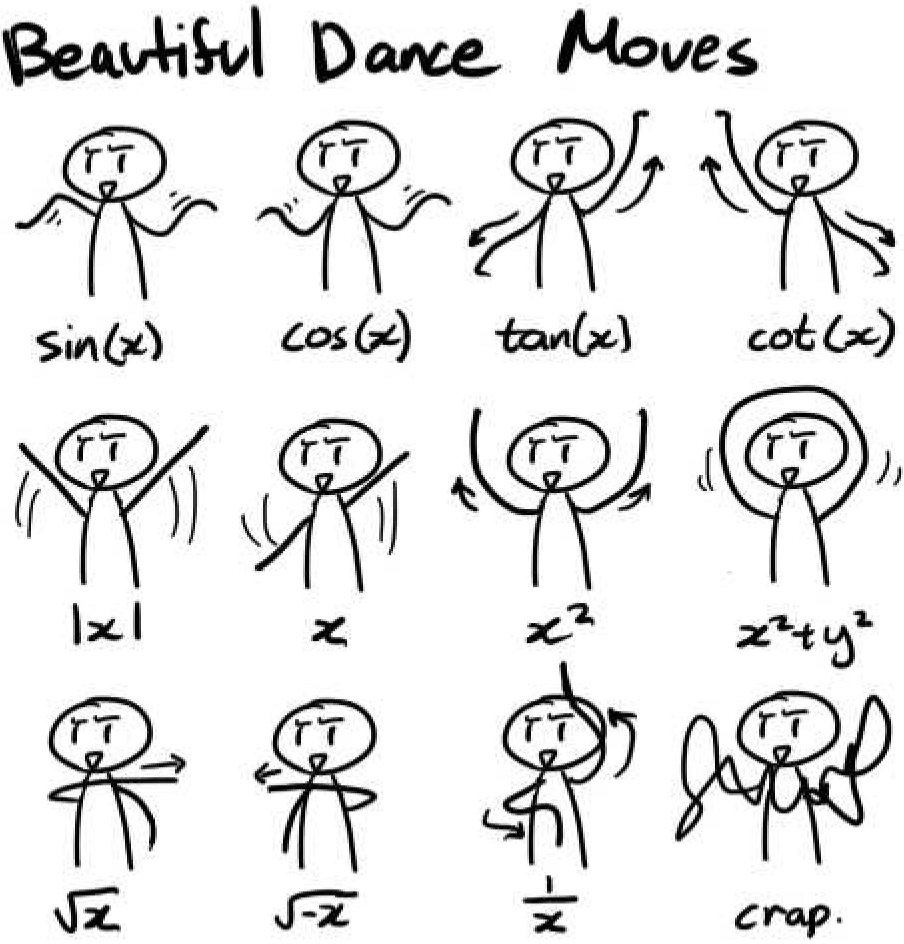
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 171 – Aprile 2013 – Anno Quindicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM170 ha diffuso 3'000 copie e il 09/04/2013 per Google eravamo in 12'700 pagine.

Insomma, se sapete ballare l'analisi matematica non dovrebbe essere un problema. E viceversa. Autore sconosciuto, purtroppo.

1. Rien ne va plus

*"I calcolatori portarono alle bombe,
le bombe ai calcolatori*[1]*."*
(George Dyson)

Una delle più grandi contraddizioni del nostro tempo è che il metodo scientifico è terribilmente poco conosciuto. La nostra società è ormai regolata e regolamentata da oggetti quotidiani che non sarebbero stati neanche lontanamente immaginabili senza un approccio scientifico alla conoscenza, eppure il metodo che conduce a scoperte ed ad oggetti senza i quali la nostra vita sarebbe radicalmente diversa (e, con buona pace dei cultori della filosofia New Age, decisamente peggiore) è quasi sempre lasciato in ombra, o al massimo dato per scontato; quasi mai realmente insegnato. Uno studente universitario che arriva ad iscriversi al primo anno di una facoltà scientifica ne ha certo un'idea, e durante il suo corso di studi arriverà ad averne una visione chiara e decisa, al punto che probabilmente affronterà le grandi scelte della sua vita applicandolo più o meno consapevolmente anche in ambiti non strettamente scientifici, ma questo avviene quasi per osmosi, sotto traccia, più o meno alla stessa maniera in cui un bambino piccolo impara la sua lingua madre. E i ragazzi che non fanno della scienza il loro campo di studi professionale, in genere, del metodo scientifico non sanno davvero niente, o quasi.

Non esiste la materia "Metodo Scientifico" in nessuna scuola, di nessun ordine o grado. A ben vedere, non esiste neppure nessun vero corso di storia della scienza, almeno fino alle scuole medie superiori comprese[2]. Le conseguenze sono in alcuni casi devastanti: le conoscenze "scientifiche" sono accettate, nel migliore dei casi, come verità rivelate, quando la loro intrinseca natura è esattamente una continua affermazione dell'opposto; si rimane stupiti quando si rivela che la scienza dichiara di conoscere qualcosa solo con un certo grado di approssimazione, perché la vulgata associa spesso il concetto di "scientifico" a quello di "vero con assoluta certezza", mentre il lavoro più importante degli scienziati è quasi sempre proprio quello di delimitare con la maggiore consapevolezza possibile "fino a quanto" un determinato risultato è affidabile. È quindi del tutto inevitabile che non vengano registrate neppure le novità, per quanto rivoluzionarie, che il metodo scientifico ha registrato nella sua evoluzione; e di una delle più importanti innovazioni metodologiche nella ricerca scientifica, anche se è avvenuta ormai sette decenni fa, non si sente quasi mai parlare. In compenso, viene applicata in maniera estesissima in quasi ogni aspetto della ricerca.

Senza risalire a Galileo e limitandoci ad un aspetto ormai dato per scontato, è comunque notorio che la ricerca scientifica parte dall'osservazione di fenomeni e dalla loro classificazione e analisi, che può poi procedere con la costruzione di una teoria quanto più possibile generale. La teoria, per essere significativa, deve riuscire a spiegare tutti i fenomeni presi in considerazione e in più dovrebbe essere in grado di prevedere eventi ed effetti non ancora osservati. Degli sperimentatori si metteranno così alla ricerca degli eventi previsti dai teorici, e ogni riscontro positivo sperimentale rafforza la consistenza della teoria. Un solo riscontro negativo, una volta appurato con sufficiente sicurezza, è sufficiente a demolire la teoria: ma ad eventi così tristi i teorici sono ben preparati, e tutto sommato sanno bene che un risultato negativo è comunque un'informazione preziosa, di cui tener debitamente conto nel proporre una nuova teoria.

[1] La cui versione originale dovrebbe essere: "*Computers helped build the bomb, and the bomb necessitated ever more advanced computers*".

[2] Sembra che le cose stiano per cambiare, almeno a sentire quanto si mormora nei corridoi dei palazzi dove si pianificano le riforme dei programmi scolastici. Speriamo sia vero.

Tutto il processo è consolidato, e resta ancora la strada maestra della ricerca; ciò non di meno, attorno al 1940 ha cominciato a svilupparsi un percorso alternativo di indagine che è ormai parimenti consolidato, ma che in fondo è concettualmente diverso. Il punto è che in alcuni casi l'analisi degli esperimenti può essere particolarmente complessa, delicata, e soprattutto costosa; e in questi casi le teorie, che spesso devono tener conto di moltissime variabili e richiederebbero un numero molto elevato di verifiche sperimentali di elevata difficoltà, rischiano di restare poco più che lettera morta. Ed è per questa ragione che, quasi senza che ce se ne accorgesse, un'altra coniugazione della metodologia scientifica ha improvvisamente preso piede.

Ci sono momenti, nella storia dell'uomo, in cui sembra che un regista particolarmente attratto dalle trame improbabili prenda il controllo della sceneggiatura. I libri di storia raccontano poi cosa è accaduto, e il solo fatto che una combinazione di eventi si sia effettivamente realizzata toglie forse il senso di meraviglia che invece dovrebbe essere ben chiaro e lampante nel giudicare la cronistoria dei fatti accaduti. La Seconda Guerra Mondiale, il più grande conflitto nella storia dell'umanità, è scoppiata e progredita nel periodo probabilmente più fecondo nell'indagine scientifica degli oggetti che costituiscono la materia. I modelli atomici avevano cominciato a dare segni di consistenza già nei primi anni del XX secolo, ma la scoperta del neutrone da parte di Chadwick nel 1932 dette la stura a tutta una serie di ricerche e di esperimenti mirati che finalmente riuscivano a dare un'idea generale e comprensiva della Tavola degli Elementi, e soprattutto dell'esistenza degli isotopi. Il poter finalmente risolvere le ambasce connesse all'esistenza di elementi caratterizzati dallo stesso numero atomico ma diverso peso atomico cominciava a chiarire i meccanismi delle misteriose radiazioni naturali, e lo strumento ancora giovane della Meccanica Quantistica cominciava a diventare qualcosa di più di una complessa teoria matematica.


1 *Otto Hahn e Lise Meitner*

Si cominciava insomma seriamente a capire cosa fosse la radioattività, e come da questa un elemento si potesse trasformare in un altro, magari con un bel po' di energia liberata. E mentre i meccanismi della radioattività naturale venivano piano piano svelati, la ricerca continuava: Otto Hahn e Lise Meitner cominciarono a pensare che gli atomi potessero anche essere indotti a rompersi in maniera artificiale, se opportunamente trattati. Per "trattati", in questo caso, si intende in realtà "bombardati"; guarda caso, il neutrone scoperto da Chadwick è una particella massiva, cosa che la rendeva un gran bel proiettile, in grado di produrre effetti significativi in un atomo; per di più, è neutra, e quindi riusciva a penetrare con facilità nell'interno degli atomi, non venendo respinto dal formidabile campo elettromagnetico generato da protoni ed elettroni. Gli studi di Hahn e Meitner diventano di dominio pubblico nel 1939, anno di inizio della guerra.

Qualche tempo prima, Leo Szilard aveva ipotizzato che un atomo, rompendosi, poteva emettere dei neutroni liberi, e che questi, forse, se avessero avuto l'energia giusta, avrebbero potuto essere i detonatori della rottura di altri atomi; tra i frammenti ottenuti dall'atomo frantumato potevano trovarsi altri neutroni con la giusta energia, che a loro volta potevano provocare altre frantumazioni[3] e così via: insomma, che fosse possibile quella che poi ha preso il nome di "reazione a catena"[4].

Ad un occhio esperto, era relativamente facile mettere le cose insieme: forse non facilissimo, per la gente comune, ma Luis Alvarez, fisico americano di origine spagnola che poi divenne famoso soprattutto per una teoria sull'estinzione dei dinosauri, interruppe a metà una seduta dal barbiere subito dopo aver letto della fissione dell'uranio ottenuta da Hahn e Meitner. Se era possibile rompere artificialmente gli atomi, forse era possibile continuare a farlo con una reazione a catena; e se rompendo un atomo si poteva ottenere energia, rompendone tanti grazie alla reazione a catena di energia se ne poteva ottenere una quantità spaventosa.

Tanta energia può servire ad un sacco di cose: e questo diventerà chiaro nel 1942, quando Fermi, a Chicago, riuscirà ad ottenere la prima reazione a catena controllata, aprendo l'era nucleare. Ma, evidentemente, con i tempi microscopici del microscopico mondo degli atomi, l'energia liberata dalla velocissima reazione a catena incontrollata non può servire ad altro che a costruire una spaventosa bomba. Ed è qui che la storia sembra davvero essere governata da un grande regista con un perverso senso dello humour, visto che nel 1939 le grandi armi di distruzione di massa erano particolarmente appetibili, con tutto il mondo sull'orlo della guerra.

