ancora per molti anni: ci limitiamo a citare il teorema di *Gauss-Green-Ostrogradski*, indipendentemente dimostrato da ciascuno dei tre, giusto per dirne qualcuno di cui abbiamo parlato, nel compleanno di RM056.

(contengono alcune idee neppure enunciate nel testo) e con i concetti ridotti al minimo indispensabile (al massimo una pagina per ogni idea, e a fronte i disegni), il tutto per *trecentocinquantacinque* pagine escludendo le appendici, nelle quali (bontà loro) alcuni dei calcoli vengono svolti: il tutto diviso nei settori "classici" enunciati sopra, e gli incroci tra i vari settori appena accennati: la gioia della loro scoperta è lasciata al lettore che, non pago di conoscere i concetti, voglia anche verificarli.

Un nostro lettore[20], tempo fa, era stato criticato da uno di noi per il fatto che, dopo aver lungamente magnificato un libro, teneva per la fine le critiche negative, facendo nascere il dubbio se fosse o no il caso di acquistarlo. Con il passare del tempo abbiamo riconosciuto corretta questa forma di presentazione, e ci limitiamo a dire che, fermo restando la dichiarazione che il volume secondo noi vale ampiamente la spesa, abbiamo un dubbio e due piccole critiche.

Il dubbio riguarda il *posto* di un libro del genere: tra i Libri d'Arte (*Japanese Design Motifs* da una parte, *Arabian Geometric Patterns* dall'altra) o tra gli Incomprensibili della Matematica (*Sangaku of the Nagano Prefecture* e *The Fractal Geometry of Nature*)?

Per quanto riguarda le due critiche, la parte relativa all'Aritmetica è introdotta dall'incisione di Gregor Reisch che conoscete tutti, dove Pitagora (abacista) e Boezio (algebrista) fanno una gara di calcolo di fronte all'Aritmetica (vince Boezio: capito, perché non siamo d'accordo?).

In secundis, se confrontiamo pagina 294 con pagina 313, ci viene da pensare che nella prima siano stati invertiti i simboli di Nettuno e Plutone e, anche se probabilmente questo errore risale all'edizione originale (2010, Wooden Books: nome bellissimo, per una casa editrice), una maggior attenzione avrebbe permesso di correggerlo. A meno che si tratti di un problema lasciato da risolvere al lettore, il che sarebbe perfettamente in tema con la struttura del libro...

Titolo	Quadrivium
Sottotitolo	Numero, geometria, musica, astronomia
Autori	Miranda Lundy, Daud Sutton, Anthony Ashton, Jason e John Martineau
Editore	Sironi Editore (Marchio registrato Alpha Test s.r.l)
Curatore	John Martineau
Prezzo	21 Euro
ISBN	978-88-518-0169-4
Pagine	416

5. Soluzioni e Note

Giugno.

Comincio a sospettare che il riscaldamento globale sia responsabile di tutto: il carico di lavoro dei redattori di RM, la scarsità di soluzioni che ci arrivano ogni mese, i ritardi di tutti quanti, ma soprattutto della primavera, anzi, a questo punto dell'estate. Alle mie latitudini (un po' più a nord del nord Italia) il sole non si è ancora visto, e le temperature si ostinano a non voler raggiungere valori dignitosi per il mese di marzo, figuriamoci

[20] No, non vi diciamo chi è, ma se ci leggete da un po' lo sapete già.

giugno. E così, diciamocelo, abbiamo bisogno di aiuto. Abbiamo bisogno di sole, di colori, e di incoraggiamento.

Noi, dal canto nostro, seppur con ritardo e con versioni ridotte, ve lo diciamo e ve lo scriviamo: siamo ancora qui. Spero che anche voi continuiate a leggerci.

Prima di passare alla unica e sola soluzione pervenuta questo mese, il solito promemoria: sono in linea le versioni e-pub degli ultimi numeri di RM:

- http://www.rudimathematici.com/archivio/epub/170e.epub
- http://www.rudimathematici.com/archivio/epub/171e.epub
- http://www.rudimathematici.com/archivio/epub/172e.epub

Ancora una volta, scriveteci e diteci che cosa ne pensate, se ha senso continuare e se vi torna utile scaricarvi RM sul vostro e-reader o no.

E con questo mi fermo. Ricordate che siete voi lettori il motivo per cui facciamo tutto questo, scriveteci, non ci dimenticate. Perché se no, non sappiamo più perché lo facciamo.

5.1 [172]

5.1.1 Il lavoro peggiore del mondo

Non saprei, veramente. Secondo me non esiste un lavoro "peggiore del mondo", magari solo l'inesistenza di un lavoro è tale, e sarebbe un ossimoro. La realtà è che, per quanto la cosa ci disturbi nella maggior parte dei casi, il lavoro che facciamo ci definisce, in parte… e ciò è Male. Non per niente molti di noi si inventano una seconda vita, un secondo lavoro, come quello dei vostri redattori, qui, e ci si prova, a rimanere in qualche modo indefiniti, non "l'ingegnere", "l'impiegato",… Beh, a me "uno di quei matti di RM" piace già molto di più, che ne dite?

Ma non perdiamo tempo, vediamo il problema di cosa parlava veramente:

> *Per quali numeri, se concateno (per esempio* 169 *come* $16=4^2$ *e* $9=3^2$*) i loro quadrati ottengo un quadrato?*
>
> *Ce ne sono che nel quadrato ottenuto hanno quattro nove di fila??*

E per formularlo il Capo ha definito il dare ripetizioni, ad uno studente intelligente, come il lavoro più brutto del mondo. Beh, nella mia esperienza, invece, è stato uno dei più piacevoli. Pazienza.

Vediamo la *soluzione del mese*, cioè l'unica arrivata, del grandissimo, nonché famoso, ***Giorgio Dendi*** ©:

> TEOREMA.
>
> Per fare il quadrato di un numero che finisce per 5, basta scrivere il prodotto del numero senza il 5 finale per il successivo, e poi attaccare in fondo "25".
>
> Esempio. $85^2 = (8x9)25 = 7225$
>
> Dimostrazione. Prendo $(10\ a + 5)$, e lo elevo alla seconda. È il quadrato di un binomio.
>
> $(10\ a + 5)2 = 100\ a^2 + 100\ a + 25 = 100\ a(a+1) + 25$ = la cifra delle decine per la successiva, spostata di due caselle, e in quelle due caselle scrivo 25.
>
> Allora $95^2 = (9x10)25 = 9025$.
>
> $995^2 = (99x100)25 = 990025$.
>
> $9995^2 = (999x1000)25 = 99900025$.
>
> Quindi:
>
> TEOREMA.

Per fare il quadrato di un numero formato da tutti 9 e un 5 in fondo, basta scrivere lo stesso numero di 9 che ci sono nel numero iniziale, un uguale numero di 0, e 25 in fondo.

Dimostrazione.

Per il teorema precedente, $999\ldots9995^2$ = (999…999x1000…000)25 = 999…999000…00025

Per tornare al nostro problema, un quadrato che sia anche quadrato a pezzettoni, e che abbia da quattro cifre 9 in su, si fa scrivendo a volontà alcuni 9, altrettanti 0, e 25. Per avere quadrato anche a pezzettoni, occorre però che gli 0 (e quindi i 9) siano in numero pari. Così abbiamo 999995^2 = 99999900000025 = (9)(9)(9)(9)(9)(9000000)(25). Se invece è ammesso anche 0 come quadrato, va bene anche un numero dispari di 9.

Osservando la tavola dei quadrati, ed in particolare i numeri da 91 a 99 al quadrato, si scopre una semplice regola che fa ricordare facilmente tutti i quadrati "a memoria".

TEOREMA.

Per fare un quadrato fra 91 e 99 si conta quante unità mancano per arrivare a 100, e si scrive prima 100 meno questo numero, e poi su due cifre il quadrato di questo numero.

Esempio 92^2. Tenendo conto che manca 8 per arrivare a 100, si fa $(100\text{-}2\text{x}8)8^2$ = 8464.

Dimostrazione. Basta svolgere il quadrato di 100-n.

TEOREMA.

Una volta conosciuti i quadrati dei numeri fra 91 e 99, per fare i quadrati da 991 a 999, oppure da 9991 a 9999, il risultato è lo stesso, ma "un po' allungato"…

Esempio. 93^2 = 8649, 993^2 = 986049, 9993^2 = 99860049, 99993^2 = 9998600049…

Con considerazioni che si dimostrano analogamente a quanto detto sopra, si scopre che 97^2 è un quadrato a pezzettoni, in quanto 97^2 = 9409 = (9)(4)(0)(9). Se si allunga, si ottiene lo stesso risultato allungato… cioè 99997^2 = 9999400009 = (9)(9)(9)(9)(40000)(9).

Risposta: sono soluzione tutti i numeri del tipo 99…995 e 99…997 al quadrato.

I risultati citati sono stati tutti trovati a mano, senza calcolatrici, ragionando fra 91 e 99 similmente a come fatto dalla mia amica Giorgia per i numeri fra 51 e 59, e che potete vedere qui: http://www.digitaldocet.it/la-matematica-e-divertente, cliccando su I QUADRATI FACILI.

Un problema simile è stato da me pubblicato su http://www.festamentis.org/il-numero-a-pezzettoni/.

Leggendo meglio il testo, vedo che tra il Legislatore ed il ragazzino ci sono anche rivalità, e voglia di primeggiare l'uno sull'altro. Allora ho pensato che forse andava bene anche il quadrato di 264, che (a guardar bene…) è formato tutto da 9, e quindi tutto da cifre quadrate, e quindi poteva essere soluzione del problema.