La distanza che sempre c'è tra teoria ed esperimento è spesso superata dalla distanza che c'è anche tra l'esperimento di laboratorio e la realizzazione tecnologica di un oggetto che si basi sull'effetto teorizzato e verificato sperimentalmente. Agli inizi degli Anni Quaranta era insomma chiaro che la costruzione di una bomba atomica era possibile, ma da qui a poterla effettivamente realizzare correvano ancora un mare di difficoltà. Gli Stati Uniti, comunque, decisero che il gioco valeva la candela, e misero in piedi il più grande progetto mai affrontato nella storia, il Manhattan Project. È un po' triste constatare che l'organizzazione più complessa della storia dell'umanità, almeno fino a quel tempo, fu realizzata con l'obiettivo di sterminare una buona parte della stessa umanità; ma erano tempi strani e crudeli, come sono sempre i tempi in cui impera la follia della guerra.

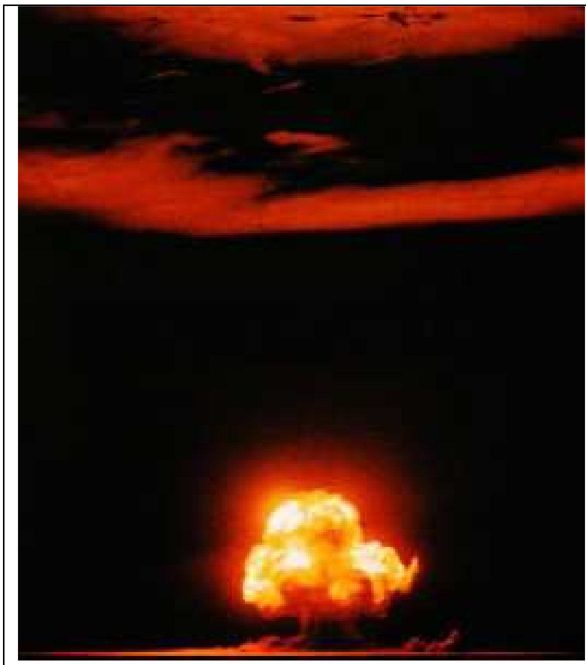
Restava il fatto che le difficoltà – teoriche, sperimentali e tecniche – che avrebbero dovuto portare alla realizzazione dell'ordigno erano davvero apparentemente insormontabili. Le variabili da considerare per ottenere uno scenario funzionante erano davvero tante, e non sembrava esserci modo, per la teoria, di indirizzare con sicurezza le realizzazioni pratiche dei costituenti della bomba. Quanti neutroni servivano, quanto uranio, con quanta energia? Il plutonio, prima di essere utilizzato, doveva essere sintetizzato, e la sua disponibilità era davvero irrisoria: occorreva valutare con somma attenzione la giusta quantità di materiale da utilizzare, perché per "accendere" la reazione a catena ne serviva una massa critica, ma non di più; era necessario perfino scoprire la geometria più

[3] Ovvero "fissioni". Fissione significa infatti "rottura", e per fissione nucleare si intende semplicemente la rottura di un nucleo (in genere molto massivo) in due nuclei leggeri. Viceversa, quando due nuclei leggeri vengono fusi insieme per crearne uno più massivo si parla di "fusione nucleare". Entrambi i processi liberano energia, anche se quello di fusione ne libera molta di più: è per questo che le bombe di Hiroshima e Nagasaki, che usavano uranio o plutonio ed erano bombe a fissione, fanno la figura delle armi giocattolo rispetto alla Bomba H, che come dice il nome si basava sul meccanismo della fusione dell'idrogeno.

[4] Come al solito, dietro una singola frase riepilogativa si nascondono decine di eventi e di meraviglie. L'idea della reazione a catena viene a Szilard quando ancora non era stata scoperta la fissione nucleare da parte di Hahn e Meitner, e quindi è davvero difficile (almeno per chi scrive) capire cosa possa essere passato per la sua testa; si sa però che in qualche modo fu ispirato da un racconto di fantascienza di H.G.Wells, e che l'idea gli venne mentre era in coda ad un semaforo.

efficiente, e mille altre cose. La Meccanica Quantistica consentiva di fare dei calcoli, ma non era affatto chiaro come si potessero verificare tutte le migliaia di diverse condizioni iniziali: e sperimentare ogni possibile configurazione era proibitivo.

A Los Alamos, sede segreta del Progetto, c'erano molti, davvero molti scienziati indaffarati. A Los Alamos c'erano molte, davvero molte mogli di scienziati, tragicamente annoiate. A qualcuno[5] venne l'idea di cambiare approccio: anziché cercare per via teorica le condizioni migliori per scatenare la reazione a catena, si potevano ipotizzare degli scenari iniziali più o meno casuali, fare la montagna di calcoli che tali scenari comportavano, e vedere come la cosa andava a finire. Una strategia davvero rivoluzionaria, a ben vedere: in pratica si trattava di immaginare una certa configurazione della quantità e della geometria del materiale, scegliervi un neutrone a caso, e vedere cosa succedeva seguendo la sua evoluzione, microsecondo per microsecondo. Ma per fare la suddetta montagna di calcoli, si potevano usare le signore annoiate, toglier loro di mano i ferri da calza, e sostituirli con carta e matita. Così, in quattro e quattr'otto, un bel numero di giovani donne si trovarono rinchiuse in una grande stanza a fare calcoli su calcoli: spesso non sapevano nulla della teoria e delle formule che applicavano nei loro conteggi, ma ciò nonostante lavoravano, e calcolavano, calcolavano, calcolavano. In breve, si trovarono affibbiate il nomignolo di "calcolatrici", o forse di "calcolatori"; la lingua inglese non fa differenza di genere, in casi come questi: infatti, visto che il verbo "calcolare" in inglese suona "to compute", le signore che macinavano numeri e formule vennero semplicemente soprannominate "computers". Era una parola nuova, creata apposta per loro[6].



2 *Trinity Test ad Alamogordo, la prima bomba atomica*

La storia ci racconta come finì la corsa[7]. Le difficoltà apparentemente insormontabili vennero superate, gli Stati Uniti fecero esplodere la prima bomba atomica della storia sul loro territorio, ad Alamogordo, dopo avere accuratamente evacuato la zona, e la seconda e la terza sul Giappone, senza alcuna evacuazione preventiva. Con la fine della guerra, il livello di adrenalina del mondo scese di diversi gradi, e ognuno tornò, potendo ad una vita, per quanto possibile, normale. Ma i periodi eccezionali lasciano spesso tracce indelebili, e qualche volta ricompaiono quando uno meno se lo aspetta: così come Leo Szilard fu fulminato dall'idea della reazione a catena mentre guardava un semaforo, un altro scienziato subì una folgorazione mentre faceva esattamente l'opposto che lavorare; mentre faceva un solitario con le carte.

È evidente che, da accaniti cultori di giochi e di matematica ricreativa, non possiamo non essere entusiasti nel raccontare di scoperte cruciali (addirittura metodologiche) scatenate

[5] No, non siamo riusciti a scoprire chi esattamente ebbe l'idea. Abbastanza evidentemente, l'obiettivo a quel tempo era semplicemente quello di ottenere un risultato pragmatico, e chi propose la pazzesca soluzione di "procedere a caso" non aveva certo intenzione di rifondare la metodologia scientifica; forse per questo il suo nome resta perduto nelle pieghe della storia.

[6] Ed è probabilmente chiaro, adesso, che la prima occorrenza della parola "calcolatori" (*computers*), nella citazione di apertura a questo pezzo non va interpretata come "hardware". Tutt'al più come "ladyware".

[7] I più anziani riconosceranno la niente affatto involontaria citazione gucciniana ("*La Locomotiva*"). Del resto, anche quella canzone parla di una insolita bomba.

da giochi e dall'analisi matematica dei giochi. È quindi verosimile che trascenda forse un senso di eccessivo entusiasmo nel raccontare questa storia[8], ma confidiamo che sarete indulgenti.

Sapete come sono fatti i matematici: giocano un paio di volte coi giochi (solitari, scacchiere, puzzle, indovinelli) poi si mettono subito a provare ad analizzarli, invece di continuare a divertirsi come i comuni mortali. E così, il nostro scienziato (sì, era un matematico), dopo aver fatto un paio di solitari, cominciò a cercare di capire se esistesse un metodo generale per la sua risoluzione. Non sappiamo di quale specifico solitario si trattasse, ma per fortuna non doveva essere uno troppo semplice, perché ben presto il nostro eroe rinunciò ad un approccio tanto generale. Mutò allora strategia, cercando di analizzare le probabilità di "riuscita" del solitario a partire da una disposizione iniziale casuale: ma anche questa metodologia si rivelò ben presto troppo ostica. Beh, per fortuna si trattava solo di un gioco, quindi era lecito prendersi delle libertà: per non darla vinta troppo facilmente alle carte, pensò che poteva comunque stimare le possibilità di riuscita del solitario in una maniera un po' impropria, ma certo logica e razionale. Bastava giocare qualche centinaio di partite e dedurre, per quanto in via approssimativa, la probabilità che il solitario potesse essere risolto. Neanche il tempo di completare il pensiero, e si rese conto che, di fatto, era stato proprio con un metodo del genere che le calcolatrici, le "computers" di Los Alamos avevano domato il gran problema della bomba. Forse, l'approccio non era poi tanto superficiale e leggero.

Chi lavora con i computer, e anche chiunque abbia un po' di familiarità con la scienza dei giorni nostri, dà così per scontato il valore conoscitivo del "simulazioni al computer" che forse non si rende conto di quale novità metodologica comportino, dal punto di vista dell'idea casta e pura di Galileo Galilei. Certo che è che il matematico amante dei solitari deve aver invece intravisto il potenziale di indagine implicito in un tale approccio, e per questo ne parlò subito ad un suo collega ben ferrato in matematica, logica computazionale e buona parte del resto dello scibile umano, John Von Neumann. Questi si entusiasmò all'idea, si rese conto del potere esplorativo, se non proprio dimostrativo, di un simile approccio, si rese conto che una grande quantità di problemi potevano essere indagati a partire dalla definizione di un modello noto, per quanto complesso, e dal lasciare che qualcuno – o qualcosa – potessero fare la proverbiale montagna di conti che a Los Alamos erano di competenza delle "computers". Sempre grazie alle curiose coincidenze della storia, sia il nostro fanatico dei solitari sia Von Neumann erano ben inseriti negli ambienti pioneristici della ricerca computazionale, e raccontarono la cosa a coloro che stavano realizzando i primi calcolatori elettronici made in USA, come l'ENIAC. I sostituti delle "computers" erano bell'e trovati, e non ci deve essere stata troppa discussione sul nome da affibbiare a quelle macchine, che pure della grazia femminile avevano ben poco.

Restava in realtà ancora un problema, e tutt'altro che trascurabile: quello di generare "casualmente" i dati iniziali di input. Per quanto possa sembrare incredibile ai non iniziati, generare dei numeri a caso è attività assai difficile: una mente umana in genere tende a "regolarizzare troppo la casualità", se è lecito usare una frase così contorta per spiegare il concetto: insomma, la sequenza "1234" è considerata "particolare", e pertanto ritornerà troppo spesso (per attrazione) o troppo poco (proprio per il tentativo di essere "casuali", e quindi di evitare le regolarità) rispetto alla sua naturale frequenza di un caso su 10000.

[8] A proposito, è meglio mettere in chiaro subito alcuni grossi debiti che abbiamo: se la storia del Progetto Manhattan, nei suoi molti aspetti, vi interessa, è probabile che il già citato George Dyson abbia scritto il suo resoconto migliore ("*Project Orion: the true story of the atomic spaceship")* , ma non l'abbiamo letto, non sappiamo neppure se sia mai stato tradotto in italiano, quindi non possiamo parlare con reale cognizione di causa. In compenso, quasi tutto quel che avete letto fin qua (e anche qualche riga di quanto dovete ancora leggere), non è altro che una volgare (e non autorizzata) scopiazzatura di alcune pagine de "*Il cucchiaino scomparso*" di Sam Kean, edito da Adelphi, che è una storia (piena zeppa di aneddoti e controstorie) degli elementi del Sistema Periodico. È un libro con un grosso difetto: costa la bellezza di 34 euro: però questo è davvero l'unica pecca che vi abbiamo trovato.

Il metodo di indagine comunque riuscì a risolvere anche quest'impasse, e proprio perché si basava sul concetto di casualità, e la casualità ricorda l'azzardo e tutti i giochi ad esso connessi, venne battezzato col nome di uno dei più famosi casinò, quello di Montecarlo. In verità, stupisce un po' che un prodotto americano abbia scelto di battezzarsi col nome di un casinò europeo piuttosto che con Las Vegas, ma bisogna ricordare che erano di origine europea sia Von Neumann sia il giocatore di solitari; a sentire quest'ultimo, poi, il nome venne dato proprio in memoria di un suo zio, che nel Principato di Monaco passò gran parte della sua esistenza cercando di indovinare la casualità data dai trentasette numeri della roulette[9].

3 *Stanislaw Ulam*

Il matematico amante dei solitari è Stanislaw Marcin Ulam. Nasce il 13 Aprile 1909 a (Lvòv, Leopoli, L'viv, Lemberg, Lemberik, Lwow)[10] da famiglia ebrea polacca abbastanza agiata. Non erano agiati i tempi, comunque: Leopoli fu oggetto di assedio, epicentro di guerre, oggetto di stragi. Per qualche ragione, però, fu anche per un certo periodo un centro matematico di incredibile eccellenza: Kac, Mazur, Stozek furono compagni di studi di Ulam, e tutti seguivano le stelle di Banach e Steinhaus. E tutti si ritrovavano nel leggendario Scottish Cafè[11].

Stan Ulam parte per l'America nel 1935, su invito proprio di John Von Neumann, che aveva conosciuto a Varsavia. Arriva a Princeton, dove conosce i maggiori fisici e matematici del tempo; inoltre, si salva la vita, perché quattro anno dopo la Polonia viene invasa ad Ovest dalla Germania nazista e ad Est dall'Unione Sovietica stalinista. Gran parte dei suoi parenti rimangono vittime dei pogrom.

È forse per la crudezza dei tempi che Ulam non sembra soffrire troppo di sensi di colpa quando si ritrova a lavorare alla creazione dei peggiori ordigni mai costruiti dall'uomo. Dopo l'importante contributo dato al Progetto Manhattan, mentre molti scienziati venivano colti da sensi di colpa e cercavano di dimenticare in fretta gli effetti delle bombe che avevano contribuito a costruire, Ulam continua a lavorare alla produzione della ancora più terribile Bomba H. Risolve un problema davvero complesso che ne aveva bloccato la realizzazione, e diventa il maggiore collaboratore di Teller, il maggior entusiasta delle armi di distruzioni di massa dell'epoca. È grazie a lui che la prima bomba all'idrogeno riesce effettivamente ad essere realizzata: il detonatore era una bomba a fissione, e il processo di fusione fu reso possibile solo grazie all'idea di Stan Ulam.

[9] Ipotesi corroborata dal fatto che un suo zio, Michael, morì in effetti a Montecarlo.

[10] Dei molti nomi e delle molte nazionalità di questa città abbiamo già parlato nel compleanno dedicato a Banach, "Fare a pezzi", RM134, Marzo 2010. E visto che l'epoca è la stessa, in quel compleanno si trovano diversi nomi e luoghi che tornano in questo pezzo: primo fra tutti, il leggendario Scottish Cafè.

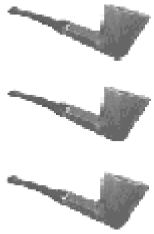
[11] Come dicevamo nella nota precedente. Non ne parleremo più, e neanche della situazione storico-politica di quei tempi in Ucraina-Polonia-Russia. Ci limitiamo a rinviare al compleanno già citato.

4 *Ivy Mike, la prima bomba H*

Eppure, gli amici non lo ricordano come un uomo crudele. Fu colto da un ictus nel 1946, che riuscì a superare anche grazie alle cure degli amici: "Sei esattamente identico a prima", lo consolò Paul Erdos, quando venne a trovarlo in ospedale[12]. Ed ebbe sempre vicino la moglie Françoise, che naturalmente era una delle "computers" di Los Alamos. Era figlio dei suoi tempi. Speriamo che continuino a nascere uomini così geniali, speriamo che non tornino più tempi del genere.

[12] Naturalmente, fu proprio durante la lunga degenza in ospedale che Ulam passava il tempo facendo solitari su solitari…

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
…i figli, son soddisfazioni…			
Cappotto!			

1.1 ...i figli, son soddisfazioni...

"...papino..."

Quando Alberto comincia così, è sicuro che gli serve un *grosso* favore.

"...mh..."

"...potresti prestarmi una moneta farlocca ma non troppo?"

"Troppo facile chiederti 'definisci *farlocca*'. Preferisco chiederti 'definisci *ma non troppo*'.

"Beh, che non si veda troppo che vinco sempre. Insomma, *quasi* onesta. Non dirmi che non ne hai, perderei tutta la fiducia che ho nel mio genitore".

"Credo di averne una adatta allo scopo: solo, non mi ricordo di preciso *quanto* sia farlocca. Gli appunti in merito sono piuttosto criptici, li ho presi quando la mia mente era più elastica."

"Vuoi dire che leggi e scrivi correntemente il cuneiforme?"

"Evita battute del genere, se non vuoi che arrivino soffiate al tuo prof di Statistica. Semplicemente, mi scrivevo come fare un gioco onesto con quella moneta-"

"Fa piacere vedere che, almeno in quanto lasciavi ai posteri, era presente una robusta traccia di *onestà*. Però non ho capito cosa intendi".

"Semplice. Ecco la moneta che cercavo. Il foglietto allegato dice: *vinco se prima testa ai tiri* 1, 14, 15, 19, 20, 23. *Se prima testa a altri vince altro*".

"Beh, mi pare evidente: se voglio organizzare un gioco onesto, ho tutti i parametri per fare la scommessa".

"...e tu vieni a chiedermi una moneta farlocca per giocare un gioco *onesto*?

"ehm..."

"Per punizione, mi calcoli la probabilità delle facce, a partire dai parametri che ti ho dato!"

Ora, cercate di immaginarvi la scena: se voi non gli risolvete il problema, il mese prossimo Alberto si presenterà all'esame di Statistica con un *problemino* per il prof. Se il prof non riesce a risolverlo, secondo voi quanto prende Alberto? Veloci, che siamo (*as usual*) in ritardo.

1.2 Cappotto!

Cominciamo con la linguistica: qualcuno conosce la ragione del termine utilizzato come titolo? Nel suo piccolo, lo scrivente (Rudy) conosce solo l'equivalente torinese, evidentemente nato in stagioni più miti: "*l'an famne 'na giaca*[13]...". Logicamente, abbiamo le stesse profonde conoscenze di cosa c'entri la giacca di quante ne abbiamo di quanto c'entri il cappotto: sappiamo però che l'espressione torinese è più generale (nel senso spiacevole del termine), in quanto potete usarla (e ci risulta sia l'utilizzo più comune) se intendete esprimere il concetto che vi hanno picchiato molto[14].

Vogliamo sperare abbiate apprezzato l'arzigogolo[15]. Adesso, passiamo al problema.

Avete appena inventato un giochino nuovo, che si svolge in fasi:

1. Il vostro amico disegna un rettangolo H x L (H è l'altezza), lati interi.
2. Voi decidete quanto scommettere, da zero a un po' meno di infinito.
3. Partite con la coloritura (v. dopo).

Nel senso che a quel punto potete (voi da soli, l'amico sta a guardare) campire dei quadrati unitari all'interno del rettangolo (i quadrati sono nei posti "giusti": vertici sul reticolo degli interi), e quando avete finito mettete dei numeri dentro ai quadrati: in ognuno, scrivete il numero dei quadrati campiti che hanno un lato in comune con il quadrato in oggetto e, se pure lui è campito, contate (per uno) anche il quadrato originale.

Alla fine, dei soldi scommessi, voi prendete la percentuale rappresentata dai quadrati (tutti, anche non campiti) che contengono *numeri dispari*.

Il fatto è che avete deciso di giocare "seriamente" (insomma, di scommettere qualcosa diverso da zero) *solo quando siete sicuri di dare "cappotto"*, ossia di prendere tutto il piatto.

OK, il tutto somiglia clamorosamente a "minesweeper", e Ian Stewart ha dimostrato che ha alcune parentele con il problema "P=NP?" (no, non vi diamo il link: andate sul sito della Clay University, fatevi un giro e dateci una percentuale sul milione di dollari, se lo vincete), quindi vi siete accordati con il vostro avversario di usare solo rettangoli (1x10), (2x9), (3x8), (4x7), (5x6), (4x4) e (8x8): a voi il trovare la strategie vincenti (*tutte*: il vostro avversario non è un pollo, meglio variare la disposizione, ogni tanto) per ogni caso (escluse rotazioni e riflessioni, chiaramente).

Espansioni? Ma mi pare *bi*evidente:

1. ...e per gli altri rettangoli?
2. ...no, non ne ho la più pallida idea.

Attenzione, che se risolvete la prima espansione potreste trovarvi ricchi grazie a Mister Clay. Poi non mettete su superbia, continuate a leggerci. Ma ripassate anche l'inglese, che vi chiederanno una conferenza in merito.

3. Bungee Jumpers

Provate che $27 \cdot 195^8 - 10 \cdot 887^8 + 10 \cdot 152^8$ è divisibile per $26 \cdot 460$.

Provate che $11^{10} - 1$ è divisibile per 100.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile!

In ritardo, come al solito. E con l'acqua alla gola, tanto per cambiare.

Solo una piccola novità, prima di passare alle soluzioni: a seguito delle molteplici richieste, stiamo lavorando per poter offrire RM in formato e-book. La prima prova la

[13] "Me ne hanno fatto una giacca..."

[14] E non serve neanche specificare "...di botte": "*et faso 'na giaca"*, puro e semplice, sta per "ti riempio di botte". Insomma, il "materiale" della giacca si deduce dal contesto (e dalle medicazioni presenti sul soggetto o complemento oggetto).

[15] Costruito appositamente per evitare di tirare di nuovo in ballo il giardino di Doc (Pagliere, Treppiedi & DVD... Mi ricordo, mi ricordo!).

trovate qui: http://www.rudimathematici.com/archivio/epub/170e.epub fatevi un giro e diteci, se secondo voi è leggibile, se vi interessa veramente, se è una cosa che vi fa piacere… insomma, fateci sapere. Se vi va, scriveteci su facebook, o anche una semplice mail…

A proposito, probabilmente (se ci avete scritto) avete notato che le risposte alle vostre graditissime mail latitano: è così, siamo un po' presi tutti quanti, ma soprattutto il nostro Postino ufficiale che sta cercando di barcamenarsi in una situazione complicata. Abbiate pazienza: prima o poi le risposte vi arrivano, e le risposte sono come la matematica (e come il maiale), non si butta mail via niente.

Ed ora basta, veniamo alle soluzioni.

4.1 [Calendari]

Anche questo mese ***Sawdust*** si è ricordato di fare gli auguri ad una di noi, risolvendo proprio un problema del mese di aprile di quest'anno. Come candelina sulla torta, c'è anche un problema del 2003, godetevele entrambe anche questo mese senza i miei commenti.