Il mio e vostro amico ***Marco Broglia*** mi fa notare che a questo punto anche 3114 al quadrato ha la medesima caratteristica.

Marco mi fa notare che anche 7071, 8544 e 14142 al quadrato sono quadrati a pezzettoni con quattro 9 di seguito. L'ultimo è la radice di 2 approssimata, e quindi al quadrato fa 19999….

Marco è, in realtà, il grandissimo ***Bramo Logicar***, che non si vede su queste pagine da tempo immemore, ma fa piacere vedere che ci pensa sempre.

Beh, complice l'enorme ritardo di questo numero, siamo riusciti a raccogliere anche la soluzione di ***Sawdust***, eccola qui:

Senza stare a ripetere tutto il testo del problema, il quesito si può porre in breve in questa forma: dati due interi m e n trovare per quali valori dei due interi esiste un altro intero q nel rispetto della relazione $m^2n^2 = q^2$, dove al primo termine non c'è scritta una moltiplicazione, ma solo i due quadrati scritti di seguito.

Id	m	n	m2	n2	q2	q	Tipo	q pari	q Primo	Gruppi
1	1	15	1	225	1225	35	Buono			
2	1	75	1	5625	15625	125	Buono			
3	1	150	1	22500	122500	350	Finto	Pari		
4	1	750	1	562500	1562500	1250	Finto	Pari		
5	2	3	4	9	49	7	Buono		Primo	
6	2	15	4	225	4225	65	Buono			
7	2	30	4	900	4900	70	Finto	Pari		
8	2	45	4	2025	42025	205	Buono			
9	2	150	4	22500	422500	650	Finto	Pari		
10	2	300	4	90000	490000	700	Finto	Pari		
11	2	450	4	202500	4202500	2050	Finto	Pari		
12	3	55	9	3025	93025	305	Buono			
13	3	225	9	50625	950625	975	Buono			
14	3	265	9	70225	970225	985	Buono			
15	3	550	9	302500	9302500	3050	Finto	Pari		
16	3	675	9	455625	9455625	3075	Buono			
17	3	875	9	765625	9765625	3125	Buono			
18	4	3	16	9	169	13	Buono		Primo	
19	4	9	16	81	1681	41	Buono		Primo	
20	4	30	16	900	16900	130	Finto	Pari		
21	4	90	16	8100	168100	410	Finto	Pari		
22	4	300	16	90000	1690000	1300	Finto	Pari		
23	4	900	16	810000	16810000	4100	Finto	Pari		
24	6	1	36	1	361	19	Buono		Primo	A
25	6	10	36	100	36100	190	Finto	Pari		
26	6	100	36	10000	3610000	1900	Finto	Pari		
27	6	1000	36	1000000	361000000	19000	Finto	Pari		
28	7	27	49	729	49729	223	Buono		Primo	
29	7	225	49	50625	4950625	2225	Buono			
30	7	270	49	72900	4972900	2230	Finto	Pari		

Dopo un primo risibile tentativo a "manina", ho pensato bene di far fare il lavoro sporco all'attrezzo che sto usando ora per scrivere queste righe, ma anche così la cosa veniva lunga date le mie scarse capacità di programmatore (riesco a malapena a far girare qualche routine in VBA di Excel), e questo computer devo usarlo anche per fare altro.

Ho però avuto la fortuna di recuperare un PC destinato allo smaltimento, e quindi ho potuto sfruttarlo a tempo pieno.

Il risultato raggiunto, per m e n fino a 1000, è riassunto nella lista che segue[21].

Questa non garantisco che sia completa, ma mi ha fatto fare un po' di osservazioni: innanzi tutto ho classificato come *Finto* ogni valore che differisce da uno dei precedenti solo per il fatto che n, e di conseguenza anche q, è moltiplicato per un fattore 10^n.

Inoltre quasi sempre q è un numero dispari, chiaramente escludendo i multipli di 10, e, a parte 7 casi che non riesco a classificare, ogni altra volta che q è pari fa parte di un gruppetto di multipli, come meglio riassunto nella tabella seguente.