4.1.1 Marzo 2003 – APMO 1989 – 3

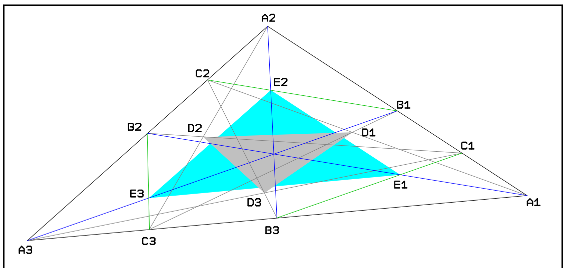
> *Siano A_1, A_2, A_3 tre punti sul piano e sia, per notazione, A_4=A_1, A_5=A_2. Per n=1, 2, e 3 supponiamo che B_n sia il punto medio di A_nA_{n+1}, e che C_n sia il punto medio di A_nB_n. Supponiamo che A_nC_{n+1} e B_nC_{n+2} si incontrino in D_n, e che A_nB_{n+1} si incontrino in E_n. Calcolare il rapporto tra l'area del triangolo $D_1D_2D_3$ e l'area del triangolo $E_1E_2E_3$.*

Dato che, chiaramente per un refuso, i punti E_n non sono ben definiti, cominciamo a cercare quale potrebbe essere la definizione di questi punti.

Di sicuro i tre segmenti A_nB_{n+1} si incontrano in un unico punto, visto che sono le mediane del triangolo $A_1A_2A_3$.

Una possibilità è che i segmenti del tipo A_nB_{n+1} incontrino i segmenti C_nB_{n+2}.

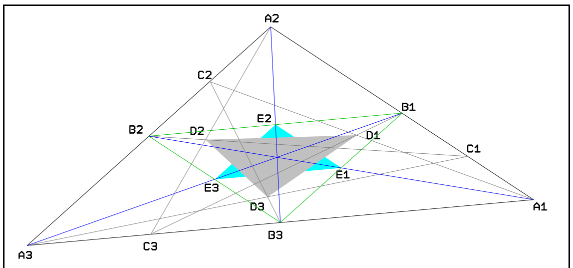
La seconda possibilità è con i segmenti B_nB_{n+2}.



5 *Marzo* 2003, *primo caso*

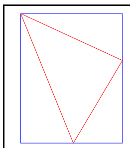
Nel primo caso la situazione è la seguente, e dal disegno si capisce abbastanza agevolmente che l'area del triangolo di vertici E_n è 1/4 dell'area del triangolo di vertici A_n.

Nel secondo caso la situazione è invece questa, in cui chiaramente il triangolo di vertici D_n non è variato, mentre quello di vertici E_n si è ristretto di molto, riducendosi a 1/16 dell'area del triangolo di vertici A_n.



6 *Marzo* 2003, *secondo caso*

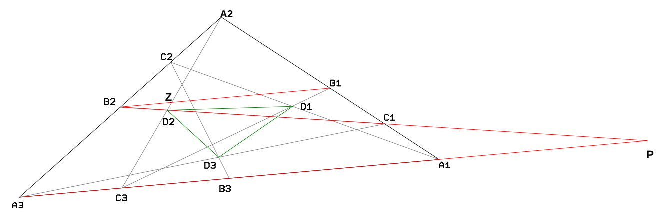
Come si può capire facilmente dai disegni i triangoli di vertici E_n restano simili al triangolo padre di vertici A_n, ma lo stesso non si può dire del triangolo di vertici D_n, che subisce una rotazione con uno "stiramento" variabile a seconda della forma del triangolo padre.


7 *Area di un triangolo*

Però per trovare l'area di un triangolo ci basta conoscere la base e l'altezza di un rettangolo che lo contiene avendo 1 vertice del triangolo coincidente con un proprio vertice e gli altri 2 vertici del triangolo sui 2 lati del rettangolo che non concorrono nel vertice precedente (un disegno vale più di tante parole, e forse si capisce meglio).

Per trovare le posizioni dei 3 punti D_n rivediamo il disegno con l'aggiunta di qualche particolare.

Le rette per B_2C_1 e per A_3A_1 si incontrano nel punto P tale che $\overline{PA_1} = \overline{B_3A_1}$ e $\overline{B_2C_1} = \overline{C_1P}$ e per la seconda di queste uguaglianze dobbiamo ancora aggiungere un pezzo, il segmento B_2B_1, che incontra A_2C_3 nel punto Z.



8 *Disegno con particolari aggiunti*

Ora il triangolo ZB_2D_2 è simile al triangolo C_3PD_2, e poiché $\overline{A_3C_3} = \frac{1}{5}\overline{C_3P}$ e $\overline{B_2Z} = \frac{1}{10}\overline{C_3P}$, allora $\overline{B_2D_2} = \frac{1}{10}\overline{D_2P}$, $\overline{B_2D_2} = \frac{1}{11}\overline{B_2P}$ e $\overline{B_2D_2} = \frac{2}{11}\overline{B_2C_1}$

Mentre per la prima valgono le (curiose) uguaglianze:

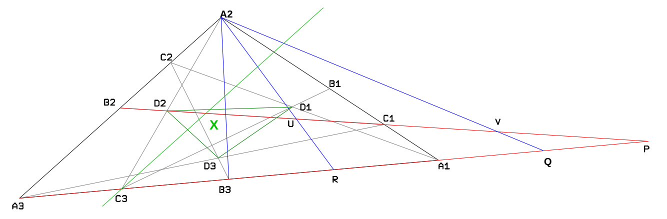
$$\overline{VQ} = \frac{1}{6}\overline{VA_2}$$

$$\overline{C_1A_1} = \frac{2}{6}\overline{C_1A_2}$$

$$\overline{UR} = \frac{3}{6}\overline{UA_2}$$

$$\overline{TB_3} = \frac{4}{6}\overline{TA_2}$$

$$\overline{D_2C_3} = \frac{5}{6}\overline{D_2A_2}$$



9 *La X*

Le curiose uguaglianze citate prima derivano dal fatto che tracciando per C_3 una parallela ad A_2A_3, la sua intersezione con B_2C_1, che chiameremo X, crea il triangolo XC_3D_2, simile a $B_2A_2D_2$. La similitudine ci permette di scrivere quanto segue:

$$\overline{A_2D_2} : \overline{D_2C_3} = \overline{B_2D_2} : \overline{D_2X}$$

$$\text{ma} \quad \overline{B_2D_2} = \overline{B_2P}/11 \quad \text{e} \quad \overline{B_2X} = \overline{B_2P}/6$$

da cui

$$\overline{D_2X} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11}\right)\overline{B_2P} = \frac{5}{66}\overline{B_2P}$$

e quindi

$$\overline{D_2C_3} = \frac{\overline{A_2D_2} \cdot \frac{5}{66}\overline{B_2P}}{\overline{B_2D_2}} = \overline{A_2D_2} \cdot \frac{5}{66}\overline{B_2P} \cdot \frac{11}{\overline{B_2P}} = \frac{5}{6}\overline{A_2D_2}$$

E così anche per gli altri rapporti, che però nel nostro caso non ci servono.

Quindi i punti D_n distano dai punti C_{n+1} 5/11 di A_nC_{n+1}, e distano dai punti B_n 2/11 di B_nC_{n+2}.

A questo punto, per semplificarci l'esistenza, partiamo da un triangolo rettangolo isoscele avente i cateti lunghi 44 cm (va bene, anche i piedi liprandi o le verste possono essere accettati!) disposti sugli assi di un sistema cartesiano.

Il punto D_2 avrà coordinate (20,6), il punto D_1 sarà in (20,18) e D_3 in (18,6). Di conseguenza il rettangolo (che in questo caso è un quadrato) avrà area pari a $14^2 = 196$ cm^2.

Ricapitolando:

Il triangolo di vertici A_n ha area = 968.

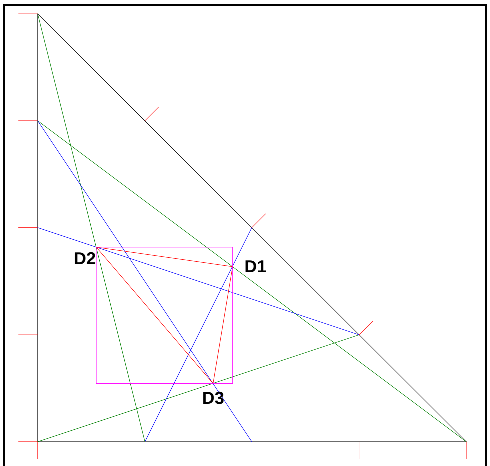
Il triangolo di vertici E_n ha area = 242 o 60.5 (1/4 o 1/16 del triangolo di vertici A_n).

Dal quadrato vanno tolti 3 triangoli di area rispettivamente 14, 12 e 84.

Quindi il triangolo di vertici D_n ha area = 86.

Per cui il rapporto cercato è pari a uno dei due valori seguenti

$$\frac{86}{242}=\frac{43}{121}=\frac{43}{11^2} \quad \text{o} \quad \frac{86}{60.5}=\frac{172}{121}=\frac{4\cdot 43}{11^2}$$



10 *Ricapitolando*

Comunque è un po' sorprendente arrivare a trovare 2 numeri primi (11 e 43) come soluzione di una costruzione apparentemente così semplice. O meglio, chiaro che riducendo un rapporto si ottengano dei numeri primi, ma così grandi fa un po' "strano", e comunque anche il rapporto tra le aree dei triangoli A_n e D_n "sta bene": $\frac{86}{968}=\frac{43}{484}=\frac{43}{(2\cdot 11)^2}$!

4.1.2 Aprile 2013 – IMO 1960 – 6

> *Sia $A_1 = 0$ e $A_2 = 1$. Per $n > 2$, sia definito A_n come la giustapposizione (interpretata come numero decimale) di A_{n-1} e A_{n-2}, ossia, ad esempio, $A_3 = A_2A_1 = 10$, $A_4 = A_3A_2 = 101$, $A_5 = A_4A_3 = 10110$, eccetera. Determinare tutti gli n per cui A_n è divisibile per 11.*

La lunghezza dei numeri (il numero delle cifre che compongono il numero) della serie è la serie di Fibonacci, che già al 20° termine supera il valore di 10.000, per cui fa paura da subito.

Però il criterio di divisibilità per 11 dice che la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari deve essere o 0 o un multiplo di 11.

E, anche se è indifferente se si comincia a contare da destra o da sinistra, cominciando sempre da destra, cioè dalla cifra delle unità, la differenza di cui si parlava prima è sempre nella serie ripetuta 1, –1, 2, 1, 1, 0 ossia ha un periodo 6.

Di conseguenza A_n è divisibile per 11 con n = 7, 13, 19, 25, 31 (verificato con un sistema BruteForce tramite una routine in VBA di Excel in 52 minuti[16]!) quindi per $n = 6k + 1$, con k uguale a qualunque intero.

Se, una volta raggiunto il primo A_n divisibile per 11 (è A_7 = 1011010110110), nominiamo come a e b i suoi predecessori A_6 = 10110101 e A_5 = 10110, vediamo che per entrambi la differenza (*dt*) tra le somme delle cifre di posto pari (*sp*) e di posto dispari (*sd*), contate sempre a partire dalla cifra delle unità, vale 1, ma A_5, che in A_7 va a occupare il posto contenente la cifra delle unità ha un numero di cifre dispari, per cui la somma relativa ad A_6 nell'unione va cambiata di segno e quindi *dt* di A_7 è uguale a 0.

A questo punto possiamo creare la seguente tabella:

[16] Ho provato a farlo andare ancora più avanti, ma in una nottata intera è arrivato a metà strada tra 37 e 38, per cui ho pensato bene di soprassedere!

Ind.	Ultime 21 cifre del Numero come stringa	Lungh.	SommaT	SommaD	SommaP	Diff D-P	Div 11	L/T
1	0	1	0	0	0	0	Sì	
2	1	1	1	1	0	1		1,00000000000000
3	10	2	1	0	1	–1		2,00000000000000
4	101	3	2	2	0	2		1,50000000000000
5	10110	5	3	2	1	1		1,66666666666667
6	10110101	8	5	3	2	1		1,60000000000000
7	1011010110110	13	8	4	4	0	Sì	1,62500000000000
8	101101011011010110101	21	13	7	6	1		1,61538461538462
9	101101011011010110110	34	21	10	11	–1		1,61904761904762
10	101101011011010110101	55	34	18	16	2		1,61764705882353
11	101101011011010110110	89	55	28	27	1		1,61818181818182
12	101101011011010110101	144	89	45	44	1		1,61797752808989
13	101101011011010110110	233	144	72	72	0	Sì	1,61805555555556
14	101101011011010110101	377	233	117	116	1		1,61802575107296
15	101101011011010110110	610	377	188	189	–1		1,61803713527851
16	101101011011010110101	987	610	306	304	2		1,61803278688525
17	101101011011010110110	1597	987	494	493	1		1,61803444782168
18	101101011011010110101	2584	1597	799	798	1		1,61803381340013
19	101101011011010110110	4181	2584	1292	1292	0	Sì	1,61803405572755
20	101101011011010110101	6765	4181	2091	2090	1		1,61803396316671
21	101101011011010110110	10946	6765	3382	3383	–1		1,61803399852180
22	101101011011010110101	17711	10946	5474	5472	2		1,61803398501736
23	101101011011010110110	28657	17711	8856	8855	1		1,61803399017560
24	101101011011010110101	46368	28657	14329	14328	1		1,61803398820532
25	101101011011010110110	75025	46368	23184	23184	0	Sì	1,61803398895790
26	101101011011010110101	121393	75025	37513	37512	1		1,61803398867044
27	101101011011010110110	196418	121393	60696	60697	–1		1,61803398878024
28	101101011011010110101	317811	196418	98210	98208	2		1,61803398873830
29	101101011011010110110	514229	317811	158906	158905	1		1,61803398875432
30	101101011011010110101	832040	514229	257115	257114	1		1,61803398874820
31	101101011011010110110	1346269	832040	416020	416020	0	Sì	1,61803398875054
32	101101011011010110101	2178309	1346269	673135	673134	1		1,61803398874965
33	101101011011010110110	3524578	2178309	1089154	1089155	–1		1,61803398874999
34	101101011011010110101	5702887	3524578	1762290	1762288	2		1,61803398874986
35	101101011011010110110	9227465	5702887	2851444	2851443	1		1,61803398874991
36	101101011011010110101	14930352	9227465	4613733	4613732	1		1,61803398874989
37	101101011011010110110	24157817	14930352	7465176	7465176	0	Sì	1,61803398874990

4.2 [169]

4.2.1 ...ma quanto ci costate?

Prima di procedere, un piccolo commento su questo problema. Vediamo i due pezzi del testo:

> *Rudy e Doc invitano per il te due prof, a cui non vogliono chiedere l'età, ma vorrebbero servire per prima la meno giovane; quello che vi chiediamo è di trovare un modo per stabilire giustappunto quale sia la meno stagionata, ma senza che nessuno sappia le loro età.*

> *Avete tre persone che vogliono sapere, con il minimo numero di domande, quale sia la media dei loro salari senza che nessuno conosca, se possibile, l'ammontare esatto degli altri due. Rispetto alle prof di Mate, abbiamo portato da due a tre i giocatori... si può generalizzare?*

Se vi ricordate, il mese scorso abbiamo presentato le soluzioni di ***Alberto R.*** e ***Tartaruga***, il mese scorso ci ha poi scritto ancora ***Alberto R.***:

> Vorrei fare i miei complimenti a ***Tartaruga*** per aver trovato la soluzione che io ho ostinatamente e inutilmente cercato.
>
> Infatti il metodo che ho inventato presenta la grave limitazione di esigere la copresenza dei tre signori che devono passarsi l'un l'altro un oggetto fisico: la calcolatrice col display incerottato. Invece la soluzione di Tartaruga richiede solo uno scambio di informazioni.
>
> Quindi se i tre messeri sono l'uno in Italia, l'altro in Canada e il terzo in Nuova Zelanda, il mio metodo non funziona più, mentre quello di Tartaruga sì, con pochi euro di telefonate o con lo scambio di qualche e-mail.

Certo, ma a tutti è piaciuta l'idea della calcolatrice. Il Capo si è ricordato anche di darci la versione che aveva lui:

> (…) l'ha inventato il tizio che è sulla prima copertina di RM (Frank Morgan): la soluzione proposta da lui era di preparare, in una stanza, più di 100 post-it numerati: la prima prof metteva delle "x" sotto tutti i post-it sino alla sua età e li rimetteva a posto, poi la seconda entrava e guardava sotto il post-it corrispondente alla sua età. Se era siglato, lei era la più giovane. Devo dire che il metodo della radice quadrata è una meraviglia.

Bene, meno romantica e meno divertente delle soluzioni proposte dai nostri lettori, a dire il vero, ma almeno adesso lo sappiamo. Andiamo avanti.

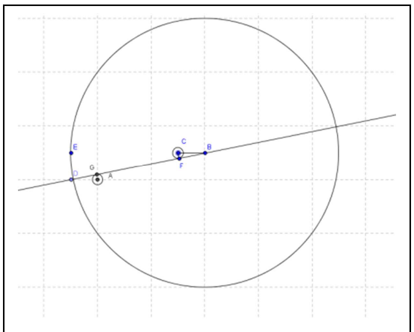
4.3 [170]

4.3.1 Palesemente non è il giardino di Doc

Ecco, ci siamo. Ogni mese ha il suo problema preferito, e quello di marzo è stato proprio questo. Vediamo che cosa diceva il testo:

> *Prendiamo un parco enorme, circolare e perfettamente pianeggiante, di raggio R o* 9801 *(qualche unità di misura): piantiamo, all'interno del nostro parco, in tutti i punti a coordinate intere tranne nell'origine, delle betulle. In funzione del raggio del parco, quale deve essere il raggio dei tronchi di betulla per impedire la visione del centro a tutti i punti al di fuori del cerchio?*

Bello, geometrico e un po' poetico, aveva tutte le caratteristiche per piacere, e così è stato. Vediamo cosa ci ha scritto ***Luke Kleinwalker***, il primo ad arrivare con una soluzione:



11 *La figura di Luke*

> Costruiamo la circonferenza di raggio n (BE). Anche se non l'ho dimostrato analiticamente, con un paio di prove ho visto che il "tratto" che tende ad essere "meno coperto" è quello mostrato in figura (quello compreso tra la circ. di centro A($-n-1$;-1) e quella di centro C(-1,0)). Il raggio minimo r che consente la visione è quello per cui esiste una retta s passante per B e tangente a entrambe le circonferenze. Detta D l'intersezione tra la retta $y=-1$ ed s, per simmetria del sistema AD=CB, da cui D($-n$; -1). DEB e FBC sono ovviamente simili. Imponiamo che i seni degli angoli minori siano uguali. $BD=\sqrt{1+n^2}$.
>
> $$\frac{DE}{DB}=\frac{CF}{CB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = r$$

In effetti, anche se l'ipotesi da cui sono partito, ovvero che "le zone intermedie sono troppo fitte e pertanto conviene guardare il centro vicino agli assi cartesiani", è vera (o almeno pare che sia vera) per n grandi, la formula funziona anche per n=2 o 3.

Vediamo che ne dice il ***Panurgo***:

Aspettiamo che le betulle crescano fino ad un raggio di 0,5 (dm, probabilmente…).

Oppure, se ci interessa il raggio *minimo*, consideriamo il primo ottante di una "Venaria" di raggio R: essa è circolare mentre le "betulle" giacciono su un reticolo quadrato e la simmetria complessiva ci consente di applicare ovunque ciò che otterremo dal primo ottante, quello compreso tra le rette $y = 0$ e $y = x$ per $x \geq 0$, origine ovviamente al centro della Venaria stessa. In questo sistema di riferimento una "retta visuale" avrà equazione $ay - bx = 0$, dove a e b sono le coordinate del "punto di vista", P ≡ (a,b).

Inizieremo scegliendo (senza vergogna) un punto di vista *razionale*, anzi un punto a coordinate intere, prossimo al confine del parco: vedremo in seguito se allontanarsi consentirà o meno un miglior colpo d'occhio.

Di più, le coordinate del punto di vista dovranno essere tra loro incommensurabili: infatti, se MCD$(a,b) = k > 1$ allora l'equazione $a'y - b'x = 0$, con $a = ka'$ e $b = kb'$ rappresenta la stessa retta visuale e tutti i punti (a',b'), $(2a',2b')$, … , (ka',kb') giacciono su di essa. E con loro almeno una betulla, bloccandoci la visuale.

Così, la retta visuale non è toccata da nessun punto con ascissa $x \neq ka$, la distanza dalla retta di un generico punto (x,y), lungo l'ordinata, è $y - bx/a$: ovvero sarà $bx \equiv i \pmod a$.

Ci sono $a - 1$ valori di x possibili, a e b sono reciprocamente primi, quindi i assumerà tutti i valori tra 1 e $a - 1$: in particolare, 1 e $a - 1$. I punti del reticolo più vicini alla retta sono quelli con le ascisse corrispondenti e le cui ordinate sono rappresentate da $(bx \pm 1)/a$.

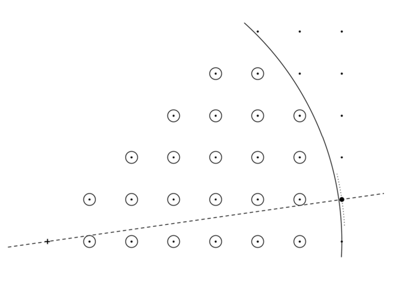
Il valore minimo del raggio delle betulle che impedisce la visuale lungo la retta si ottiene applicando la formula della distanza di un punto da una retta:

$$r = \frac{\left| a\frac{bx \pm 1}{a} - bx \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Per illustrare il concetto mi sono costruito (in realtà, un Gedankenexperiment) un ottante di "Venarîna" nel terrazzo di casa con un raggio di 7 (dm, probabilmente…): eccolo qui raffigurato

È intuitivamente chiaro che la visuale da un punto di vista razionale più lontano è bloccata da betulle più giovani e snelle: il più vicino definisce perciò il raggio minimo necessario.

I punti di vista irrazionali non sono migliori perché la retta si allontana sì da una delle due betulle tangenti ma si avvicina all'altra: insieme esse fanno buona guardia.