Id	m	n	m2	n2	q2	q	Tipo	q pari	q Primo	Gruppi
24	6	1	36	1	361	19	Buono		Primo	A
36	12	2	144	4	1444	38	Buono	Pari		A
46	18	3	324	9	3249	57	Buono			A
97	228	1	51984	1	519841	721	Buono			AA
109	456	2	207936	4	2079364	1442	Buono	Pari		AA
121	684	3	467856	9	4678569	2163	Buono			AA
38	12	49	144	2401	1442401	1201	Buono		Primo	B
52	24	98	576	9604	5769604	2402	Buono	Pari		B
57	32	12	1024	144	1024144	1012	Buono	Pari		C
65	48	18	2304	324	2304324	1518	Buono	Pari		C
76	64	24	4096	576	4096576	2024	Buono	Pari		C
85	80	30	6400	900	6400900	2530	Finto	Pari		C
74	62	498	3844	248004	3844248004	62002	Buono	Pari		D
90	124	996	15376	992016	15376992016	124004	Buono	Pari		D
112	474	108	224676	11664	22467611664	149892	Buono	Pari		E
128	948	216	898704	46656	89870446656	299784	Buono	Pari		E
61	39	166	1521	27556	152127556	12334	Buono	Pari		x
75	63	502	3969	252004	3969252004	63002	Buono	Pari		x
116	553	126	305809	15876	30580915876	174874	Buono	Pari		x
120	632	144	399424	20736	39942420736	199856	Buono	Pari		x
124	711	162	505521	26244	50552126244	224838	Buono	Pari		x
125	790	18	624100	324	624100324	24982	Buono	Pari		x
127	869	198	755161	39204	75516139204	274802	Buono	Pari		x

Come si vede non ho trovato il quadratone con i quattro 9 consecutivi, ma forse è solo questione di tempo, o più probabilmente servirà un approccio di tipo diverso o con strumenti più potenti di Excel.

Però mi sono saltate agli occhi 2 triplette strane che ho scritto in rosso, oltre ai doppietti scritti in verde e alla quadretta in blu, e la bella coppia indicata dalla freccia.

Però, dopo un bel po' di pensamenti, sono riuscito a mettere giù una routine VBA molto più celere, e quindi ho provato a spingere la ricerca fino a valori di m e n pari a 32768, e il risultato è nel Foglio di Excel allegato[22].

Anche qui ho messo da parte i q multipli di 10, (e anche quelli di 5, sui quali però forse converrebbe studiare ancora un po'), e tra i Buoni, proprio alla fine, è saltata fuori la coppia che soddisfa anche l'ultima richiesta.

Più in là con Excel non riesco ad andare, visto che comincia ad arrotondare e quindi… , forse è il caso di cominciare a studiare un po' di C.

Aggiunta di tarda serata: dal foglio di Excel, mettendo assieme i Buoni e i Multipli di 5, sempre riferiti alla colonna q o Terzo, salta fuori il fatto che nella colonna del primo numero da elevare al quadrato (m) sono presenti tutti i numeri compresi tra 26 e 84 e tutti i dispari compresi in quest'intervallo, elevati al quadrato, danno un

[21] Ne abbiamo messo un pezzettino come figura qui sopra, dovrebbe dare l'idea delle sue considerazioni…

[22] No, niente excel, quello è tutto nostro…

quadratone se viene loro concatenato il quadrato del numero n di valore pari a 3*m*125.

Multipli di 5 "strani"

Primo	Second	PriQua	SecQua	TerQua	Terzo	DiffPrim	DiffSec	Sec/375
27	10125	729	102515625	729102515625	853875			27
29	10875	841	118265625	841118265625	917125	2	750	29
31	11625	961	135140625	961135140625	980375	2	750	31
33	12375	1089	153140625	1089153140625	1043625	2	750	33
35	13125	1225	172265625	1225172265625	1106875	2	750	35
37	13875	1369	192515625	1369192515625	1170125	2	750	37
39	14625	1521	213890625	1521213890625	1233375	2	750	39
41	15375	1681	236390625	1681236390625	1296625	2	750	41
43	16125	1849	260015625	1849260015625	1359875	2	750	43
45	16875	2025	284765625	2025284765625	1423125	2	750	45
47	17625	2209	310640625	2209310640625	1486375	2	750	47
49	18375	2401	337640625	2401337640625	1549625	2	750	49
51	19125	2601	365765625	2601365765625	1612875	2	750	51
53	19875	2809	395015625	2809395015625	1676125	2	750	53
55	20625	3025	425390625	3025425390625	1739375	2	750	55
57	21375	3249	456890625	3249456890625	1802625	2	750	57
59	22125	3481	489515625	3481489515625	1865875	2	750	59
61	22875	3721	523265625	3721523265625	1929125	2	750	61
63	23625	3969	558140625	3969558140625	1992375	2	750	63
65	24375	4225	594140625	4225594140625	2055625	2	750	65
67	25125	4489	631265625	4489631265625	2118875	2	750	67
69	25875	4761	669515625	4761669515625	2182125	2	750	69
71	26625	5041	708890625	5041708890625	2245375	2	750	71
73	27375	5329	749390625	5329749390625	2308625	2	750	73
75	28125	5625	791015625	5625791015625	2371875	2	750	75
77	28875	5929	833765625	5929833765625	2435125	2	750	77
79	29625	6241	877640625	6241877640625	2498375	2	750	79
81	30375	6561	922640625	6561922640625	2561625	2	750	81
83	31125	6889	968765625	6889968765625	2624875	2	750	83
								Sec/375
4554	10125	20738916	102515625	20738916102515625	144010125			27
5566	12375	30980356	153140625	30980356153140625	176012375	1012	2250	33
6578	14625	43270084	213890625	43270084213890625	208014625	1012	2250	39
7590	16875	57608100	284765625	57608100284765625	240016875	1012	2250	45
8602	19125	73994404	365765625	73994404365765625	272019125	1012	2250	51
9614	21375	92428996	456890625	92428996456890625	304021375	1012	2250	57
10626	23625	112911876	558140625	112911876558140625	336023625	1012	2250	63
11638	25875	135443044	669515625	135443044669515625	368025875	1012	2250	69
12650	28125	160022500	791015625	160022500791015625	400028125	1012	2250	75
13662	30375	186650244	922640625	186650244922640625	432030375	1012	2250	81
								Sec/1075
15708	11825	246741264	139830625	246741264139830625	496730575			11
18564	13975	344622096	195300625	344622096195300625	587045225	2856	2150	13
21420	16125	458816400	260015625	458816400260015625	677359875	2856	2150	15
24276	18275	589324176	333975625	589324176333975625	767674525	2856	2150	17