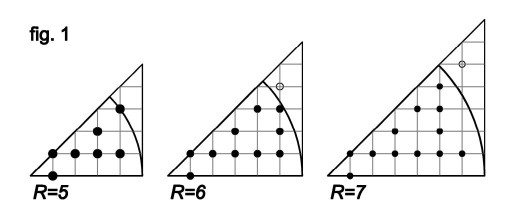
12 *Ottante di Venarîna*

Il punto esterno più vicino al centro è quello indicato in figura, $P \equiv (\lceil R \rceil, 1)$, dove $\lceil R \rceil$ è il più piccolo intero maggiore di R: le betulle corrispondenti hanno raggio

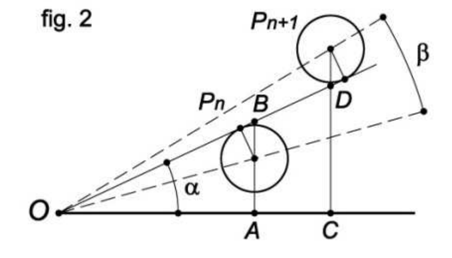
$$r = \frac{1}{\sqrt{\lceil R \rceil^2 + 1}}.$$

Ci sembra proprio che fino a qui siamo tutti d'accordo. Anche ***trentatré*** giunge alla stessa conclusione, ma da un altro punto di vista:

> Siano *R* il raggio del parco, *r* il raggio dei tronchi, $P_n(x,y), n \geq 1$ il punto *n*-esimo interno a *R*, numerato per (y/x) crescente.
>
> Se gli alberi sono molti, più che la loro posizione importa la densità, cioè l'area *A* occupata in media da ognuno. Deve quindi valere una relazione asintotica $f(r,R,A) \to 0$. Il problema è invariante per dilatazione cioè $f(k\,r, k\,R, k^2 A) \to 0$, e per ragioni dimensionali deve essere $r \cdot R \to m \cdot A$, con *m* costante adimensionale che dipende dalla forma del parco. Con i punti di coordinate intere è $A = 1$, e quindi $r \cdot R \to m$.
>
> Più in dettaglio
>
> - "per evidenti ragioni di simmetria" basta trattare un ottavo del cerchio
>
> - se più punti sono allineati con il centro, il più interno copre gli altri, che possono essere tralasciati: le coordinate (*x, y*) dei punti *visibili* sono interi coprimi e le frazioni *y*/*x* sono tutte diverse
>
> - in fig.1 i punti visibili per *R*=5, 6, 7; le frazioni $(y/x)_n$, per *R* intero, e ordinate per valore crescente, danno la *successione di Farey* F_{R-1}, esclusi alcuni valori; p.es. in *R*=6 i punti corrispondono a $F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \left[\frac{4}{5}\right], \frac{1}{1}\right)$ escluso un termine
>
> - i termini esclusi sono quelli per cui $x^2+y^2>R^2$
>
> - la successione F_{R-1} completa corrisponde a un parco <u>quadrato</u> di lato 2*R*.
>
> Nell'angolo compreso fra due *P* consecutivi (fig.2) il centro *O* è invisibile dall'esterno se *r* è determinato dalla tangente ai due tronchi.
>
> Se α è l'angolo della tangente, dai triangoli simili si ha $AB = y_n + r/\cos\alpha = x_n \tan\alpha$, $CD = y_{n+1} - r/\cos\alpha = x_{n+1}\tan\alpha$, da cui eliminando α
>
> [1] $\quad r = T/\sqrt{S}$
>
> con $T = x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n$, $S = (x_n + x_{n+1})^2 + (y_n + y_{n+1})^2$
>
> Calcolando la [1] per tutte le coppie P_n, P_{n+1} e prendendo il massimo, si ottiene il valore minimo di *r* che risolve il problema.
>
> Fra due termini consecutivi (*a*/*b*), (*c*/*d*) di F_K valgono le
>
> a) $T = bc - ad = 1$
>
> b) $S = (a+c)^2 + (b+d)^2$ è minimo per i termini iniziali (0/1), (1/*K*), cioè[17] $S_{\min} = (1+K)^2 + 1$.



13 *Figura* 1 *di* ***trentatre***



14 *Figura* 2 *di* ***trentatre***

[17] Si può dimostrare dal fatto che fra due termini consecutivi di F_k, la *mediante* $e/f=(a+c)/(b+d)$ compare per la prima volta in F_M, con $M=b+d$; ometto per brevità i dettagli.

Quindi nella [1] è sempre T=1 e $S_{\min} = R^2 + 1$; il valore cercato di r è pertanto

[2] $r = 1/\sqrt{R^2+1}$

da cui si ha $\lim_{R\to\infty} (r \cdot R) = 1$ come previsto.

La [2] è esatta per un parco quadrato, cioè con tutti i termini di F_{R-1}; nel caso del cerchio alcuni termini vanno tolti, ed r potrebbe aumentare. Ma non vengono tolti i punti vicini agli assi, che determinano r. Calcolando la [1] con un programma, ho trovato che la [2] è corretta anche per il cerchio, almeno per $R \leq 1000$.

Il numero 9801=99^2 del problema non sembra scelto a caso, ma $r = 1.0203\ldots \cdot 10^{-4}$ dato da [2] non dice molto; l'ambientazione del problema è del resto rigorosamente insensata[18].

Ambientazione del testo *rigorosamente insensata* è una delle definizioni che il Capo terrà tra le sue preferite. Anche ***Camillo*** sembra concordare, spezzando la sua lancia in favore dei fili d'erba:

> È ben strano questo giardino dove piantare queste piantine filiformi, duttili ed argentee.
>
> Anch'io come piemontese sono un po' Bastiano per cui preferisco pormi al centro del giardino alle coordinate 0,0 e guardare fuori. È inutile poi guardare per 360 gradi sono sufficienti 45 gradi gli altri 7 ventagli si ripetono uguali o rovesciati.
>
> Dal mio punto di vista un punto tra gli 8 possibili da dove posso guardare più a lungo l'esterno mentre avviene la crescita è quella che spazia tra le piante alle coordinate 0,1 e 1,9800. Anche se mi pare che sia equivalente guardare tra le piante alle coordinate 1,4900 e 1,4901.
>
> Lo sguardo riuscirà a vedere l'esterno finché le tangenti delle 2 piante non si accavallano.
>
> In considerazione del fatto che conosco molto poco la teoria e la pratica mi è più confacente non so scrivere una formula del calcolo però usando la funzione di arcotangente2 il risultato ottenuto è che le piantine raggiunto il raggio di 0,0001020304 decimetri impediscono completamente la vista dell'esterno e di conseguenza la vista del centro dall'esterno.
>
> Ah! dimenticavo; ci vogliono 301.779.712 fili d'argento per coprire tutto il giardino, se poi i vicini lo permettono si può mettere a dimora anche lungo il confine aggiungendo altri 252 steli.

Questa soluzione ci fa pensare ad immensi campi di grano. Prima di chiudere riportiamo ancora il commento di ***Sawdust***:

> Prima premessa, da falegname, la betulla non è un legno così inutile. Se il GC va a farsi un giro dalle parti di un grosso centro mobiliero dai colori gialloblu può trovare parecchie cose ricavate da questi poetici tronchi dalla bianca corteccia, e anche il fondo del cassone del nostro camioncino è stato ricavato da questi alberi.

Ce l'hanno tutti con il GC in questi giorni, si vede che il suo compleanno è passato. Ma ci siamo dilungati fin troppo con questo problema. Vediamo il prossimo.

4.3.2 Festeggiamo

Che bello, dopo così tanto tempo un bel problema logistico. Riprendiamo il testo:

> *Per festeggiare RM, voialtri organizziate una corposa sfilata. Con la prima riga della sfilata partono anche:*

[18] Gli alberi d'alto fusto si piantano con una distanza fra i tronchi dell'ordine di alcuni metri – diciamo 5. Il raggio del parco sarebbe quindi 9801·5=49005 metri (un diametro di quasi 100 km). Le betulle sarebbero circa 9801^2·π=302 milioni, con raggio r=25/49005=0.0005m, cioè mezzo mm. Più che altro dei fili d'erba, che non nascondono molto la visuale.

1. *Paola, che la fa a piedi con calma.*
2. *Rudy, che preferisce lasciare l'interazione nel corteo ai suoi due colleghi,*
3. *Fred, che va in pattini a rotelle;*
4. *Alberto, che va in bicicletta.*

I quattro partono dalla linea di partenza della sfilata, contemporaneamente a voi, ciascuno a velocità costante: prima risalgono il vostro schieramento controcorrente, poi girano in tempo zero di centottanta gradi, e ripartono verso la testa. Raggiuntala, misurano la distanza percorsa, che risulta un numeri intero di metri diverso per ognuno di loro, e il tempo impiegato, che è un numero intero di minuti.

Il corteo è lungo 600 *metri e si muove alla velocità di* 3 *chilometri l'ora. A che velocità si muovevano e quale distanza hanno percorso i quattro?*

Una risposta in quattro e quattr'otto è giunta da ***Alberto R.***, che ci comunica:

Il corteo, lungo 600 m, parte alla velocità di 50 m/min (3km/h). I "quattro loschi figuri", in testa al corteo, per motivi misteriosi, partono in direzione opposta, ciascuno con la sua velocità V (rispetto al terreno). Arrivati in coda al corteo, dietrofront e risalgono verso la testa dove giungono dopo un tempo T espresso da un numero intero di minuti.

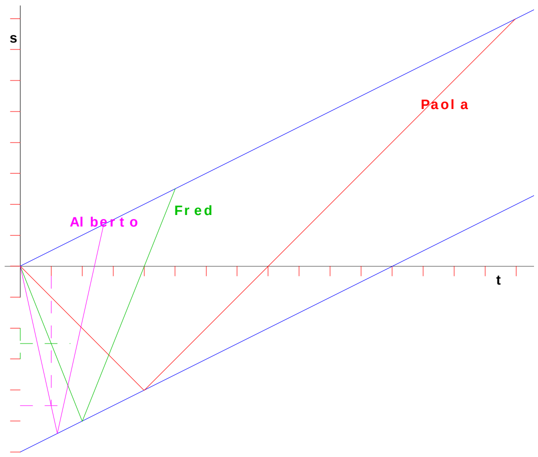
La velocità di ciascuno di essi rispetto al corteo (Einstein bonariamente chiuderà un occhio) è V+50 nel tragitto testa-coda e V–50 nel tragitto coda-testa. Quindi il tempo occorrente per l'intero viaggio è

$T = 600/(V+50) + 600/(V–50)$

Solo per V = 70, 100, 150, 250 m/min T è intero e vale rispettivamente 35, 16, 9, 5 min. I corrispondenti percorsi V·T sono 2450, 1600, 1350, 1250 m.

Visti i mezzi di trasporto impiegati, i numeri delle suddette quaterne vanno attribuiti nell'ordine a Paola, Rudy, Fred, Alberto.

Una risposta del genere lascia un po' interdetto chiunque stia ancora pensando ai problemi dei due treni che si vanno incontro con la mosca in mezzo (di sicuro conoscete il problema e la storia di von Neumann, ma in caso vi manchi andate a rivedervi il suo compleanno in RM107). Un approccio più facile da seguire è quello di ***Sawdust***:



15 *Il primo grafo di* ***Sawdust***

Non sto a riscrivere il testo del problema, mi limito ai punti principali.

1. Il corteo è lungo 600 metri e marcia a 3 km/ora, cioè la coda del corteo impiega 12 minuti a raggiungere il punto da cui sono partiti i primi, e quindi viaggia a 50 metri al minuto.
2. Paola se la prende con calma, ma se deve raggiungere di nuovo la testa del corteo deve comunque andare più veloce, ipotizziamo almeno il doppio come dato iniziale.
3. Fred, sui pattini, dovrebbe forse avere una velocità intorno ai 15 km/ora.
4. Alberto, sul cavallo di ferro andrà tra i 25 e i 30 km/ora.
5. Rudy, come l'ho intesa io, resta seduto su una panchina a godersi i primi raggi di sole di questa primavera un po' restia ad esplodere.

Paola, per raggiungere la coda del corteo impiega il tempo che impiegherebbe a percorrere 600 metri a 9 km/ora e per risalirlo è come se dovesse ripercorrere gli stessi 600 metri a 3 km/ora.

Per Fred le due velocità sono rispettivamente 18 e 12 km/ora.

Per Alberto invece 30 e 24 km/ora, se facciamo conto che vada a 27 km/ora.

Il problema è avere come risultati dei numeri interi.

Non sapendo in che modo maneggiare certe grandezze, ho optato per un ampliamento del grafico, e visto che i minuti sono per tutti interi, cercherò di vedere a quali velocità anche i metri percorsi saranno interi. Siccome le variazioni di velocità nei due sensi di marcia sono relative al corteo, mettendo nel grafico anche la marcia del corteo possiamo considerare tutte le velocità costanti.