27132	20425	736145424	417180625	736145424417180625	857989175	2856	2150	19
29988	22575	899280144	509630625	899280144509630625	948303825	2856	2150	21
32844	24725	1078728336	611325625	1078728336611325625	1038618475	2856	2150	23
35700	26875	1274490000	722265625	1274490000722265625	1128933125	2856	2150	25
38556	29025	1486565136	842450625	1486565136842450625	1219247775	2856	2150	27
41412	31175	1714953744	971880625	1714953744971880625	1309562425	2856	2150	29

Un comportamento simile lo hanno i numeri che compaiono nella seconda parte della tabella Precedente, per i quali vale la regola n = 3/2(m – p_int(m/500)*500) * 125. I valori alla fine di questa tabella, evidenziati in rosso, sono quelli che ho trovato per estrapolazione andando al di sopra del range di ricerca usato con Excel (max 32768).

Da quanto sopra mi viene da pensare che dovrebbero esserci altre terne con un simile comportamento, aventi m formato da 6 o 7 cifre e sempre n con valori compresi tra quelli qui sopra, ma di questo ne riparliamo.

Tanto per aggiungere ancora un pezzo al tormentone: a parte le serie relativamente carine in cui si tratta solo di aggiungere delle cifre 9 a volontà nei primi due termini da elevare al quadrato e di cui riporto qualche estratto nella tabella sottostante (e che quindi permettono di trovare un "quadratone" con quante cifre 9 si desiderano!)[23].

Gruppi strani su primo e secondo

Primo	Secondo	PriQua	SecQua	TerQua	Terzo
99	995	9801	990025	9801990025	99005
124	996	15376	992016	15376992016	124004
999	9995	998001	99900025	99800199900025	9990005
1249	9996	1560001	99920016	156000199920016	12490004
9999	99995	99980001	9999000025	999800019999000025	999900005
12499	99996	156225001	9999200016	1562250019999200016	1249900004
24	98	576	9604	5769604	2402
49	99	2401	9801	24019801	4901
249	998	62001	996004	62001996004	249002
499	999	249001	998001	249001998001	499001
2499	9998	6245001	99960004	624500199960004	24990002
4999	9999	24990001	99980001	2499000199980001	49990001
24999	99998	624950001	9999600004	6249500019999600004	2499900002
49999	99999	2499900001	9999800001	24999000019999800001	4999900001

o la breve serie, limitata, che segue

Primo	Secondo	PriQua	SecQua	TerQua	Terzo
22848	172	522031104	29584	52203110429584	7225172
28560	215	815673600	46225	81567360046225	9031465
34272	258	1174569984	66564	117456998466564	10837758
39984	301	1598720256	90601	159872025690601	12644051

e di cui non so ancora se abbia delle "sorelle" più in alto, mi ha particolarmente colpito la serie che presento in quest'altra tabella, seguita da una breve descrizione.

Primo	Secondo	PriQua	SecQua	TerQua	Terzo

[23] In queste tabelle le righe in cui i primi 2 valori sono scritti in rosso sono righe trovate per estrapolazione dai valori rintracciati da Excel nella ricerca fino a 32000.

6	1	36	1	361	19
12	2	144	4	1444	38
18	3	324	9	3249	57
228	1	51984	1	519841	721
456	2	207936	4	2079364	1442
684	3	467856	9	4678569	2163
8658	1	74960964	1	749609641	27379
17316	2	299843856	4	2998438564	54758
25974	3	674648676	9	6746486769	82137
328776	1	108093658176	1	1080936581761	1039681
657552	2	432374632704	4	4323746327044	2079362
986328	3	972842923584	9	9728429235849	3119043

Questa serie non dovrebbe essere limitata, io l'ho verificata fino al 33° termine (in cui il primo numero è 112.380.817.646.316.024) e il suo sviluppo può essere meglio spiegato dividendola in 3 sottotabelle come di seguito:

Primo	Secondo	PriQua	SecQua	TerQua	Terzo
6	1	36	1	361	19
228	1	51984	1	519841	721
8658	1	74960964	1	749609641	27379
328776	1	108093658176	1	1080936581761	1039681

Primo	Secondo	PriQua	SecQua	TerQua	Terzo
12	2	144	4	1444	38
456	2	207936	4	2079364	1442
17316	2	299843856	4	2998438564	54758
657552	2	432374632704	4	4323746327044	2079362

Primo	Secondo	PriQua	SecQua	TerQua	Terzo
684	3	467856	9	4678569	2163
25974	3	674648676	9	6746486769	82137
986328	3	972842923584	9	9728429235849	3119043

È chiaro che la seconda e la terza parte sono rispettivamente il doppio e il triplo della prima, per cui si tratta solo più di mostrare come si origina quest'ultima.

La serie è così composta:

$N_1 = 6$

$N_2 = 38 * N_1$

$N_3 = 38 * N_2 - N_1$

$N_4 = 38 * N_3 - N_2$

…….

$N_n = 38 * N_{n-1} - N_{n-2}$

Per ora penso possa bastare, ma non escludo ulteriori sviluppi.

E noi li aspettiamo. Siamo arrivati alla fine. Stateci bene, ragazzi.

A presto!

6. Quick & Dirty

In gioventù Rudy e Doc erano appassionati giocatori di "bridge" (più passione che talento, ma questa per loro è la regola ancora oggi in molti altri campi); ora non staremo a spiegarvi le regole, vi basti sapere che bisogna essere in quattro, che le carte si distribuiscono in senso orario, la prima carta al vicino di sinistra del mazziere e che si distribuisce l'intero mazzo da cinquantadue.

Una volta, mentre distribuiva Rudy, la distribuzione è stata interrotta e, quando si è trattato di ricominciare, nessuno si ricordava più dove era arrivato Rudy nella distribuzione; per non mettere tutto "a monte" e ricominciare, come ha fatto Rudy ad ottenere esattamente la stessa distribuzione che avrebbe avuto se avesse fatto tutto correttamente?

7. Pagina 46

Prima proprietà

Possiamo scrivere x e y nelle forme:

$$x=[x]+\alpha \quad \alpha\in R,\ \alpha\in[0,\ 1]$$
$$y=[y]+\beta \quad \beta\in R,\ \beta\in[0,\ 1]$$

E quindi risulta $x+y=[x]+[y]+\alpha+\beta$.

Essendo $\alpha+\beta>0$, $[x]+[y]$ è il più grande intero minore di $x+y$ e quindi deve essere $[x+y]<[x]+[y]$.

Seconda proprietà, soluzione 1

Come sopra, sia $x=[x]+\alpha$, $0\leq\alpha<1$. Supponiamo che l'intero $[x]$, diviso per n, dia quoto q e reto r, ossia $[x]=qn+r$, $0\leq r<n-1$.

Abbiamo allora:

$$\frac{[x]}{n}=q+\frac{r}{n}$$
$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=q$$
$$x=qn+r+\alpha=qn+r_1$$

Dove:

$$r_1=r+\alpha<n$$
$$\frac{x}{n}=q+\frac{r_1}{n}$$
$$\left[\frac{x}{n}\right]=q=\left[\frac{[x]}{n}\right]$$

Il che prova l'asserzione.

Seconda proprietà, soluzione 2

Il numero degli interi divisibili per n ma non maggiori di x è $\left[\frac{x}{n}\right]$.

Il numero degli interi divisibili per n ma non maggiori di $[x]$ è $\left[\frac{[x]}{n}\right]$.

Dovendo questi due numeri essere uguali, si ha la tesi.

Terza proprietà, soluzione 1

Sia x=[x]+α: essendo 0≤α<1, allora α o è uguale a una delle frazioni

$$\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}$$

o è compresa tra due frazioni successive.