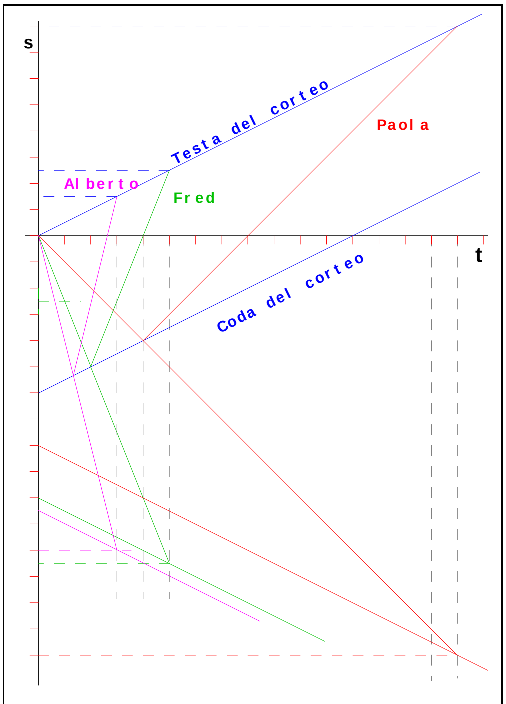
Per visualizzare tutto questo basta ribaltare al di sotto della scala dei tempi (l'asse x del grafico) la retta che rappresenta la posizione della testa del corteo copiandola ogni volta in maniera speculare rispetto al punto in cui uno dei protagonisti raggiunge la coda.

Per Fred è andata bene, perché con la sua velocità di 15 km/ora impiega 5 minuti per raggiungere la testa del corteo percorrendo 1250 metri.

Paola potrebbe impiegare 16 minuti, e così percorrerebbe 1600 metri.

Alberto potrebbe aver pedalato per 3 minuti e quindi coperto una distanza di 1350 metri, ma questo non rispetta il grafico e soprattutto il fatto che, andando più veloce di Fred, deve aver fatto meno strada. Per cui possiamo ipotizzare che abbia percorso 1200 metri alla velocità di 24 km/ora.

Con questa correzione il grafico diventa il seguente:



16 *Il secondo grafo di* ***Sawdust***

A queste condizioni inoltre la testa del corteo ha percorso 150 metri nel momento in cui è raggiunta da Alberto, 250 metri quando arriva Fred e 800 metri quando anche Paola si affaccia in prima fila.

Chiaramente le velocità potrebbero anche essere altre, soprattutto per Paola che forse così non se la prende troppo comoda, ma se la lasciavo andare più piano il grafico mi veniva troppo largo!

Tante sono le ragioni per cui questa soluzione è bella, una delle quali è che usa il famosissimo *grafo logistico*, pubblicizzato dal Capo nei primissimi numeri di RM. E anche allora era la sua famiglia a percorrere complicati avanti e indietro con i mezzi più disparati!

Comunque magari avete altro da dire su questi problemi. Magari avete ancora qualche risposta sul numero precedente (vi ricordate che avevamo proposto una richiesta di dimostrazione di un lettore?), o qualsiasi altra cosa. Scriveteci, non smettete di scriverci. Anche se ci mettiamo un po' di tempo risponderemo.

Che la primavera arrivi anche atmosfericamente! A presto!

5. Pagina 46

Si può dimostrare che $27{\cdot}195^8 - 10{\cdot}887^8 + 10{\cdot}152^8$ è divisibile per $26{\cdot}460 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ in due passi:

Consideriamo per prima cosa il numero $N = 27{\cdot}195^8 - (10{\cdot}887^8 - 10{\cdot}152^8)$.

Abbiamo che $27{\cdot}195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37$, e quindi questo numero è divisibile per $5{\cdot}7^2$.

Per quanto riguarda la differenza tra parentesi, in base alla regola che $a^{2n} - b^{2n}$ è divisibile per $a - b$, è divisibile per $10{\cdot}887 - 10{\cdot}152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Da questo si ricava che N è divisibile per $5 \cdot 7^2$.

Secondariamente, consideriamo il numero $N = (27{\cdot}195^8 - 10{\cdot}887^8) + 10{\cdot}152^8$.

Dal fatto che $10{\cdot}152^8 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$ si deduce che esso è divisibile per $2^2 \cdot 3^3$.

La parte in parentesi risulta divisibile per $27{\cdot}195^8 - 10{\cdot}887 = 16 \cdot 308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151$.

Quindi, N risulta divisibile per $2^2 \cdot 3^3$.

Siccome N è divisibile per $5{\cdot}7^2$ e per $2^2 \cdot 3^3$, considerando che i due numeri sono primi tra loro, segue che è divisibile anche per il prodotto dei due, ossia 26·460.

Per quanto riguarda il secondo quesito, si verifica facilmente che:

$$11^{10} - 1^{10} = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \ldots + 11 + 1).$$

Il secondo fattore del secondo membro è sicuramente divisibile per 10, essendo la somma di *dieci* fattori tutti terminanti con la cifra 1. Anche il primo fattore del secondo membro è evidentemente divisibile per 10.

Quindi il loro prodotto è divisibile per 100 ed è divisibile per 100 anche $11^{10} - 1$.

6. Paraphernalia Mathematica

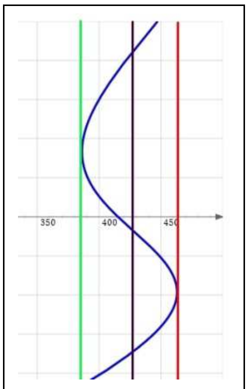
Questa serie è un contributo (in minima parte nostro) al 2013 come anno della *Matematica per il pianeta Terra*. Finirà quando farà molto caldo, e quindi non vi godrete l'estate.

6.1 Tik-Tok. Tik-Tok...Gnap?

Avete mai provato a mettere l'interruttore della luce in una posizione intermedia*? Se non vi è mai venuto in mente, non avete speranza di diventare dei fisici*
L'Autore degli articoli originali.

Essendo due fisici e un'ingegnere, premettiamo che ci siamo sentiti talmente coinvolti da questa frase di John da fare (nel mondo fuori di qui) un problema centrato sugli interruttori con molte *posizioni intermedie.*

Giusto per ricordare nel peggiore dei modi il lavoro dell'altra volta, abbiamo scoperto che si chiama *canicola* per il semplice fatto che segue la curva di aggressività dei *cani*. Ricordate tutto, adesso, vero?



17 *Cani-cola*

Riprendiamo il grafico che avevamo ottenuto (quello intermedio): ve lo riportiamo in figura.

Per chiarire le cose, abbiamo in ascissa l'*insolazione*, e in ordinata la *temperatura*: avevamo visto che esistono *tre* soluzioni (gli incroci tra la linea al centro e la curva blu), una calda (in alto), una fredda (in basso) e una intermedia (poco sotto il nostro asse delle ascisse), il che pare una buona notizia.

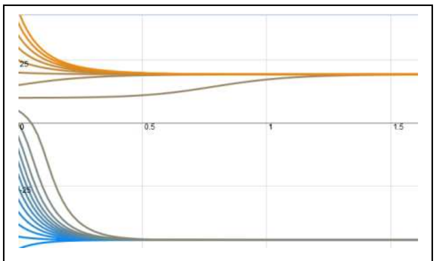
La cattiva notizia è che la temperatura intermedia è una soluzione *instabile*, e quindi il nostro è un sistema *bistabile,* in cui la temperatura "giusta" è come la ricerca della posizione intermedia dell'interruttore nella citazione e nel titolo. Cerchiamo di capirne il motivo.

Torniamo alla nostra equazione, che riportiamo qui sotto.

$$C \cdot \frac{dT}{dt} = -A - B \cdot T + Q(T) \cdot c(T(t)).$$

Quello che ci interessa sapere è come si comporta questo aggeggio quando T si sposta da una delle due soluzioni di equilibrio: i conti, con un sano e robusto metodo numerico, li ha fatti ***Allan Erskine***, inserendo (ve ne siete accorti, nell'equazione?) l'insolazione Q come funzione della temperatura: nel suo modello, per un certo tempo l'insolazione parte da valori piuttosto alti per poi assestarsi sul valore standard, ossia abbiamo la funzione:

$$Q(t) = \begin{cases} Q + X & 0 \le t \le \tau \\ Q & t > \tau \end{cases}.$$


18 *I guai, per X*=28.5

Se prendete X=0, l'unica soluzione che ottenete è la Terra fredda; l'aumentare il valore di X porta alla bistabilità, ma come si comporta, per alti X, la soluzione intermedia? Qui di fianco, trovate il solito grafico che vale mille parole.

Partendo da diversi valori iniziali della temperatura, tutte le soluzioni *tranne una* convergono piuttosto rapidamente o alla Terra calda (linea superiore) o alla Terra fredda (linea inferiore): solo una ci mette molto tempo (metà grafico) a cadere nel modello caldo: e questo valore non è altro che un leggero scarto dalla nostra soluzione intermedia! Non solo, ma se taroccate opportunamente il software di Erskine (in pratica rendendo X molto grande), dovreste vedere la convergenza anche della soluzione fredda a quella calda.

Chiaro che abbiamo dei problemi. Il primo metodo per risolverli è l'*ipotesi dello struzzo*: Allan ha un baco nel programma.

Beh, no, e la cosa si vede procedendo in modo analitico anziché numerico. Riepiloghiamo.

La nostra equazione (un po' semplificata, dettagli...)

$$C \cdot \frac{dT}{dt} = -A - B \cdot T + Q \cdot c(T(t)) \qquad \textbf{[1]}$$

Ha una soluzione di equilibrio quando:

$$-A - B \cdot T + Q \cdot c(T(t)) = 0 . \qquad \textbf{[2]}$$

Si vede facilmente che **[2]** è maggiore di zero per piccoli valori di T: se la Terra è molto fredda, il Sole la scalda. Altrettanto semplice vedere che **[2]** è negativa per grandi valori di T: se la Terra è molto calda, disperderà calore e si raffredderà.

Insomma, la **[2]** parte positiva, va a zero, diventa negativa e torna a zero, e quindi abbiamo tre soluzioni.

Piccolo problema, se prendiamo la soluzione intermedia, abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\left(-A - B \cdot T + Q \cdot c(t)\right) > 0 .$$

Questo significa che se partiamo da valori leggermente maggiori di T la temperatura *crescerà ulteriormente*.

Mentre, per le soluzioni "fredda" e "calda", otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\left(-A - B \cdot T + Q \cdot c(t)\right) < 0 .$$

Ossia abbiamo un comportamento contrario.

E quindi la prima è instabile, mentre le altre due sono stabili.

Questo modello (abbastanza semplice: ne esistono di più complessi) è noto in letteratura come *Modello di* ***Budyko-Sellers***, e se fate un giro in rete trovate gli articoli (in inglese, anche se il primo Budyko lo ha scritto in russo) che risalgono al lontano 1969.

Contrariamente alla solita battuta sui matematici, proviamo a lasciarci influenzare dalla realtà: se poniamo γ=0, otteniamo un coalbedo indipendente dalla temperatura pari a 0.525 e, considerando l'insolazione[19], arriviamo a una temperatura di –20° C, che sappiamo bene essere piuttosto freschina: usando invece il valore medio del coalbedo c=0.7 abbiamo una temperatura di 11° C, il che è una buona approssimazione del valore reale pari a 15° C. Insomma, *funziona*!

Ma stiamo tenendo conto di tutto? Il tormentone di questi anni, l'effetto serra, lo abbiamo messo dentro? Sì, quello c'è: siccome A e B sono ricavati da misure satellitari, siamo ragionevolmente tranquilli su questo punto; se non ne avessimo tenuto conto, avremmo ottenuto una temperatura dalle parti dei 6° C, troppo bassa.