Supponiamo le due frazioni in oggetto siano k/n e $(k+1)/n$, ossia:

$$\frac{k}{n} \le \alpha < \frac{k+1}{n}.$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} x+\frac{n-k-1}{n} &= [x]+\alpha+\frac{n-k-1}{n}a < a[x]+\frac{k+1}{n}+\frac{n-k-1}{n} \\ &= [x]+1 \end{aligned}$$

$$x+\frac{n-k}{n} = [x]+\alpha+\frac{n-k}{n}a \quad a[x]+\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n} = [x]+1$$

E

$$\begin{aligned} x+\frac{n-1}{n} &= [x]+\alpha+\frac{n-1}{n}a < a[x]+\frac{k+1}{n}+\frac{n-1}{n} \\ &= [x]+\frac{n+k}{n}a \le ax+2 \end{aligned}$$

Segue che

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\dots+\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right] < [x]+1$$

E che

$$[x]+1+\left[x+\frac{n-k}{n}\right]+\dots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right] < [x]+2$$

Ossia che

$$[x]=\left[x+\frac{1}{n}\right]=\dots=\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right],$$
$$\left[x+\frac{n-k}{n}\right]=\dots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+1$$

Siccome dopo i primi $n-k$ numeri ne restano k, abbiamo:

$$[x]+\dots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=(n-k)\cdot[x]+k\cdot([x]+1)=n\cdot[x]+k$$

Ma si dimostra che questo non è altro che $[nx]$.

Siccome $k \leq n\alpha < k+1$, allora $n\alpha = k+\beta$, con $0 \leq \beta < 1$. Quindi

$$[nx] = [n[x]+n\alpha] = [n[x]+k+\beta] = n[x]+k$$

E questo prova la tesi.

Terza proprietà, soluzione 2

Consideriamo il primo membro dell'espressione data.

Se $0 \leq x < 1/n$, allora tutti i numeri x, $x+1/n$, …, $x+(n-1)/n$ sono minori di 1, e quindi la loro parte intera sarà nulla, così come quella di $[nx]$, e quindi l'espressione vale per questi valori di x.

Ora sia x arbitrario. Se moltiplichiamo x per $1/n$, tutti i termini sulla sinistra sono spostati di un posto verso destra, mentre il termine finale $[x+(n-1)/n]$ diventa $[x+1]$, ossia eccede di 1 il valore di x: questo significa che moltiplicare x per $1/n$ aumenta il primo membro dell'espressione di 1, e così deve accadere anche per il secondo membro.

Per ogni x è allora possibile trovare un numero α, $0 \leq \alpha < 1/n$, tale che x differisce da α di m/n, dove m è un intero: quindi, la proprietà è valida per ogni x.

8. Paraphernalia Mathematica

Come vi annoiamo circa dall'inizio dell'anno, questa serie è un contributo (in minima parte nostro) al 2013 come anno della *Matematica per il pianeta Terra*. E questa volta come va a finire lo mettiamo direttamente nel titolo.

8.1 Sarà dura

Non siamo sicuri che il titolo sia effettivamente il gioco di parole cercato, quindi ve lo spieghiamo subito. Per quanto risulta a Rudy, dal punto di vista della retorica il titolo è un'*ellissi*[24] (cosa, "sarà dura"? La bistecca? La situazione economica? La verifica sulla scala Mohs?), in quanto parleremo di *ellissi*.

Non siamo sicuri che i calcoli messi in zona Cesarini la volta scorsa abbiano soddisfatto la vostra fame di matematica, quindi questa volta rischiamo di mettere più calcoli che parole; ci teniamo l'ellisse come *main course*, quindi iniziamo con qualche *hors d'oeuvre* piuttosto leggero.

Scopo del gioco è vedere come l'eccentricità dell'orbita influenza l'irradiazione della Terra (o meglio, della parte alta dell'atmosfera), possiamo calcolare il momento angolare del pianeta come:

$$J = mrv_\theta$$

Dove abbiamo messo assieme massa, coordinate polari (una sola, il raggio vettore: tranquilli, al prossimo passaggio salta fuori anche l'angolo) e la componente angolare della velocità:

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

Mettendo assieme queste due, otteniamo:

$$J = mr^2\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{mr^2}$$

L'insolazione, esattamente come la forza gravitazionale, va con l'inverso del quadrato della distanza, quindi, per una qualche costante C, avremo che l'energia ricevuta per unità di tempo vale:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

Possiamo calcolare allora la *quantità di energia ricevuta per spostamento angolare*[25]:

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{\frac{dU}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{Cm}{J}$$

[24] L'ellissi (dal greco *elleípō*, «ometto») è una figura retorica che consiste nell'omissione, all'interno di una frase, di uno o più termini che sia possibile sottintendere. Per quelli che hanno difficoltà a seguire i ragionamenti di Rudy, rassicuratevi: è un sentimento condiviso dalla maggioranza di quelli che lo conoscono, del resto ha usato proprio le sunnominate figure geometriche – non retoriche – per reclutare il nostro ormai epico Postino. [*NdA*]

[25] Siamo fermamente convinti che una volta tanto siano più chiare le formule delle parole: questo aggeggio non è altro che a derivata dell'energia rispetto all'angolo.

Quindi l'energia ricevuta sul periodo di rivoluzione[26] vale:

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{dU}{d\theta} d\theta = \frac{2\pi Cm}{J}. \qquad \textbf{[1]}$$

"Rudy, ma quando arriva l'ellisse?" Vero, non l'abbiamo ancora utilizzata. Prima, però, cerchiamo di ripassare alcuni fatti fondamentali in merito: dall'ultima volta che ci avete fatto dei conti sopra è molto probabile che qualche concetto sia caduto nel dimenticatoio.

L'equazione (in coordinate polari, che è più divertente) è:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Dove abbiamo indicato con e l'eccentricità e con p un aggeggio che merita sicuramente un nome migliore di *semi-latus rectum*: di più, in merito, tra un attimo.

Se mettiamo il Sole nell'origine delle coordinate, vediamo che i punti di minima e massima distanza (rispettivamente ***perielio*** e ***afelio***) si hanno per il massimo e il minimo valore del coseno, ossia per $\theta=0$ e per $\theta=\pi$, e si ha:

$$r_1 = \frac{p}{1+e}; \; r_2 = \frac{p}{1-e}$$

Si nota facilmente che questa è una (peraltro molto carina) dimostrazione che perielio, fuochi e afelio siano allineati. Quindi possiamo definire il ***semiasse maggiore*** della nostra ellisse come:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Ossia, ***il semiasse maggiore è la media aritmetica di perielio e afelio***.

Evidenti ragioni di estetica impongono a questo punto che l'altro semiasse sia anche lui interessante: infatti,

$$b = \sqrt{r_1 r_2}$$

E quindi ***il semiasse minore è la media geometrica tra perielio e afelio***.

Indovinate adesso cosa potrebbe essere p. Centro:

$$p = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$$

Ossia, ***il semi-latus rectum è la media armonica tra perielio e afelio***. Capito, perché si meriterebbe un nome migliore?

Ravanando un po' le formule, si ricavano altre espressioni interessanti, tra le quali $b = a\sqrt{1-e^2}$ ci sarà a breve piuttosto utile.

Bene, torniamo all'insolazione. E alla **[1]**, dove avevamo correlato l'energia totale ricevuta dalla Terra al suo momento angolare: perché proprio al momento angolare?

Semplice, perché la forza gravitazionale è centrale e *conservativa*, quindi l'energia totale

[26] Un millesimo di chiloanno. Ma nella formula lo diciamo meglio.

$$V + U = \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + \left(\frac{-GMm}{r} \right)$$

Si conserva.

Consideriamo inoltre che (almeno all'afelio e al perielio) *tutta la componente della velocità è angolare* (nel senso che non "partiamo per la tangente", se ci passate il *calembour*), e quindi:

$$v = v_\theta = \frac{J}{mr} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{J^2}{2r^2}$$

Limitiamoci quindi ad equalizzare le energie totali nei due punti topici: otteniamo l'espressione:

$$\frac{J^2}{2mr_1^2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{J^2}{2mr_2^2} - \frac{GMm}{r_2}$$

E, con un po' di algebra:

$$\frac{J^2}{2m} \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{J^2}{2m} \cdot \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \right) = GMm \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

$$\frac{J^2}{2m} \cdot \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right) = GMm$$

Risolvendo quini in *J*:

$$J = m \sqrt{\frac{2GMr_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

E ricordando il fatto che i due semiassi sono le due medie (e quindi eliminando i due raggi):

$$J = mb \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Posiamo allora definire l'energia *U* in funzione dell'irraggiamento (nell'ultima formula utilizziamo il fatto che $b = a\sqrt{1 - e^2}$:

$$U = \frac{2\pi Cm}{J} = \frac{2\pi C}{b} \sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{2\pi C}{\sqrt{GMa\left(1 - e^2\right)}}$$

Se adesso buttate dentro un po' di numeri, vedete che il cambio della temperatura che deriva dall'eccentricità dell'orbita è un qualcosa dalle parti dello 0.167%, ossia suppergiù *un ottavo di grado*. E noi, se ricordate, dobbiamo farne saltar fuori *cinque*, di gradi.

Insomma, sembra proprio che dal punto di vista *astronomico* non si cavi un grado dal Sole ("ragno dal buco" ci sembrava eccessiva), con buona pace del pianeta degli Eich di smitiana memoria[27]; meglio tornare all'anidride carbonica, al metano e ai cicli di Milankovich.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[27] Edward Elmer ("Doc") Smith, la serie dei *Lensmen*, libro "I figli della Lente": gli sbalzi di temperatura dati dall'eccentricità dell'orbita (periodo orbitale di una quarantina d'anni) del pianeta tra estate e inverno erano tali da influenzare la forma fisica degli abitanti. Evidentemente, erano dei cattivi: la bontà nella fantascienza esiste solo in un *range* limitato di variazione climatica (non di temperatura, alcuni dei Meglio Eroi della saga facevano il bagno nell'azoto liquido, e altri si profumavano le squamose ascelle con il piombo fuso).