Certo che emozionarsi per aver sbagliato *solo* di quattro gradi è indice di aver preso una mucca *decisamente* sferica. Nella caccia ai fenomeni ignorati, per disperazione qualcuno si è aggrappato ai ***Cicli di Milankovich***, ossia alle variazioni periodiche dell'orbita terrestre attorno al Sole. La cosa sembra tirata per i capelli e di influenza marginale, ma vale la pena di darci un'occhiata più approfondita. Parlando d'altro.

[19] 352.5 W/m^2.

In fisica, la stragrande maggioranza dei sistemi sono descritti da un'equazione differenziale del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \qquad [3]$$

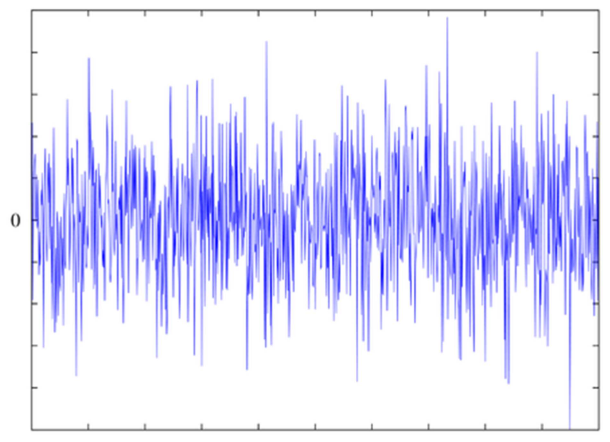
E, se f si comporta bene[20], l'evoluzione temporale $x(t)$ del sistema sarà una funzione trattabile e analizzabile, ma quando introduciamo nel sistema una forma di rumore[21], le cose si fanno più complesse, e sono cose che devono essere tenute in conto. Nel nostro caso, pur avendo ricavato funzioni che vanno tranquillamente verso soluzioni di equilibrio, le fluttuazioni a breve termine della temperatura[22] possono causare forti modifiche. La nostra equazione diventa una cosa del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + b(t).$$

Facile vero? Ma sotto c'è una filosofia mica da ridere: in pratica, b è una *funzione casuale* che tiene conto delle variazioni improvvise, *troppo piccole per essere analizzate esplicitamente*. Insomma, il singolo fiocco di neve non è importante, ma se e mettete assieme tanti avete una valanga. Supponete di doverla calcolare a partire dalle regole della cristallografia, considerate che i fiocchi di neve sono tutti diversi tra loro e dovreste comprendere l'importanza di avere una funzione del genere. Che, come avrete già capito, si chiama *rumore*[23].

La grande idea è di definire il *tipo* di rumore: possiamo dividere i rumori analizzabili in due[24] grandi categorie.

La più difficile da definire è quella del cosiddetto *rumore bianco*: la miglior definizione (di Baez, chiaramente) che abbiamo trovato è "rumore troppo incasinato per essere descritto", ne trovate uno spettro (nel senso di frequenza sulle ascisse e potenza sulle ordinate, ma se volete interpretarlo come potenza nel tempo va bene lo stesso: qui sta il "bello"...) qui di fianco.



19 *Uno spettro si aggira.*

Il guaio (o il bello) nel descriverlo è che questo oggetto (come praticamente tutte le cose che contengono la parola *casuale* o *random* al loro interno) è che non è una funzione, tant'è che i matematici (o i fisici... la cosa è oggetto di discussione) hanno inventato un termine apposta, quello di *distribuzione*.

[20] Ci rifiutiamo di dare una traduzione più tecnica della frase di John: "...a*nd, if* f *is nice, the time evolution of the function will be a nice smooth function...*".

[21] Ne approfittiamo per introdurre, al posto del rumore, la nostra barzelletta preferita: "Un ingegnere pensa che le formule approssimino la realtà. Un fisico pensa che la realtà approssimi le formule. Un matematico, non vede il nesso."

[22] Vi facciamo un esempio personale: in questo momento, Rudy sta scrivendo in veranda in maniche corte, per domani è prevista neve (poca, ma neve). E siamo a metà marzo.

[23] Sulla parte che segue ho (Rudy speaking) intenzione di scriverci almeno un altro PM. Quindi, se non vi piace o vi pare che si sia stati troppo superficiali, mandateci le opportune trattazioni e un giorno o l'altro integreremo.

[24] Tre. Ma per il momento sorvoliamo.

La definizione di *distribuzione* non ve la diamo, visto che vorremmo tenere questo pezzo sotto le seicento pagine. Ci limitiamo a dire che le distribuzioni diventano "sensate" quando le moltiplicate per un'apposita funzione (che deve sottostare evidentemente a caratteristiche molto stringenti) e diventano addirittura integrabili.

In particolare, se prendete il rumore bianco e una funzione opportuna, ottenete una *variabile casuale*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(t) f(x).$$

La quale ha una distribuzione (nel senso buono del termine) di probabilità gaussiana con media zero e varianza:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2} < \infty .$$

...e scusate se è poco: significa, in soldoni, che possiamo *normalizzare* il comportamento di quella specie di istrice che abbiamo visto in figura: anzi, che è un comportamento *normale* (*pun intended*) in natura!

Dicevamo che il rumore bianco non è una funzione; quello che è interessante è che invece lo è questo aggeggio:

$$B(s) = \int_{0}^{s} b(s) ds .$$

Va bene, una funzione casuale, ma almeno è una *funzione*, e non una distribuzione!

Questi oggetti (plurale, che sono aggeggi casuali) sono noti come rumori *browniani*, e noi abbiamo deciso[25] di indicarli con *B*. Questi rumori hanno alcune caratteristiche interessanti, quale quella di essere *autosimili*: in pratica, se espandete sull'asse delle frequenze un rumore di questo tipo, ottenete un nuovo rumore dello stesso tipo: se la cosa vi ricorda i frattali, avete fatto centro.

Ma torniamo ai nostri problemi, la caratteristica che ci interessa di più del rumore browniano è che:

$$\frac{dB}{dt} = b(t).$$

Insomma, la derivata del rumore browniano è il rumore bianco, il che lo rende più trattabile. E questa è una buona notizia.

No, non torniamo ancora alle simulazioni climatiche: prima, vediamo come complicarsi la vita.

Cerchiamo di costruire un esempio dell'equazione **[3]**, partendo da una situazione semplice. Ad esempio, prendiamo:

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + x(t)^3 .$$

[25] Spiegazione inutile ma necessaria: il rumore bianco in inglese viene indicato con *w* (da *white*), e noi lo abbiamo indicato con *b* (da *bianco*). Abbiamo indicato il rumore browniano con *B* (da *Brown*, nome): la cosa è corretta anche nel senso che l'integrale della minuscola è, di solito, indicato dalla maiuscola. Gli anglofoni lo indicano quindi con *W*, ma hanno anche un altro motivo. Che Doc vi spiegherà in un giorno di pioggia.

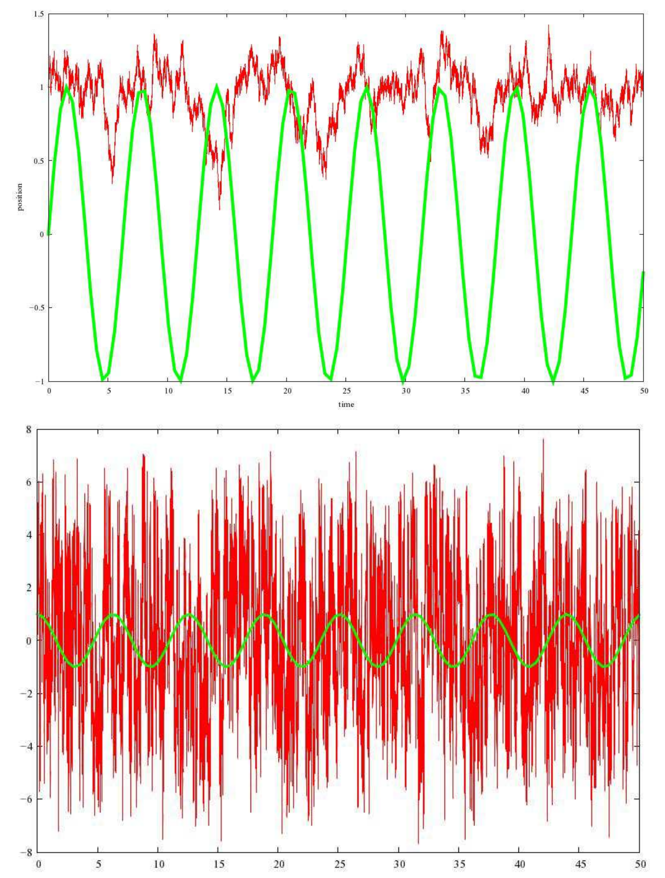
Un'equazione di questo genere, come abbiamo visto, ha due soluzioni stabili per $x=\pm 1$ e una soluzione instabile per $x=0$, e quindi siamo nel classico caso "dell'interruttore". Adesso, se aggiungiamo un termine oscillante:

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + x(t)^3 + A\sin(t),$$

abbiamo un sistema che oscilla continuamente tra le due soluzioni di equilibrio, ossia nient'altro che il nostro primo grafico. Quando aggiungiamo il rumore, la cosa non sembra complicarsi molto:

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + x(t)^3 + A\sin(t) + \sqrt{2D} \cdot b(t).$$

Se il coefficiente del rumore bianco è piccolo, la situazione non è particolarmente complicata, la trovate nella parte in alto: niente di grave, vero?



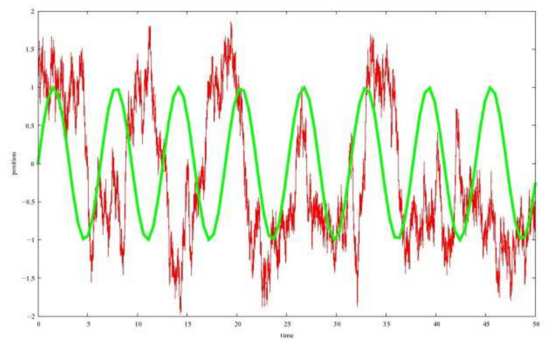
20 *Poco (e tanto) rumore per molto.*

Beh, tanto per cominciare potremmo notare che la soluzione di equilibrio negativa viene bellamente ignorata: il nostro grafico tende a stazionare dalle parti della soluzione positiva, oscillandole attorno. Insomma, la soluzione positiva a questo punto è "più stabile" di quella negativa. La soluzione negativa riesce solo a "tirare un po' giù" la funzione, che comunque resta sempre da quelle parti.

Le cose, dal punto di vista analitico, peggiorano se il coefficiente diventa molto grande, come mostrato nella seconda parte della figura: qui, diventa impossibile trovare una struttura, e la nostra funzione saltella selvaggiamente spingendosi ben fuori dalle due soluzioni stabili.

...E se cercassimo una via di mezzo? Succede esattamente quello che vi aspettate: la nostra funzione oscilla tra le due soluzioni stabili, guidata dal termine trigonometrico, ma comunque l'oscillazione non mostra assolutamente un periodo definito, e si comporta in modo casuale.

Questo fenomeno è esattamente quello che viene chiamato ***risonanza stocastica***: tra la funzione (o meglio, distribuzione) casuale e la funzione sinusoidale si stabilisce una risonanza che "fa seguire" (ma non troppo) la funzione alla funzione periodica: in questo modo, il pattern risulta vagamente riconoscibile, ma le previsioni sul comportamento a medio e a lungo termine sono assolutamente impossibili.



21 *Il giusto rumore.*

Adesso, ci sarebbe da prendere tutti questi bei concetti e buttarli dentro al nostro modello climatico, per vedere cosa succede. Ma visto che si preannuncia una vera indigestione di equazioni differenziali, meglio aspettare il mese prossimo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms