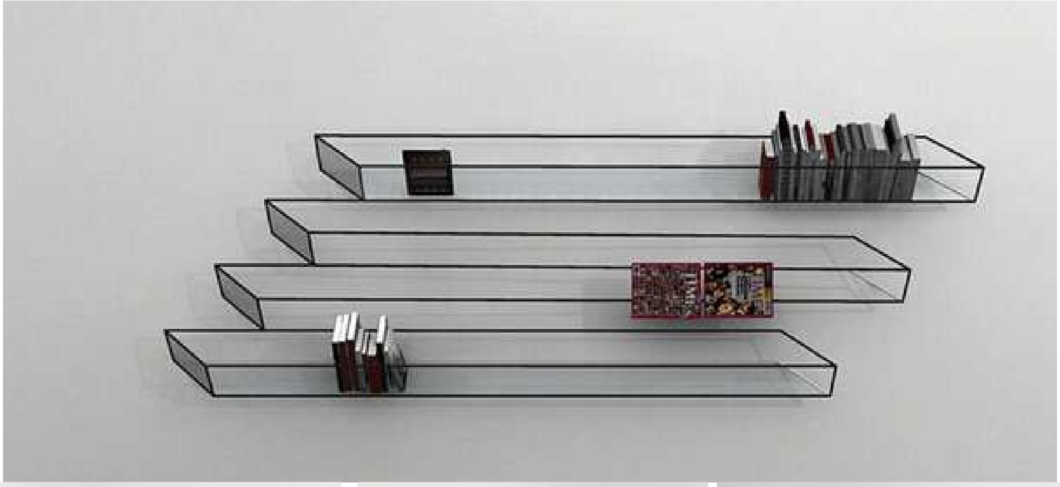
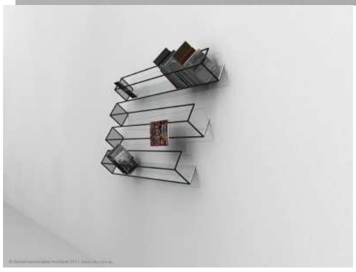
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

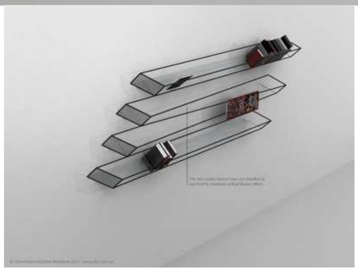
Rudi Mathematici

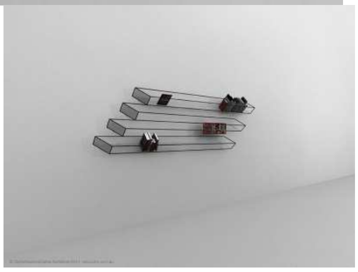
Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 169 – Febbraio 2013 – Anno Quindicesimo









Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM168 ha diffuso 2'979 copie e il 01/02/2013 per Google eravamo in 15'700 pagine.

Come dovremmo avervi già raccontato, alla *Maison d'Alembert* sino ad un paio di genetliaci fa il principale problema erano le librerie, che aumentavano al ritmo di almeno due metri lineari all'anno. L'acquisto di un eBook Reader ha fatto sì che questo problema venisse drasticamente ridotto, e in famiglia stanno nascendo idee per librerie puramente *decorative*. L'unica cosa che al momento ci impedisce di comprare ***Bias of Thoughts*** è il fatto che non abbiamo salvato il link.

1. Canali di comunicazione

"To unpathed waters,
undreamed shores"

(William Shakespeare,
"Racconto d'Inverno"
Atto IV, Scena 4)

"Viviamo nel migliore dei mondi possibili".

Questa celeberrima frase è probabilmente costata al suo autore, Gottfried Wilhelm von Leibniz, una quantità spropositata di critiche, ironia, disprezzo e feroce sarcasmo. La ragione è abbastanza evidente: la felicità sembra essere una merce ancora molto rara, e soprattutto del tutto fugace; e siccome ogni essere umano immagina che in un mondo perfetto essa debba regnare sempre e comunque, sentirsi dire di essere già partecipi della migliore delle possibili opzioni sentendosi un tale carico di infelicità addosso suona come un'offesa, o almeno come una triste follia.

È però strano che il senso della frase sia letto quasi inevitabilmente come un roseo inno all'ottimismo: è certo possibile interpretarla come "Orsù, siamo felici, abbiamo la fortuna di vivere in un mondo fantastico!", ma dal punto di vista logico questa è solo, appunto, un'interpretazione: "migliore" è un termine comparativo, non un giudizio assoluto; e le possibilità che Leibniz intendesse qualcosa del tipo "Beh, gente, la vita è uno schifo, ma guardate che tutte le alternative sono persino peggiori" non è quasi mai considerata, pur avendo un'indubbia consistenza logica.

Quale che fosse l'intenzione di Leibniz, è certo che è veramente difficile dare giudizi obiettivi, di merito, a tutto ciò che ci è familiare. L'insoddisfazione perenne e la ricerca continua del miglioramento delle condizioni di vita sono probabilmente insite nella natura umana: non si spiegherebbe altrimenti che si siano dovute fondare religioni dalla severa disciplina, come il buddismo o il proto-cristianesimo degli eremiti, per convincere qualcuno che l'apparente follia di rinunciare a quanto si ha già potrebbe portare alla lunga dei vantaggi. Ancora più banalmente, è solo nella tendenza ad assecondare questa insita pulsione al disprezzo di ciò che già si possiede che si possono capire gli economisti e le loro logiche, visto che si ritengono soddisfatti solo quando è presente una "crescita": la più banale delle leggi matematiche mostra che, date delle risorse finite, è impossibile mantenere in eterno un tasso positivo di crescita, eppure questo teorema elementare sembra non avere alcun effetto sulle misteriose regole di mercato.

Eppure non mancano argomenti a favore dell'affermazione di Leibniz, in questi tempi e in questa parte del mondo. "In che epoca avresti voluto vivere?" – la domanda se la pongono tutti i bambini del mondo, non appena l'orizzonte delle conoscenze temporali si allarga un po'. Alimentata più dalle storie di avventure e dai romanzi che dai testi di storia, più dai film che dalle scorribande in biblioteca, è domanda comunque costante, ad un certo punto dei giochi dell'infanzia. Le risposte sono quasi sempre tanto avventurose quanto mitizzate: nell'antica Roma, a fare l'imperatore; come pirata nel Mar dei Caraibi; qual principessa nel castello medievale, con una corte di ammiratori e di musici ad ogni cena; ai tempi del Far West, o come esploratore della giungla, e così via avventurando. Come in tutti i giochi di bambini, dentro la questione c'è probabilmente più di un grammo di curiosità adulta, e forse vale la pena provare a ripetere il gioco, sotto qualche limitazione più restrittiva. Se ogni uomo potesse, per magia, scegliere il periodo in cui vivere, e grosso modo anche la regione dove nascere, quali ragionevoli risposte ci si potrebbero aspettare? Occorre porre delle ragionevoli limitazioni, però, come si diceva: immaginiamo che il periodo sia selezionabile negli ultimi 4000 anni, e che come luogo di nascita si possa indicare una regione o nazione ragionevolmente delimitata, ma non troppo. Soprattutto, l'ipotesi più severa deve essere quella di poter però scegliere soltanto luogo e periodo, e nulla in merito al ruolo specifico che ci toccherebbe nella vita. Non si potrà scegliere di essere generale o maniscalco, guerriero pellerossa o cerusico medievale: lì sarà la sorte a decidere.

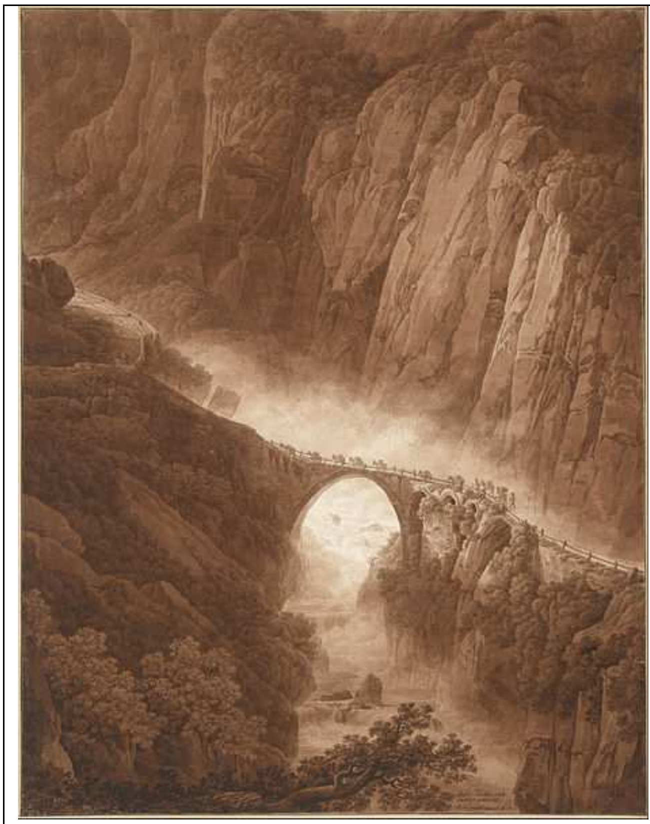
Se a tutti gli uomini vissuti negli ultimi quaranta secoli (che immaginiamo informati sulla storia del mondo quanto lo siamo noi oggi) fosse data una tale possibilità di scelta, quali sarebbero state le combinazioni più gettonate? Una scelta consapevole dovrebbe tener conto delle scarse possibilità di finire tra i protagonisti della storia: ci sarà certo qualche amante del rischio che sceglierà l'Antico Egitto con la speranza di nascere faraone, ma è assai più probabile che finirà a spingere blocchi di pietra per costruire piramidi. È allora verosimile che si sfoglieranno gli atlanti storici alla ricerca di un luogo e un periodo (lungo quanto una vita) privo di guerre: e, nonostante per gran parte della storia la lunghezza della vita media sia stata decisamente più corta della speranza di vita che possiamo vantare oggi, una simile condizione limita spietatamente le scelte possibili. Guerre a parte, sarebbe poi bene cercare uno spaziotempo con probabilità ragionevolmente basse di subire forme abituali o ripetute di violenza fisica, e possibilmente tale da poter opporsi con buon successo ai rischi di fame e malattie. Infine, se ci fosse ancora imbarazzo della scelta, si dovrebbe prendere in considerazione un contesto ove la maggior parte delle persone abbiano una plausibile possibilità di svago, di interessi coltivabili, in un paesaggio vario, gradevole, e possibilmente attraente.

Sono condizioni davvero stringenti, se applicate al pianeta Terra negli ultimi quattromila anni: per quanto le informazioni necessarie ad una scelta davvero consapevole non possano essere né complete né sicure, è facile immaginare che la scelta di nascere nella seconda metà del Ventesimo Secolo in Europa Occidentale sarebbe senza dubbio una tra le più gettonate: forse, la preferita in assoluto. Di certo, sarebbe l'opzione dichiarata da molte, molte più persone rispetto poche che hanno avuto effettivamente la possibilità di vederla realizzata.

1 *Niente di più semplice. O no?*

La capacità di giudicare obiettivamente ciò che è tanto familiare da essere dato per scontato è davvero poco sviluppata, e forse potrebbe essere un buon esercizio coltivarla. L'espressione "pane e acqua" è ridotta a essere una minaccia, nella nostra cultura, ma per gran parte degli esseri umani ha rappresentato il massimo dei desideri possibili. E se si perde il senso della misura diretta, immediata del valore delle parole, a maggior ragione è difficile apprezzare compiutamente alcuni colpi di fortuna estremamente significativi, nascosti appena sotto il significato letterale. Da quando hanno scoperto l'agricoltura (diventando così stanziali e dando inizio alla civiltà, sia detto per inciso), gli uomini hanno dedicato i loro sforzi di coltivazione e ottenuto la reale possibilità di sopravvivenza grazie ai cereali. Tre grandi direttrici sono state percorse, ognuna caratterizzata da una coltivazione: riso, mais e frumento. Il cereale europeo è stato il frumento, quello dei tre che richiede meno fatica, perché a differenza del riso richiede lavoro intenso solo durante la semina e il raccolto. Come se non bastasse, il frumento è il cereale che fornisce il maggior quantitativo di proteine, rispetto a mais e riso: ed è possibile ridurlo in pasta, che consente di cuocerlo e conservarlo in maniera particolarmente efficace. Il difetto principale del frumento è che "prosciuga" i campi, ed è necessario effettuare rotazioni o provvedere a concimazioni serie e continue: ma anche il difetto si trasforma in vantaggio, perché questo ha stimolato la domesticazione degli animali, e l'istituzione di una economia basata sull'accoppiata coltivazione/allevamento. Il contenuto proteico ha reso i consumatori di frumento generalmente più alti e resistenti degli asiatici abituati ad una dieta a base di riso, e secondo diversi storici gran parte del ruolo importante e invadente (in tutti i sensi possibili) dell'Europa nella storia del mondo discende dal più semplice e familiare degli oggetti: la pagnotta di pane.

Non meno familiare del panino che addentiamo ogni mattina sono le strade nelle quali ci lanciamo subito dopo il caffè. Ormai è facile confondere l'asfalto con il suolo, quasi fosse naturale che la superficie del pianeta sia regolarmente rotabile. Le autostrade attraversano pianure, scavalcano fiumi, bucano montagne, e la possibilità di percorrere in autonomia più di cento chilometri in una sola ora è cosa considerata del tutto assodata, scontata, dovuta. Quando ci si infila sotto il tunnel del Gottardo, che è l'arteria più diretta e immediata tra la penisola italiana e le pianure tedesche, in genere regna lo sconforto di dover viaggiare in luce artificiale e a velocità ridotta per 17 chilometri, circa un quarto d'ora. È difficile ricordare quanto possa essere stato complicato effettuare lo stesso percorso in tempi neanche troppo lontani. Il passo montano è stato aperto solo attorno al 1200 d.C. tanto erano pericolose le gole che strapiombavano lungo i sentieri; e anche quando le difficoltà maggiori furono aggirate con la costruzione di un ponte in pietra (non a caso chiamato "Ponte del Diavolo") sulla gola più terribile, la "Schöllenen Gorge", il percorso era estremamente impegnativo. Per rendere il passo percorribile da veicoli su ruote[1] fu necessario un allargamento della carreggiata, che si realizzò solo nel 1830. E si trattava appunto di un passo montano, non del tunnel da percorrere ad ottanta chilometri orari dentro comode automobili con aria condizionata: quello ha solo poco più di trent'anni.



2 *Il "ponte del diavolo" sulla gola Schöllenen*

Le strade vanno costruite, e sono costose, tanto costose che la spesa di costruzione è stata per lungo tempo affrontabile solo da economie nazionali, non da iniziative private: non per niente la ragione fondamentale che ha portato alla costruzione delle strade più antiche è sempre la solita, la ragion militare. In assenza di strade, le comunicazioni avvengono attraverso canali più diretti e naturali: il mare, innanzitutto; e poi i fiumi navigabili, e infine le grandi vallate prive di ostacoli. Anche da questo punto di vista l'Europa è stata eccezionalmente favorita dalla sorte, o forse sarebbe meglio dire dalla geografia. È una penisola incredibilmente frastagliata: la lunghezza delle sue coste è di circa 38.000 chilometri[2], poco meno dell'intera lunghezza dell'equatore. Tutta l'Europa

[1] Tecnicamente, nel 1775 ci fu chi riuscì a percorrere il passo su un veicolo a ruote. Si trattava del signor Charles Greville, di nazionalità inglese, che aveva scommesso una grossa somma che sarebbe riuscito nell'impresa. Vinse la scommessa, ma solo perché assoldò una squadra di robuste guide svizzere che avevano il compito di trasportare sulle spalle la sua piccola carrozza.

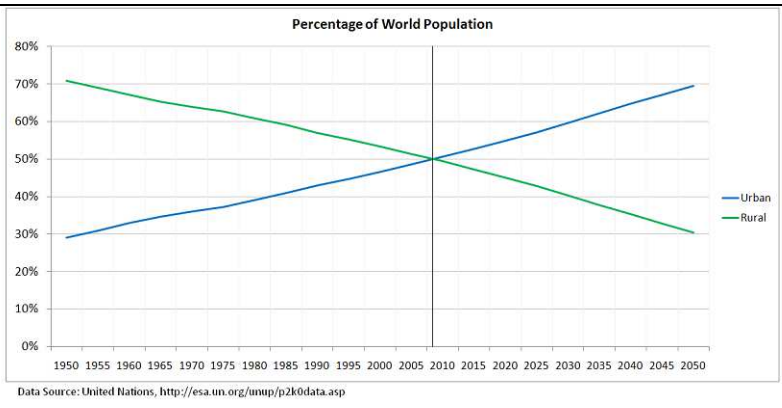
[2] Forse è il caso di ricordare che la difficoltà di misurare con esattezza le coste frastagliate è l'esempio canonico che si usa nella divulgazione per introdurre il concetto di linea frattale: qualsiasi valore dato è necessariamente approssimato. Ma l'idea di fondo dovrebbe essere chiara.

meridionale si affaccia su mari chiusi da terre, come il Mar Nero e soprattutto il Mediterraneo, che nell'antichità è stato pertanto il mezzo di comunicazione più eclatante. A nord, la situazione è grosso modo simile, con il Baltico che, seppur marchiato da un clima decisamente meno favorevole, è un altro mare chiuso in grado di mettere in comunicazione grandi regioni. Dal punto di vista delle comunicazioni terrestri, tutti i vasti continenti hanno in genere fiumi grandi e navigabili, ma quasi sempre noiosamente diretti in una sola direzione: si pensi alle grande vie d'acqua della Siberia, che scandiscono periodicamente la steppa nel loro corso da sud a nord. La piccola Europa, invece, ha direttrici fluviali quanto mai variegate: dalle alture del già citato Gottardo, dalle parti di Andermatt, partono sorgenti dirette in quattro direttrici diverse, che raccolgono acque verso il Mar Nero, l'Adriatico, il Mediterraneo e il Mar del Nord. E non è un privilegio dei soli abitanti delle montagne: un contadino di Auxerre, in Borgogna, potrebbe raggiungere con poche ore di cammino tre fiumi diversi, uno che sfocia nella Manica, uno nell'Atlantico, il terzo nel Mediterraneo. Questo ovviamente implica che se molti uomini riescono a mettersi d'accordo per costruire dei brevi canali, con un costo relativamente piccolo di risorse e lavoro possono mettere in comunicazione il centro della Francia con tre mari diversi. E la Francia, con le sue coste del Midi, ha l'unico sbocco sul Mediterraneo che consente l'accesso al cuore del continente senza dover valicare impervie catene montuose: si dice spesso che la nazione francese è il punto di raccordo culturale tra l'Europa mediterranea e meridionale con quella nordica e continentale, ma si dimentica spesso che questo dipende, in massima parte, solo dalla sua configurazione geografica.

La costruzione di canali non è solo un mezzo per favorire l'irrigazione per l'agricoltura: è anche, forse soprattutto, un mezzo per mettere in comunicazione gli uomini. La vastissima Russia ha nei canali un formidabile mezzo di contatto: presso Vitebsk esiste un collegamento tra la Dvina e il Dnepr che consente a una imbarcazione proveniente dalla Svezia di raggiungere il Mar Nero e quindi le rotte del Mediterraneo. Il Volga, vero confine naturale europeo, può ricevere – ghiacci permettendo – imbarcazioni dal Mar Baltico attraverso canali che collegano i grandi laghi Onega e Ladoga, e portarle direttamente in Asia attraverso il Mar Caspio, oppure, sfruttando il canale che lo collega al Don presso Volgograd, al Mar d'Azov.

Difficile rendersene conto, ai giorni nostri. Difficile, quando la vita di tutti i giorni offre possibilità di movimento tali da rendere virtualmente invisibili ostacoli che un tempo erano insuperabili a uomini e merci.

Del resto, è sempre davvero difficile rendersi conto di stravolgimenti anche di portata storica, quando si è nel bel mezzo del loro avverarsi. L'epoca che stiamo vivendo sarà verosimilmente considerata dagli storici futuri come il punto nodale di tre o quattro grandiose rivoluzioni di enorme portata, ma questo non ci impedisce di affrontare ogni giornata come un'altra "normale" sessione di quotidiana routine. Una delle rivoluzioni di portata storica è il passaggio dalla civiltà basata sull'agricoltura a una basta su un diverso sistema economico. Se è con l'instaurarsi dell'economia agricola che nasce la storia, è certo un punto di svolta storico il momento in cui più della metà degli esseri umani vivono senza curarsi della produzione dei campi, e questo giro di boa, che ha richiesto svariate migliaia di anni per essere raggiunto, è capitato proprio durante le nostre vite. Una rivoluzione gemella, in gran parte generata dalle stesse cause, è quella che ha visto la popolazione urbana



3 *Popolazione urbana e rurale, secondo l'ONU*

superare quella rurale: è il risultato di un colossale movimento "interno", dalle campagne verso le città, e anche se l'Occidente lo ha vissuto certo in anticipo rispetto ad altri parti del mondo, è in questi anni che il sorpasso si è consumato su scala planetaria. Un detto che circola tra gli storici professionisti ricorda che troppo spesso si è raccontata la storia tramite eventi militari, mentre era evidente che questi non erano altro che frutto della politica; che si è dato poi troppo peso alla politica, quando in realtà essa non era altro, quasi sempre, che la conseguenza di più profonde cause sociali; che queste avevano però, senza eccezione, delle ragioni dettate dall'economia; e infine, che anche l'economia non può opporre grande resistenza di fronte alla forza più inarrestabile di tutte, che è la demografia.

E la demografia farà verosimilmente sentire fortemente il suo peso, nei prossimi decenni: se davvero il mondo è ora connesso come mai prima, se gli eventi locali diventano sempre più evidentemente cause ed effetti di eventi globali, è inevitabile che il puro peso demografico farà sempre più fortemente sentire le sue ragioni: e l'Asia, con i giganti India e Cina, e tutta l'Africa, per quanto poverissima rispetto al resto del pianeta, hanno un potenziale demografico che farà certo sentire la sua importanza nei prossimi secoli.

In parallelo, ma più profondamente, è proprio la stesura di un tessuto connettivo su tutto il pianeta ad essere, con ogni probabilità, il segno più caratteristico e significativo di questo periodo storico. Se restiamo oggi stupefatti all'idea che l'uomo possa aver raggiunto la luna appena sessant'anni dopo aver inventato l'aeroplano, è verosimile che per le prossime generazioni sarà quasi impossibile comprendere come si sia potuto mandare avanti un pianeta senza la rete di comunicazioni che in pochi decenni ha coperto il mondo intero, e che è oggi ancora solo agli inizi del suo sviluppo. La quantità di informazioni che è oggi disponibile attraverso un semplice gadget che è in grado di essere manovrato da un ragazzino di dieci anni era semplicemente inimmaginabile per le grandi istituzioni culturali di qualche decennio fa. Difficile rendersene conto, tanto ci siamo abituati, anche se si tratta di un'abitudine davvero recente. Difficile valutarne il peso rivoluzionario, anche perché è stato così repentino che i metri di giudizio di una generazione sono probabilmente troppo distanti da quelli della successiva.

Un altro aspetto che si tende a sottovalutare è la caduta dei "compartimenti dell'informazione". Le citate "grandi istituzioni culturali", come le biblioteche nazionali, le università, i musei, raccoglievano una quantità eccezionale di informazioni, ma tutto sommato erano informazioni ben classificate, regolamentate, canalizzate. Anche la Biblioteca del Congresso degli Stati Uniti, coi suoi 23 milioni di libri e una quantità spropositata di altri documenti, difficilmente è in grado di aggiornare il lettore sulle disavventure capitate la sera prima ad una starlette colombiana o al campione di ping-pong coreano, mentre la Rete è in grado di svolgere il compito con assoluta nonchalance; e se è verosimile che, per contro, le grandi biblioteche riescono ancora a fornire informazioni più dettagliate, precise e garantite su gran parte della conoscenza umana, è abbastanza evidente che il gap sarà presto risolto: alla fin fine, i 23 milioni di libri della LOC sono traducibili in 20 o 30 Terabyte, una dimensione che non spaventa più nessun professionista della scienza dell'informazione.

E la possibilità di passare da Archimede al Festival di Sanremo, dalle appercezioni trascendentali kantiane al record dei punti segnati in un Superbowl nel giro di pochi clic di mouse è una potenzialità ancora in gran parte inespressa e non compresa. Territorio dei nativi digitali, certo: ma è difficile prefigurare come saranno i nativi digitali di terza o quarta generazione.

Da dietro un qualsiasi schermo, si può partire da qualsiasi concetto familiare e raggiungere qualsivoglia direzione. Da questa rivista di matematica ricreativa si può prendere il via da quanto di più familiare, come l'allonimo di uno dei redattori. Alice Riddle porta subito ad Alice Liddell, ma questo non è che un passo fittizio, visto che la nostra Alice prende il nome proprio dalla protagonista di Lewis Carroll: ma ci vuol poco a fare un piccolo salto reale (per quanto "reale" possa essere un salto che comunque solo elettronico e virtuale) e finire dentro il cast dell'ultimo film hollywoodiano dedicato ad Alice nel Paese delle Meraviglie. Si tratta di dell'ultimo di una lunga serie: tra cinema, teatro e televisione, gli adattamenti del testo carrolliano superano facilmente la trentina, ci dice Wikipedia; nel 2010, è stato Tim Burton a portare un'Alice ormai adulta sugli schermi di tutto il mondo. Johnny Depp interpreta il Cappellaio Matto, la bravissima Helena Bonham Carter dà vita ad una superba Regina Rossa, mentre l'eterea Regina Bianca è interpretata da Anne Hathaway. Il cognome Hathaway è ragionevolmente diffuso nei paesi anglossassoni, e non dovrebbe catturare troppo l'attenzione; è però forse l'accoppiata nome-cognome a suonare familiare a qualche recesso del navigatore della rete.


4 *Anne Hathaway in "Alice", come Regina Bianca*

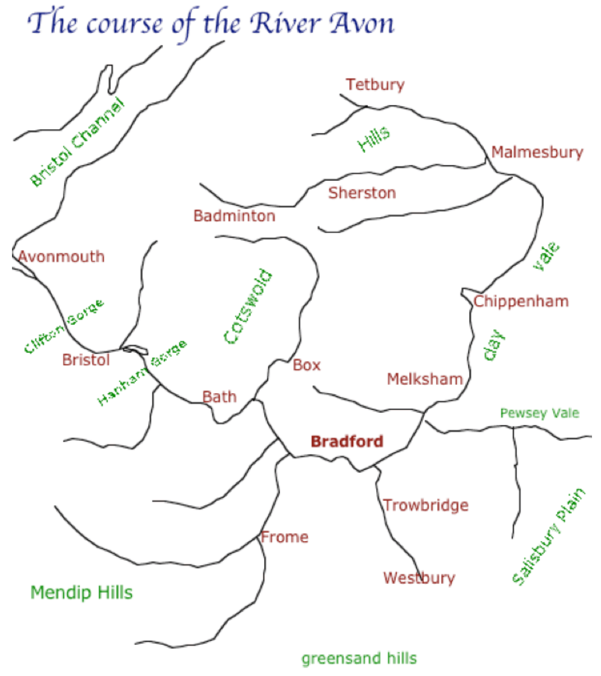
Qualsiasi biblioteca potrebbe risolvere il dubbio, probabilmente anche quella di casa, se contiene una qualche enciclopedia generalista: ma un motore di ricerca fa indubbiamente prima. E il dubbio si scioglie, perfino con una leggera sorpresa, quando si vede che Anne Hathaway è nome posseduto non solo da una giovane attrice americana contemporanea, ma anche dalla legittima moglie del massimo poeta inglese, William Shakespeare. Chissà se il campanello d'allarme acceso nel leggere il cast è dovuto a vecchie lezioni liceali o a qualche biografia letta negli anni passati; o magari, di nuovo ad un film, vecchio o recente che fosse, tra i molti che hanno narrato la vita del bardo.

Certo è che Shakespeare apre fin troppe possibilità di esplorazione: non vale la pena addentrarcisi troppo: il dubbio su quale strada prendere ad un bivio è in fondo risolubile, decidere in che direzione procedere nel bel mezzo di un incrocio di cento strade è impossibile. Tanto vale limitarsi a ricordare – e la testa lo fa da sola, senza bisogno di stimoli – che Shakespeare è nato a Stratford-upon-Avon, e che questa cittadina deve la sua fama universale probabilmente solo a cotanti natali.

Si può bamblinare e considerare, magari per la prima volta nella vita, che "upon Avon" dovrà ben significare che Stratford è sull'Avon, tanto quanto Francoforte è sul Meno o sull'Oder, e concludere pertanto che a) di Stratford probabilmente ce n'è più d'una, altrimenti la specificazione nel toponimo risulterebbe ridondante; b) con ogni probabilità Avon è anche un fiume, e non solo una marca di cosmetici.

Sempre la rete ci rassicura: nella sola Inghilterra, di luoghi che hanno diritto di chiamarsi Stratford ce ne sono almeno sette; e soprattutto, l'Avon è proprio un fiume. Anzi, un sacco di fiumi, a dire il vero: "avon" deriva dal gaelico "abona", che significa semplicemente "fiume", e di conseguenza in Inghilterra "river Avon" è espressione etimologicamente ridondante, ma certo molto frequente. Al punto che per distinguere l'Avon di Stratford si usa spesso l'espressione Shakespeare's Avon, tirando nuovamente in ballo il sommo poeta. Certo è che se sia "Stratford", sia "Avon" sono nomi abbastanza diffusi per cittadine e corsi d'acqua, anche la loro accoppiata rischia di non essere pienamente univoca.

In effetti, tra i molti Avon, più che quello che bagna Stratford sembra interessante quello che passa per Bristol (non a caso chiamato "Bristol Avon"). È lungo appena 120 chilometri, ma sembra voler imitare in qualche modo il Rio delle Amazzoni che, nascendo poco distante dal Pacifico, si lancia in un percorso di 6400 chilometri pur di finire in Atlantico; l'Avon, nel suo piccolo, si dipana in un grazioso girotondo e, pur sorgendo a una ventina di chilometri dal mare, sfocia infine in un punto non troppo lontano dalla sua sorgente. Il suo percorso ondeggiante lo porta abbastanza all'interno, al punto di sfiorare il corso del più famoso fiume d'Inghilterra, il Tamigi. Nel punto di minima distanza, l'Avon che bagna Bristol si trova ad appena tre miglia dal fiume di Londra: e questa vicinanza ha colpito l'immaginazione delle menti più acute e pragmatiche, fin dai tempi della Regina Elisabetta I.



5 *George Johnstone Stoney*

"*Guardando la mappa d'Inghilterra, egli si accorse che i due fiumi, il Tamigi e l'Avon che scorre attraverso Bath e Bristol, non erano affatto distanti: appena tre miglia. Pur essendo lontano, a circa 25 miglia da Oxford, saltò in groppa ad un cavallo per vedere di persona, e trovò che la zona era pianeggiante e facile da scavare. Considerò allora la possibilità e il costo di fare un taglio fra i due fiumi, facendoli sposare e ottenendo da simili nozze dei grandi vantaggi per il trasporto economico e sicuro di beni tra Londra e Bristol. Sebbene le chiatte siano lente e costrette ai larghi giri dei meandri dei fiumi, considerando che potevano viaggiare sia di giorno sia di notte sarebbero arrivate a destinazione nello stesso tempo dei convogli via terra, che peraltro arrivavano spesso coi beni danneggiati, vasi rotti e liquidi versati, e altri beni fragili rovinati. Non molto tempo dopo queste osservazioni morì, e scoppiarono le guerre civili. Per buona sorte, il signor Matthews Dorset aveva avuto occasione di conoscerlo e di parlargli, ed era venuto a conoscenza di questo suo progetto. Dorset era un uomo semplice e onesto, e l'idea continuò a girargli in testa a lungo: aveva intenzione di resuscitare il progetto del canale, che altrimenti sarebbe stato certo dimenticato e perduto, e andò in quelle campagne a fare dei rilievi, ma non incontrò un grande favore da parte degli abitanti dei luoghi. Durante la restaurazione della monarchia di Carlo II rinnovò il suo progetto, presentandolo direttamente al Consiglio del sovrano. Sembra che fu proprio il re il maggior entusiasta del progetto (o almeno questo è quanto mi disse): in breve però, a causa della sua inesperienza non si arrivò a nulla, e morì di vecchiaia senza realizzare alcunché. Però Sir Jonas Moore, esperto matematico e uomo pratico, essendo stato mandato a controllare il castello di Dauntsey in Wits (ereditato dalla corona a causa della leggerezza di Sir John Danver), andò a controllare i fiumi e le loro distanze. Trovò che la portata dei fiumi era troppo poco fluente, tranne che in inverno; ma se qualche principe o il parlamento fossero riusciti a raccogliere abbastanza denaro per effettuare il tagli del canale attraverso la collina di Wooton Bassett, allora ci sarebbe stata abbastanza acqua e corrente per consentire l'operazione. Ne calcolò il costo, che ho ora dimenticato, ma credo si aggirasse sulle duecentomila sterline.*"[3]

[3] Dalle "Brief Lives" di John Aubrey (1626-1697). Antiquario, filosofo naturale, ma soprattutto proto-archeologo, Aubrey è famoso in Inghilterra per la raccolta di brevissime biografie di personaggi a lui contemporanei. Per intenderci: Il pezzo riportato tra virgolette è sostanzialmente l'intera biografia del tapino protagonista del nostro compleanno. La traduzione, come probabilmente si sente benissimo, è fatta in casa.

È stato facile tornare ai canali; sono bastati davvero pochi passaggi. Quel che è ancora più rimarchevole, è che con lo stesso numero di passaggi si è arrivati anche a dar un senso a quest'articolo, visto che il misterioso personaggio che, dopo aver dato uno sguardo alla carta d'Inghilterra, è saltato in groppa al cavallo per andare a valutare l'ipotesi di mandare a nozze l'Avon e il Tamigi altri non è che un matematico, e matematico di vaglia.

6 *Henry Briggs*

(forse: le fonti più autorevoli non danno immagini del nostro eroe, quindi prendete il ritratto con la dovuta cautela)

Henry Briggs nacque a Warleywood, Yorkshire, nel Febbraio del 1561. Il giorno di nascita non è noto con precisione, perché non è riportato in nessuno dei documenti ufficiali, che si limitano a registrare mese e anno: dai registri parrocchiali sembra comunque che sia stato battezzato il 23 Febbraio, e in mancanza di meglio utilizzeremo questa data come quella del suo compleanno ufficiale[4]. Del resto, come è stato sottolineato già molte volte, la volatilità delle date storiche è sempre da tener presente: nel caso specifico, ad esempio, vi è palesemente contraddizione – e di anni, non di giorni – tra la data di nascita appena riportata e il necrologio che pubblicò il Christ's College di Cambridge nel Febbraio del 1630, poco dopo la morte di Briggs. Vi si legge infatti che il matematico morì "a 74 anni d'età", il che implicherebbe che l'anno di nascita dovrebbe essere il 1556, ben cinque anni prima della data "ufficiale".

Del resto, anche gran parte delle altre informazioni sulla sua vita sono frammentarie: ebbe la fortuna di frequentare una scuola di grammatica (nel sedicesimo secolo era tutt'altro che scontato), dove si distinse per profitto in Greco e Latino. A sedici anni entrò nel citato Christ's College a Cambridge, dove ottenne il baccalaureato cinque anni più tardi. Dopo altri quattro anni ottenne la laurea (Master of Arts) e nel 1588, non ancora trentenne, entrò a far parte del corpo docente. Nel 1592 divenne "Reader of the Physic Lecture", ma il termine non deve trarre in inganno: non siamo ancora neppure nel 1600, e il concetto di "fisica" è quantomeno molto aleatorio. Le lezioni di Briggs riguardano infatti la medicina[5]: ma, in parallelo, il nostro comincia anche ad interessarsi di matematica, al punto da tenere lezioni e tenere sessioni di esame anche in questa disciplina.

È facile dedurre che la matematica deve aver conquistato il cuore di Henry se, pochi anni dopo, lo ritroviamo primo possessore della cattedra di Geometria nell'appena istituito Gresham College[6], a Londra. Dalle lettere che Briggs scambiò con un suo vecchio

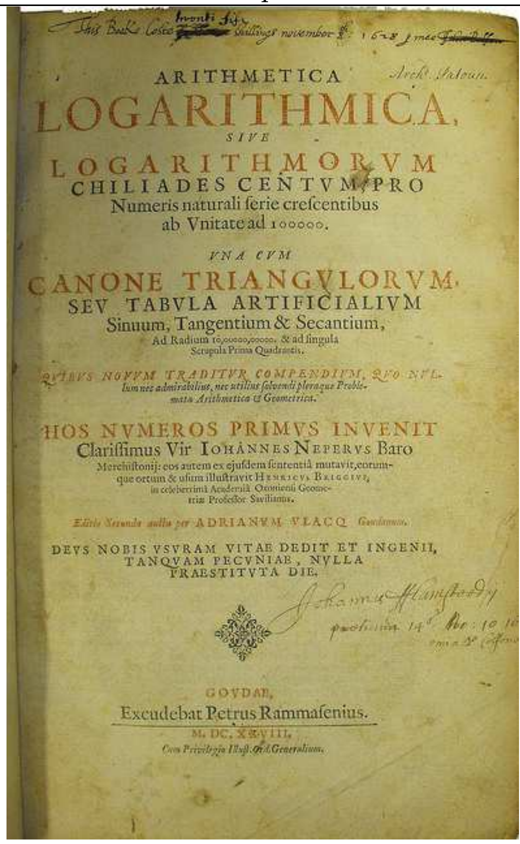
[4] Anche se non impossibile è assai poco probabile, anche ai gironi nostri, che un bambino venga battezzato proprio nel giorno della nascita. Del resto, se dobbiamo dar fede ai documenti che parlano solo di "Febbraio 1561", non possiamo eleggere nessuno dei 23 giorni possibili come effettivo giorno di nascita. Tra l'altro, questa è la ragione essenziale per la quale, fino ad oggi, Briggs non è stato riportato nel calendario di Rudi Mathematici. L'attenzione sull'imperdonabile mancanza ci è stata fatta notare da uno dei più acuti e pungenti commentatori del blog di RM, Yopenzo, che naturalmente è stato doverosamente consultato nel prendere una decisione per attribuire d'ufficio una precisa data di nascita a Briggs. Inutile sottolineare ulteriormente che, senza il commento di Yopenzo, questo compleanno non sarebbe esistito: adesso sapete a chi dare la colpa, se si vi siete annoiati a morte.

[5] Non per niente uno dei più noti (almeno in ambiente scientifico) "falsi amici" della lingua inglese è la parola "physician", che vuol dire "medico" e che è errore mortale tradurre con "fisico". Errore mortale che, comunque, continua a fare vittime…

[6] Non un istituto da poco: è il posto dove verrà fondata, nel 1660, la Royal Society.

professore, James Ussher (che a tempo perso diventò arcivescovo in Irlanda), è possibile dedurre che il nostro sviluppò un forte interesse per l'astronomia. Riepilogando: eccelleva nello studio delle lingue classiche, teneva corsi di medicina, cattedre di geometria, ed era interessato all'astronomia. Il ritratto che ne esce è evidentemente quello di un genio multiforme, e probabilmente niente affatto privo di capacità pratiche. Se il ritratto è corretto, è facile immaginare che, pur non essendo spaventato dai calcoli, viste le sue capacità matematiche, potrebbe aver visto con molta simpatia qualsiasi strumento in grado di semplificare i lunghi, ripetitivi e noiosi calcoli che le osservazioni astronomiche impongono.

E forse fu per questa ragione che, quando si imbatté nella lettura dell'opera di Nepero (ma forse sarebbe meglio ricordare che si chiamava John Napier) sui logaritmi, si accorse subito che potevano essere estremamente utili per semplificare i calcoli, e ne fu subito entusiasta. Da uomo pratico, aveva già dedicato molto del suo tempo alla costruzione di tavole di calcolo e di testi analoghi, quali "*Come trovare l'altezza del polo data la declinazione magnetica*" o le "*Tavole per il miglioramento della navigazione*"; era insomma uno dei pochi che potevano subito intuire il grande valore dell'introduzione dei logaritmi di Napier nelle pratiche di calcolo.



ARITHMETICA
LOGARITHMICA,
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES CENTVM, PRO
Numeris naturali ſerie creſcentibus
ab Vnitate ad 100000.
VNA CVM
CANONE TRIANGVLORVM,
SEV TABVLA ARTIFICIALIVM
Sinuum, Tangentium & Secantium,
HOS NVMEROS PRIMVS INVENIT
Clariſſimus Vir IOHANNES NEPERVS Baro
DEVS NOBIS VSVRAM VITAE DEDIT ET INGENII,
TANQVAM PECVNIAE, NVLLA
PRAESTITVTA DIE.
GOVDAE,
Excudebat Petrus Rammaſenius.

7 *L'Arithmetica Logarithmica di Briggs*

Si è già visto come Briggs reagisse al nascere di un subitaneo interesse: faceva i bagagli, andava in stalla e montava a cavallo. Forse con un po' più di preparazione, forse un po' meno sbrigativamente, ma questo è proprio quello che fece: affrontò il viaggio[7] da Londra ad Edimburgo per andare a trovare il professore Nepero, e parlare con lui dei logaritmi.

Era l'estate del 1615, e l'incontro fu certo uno dei più significativi della storia della matematica inglese, se non di tutta la matematica tout court. Sembra che Briggs si sia presentato a Napier con queste parole: "*Mio signore, ho intrapreso questo lungo viaggio appositamente per vedervi di persona, e per sapere quale anelito di saggezza o di ingenuità vi abbia colto per giungere a questo eccellentissimo aiuto per l'astronomia, i logaritmi. Perché, milord, mi stupisco che nessun altro lo abbia fatto prima, dacché sono così evidenti e facili, ora che sono stati da voi scoperti.*"

C'erano diversi argomenti di discussione sul tavolo della nuova scoperta: uno dei punti cruciali era la definizione del logaritmo di 1, e Briggs esortò Napier ad andare a fondo alla sua idea di porlo uguale a zero. Anche se la formula esplicita $\log(1)=0$ compare per la prima volta in uno scritto di Briggs, egli non fa mistero che l'idea originale era stata di Napier. Nel lungo scambio di lettere che fece da prosieguo all'incontro, Briggs presenta a Napier la sua idea di utilizzare 10 come base di una serie di tavole di logaritmi, per rendere i calcoli di uso comune più semplici. Napier riconosce che l'idea gli era venuta,

[7] Inutile ripeterlo, forse, ma si trattava a quei tempi di un viaggio massacrante, da fare parte a cavallo e parte in carrozza, e ci volevano almeno quattro giorni per completarlo.

ma che non aveva avuto tempo per svilupparla, ed esorta il londinese a proseguire in questa direzione.

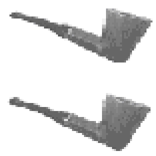
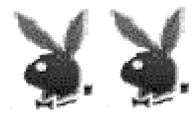
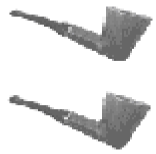
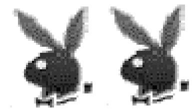
Henry e Nepero si incontrarono ancora una volta, nel 1616, e lo avrebbero fatto ancora, se non fosse sopraggiunta la morte di Napier. Briggs continuò il mastodontico lavoro di produrre tavole di logaritmi e testi che ne spiegavano l'utilizzo: il suo mastodontico trattato "Arithmetica Logarithmica", pubblicato nel 1624, conteneva i logaritmi dei numeri naturali da 1 a 20.000 e da 90.000 a 100.000 calcolati fino alla quattordicesima cifra decimale. Le tavole furono completate con i numeri da 20.000 a 90.000 nel 1628 da Adriaan Vlacq, editore olandese.

Briggs non si occupò solo di logaritmi: la prima cattedra "saviliana" di Geometria ad Oxford, fondata da Henri Savile[8], gli fu offerta e lui la accettò volentieri. Vi curò subito la pubblicazione degli Elementi di Euclide, senza citare minimamente il suo lavoro di editing, e lasciando al vecchio maestro greco ogni merito per l'opera.

Fu un uomo pratico, amichevole, e onesto. Nella sua collaborazione con Nepero, la correttezza da parte di entrambi fu davvero ammirevole, specie considerando i tempi in cui vivevano. Le cronache raccontano che l'unico serio punto di disaccordo tra loro era il rapporto con l'astrologia, adorata da Napier e considerata una voragine di sciocchezze da parte di Briggs. È possibile che il grande Nepero meriti un posto maggiore nella storia della matematica, ma almeno in questa questione, non c'è dubbio che il nostro Henry gli desse in saggezza dei gran punti di distacco.

[8] Gli accademici inglesi hanno un meritevole rispetto per le cattedre, e ancora oggi alcune hanno un nome che serve a ricordare che, ancorché scrivanie di legno, sono concetti che trasudano prestigio e tradizione. La cattedra "lucasiana" di matematica a Cambridge, che prende il nome da Henry Lucas, il benefattore che la istituì, accolse tra gli altri Barrow, Newton, Dirac e Hawking. Non è responsabilità da poco appoggiare i glutei su cotanto sedile. La cattedra "saviliana" di Geometria a Oxford, (ne esiste una anche di Astronomia), non è da meno: dopo Briggs, tra gli altri, ha accolto personaggi del calibro di Wallis, Halley, Sylvester, Hardy e Atiyah.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
…ma quanto ci costate?			
Cosa resta dopo il niente			

1.1 ...ma quanto ci costate?

Non in soldi, in problemi. Per mettere in campo questo, ci costringete a bruciare un Q&D che tenevamo dal lontano 2002 per i giorni di pioggia...

Comunque, a noi sembrano dei problemi abbastanza "aperti" (parola che non ci piace, ma "creativi" suona ancora peggio); andiamo con il primo, quello del Q&D.

Io (Rudy speaking) e Doc abbiamo invitato per il te due nostre ex prof di matematica: dal pronome utilizzato dovreste aver intuito che si tratta di signor(in)e, e alle suddette (anche se apprezzano molto lavorare con i numeri) non si chiede mai l'età.

Buona creanza, comunque, richiede che venga servita per prima la *meno giovane*; quello che vi chiediamo è di trovare un modo (che possibilmente le faccia giocare un po' con i numeri, così si divertono) per stabilire giustappunto quale sia la meno stagionata, ma *senza che nessuno sappia le loro età*: insomma, quando hanno giocato (con la massima onestà) un gioco, una di loro è in grado di dichiarare "sono più anziana io" o viceversa, anche se nessuna delle due conosce precisamente l'età dell'altra: presto, che il te è quasi pronto.

E questo era quello vecchio; quello nuovo nasce da un evento successo svariati anni fa[9] quando a un'elezione (municipale americana) si presentò un (per loro) noto comico.

Sapete che gli americani hanno questa strana caratteristica (*some puns intended*) di essere piuttosto reticenti relativamente al loro reddito; il suddetto comico, pur di continuare a tacere in merito, decise di ritirarsi dalle elezioni.

Bene, il problema è esattamente questo: avete tre persone, che vogliono sapere, con il minimo numero di domande, quale sia la media dei loro salari *senza che nessuno conosca, se possibile*, l'ammontare esatto degli altri due.

Rispetto alle prof di Mate, abbiamo portato da due a tre i giocatori... si può generalizzare?

Domanda cattiva: posto che sia possibile *mentire* (OK, le prof non lo faranno mai... sui politici *transeat*[10]), vi conviene? Nel senso: se *voi* mentite, riuscite lo stesso a calcolare il corretto valore medio? Trattasi, chiaramente, di considerare il caso in cui *noi* (singolare) mentiamo e vogliamo conoscere il salario medio corretto (sempre *noi* singolare: gli altri, che si arrangino).

[9] Niente date o dati precisi, altrimenti trovate i riferimenti e non c'è più sugo

[10] Rudy è riuscito a scrivere *cinque* volte questa parola in quindici giorni. Adesso basta.

Sapete che il *porcellum* (c'è ancora, giusto? Ragazzi, stiamo scrivendo a dicembre... Per adesso c'è ancora) permette le coalizioni: se due dei tre candidati si mettono d'accordo, riescono a scoprire il salario esatto dell'altro? Logicamente, i due d'accordo possono mentire, mettendosi d'accordo...

DISCLAIMER. Come forse sapete, per quanto riguarda la partecipazione alle elezioni siamo dei veri talebani: anche se non ci piace (e crediamo di avervelo dimostrato, in questi anni) il sistema in voga, andremo comunque a votare. Siamo nati in un periodo nel quale si metteva l'accento più sul *dovere* che sul diritto.

1.2 Cosa resta dopo il niente

Se il primo problema lo abbiamo scritto genericamente a dicembre e non ci ricordiamo la data precisa, per questo abbiamo delle certezze: era ancora dicembre ma dopo Natale, visto che l'ambientazione richiede che lo scrivente (sempre Rudy, e chi altro? Capitano tutte a lui...) si bei fumando la bellissima *Jeppesen* che gli hanno regalato i familiari: appena troviamo il modo di infilarla nello scanner senza causare eccessivi danni la mettiamo come valutatore, promesso.

I Sacri Testi di knapsicologia (indovinate cosa significa) sostengono che la pipa la si accende o con un accendino a fiamma storta, o con i fiammiferi di legno: il fornitore di pipe e tabacchi di Rudy[11], conscio dl fatto che un mancino tendenzialmente distrugge gli accendini da pipa (sono asimmetrici e, viaggiando su un minimo di 50 Euro, meglio rinunciarci in partenza) ha omaggiato il nostro di due scatole di "svedesi", ognuna delle quali contiene 40 fiammiferi: e sono alcuni giorni che Rudy li tiene in tasca, pescando indifferentemente dall'una o dall'altra per accendere il monumento che si tiene in bocca.

Stamattina ha preso una scatola (sempre casualmente) e si è accorto che era vuota: probabilmente, l'altra volta che l'aveva usata l'aveva rimessa in tasca senza pensarci.

La domanda è: quanti fiammiferi vi aspettate di trovare, nella scatola restante? Con calma, tanto domani i tabaccai sono aperti.

3. Bungee Jumpers

Provate che qualsiasi numero composto da 3^n cifre identiche è divisibile per 3^n.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Febbraio!

Tanti auguri RM!

Lo sapete, vero, quanti anni sono? Il primo numero di RM è uscito monopagina (OK, le pagine erano due, ma noi lo ricordiamo sempre stampato due pagine insieme…) nel febbraio del 1999, e per questo motivo ci siamo sempre fregiati di essere la rivista fondata nell'altro millennio. RM compie gli anni e noi siamo orgogliosi e un po' stanchi – a dire il vero – perché da bravi genitori che hanno cresciuto un teen-ager abbiamo qualche problema ad amministrare il nostro tempo.

8 *Tanti auguri, RM!*

Ma basta parlare di noi.

[11] Certi che non leggerà mai queste note, scriviamo qui che *si è sbagliato*! Rudy voleva la solita scatola da un etto di *Old London* che fuma sempre a Natale: per errore (e lui non se ne è accorto) è tornato a casa con una scatola di *Hal o' The Wynd*: se il primo gli ricordava il perduto *Escudo* della sua giovinezza, questo è praticamente uguale al rimpianto *Elizabethan* dei tempi eroici di RM!

Febbraio è tradizionalmente mese breve, che con i nostri ritardi diventerà ancora più breve per le vostre soluzioni. Sappiate solo che accettiamo tutti gli auguri che ci mandate, in qualsiasi forma.

Tagliamo corto e vi diciamo solo ancora che a Febbraio il nostro blog ospita anche quest'anno il Carnevale della Matematica, e contiamo su tutti quelli che ci conoscono e si ricordano di noi per non fare una figura barbina.

Ed adesso andiamo alle soluzioni dei problemi.

4.1 [167]

4.1.1 Puzza di Ramsey

Come? Pensavate che nessuno udisse il mio urlo di disperazione il mese scorso quando un problema è stato completamente ignorato dai solutori? Ebbene no. Per fortuna qualcuno legge ancora la mia rubrica… ma cominciamo dal principio, e cioè dal problema, o meglio dai due problemi:

> *Prendete (o meglio, prima riconoscete) un pentatetracontagono regolare, e denominate i vertici distribuendo un pari numero di lettere A, B, C. Quello che vi chiedete è se sia sempre possibile trovare tre triangoli AAA, BBB e CCC isometrici.*
>
> *Avete nove punti sul piano, e la distanza tra due qualsiasi di loro è un numero intero. Dimostrate che almeno sei tra queste distanze sono divisibili per tre.*

L'eroe del giorno (e mai definizione è stata più appropriata) è il nostro grande ***Gnugnu***. A lui la parola:

> <u>Primo problema</u>
>
> Le diverse maniere in cui possiamo ripartire equamente i 45 vertici del poligono in tre sottoinsiemi A, B e C sono veramente tante: più o meno quanto gli atomi che occorre accostare, in fila indiana, per costruire una cintura equatoriale al nostro pianeta.
>
> I ricordi delle schede perforate, mi hanno portato a progettare una "macchina" in grado di risolvere il problema e, credo, sarebbe interessante proporne la costruzione in qualche classe della scuola dell'obbligo.
>
> Stampata una dima con i vertici del poligono regolare: 45 tondi dal diametro di circa 5 mm, poco distanziati fra loro, con un ulteriore segno nel centro della figura (si può riutilizzare un foglio già scritto, magari con la propaganda elettorale che fra poco intaserà le cassette da lettera); la si sovrappone a tre cartoncini, ricavati, ad esempio, da confezioni di prodotti alimentari[12] e si pratica un foro in corrispondenza del centro, in cui passerà l'asse della macchina, che potrà essere: il classico fermacampioni, una vite del meccano, un ribattino...
>
> A sforbiciate eliminiamo gli eccessi del sandwich troppo all'esterno del poligono e concentriamoci, perché inizia la parte meno facile.
>
> Smontiamo la pila, fissiamo, provvisoriamente (graffette? Pezzetti di nastro adesivo?) la dima sopra ad uno dei cartoncini, facendo combaciare i centri, e pratichiamo con una pinza per fustellare 15 fori in corrispondenza dei vertici che abbiamo scelto come A. Ripetiamo la medesima operazione per i vertici B e... No, risparmiamo! La terza scheda perforata l'abbiamo già. La carta con i 15 pois sopravvissuti è, sia pur in negativo, la scheda C e basta incollarla sull'ultimo cartoncino.
>
> Poniamo la scheda B sulla C, introduciamo l'asse e guardiamo attraverso i fori. In un giro completo ognuno dei 15 fori di B andrà a collimare con ciascun tondino di C per un totale di 15·15 = 225 congiunzioni. D'altra parte l'allineamento può avvenire solo 45 volte (ad intervalli di 8°) e, perciò, per ognuna di queste rotazioni vedremmo, se gli incontri fossero uniformemente spalmati, 225/45 = 5 tondini neri.

[12] Alice utilizzando sottobicchieri rotondi da birra può evitare l'uso dell'asse centrale.

La rotazione nulla non può, però, presentare allineamenti ed allora dovrà necessariamente esistere almeno una posizione in cui ne compaiono di più.

Quando ne vediamo almeno 6, spilliamo assieme B e C, sovrapponiamo la scheda A e ripetiamo l'esperimento. Questa volta avremo almeno 6·15 = 90 apparizioni di punti neri. Se fossero distribuite omogeneamente sulle 45 rotazioni ne troveremmo 90 / 45 = 2 per ciascun angolo. Vi sono però 2 situazioni (quelle in cui la carta è nella posizione in cui abbiamo perforato le schede A e B rispettivamente) in cui non ne possono comparire.

Sarà dunque possibile vedere, almeno una volta, più di 2 pallini e, quando succede, abbiamo individuato i vertici di una terna di triangoli sovrapposti per rotazione: quindi congruenti.

La pubblicità, indispensabile alla commercializzazione di questa scova poligoni isometrici, potrà sottolinearne gli apprezzabili sottoprodotti: 60 coriandoli per il prossimo carnevale e, se abbiamo scelto con cura il foglio per la dima, la fotografia, truccata e falsamente sorridente, del questuante voti butterata dai fori.

Qualunque siano il numero $s > 1$ dei sottoinsiemi (schede) fra cui si debbano equiripartire i vertici del poligono iniziale ed il numero $v > 1$ dei vertici di ciascuno degli s poligoni congruenti di cui si vuole mostrare l'esistenza; la macchina, opportunamente costruita, funzionerà con

$$n \geqslant s\left(v \cdot s^{s-2} - \frac{s^{s-1}-1}{s-1}\right);\quad t = n \cdot s.$$

Risultato ottenuto dalle $s - 1$ equazioni

$$n^2 = s n(x_2 - 1);\ n x_2 = s n(x_3 - 1);\ \cdots\ n x_{s-1} = s n(x_s - 1)$$

semplificandole per n e procedendo per sostituzione dei valori delle x_i (numero di allineamenti osservabili quando sono sovrapposte i schede), iniziando con $x_s = v$ e risalendo dall'ultima alla prima.

L'espressione fornisce il minimo numero di vertici sufficienti per garantire il funzionamento del marchingegno, ma non esclude l'esistenza di poligoni con meno lati nei quali esistano sempre s-ple di figure congruenti, anche perché la caccia è limitata a sovrapposizioni per rotazione. Nel caso di simmetrie assiali occorrerebbe capovolgere la scheda, ma in questo caso non sarebbe più utilizzabile la mancanza di collimazioni nella posizione iniziale che svolge un ruolo fondamentale nella dimostrazione. Ad esempio, con $s = 2$ e $v = 3$ risulta $t = 8$, mentre già nell'esagono regolare, qualunque sia la ripartizione dei vertici in due sottoinsiemi, i due triangoli sono congruenti.

<u>Secondo problema</u>

Consideriamo nove punti su una retta, ognuno a distanza 1 dai più vicini. Fra le distanze reciproche ne abbiamo sei di misura 3 e tre da 6: in tutto nove multiple di 3. Qualunque cosa sostenga il GC, non è possibile trovarne di meno.

Ipotizzando, per assurdo, l'esistenza, nel piano, di una configurazione di nove punti tali che solo otto delle loro mutue distanze siano multiple di 3, dimentichiamoci delle altre distanze (necessariamente intere) e ragioniamo sul grafo avente per vertici i nove punti e archi che corrispondono alle distanze multiple di 3.

Eliminando, in successione, uno dei vertici da cui esce il maggior numero di archi, ci troveremo ad avere quattro vertici non connessi.

Otto archi comportano 8·2 = 16 estremi, e quindi da almeno uno dei nove vertici usciranno almeno due archi; cancellandolo resteranno otto vertici con al più sei archi.

Per essere 6·2 = 12 > 8, al passo successivo, i sette vertici superstiti saranno collegati da quattro archi al massimo, ma è ancora 4·2 = 8 > 7, che porterà a sei vertici con, ben che vada, due archi.

Eliminando un estremo per ognuno di questi resteranno quattro vertici privi di archi che li uniscano.

Naturalmente può succedere che qualche cancellazione comporti la sparizione di un numero di archi superiore al previsto; emblematico il caso in cui inizialmente un vertice sia congiunto ai restanti otto. Avvenimenti di questo tipo velocizzano la caccia ai vertici isolati e, se temiamo queste anomalie, possiamo sempre aggiungere archi fittizi nella misura necessaria a ripristinare le situazioni standard, tanto spariranno nei passi successivi.

Quattro vertici, sei distanze intere e nessuna multipla di 3. Se i punti sono allineati è impossibile. Lo stesso succede anche quando non lo siano. Lo si può dimostrare in tanti modi, anche facendo uso del solo teorema di Pitagora.

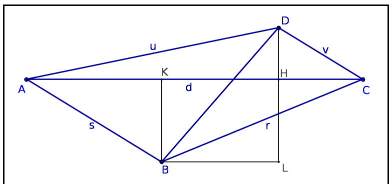
Ci serviremo anche di due proprietà elementari della divisibilità per 3.

Se due interi non sono divisibili per 3, consideriamo la loro somma e la loro differenza: uno ed uno solo di questi risultati sarà divisibile per 3. [1]

Qualora i resti della divisione per 3 dei due numeri siano uguali, la differenza sarà multipla di 3, mentre non lo sarà la somma; il contrario accade quando uno dei resti è 1 e l'altro 2.

La differenza dei quadrati dei due numeri, prodotto della loro somma e della loro differenza, è sempre multipla 3. [2]

Per tracciare la figura – dove le lettere minuscole sono le misure delle distanze – ho considerato un trapezio di lati 8, 11, 5, 13 e diagonale maggiore 17 (anche l'altra diagonale avrà misura intera). Non sono riuscito a trovare distanze, tutte diverse, più piccole, ma questo non ha alcuna rilevanza.



9 *La figura di* ***Gnugnu***

Il segmento più lungo (per comodità: in questo modo si evitano proiezioni esterne al segmento) AC di misura d è lato comune a due triangoli di cui sono noti gli altri lati; possiamo quindi calcolare la sesta distanza.

Dalle coppie di triangoli rettangoli AHD, CHD e AKB, CKB otteniamo [3]:

$$DH^2=v^2-AH^2=u^2-(d-AH)^2 \rightarrow 2d\cdot AH=d^2+v^2-u^2$$

$$BK^2=r^2-AK^2=s^2-(d-AK)^2 \rightarrow 2d\cdot AK=d^2+r^2-s^2$$

Da cui con $2d\cdot HK=2d\cdot|AH-AK|=|v^2-u^2+s^2-r^2|=3t$, per la [2], t intero.

Sempre dalle [3] troviamo anche, dalla prima:

$$4d^2\cdot DH^2=4d^2v^2-(d^2+v^2-u^2)^2=(2dv+d^2+v^2-u^2)(2dv-d^2-v^2+u^2)=$$
$$=[(d+v)^2-u^2][u^2-(d-v)^2]=3p\rightarrow 2d\cdot DH=\sqrt{3p}$$

con p intero perché, dalla [1], una fra $d+v$ e $d-v$ non è divisibile per 3, ed allora, per la [2], lo sarà il fattore in cui compare.

E, in maniera analoga, dalla seconda: $2d\cdot BK=\sqrt{3q}$ con q intero.

Essendo $BL=HK$ e $LD=|DH\pm BK|$ (somma se il segmento BD interseca AC, differenza nel caso opposto), il teorema di Pitagora applicato al triangolo BLD porta, finalmente, all'eguaglianza

$$4d^2\cdot BD^2=9t^2+3(\sqrt{p}\pm\sqrt{q})^2$$

impossibile, perché nessuno dei fattori a primo membro deve essere multiplo di 3.

Il secondo membro può essere intero anche se p e q non sono dei quadrati: basta che lo sia il loro prodotto (proprietà equivalente alla similitudine dei radicali); e ancora, il secondo membro può essere un quadrato solo se p e q sono multipli di 3.

Mi sono domandato: esistono sempre nel piano n-ple di punti, a tre a tre non allineati, aventi tutte le reciproche distanze intere? La risposta che riesco a dare è un *non lo so* laconico e frustrante. Forse ci sono, ma l'apprendere, ad esempio, che possano essere al massimo cinque, mi stupirebbe molto meno di quanto lo abbia fatto leggere che Rudy, nel scrivere il problema, si preoccupasse di aggiungere o meno 'distinti'. Il sommo sacerdote del culto della piena libertà per il solutore, il pluriolimpionico del proponiamolo strano, il massimo teorico del 'tagliar per campi' si sofferma su questa condizione.

Inutile nascondere che, da buon rompiscatole cronico conclamato, la penso diversamente.

Dalla formulazione e, in particolare, dal risultato proposto, mi pare chiaro che non si contino le 9 distanze nulle fra un punto e se stesso; e, se così non fosse, cambierebbe solo il valore del risultato: una quisquilia.

Quando, invece, due punti coincidessero, se li considero coinquilini che mantengono la loro personalità conteggerei la loro distanza (multipla di 3); oppure, con risultato identico, se li penso fusi in una sola entità, sarei costretto a sistemare un nuovo punto in un luogo diverso. Il mistero della Trinità è altra cosa.

Usando la prima alternativa, per generalizzare il risultato ad un numero qualsiasi di punti basta fare la conta sulle dita anteriori di una zampa di pollo. Nel seguito, ad evitare ossessive ripetizioni, conveniamo che le distanze fra punti siano sempre intere e chiameremo "tassate" quelle multiple di tre.

Se introduciamo sulla retta, dove abbiamo inizialmente posto i punti a guisa di pietre miliari, un sistema di coordinate tale che le loro ascisse siano intere, possiamo considerare solo i resti della divisione per tre di queste ed alloggiare i punti nei vertici di un triangolo, di lato unitario, a seconda che tale resto sia zero, uno o due. Le reciproche distanze fra punti, qualunque sia il numero n di questi, varranno solo 1 o 0, e dobbiamo determinare quale sia il numero di quelle nulle: le tassate.

Se $n=3q_n+r_n \; con \; 0 \leqslant r_n \leqslant 2; \; n, q_n, r_n \in N$ abbiamo sicuramente in ciascun vertice almeno q_n punti che producono complessivamente $3\frac{q_n(q_n-1)}{2}$ tassate, a cui dobbiamo aggiungere $q_n \cdot r_n$ le derivanti dall'eventuale resto. Con un totale:

$$t_n = 3\frac{q_n(q_n-1)}{2} + q_n r_n = \frac{q_n(3q_n+2r_n-3)}{2} = \frac{q_n(n+r_n-3)}{2.} \qquad [4]$$

Quando aggiungiamo un nuovo punto, questo finisce inevitabilmente in un vertice in cui ne alloggiano già q_n e le tassate aumenteranno esattamente di q_n, sarà perciò:

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = q_n \qquad [5]$$

Per dimostrare che nessuna disposizione di punti nel piano può portare ad una quantità inferiore di tassate ci serviamo del metodo della discesa infinita, la variante per assurdo dell'induzione.

Sappiamo già che è impossibile diminuire $t_4 = 1$, ci basterà provare che se fosse possibile per un qualsiasi valore $n+1 > 4$ averne $v_{n+1} = t_{n+1} - 1$ allora, cancellando il/un punto da cui esca il maggior numero di tassate, lo sarebbe anche per n.

Ogni punto partecipa al mantenimento della geometria del piano euclideo con un contributo uguale al numero di tassate di cui è estremo.

Il gettito fiscale $G(v_{n+1})$ è pari al doppio delle tassate, usando le [5] e [4] troviamo

$$G(v_{n+1}) = 2v_{n+1} = 2(t_{n+1}-1) = 2(t_n+q_n-1) = q_n(n+r_n-3) + 2q_n - 2 = q_n(n+r_n-1) - 2$$

Lo stesso risultato si dovrà ottenere sommando i versamenti degli $n+1$ punti; se ciascuno di questi fosse raggiunto da $q_n - 1$ tassate avremmo

$$\underline{G}(n+1, q_n-1) = (n+1)\cdot(q_n-1) = q_n(n+1) - 3q_n - r_n - 1 = q_n(n-2) - r_n - 1,$$

con una differenza

$$G(v_{n+1})-\underline{G}(n+1,q_n-1)=q_n(n+r_n-1)-2-q_n(n-2)+r_n+1=q_n r_n+q_n+r_n-1,$$

che essendo $n > 3$, *e dunque* $q_n+r_n\geqslant 2$, è sicuramente positiva.

Per garantire il gettito il maggior contribuente dovrà essere un punto P da cui si dipartono $p>q_n-1\rightarrow p\geqslant q_n$ tassate; eliminandolo resteranno n punti con, per la [5], $v_n=v_{n+1}-p\leqslant t_{n+1}-1-q_n=t_n+q_n-1-q_n=t_n-1$ tassate.

Al contrario di quanto è successo nel primo problema, l'esistenza di almeno t_n tassate è una condizione necessaria ma non sufficiente, ad esempio nel caso $n = 9$, se consideriamo 9 tassate consecutive che formino un ennagono, eliminando cinque dei vertici, solo due dei quali consecutivi, si arriva alla situazione impossibile con 4 punti senza alcuna tassata.

Le configurazioni possibili che portano al minimo numero di distanze multiple di 3 risultano isomorfe a quelle dei punti consecutivi sulla retta degli interi: il grafo delle tassate è formato da tre sottografi completi, a due a due disgiunti, con un numero di vertici che differisce al più di uno da quello degli altri.

Esistono situazioni diverse, ad esempio il trapezio isoscele di basi 27 e 16, lati 12 e diagonali 24 ha una sola distanza non multipla di 3, situazione non riproducibile sulla retta. In questi casi il numero di tassate è sempre maggiore del minimo trovato.

E se dal piano migriamo nello spazio? La figura indeformabile diventa il tetraedro; solo con cinque punti una delle dieci distanze è individuata dalle restanti nove. Se prendiamo due piramidi regolari aventi altezza 1 e per base un triangolo equilatero di lato 3, incollandone le basi otteniamo un esaedro a facce triangolari. Le distanze fra i suoi vertici sono tre da 3 e sette da 2.

Se esiste un numero *magico* m, questo deve appartenere all'insieme {2, 3}. Non ho sviluppato l'eventuale dimostrazione, ma scommetterei che, questa volta, con nove punti il numero minimo di distanze multiple di m sia proprio sei!

Complimenti a ***Gnugnu***, grandioso come sempre, soprattutto con nuovi modi di apostrofare il Capo. Andiamo avanti, che siamo di nuovo in ritardo.

4.2 [168]

4.2.1 ...ebbasta con 'sto giardino!

Perfino io, che amo i problemi geometrici, ne ho abbastanza dei problemi che il Capo ambienta nel nostro giardino: va bene che sono tutti luoghi virtuali creati e vissuti nella mente malata del GC, ma pensate che per Le Scienze mi ha fatto una piscina triangolare, in cui io apparentemente nuoterei! Bando alle ciance, ecco il problema in questione:

Definiamo sequenza pavimentante una successione (infinita) di interi positivi $0<a_1<a_2<\ldots$, tale che dei quadrati di lato a_1, a_2,... siano in grado di pavimentare il piano (infinito).

Inoltre, definiamo una sequenza pavimentante esponenziale se esiste una costante q per cui, a partire da un dato n, sia $a_n<q_n$. Probabilmente di S.P.E. (Sequenze Pavimentanti Esponenziali) ne esistono infinite, ma quale è quella con il valore minimo di q?

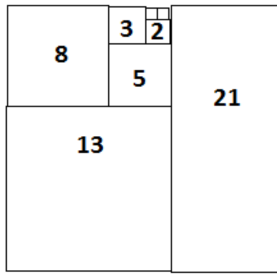
Ma vi sembra il caso? Le soluzioni sono state tutte bellissime, e cerchiamo di introdurle con uno dei soliti commenti veloci di ***.mau.***, *verbatim*:

Immaginiamo di partire da un quadrato di quadrati di lato n, e continuare la nostra pavimentazione con un quadrato di lato n, uno di lato $2n$, uno di lato $3n$, uno di lato $5n$, uno di lato $8n$... Da qui è chiaro che un limite superiore per q è φ.

Bene, vediamo che dice ***GaS***, che è veramente tornato su questi schermi:

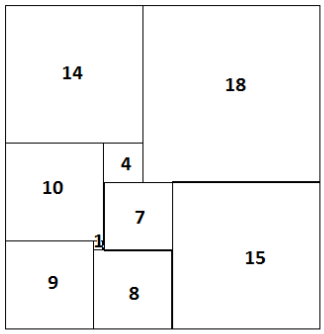
Una soluzione semplice sarebbe quella di utilizzare quadrati di lato pari a numeri di Fibonacci consecutivi.

In questo modo avremmo una Sequenza Pavimentante con l'unico neo di avere i primi due quadrati, quelli 1x1, della stessa dimensione.



10 *La prima figura di* ***GaS***

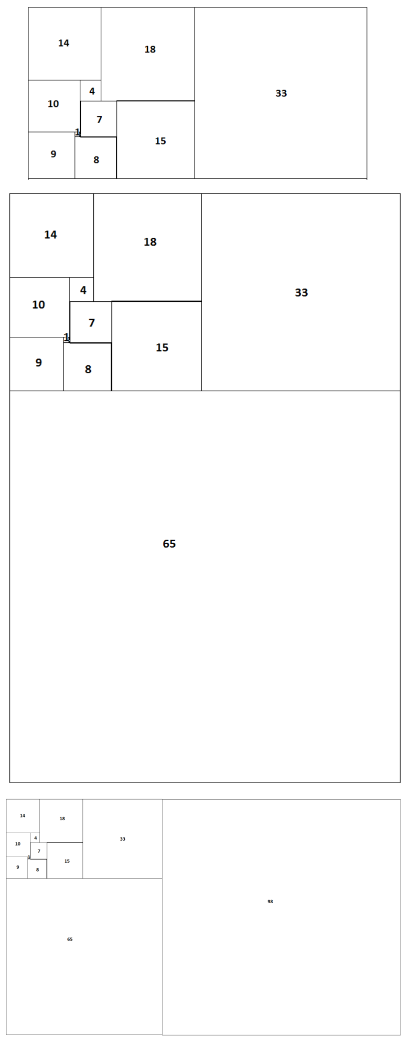
L'idea è quindi quella di fare lo stesso giochetto, e cioè aggiungere una quadrato sempre più grande ad un rettangolo dato, ma partendo da un rettangolo già formato da quadrati tutti differenti. Possiamo quindi sfruttare i risultati di illustrissimi predecessori sapendo che esistono infiniti rettangoli (e quadrati) formati da quadrati tutti differenti tra loro. Il più piccolo di tali rettangoli, e cioè quello formato da meno quadrati, è il seguente.



11 *La figura di* ***GaS***

È stato trovato all'inizio del '900 da tal Moron[13], è un rettangolo 33x32 e a quanto pare qualcuno ha dimostrato che è minimale, useremo quindi questo come base di partenza per comodità ma qualsiasi altro rettangolo potrebbe andare bene.

A partire da questo rettangolo è dunque facile aggiungere un quadrato pari ad uno dei lati del rettangolo e continuare, iterativamente, con il nuovo rettangolo così ottenuto:



12 *La figura per passi di* ***GaS***

ecc…

Avremmo così la sequenza di (lati dei) quadrati:

1 < 4 < 7 < 8 < 9 < 10 < 14 < 15 < 18 < 32 (o 33) < 65 < 97 < 162 < … < $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ < …

che come sopra dimostrato è una sequenza pavimentante. Esistono infiniti rettangoli "squadrati" da cui partire e quindi esistono sicuramente infinite sequenze pavimentanti. Tutte le sequenze hanno in comune il fatto che, a partire da un certo *n*, il numero di quadrati del rettangolo di partenza+3, la dimensione del quadrato successivo sarà dato dalla somma dei lati dei due quadrati precedenti. Le sequenze da un certo punto in poi si comportano quindi esattamente come una serie di Fibonacci generalizzata.

Ma sono anche sequenze pavimentanti esponenziali? Sicuramente si in quanto la sequenza di Fibonacci generalizzata ha un andamento esponenziale, ma quant'è il minimo q per cui $a_n<q_n$?

Non saprei dimostrarlo ma visto che stiamo parlando di serie di Fibonacci ho il forte

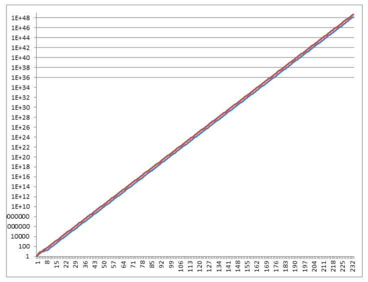
[13] *Che per una come me che parla inglese tutto il giorno, non è che suoni molto promettente… [NdA]*

sospetto che il q minimo sia proprio pari al numero aureo ϕ= (1+radq(5))/2=1,618+.

Ho provato a confrontare, su scala logaritmica la sequenza sopra riportata (in blu) con quella di ϕ_n (in rosso).

Come si vede i valori della SPE sono sempre inferiori a quelli di ϕ_n (anche se per dimostrarlo bisognerebbe verificarlo "per ogni n").

Provando con valori di q poco poco inferiori a ϕ, come 1,6 e 1,61 ho invece che la riga blu ad un certo punto supera quella rossa.



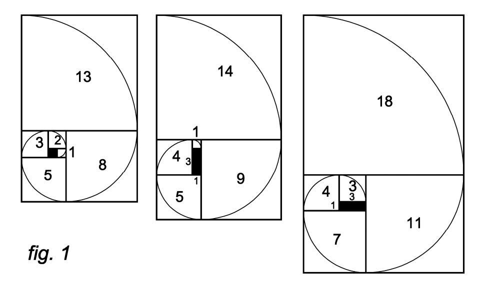
13 *L'ultima figura di* ***GaS***

Per quanto ci riguarda, ci è sembrato un ottimo sforzo, anche se abbiamo torturato un po' le figure per farle stare, speriamo che si vedano. Chi è andato oltre è ***trentatre***:

Spero di aver capito bene il problema, che presenta due aspetti: geometrico (la distribuzione dei quadrati sul piano, cioè la *tassellatura*) e aritmetico (la *sequenza* ordinata dei suoi lati). Indico con ***T*** una tassellatura corretta e $\boldsymbol{s} = (a_1, a_2, \ldots)$ la sua sequenza.

Riporto due schemi di costruzione, per ognuno dei quali si hanno infinite tassellature.

1° schema. Nella fig. 1 a sinistra i quadrati della sequenza $\boldsymbol{s} = (1,1,2,3,\ldots F_n \ldots)$ generata dai numeri di Fibonacci riempiono il piano; ma al centro sono presenti due quadrati unitari (uno in nero) e la tassellatura non è valida. Sostituendo al quadrato un rettangolo di lati a, b si hanno due configurazioni diverse (nelle figure a destra, con a, b = 1, 3).



14 *Figura* 1 *di* ***trentatre***

I quadrati corrispondono ora alle due sequenze

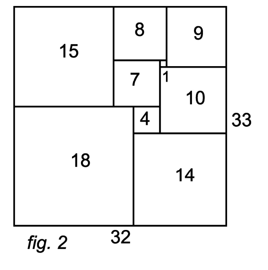
[1] $\boldsymbol{s} = (a, a+b, 2a+b, 3a+2b, \ldots)$, $\boldsymbol{s}' = (b, a+b, a+2b, 2a+3b, \ldots)$ cioè

$a_n = a F_n + b F_{n-1}$, $a'_n = b F_n + a F_{n-1}$

dove ogni termine dopo il secondo è la somma dei due precedenti.

Se al posto del "buco" centrale collochiamo un quadrato (o un rettangolo) composto a sua volta di quadrati più piccoli e tutti diversi, otteniamo, con una opportuna dilatazione, una ***T*** corretta. Il problema della "quadratura del quadrato" (o del rettangolo) con quadrati di lato intero e tutti diversi è noto da tempo (v. nota 1).

Indicando con $(a, b \,|\, m)$ una soluzione di lati (a, b) con m quadrati, almeno un rettangolo $(a, b \,|\, m)$ esiste per ogni $m \geq 9$. Quindi esistono (almeno potenzialmente) infinite ***T*** costruibili in questo modo.



15 *Figura* 2 *di* ***trentatre***

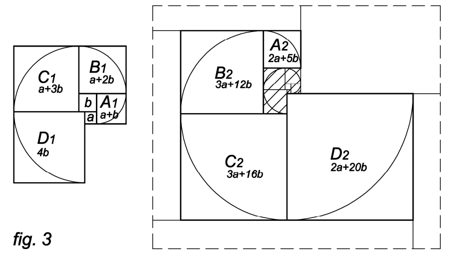
Il rettangolo "quadrato" più piccolo è $(32, 33 \,|\, 9)$ di fig. 2, che genera le due sequenze

[2] $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{t}, 32, 50, 82\ldots)$, $\boldsymbol{s}' = (\boldsymbol{t}, 33, 51, 84\ldots)$

con i valori iniziali $\boldsymbol{t} = (1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18)$.

2° schema. L'intero piano si può riempire come in fig. 3.

Si parte da due quadrati (a) e (b) e si aggiungono anelli di 4 quadrati A_n, B_n, C_n, D_n costruiti come in disegno (la spirale è composta di gruppi di 4 archi ruotati ad ogni anello di 90°). Valgono le ricorrenze



16 *Figura 3 di* ***trentatre***

[3]

$A_{n+1} = B_n + C_n$, $B_{n+1} = B_n + 2C_n + D_n$

$C_{n+1} = B_n + 2C_n + 2D_n$, $D_{n+1} = -A_n + 3C_n + 3D_n$

con i valori iniziali $A_1, B_1, C_1, D_1 = a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ 4b$.

Ogni $X_n \equiv A_n, B_n, C_n, D_n$ soddisfa la $X_{n+4} - 6X_{n+3} + 3X_{n+2} + 6X_{n+1} + X_n = 0$.

Se $a < b$, vale la $A_n < B_n < C_n < D_n < A_{n+1}$ e i quadrati sono tutti diversi. Per evitare che ***T*** possa essere ridotta di un fattore intero occorre che (a, b) siano coprimi (in disegno a, b = 2, 3).

Esistono quindi infinite coppie (a, b) che generano ***T*** diverse.

La sequenza è $\boldsymbol{s} = (a, b, A_1, B_1, C_1, D_1,\ A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots)$.

Una sequenza è *esponenziale* se esiste un valore minimo q per cui è $a_n \le q^n$, $\forall n \ge 1$; quindi la funzione $f(n) = \ln(a_n)/n$ è limitata, ed esiste il limite $f_0 = \lim_{n\to\infty} \ln(a_n)/n$. Se f (n) non è limitata non esiste q e la sequenza non è *esponenziale*.

Il parametro $g = e^{f_0}$ esprime il tasso di aumento dei quadrati, infatti vale la $g = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)$ (v. nota 2).

Si hanno due casi

i. f (n) è monotona crescente: si ha $q = g = e^{f_0}$

ii. f (n) ha un massimo per n^*, cioè $f_{\max} = \ln(a_{n^*})/n^* > f_0$, allora è $q = e^{f_{\max}} = a_{n^*}^{1/n^*} > g$.

I valori di q, g per le sequenze trovate sono

- sequenza di Fibonacci (che non genera una ***T***) $\boldsymbol{s} = (1,2,3,5,8,13,\ldots)$

  $q = g = \varphi = 1.618$ (v. 3)

- 1° schema – sequenze [2] , $q = 2$, $g = \varphi = 1.618$ (v. 4)

- 2° schema – sequenze [3] , $g = 1.509$ (per il valore di q v. nota 5).

La costruzione dei quadrati di fig. 3 è analoga a quelli di fig. 1, ma il tasso di crescita è inferiore. Una verifica numerica conferma il dato.

Nel caso a = 1, b = 2 la sequenza $\boldsymbol{s} = (1,2,3,5,7,8,12,27,35\ldots)$ è minore della serie di Fibonacci e $q = g = 1.509 < \varphi$. Ma il valore minimo possibile di q resta un problema aperto.

Tutte le sequenze trovate sono *esponenziali*.

In alcune varianti del 2° schema, ho trovato che g è sempre minore di φ. Avanzo una congettura: ogni ***T*** costruibile è *esponenziale* con un fattore di crescita $g \le \varphi$.

Note

1) ho ricavato le informazioni sulla "quadratura del quadrato" da un vecchio articolo - *Il quadrato di quadrati* - di Martin Gardner, e dal blog

http://keespopinga.blogspot.it/2012/12/la-quadratura-del-quadrato-con-poesia.html

2) se $g = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)$ è definito, per n grande è $a_n = \text{cost}\cdot g^n$ da cui $f_0 = \lim_{n\to\infty} \ln(a_n)/n \to \ln g$

3) $f(n) = \ln(F_n)/n$ è monotona crescente (caso i.) e da $\lim_{n\to\infty} F_n = \varphi^n/\sqrt{5}$ si ha $f_0 = \lim_{n\to\infty} f(n) = \ln\varphi \to q = g = \varphi$

4) $f_{\max}$ si ha per $n^* = 2 \to q = a_2^{1/2} = 2$

- i termini a_n seguono una sequenza i tipo [1] e quindi, come in 2), $g = \varphi$

5) le [3] si possono scrivere come una matrice *M* che trasforma il vettore $[A_n\, B_n\, C_n\, D_n]^T$

- l'autovalore max di *M* è $\alpha = (5+\sqrt{29})/2 = 5.193$

- per ogni componente X_n del vettore si ha $\lim_{n\to\infty} X_n = c_n\alpha^n$ con c_n : cost. e prendendo per *g* la media geometrica su 4 termini consecutivi

$$g^4 \to \frac{A_{n+1}}{D_n}\frac{D_n}{C_n}\frac{C_n}{B_n}\frac{B_n}{A_n} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \to \alpha \text{ da cui } g = \alpha^{1/4} = 1.509$$

- per *q* ho trovato (per via numerica) che

se $a=1, b=2$ allora $q = g = \alpha^{1/4} = 1.509$ ($f(n)$ è monotona crescente – caso i.)

se $a=1, b>2$ opp. $a\geq 2, b>a^2$ allora $n^*=2,\ q = a_2^{1/2} = \sqrt{b}$

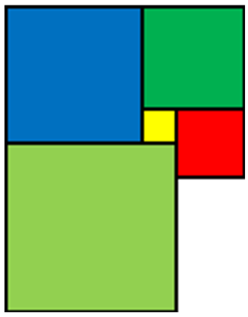
se $a\geq 2, b<a^2$ allora $n^*=1,\ q=a$

- in tutte le sequenze [3] è $q \geq \sqrt{b}$.

Impressionante, vero? Ma non vogliamo ancora passare all'ultimo problema, vogliamo farvi vedere la soluzione di ***Br1***, anche questa volta molto completa:

Visto che il *Giardino Diofanteo Minimale Zen* con cui concludevo le mie elucubrazioni sul primo problema proposto in RM166 è stato non solo riprodotto in RM167, ma persino ricordato in RM168, non ho potuto astenermi dal proporre qualcosa anche questo mese…

In realtà, come si vedrà, c'è ben poca *farina del mio sacco* in quel che segue (o meglio, tanto per restare in tema, poca *erba del mio giardino*); i principali risultati geometrico-matematici non vengono da miei calcoli o ragionamenti, ma semplicemente dalla scintilla del ricordo di un'antica lettura… Ma andiamo con ordine.



17 *Figura* 1 *di **Br1**: primi tentativi di pavimentazione*

Dopo aver provato per un po' ad affiancare quadrati di diversa dimensione nel tentativo di pavimentare il piano infinito, dopo aver concluso che attorno alla prima piastrella (la più piccola) occorre piazzarne altre 4 maggiori più o meno come mostrato qui sotto:

E dopo essermi *quasi* convinto che fosse impossibile continuare ad aggiunger quadrati via via maggiori, mi è tornato di colpo alla mente *un antico scritto del Maestro*, Martin Gardner…

E allora, dopo qualche ricerca fra scaffali polverosi, ho ripescato il secondo dei cinque volumi degli *Enigmi e giochi matematici*, Sansoni editore, stampato nel settembre '75… L'opera raccoglie nel complesso un centinaio di articoli di

Gardner, apparsi su *Scientific American* in anni precedenti alla pubblicazione di *Le Scienze* in Italia, e quindi mai apparsi su *Le Scienze*; ciascun articolo è corredato da note posteriori dello stesso Gardner, e dalle soluzioni ai vari quesiti.

Il diciassettesimo capitolo del secondo volume degli *Enigmi* racconta, in una ventina di pagine, come quattro studenti del Trinity College di Cambridge (W.T. Tutte, C.A.B. Smith, A.H. Stone e R.L. Brooks) fossero riusciti, fra il 1936 ed il 1938, a risolvere il seguente insidiosissimo problema:

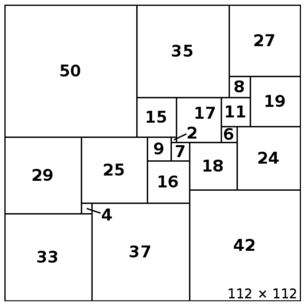
Un quadrato può essere suddiviso in quadrati[14] *minori tutti differenti fra loro?*

Come naturalmente si può immaginare, e come ho poi verificato, la storia è oggi reperibile anche su Internet (ma non in italiano, mi pare), arricchita da divagazioni ed aggiornamenti successivi. Un primo riferimento lo si può trovare qui:

http://en.wikipedia.org/wiki/Squaring_the_square

dove fra l'altro è mostrato il *risultato record*, ovvero il più piccolo *quadrato squadrato* possibile, di lato 112 e suddiviso in 21 *sub-quadratini* (cioè di *ordine* 21, secondo la terminologia usata), trovato da tal A.J.W. Duijvestijn con l'ausilio di un computer, e che è stato poi dimostrato essere quello minimale. Si noti che l'articolo di Martin Gardner riportava come più piccolo noto all'epoca un quadrato di lato 175 e di *ordine* 24…

Qui di accanto, in figura 2, è mostrato il *quadrato record* di Duijvestijn.



18 *Figura* 2 *di* ***Br1****: il più piccolo* quadrato di quadrati

Poi, nel sito raggiungibile qui:

http://www.squaring.net/sq/ss/spss/o21/spsso21.html

si può trovare un catalogo comprendente migliaia di *quadrati squadrati* (fino all'*ordine* 75), mentre qui:

http://blog.makezine.com/2011/06/13/math-monday-the-squared-square/

compare l'immagine dello straordinario *mobiletto* mostrato a destra (figura 3), basato sul *quadrato squadrato* di Duijvestijn e ben degno di una copertina di RM…

19 *Figura* 3 *di* ***Br1****: il* sorprendente mobiletto quadratamente squadrato

Adesso, come utilizzare tutto ciò per piastrellare il *giardino piano infinito di Doc*?

Come si vedrà in seguito, non è strettamente necessario considerare i *quadrati squadrati* di Tutte, Smith, Stone e Brooks (e Duijvestijn); però un po' perché il partire da essi mi sembra la soluzione più elegante, un po' per rispettare l'ordine cronologico che mi son trovato a seguire nell'affrontare il problema, direi che per cominciare possiamo prendere 21 piastrelle bianche aventi le dimensioni indicate in **Figura 2**, e cioè:

$a_1 = 2$ $a_2 = 4$ $a_3 = 6$ $a_4 = 7$ $a_5 = 8$ $a_6 = 9$ $a_7 = 11$

$a_8 = 15$ $a_9 = 16$ $a_{10} = 17$ $a_{11} = 18$ $a_{12} = 19$ $a_{13} = 24$ $a_{14} = 25$

$a_{15} = 27$ $a_{16} = 29$ $a_{17} = 33$ $a_{18} = 35$ $a_{19} = 37$ $a_{20} = 42$ $a_{21} = 50$

[14] Naturalmente, tutti i quadrati in ballo devono aver lato di lunghezza intera…

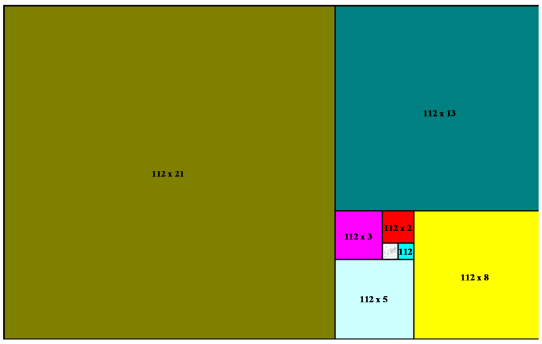
disponendole come indicato in quella stessa figura. Poi affianchiamo al *quadratone* di lato 112 così formato una ventiduesima piastrella quadrata, ad esempio azzurra, di pari dimensioni:

$a_{22}=112$

Quindi, accostandola ad uno dei lati maggiori del rettangolo appena formato, aggiungiamo la successiva, stavolta rossa:

$a_{23}=224$

e così via, come mostrato in figura 4.



20 *Figura 4 di **Br1**: la pavimentazione del* Giardino Infinito

Se si procede a spirale come in figura, la pavimentazione si estende in tutte le quattro direzioni del piano, per cui *ricopre il piano infinito*. Poi, si osserva che il lato di ciascuna piastrella successiva alla 23ª è pari alla somma dei lati delle due piastrelle precedenti, quindi:

si tratta di una *sequenza pavimentante*

è spuntata fuori la successione di Fibonacci…

Si tratta adesso di vedere se la sequenza è anche *esponenziale*, come richiesto dal quesito, cioè se esistono un valore intero n_0 ed un numero reale q tali che:

1) $\forall n > n_0 \Rightarrow a_n < q^n$

Nel caso in esame, possiamo scrivere che (visto che le prime 23 piastrelle sono *predeterminate* ed hanno lati di estensione abbastanza caotica):

2) $\forall n > 23 \Rightarrow a_n = 112 \cdot F(n-20)$

Dove *F(k)* è il *k-mo* intero della successione *standard* di Fibonacci, cioè:

3) $$\begin{cases} F(1)=1 \\ F(2)=1 \\ F(3)=2 \\ \dots \\ F(k)=F(k-1)+F(k-2) \\ \dots \end{cases}$$

Adesso, è noto *in letteratura* che:

4) $$F(k)=\frac{\varphi^k-(1-\varphi)^k}{\sqrt{5}}$$

dove φ è naturalmente il *rapporto aureo*:

5) $$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803\dots$$

Ora, nella 4), al crescere del valore di k, il primo termine del numeratore prevale sempre più sul secondo; si ha cioè:

6) $$\lim_{k\to\infty}\frac{|1-\varphi|^k}{\varphi^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|^k}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|^k=\lim_{k\to\infty}(0{,}381966\dots)^k=0$$

k	$\frac{\lvert 1-\varphi \rvert^k}{\varphi^k}$
4	2,13E-02
20	4,37E-09
50	1,26E-21
100	1,59E-42
200	2,54E-84
500	1,03E-209

21 *Figura* 5 *di* ***Br1****: come degrada* $\lvert 1-\varphi \rvert^k$ *rispetto a* φ^k *al crescere di k*

Ad esempio vedere la Figura 5.

Allora la 4), per valori di *k sufficientemente elevati*, può essere lecitamente riscritta come segue:

$$7)\ F(k) \approx \frac{\varphi^k}{\sqrt{5}}$$

Quindi, la 2) può essere espressa come qui sotto indicato (ammettendo ancora ovviamente un esponente *n sufficientemente elevato*, il che corrisponde almeno a 4 per il valore di *k* nella tabella di Figura 5 che si ha quando *n*=24, come richiesto nella relazione che segue):

$$8)\ \forall n > 23 \Rightarrow a_n = 112 \cdot F(n-20) \approx 112 \cdot \frac{\varphi^{n-20}}{\sqrt{5}} = \frac{112 \cdot \varphi^{-20}}{\sqrt{5}} \varphi^n = 0{,}00331116\ldots \cdot \varphi^n$$

Ora, essendo il coefficiente moltiplicativo di φ^n nell'ultimo membro della 8) inferiore all'unità, si può scrivere:

$$9)\ \forall n > 23 \Rightarrow a_n \approx 0{,}00331116\ldots \cdot \varphi^n < \varphi^n$$

ed allora la 9) corrisponde alla 1) cui si ambiva, con n_0=23 e q=φ… Quindi esiste almeno una S.P.E. (*Sequenza Pavimentante Esponenziale*), con $q=\varphi$=1,61803…

n	a_n	φ^n	n	a_n	φ^n	n	a_n	φ^n
1	2	1,62	9	16	76,01	17	33	3571
2	4	2,62	10	17	123	18	35	5778
3	6	4,24	11	18	199	19	37	9349
4	7	6,85	12	19	322	20	42	15127
5	8	11,09	13	24	521	21	50	24476
6	9	17,94	14	25	843	22	112	39603
7	11	29,03	15	27	1364	23	224	64079
8	15	46,98	16	29	2207			

22 *Figura* 6 *di* ***Br1****: ricerca del valore critico* n_0

In effetti, il valore di n_0 a partire dal quale la nostra *Sequenza Pavimentante* risulta *Esponenziale* può essere abbassato; calcolando infatti il valore del termine maggiorante φ^n per le prime 23 piastrelle *caotiche* viene fuori quanto mostrato in figura 6.

E quindi si vede che già con n=5 la condizione 1) è rispettata, per cui n_0=4…

Naturalmente, invece di partire dal *quadrato squadrato minimale* di Duijvestijn, si potrebbe iniziare con un altro qualsiasi *quadrato squadrato* fra quelli elencati nel sito Web sopra citato; ciascuno di essi condurrebbe ad una diversa ricopertura del *piano infinito*: semplicemente cambierebbe per ognuno di essi il valore n_0 a partire dal quale la 9) sarebbe valida, mentre il valore di q resterebbe lo stesso.

Poi, poiché ciascun *quadrato squadrato* ne può generare *infiniti altri* (semplicemente moltiplicando per una qualsiasi costante intera il lato di ciascun *sub-quadratino* componente), si vede che l'affermazione nel testo del quesito "*…probabilmente di S.P.E. (Sequenze Pavimentanti Esponenziali) ne esistono infinite…*" è sostanzialmente corretta.

Si può far di meglio, trovare cioè un valore per q inferiore a φ, almeno per questa tipologia di tassellature del piano? Supponiamo che tale valore esista, e che sia pari a φ-ε, con ε>0. Dalle 8) e 9) si dovrebbe avere (ad esempio nel *caso Duijvestijn*):

$$10)\ \forall n > n_0 \Rightarrow a_n = 112 \cdot F(n-20) \approx 112 \cdot \frac{\varphi^{n-20}}{\sqrt{5}} = \frac{112 \cdot \varphi^{-20}}{\sqrt{5}} \varphi^n < (\varphi - \varepsilon)^n$$

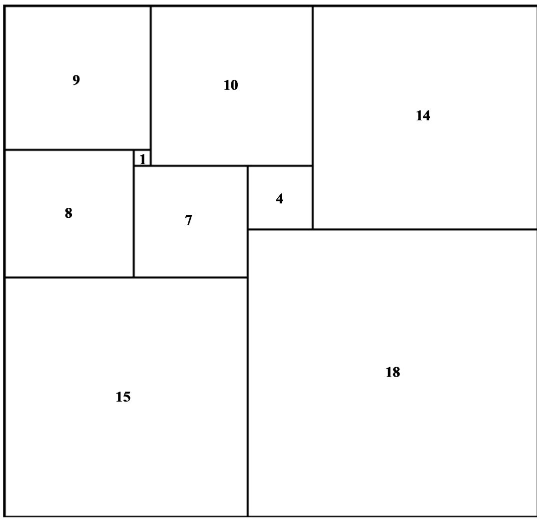
Rimescolando la disuguaglianza che appare alla destra nella 10) si ha:

$$11)\ \frac{112 \cdot \varphi^{-20}}{\sqrt{5}} < \left(\frac{\varphi - \varepsilon}{\varphi} \right)^n$$

Ora, il primo membro della 11) è una costante (pari, come visto, a 0,00331116…), mentre il secondo membro tende ad azzerarsi al crescere di *n*, essendo il rapporto fra parentesi inferiore all'unità… Ciò vuol dire che, per quanto piccolo si scelga ε, esisterà sempre un valore di n a partire dal quale la 11) non è più rispettata… Per cui viene riconfermato che è φ il minimo valore possibile per q (sempre per questa tipologia di tassellature).

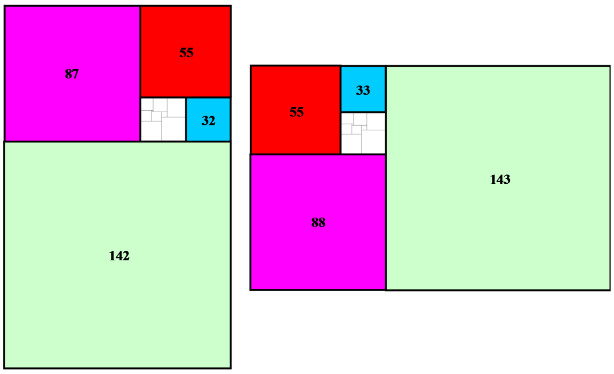
E se invece del quadrato di Duijvestijn se ne scegliesse un altro come partenza, nella 11) cambierebbero soltanto il valore '112' e l'esponente '–20', senza sostanzialmente mutare lo scenario…

Si diceva sopra che non è strettamente necessario considerare i *quadrati squadrati* di Tutte, Smith, Stone e Brooks; nella loro ricerca del *quadrato squadrato*, costoro avevano inizialmente generato dozzine di *rettangoli squadrati*, prima di pervenire ai *quadrati squadrati*. Rettangoli cioè rappresentabili come accostamenti compatti di *sub-quadrati* con lati interi tutti fra loro differenti. Il *migliore* di essi (nel senso che è stato dimostrato *minimo*) è questo che segue, di *ordine* 9 e di lati 33x32, in figura 7.



23 *Figura* 7 *di* ***Br1****: il più piccolo* rettangolo squadrato

Utilizzando come base di partenza un qualsiasi *rettangolo squadrato*, si può ancora pavimentare il piano infinito, in modo analogo a come fatto partendo dal quadrato di Duijvestijn. Stavolta però è possibile farlo in due modi lievemente distinti, potendosi aggiungere al *rettangolo squadrato* il successivo quadrato azzurro in due modi diversi, e poi procedendo a spirale come fatto sopra, ottenendo la figura 8.



24 *Figura* 8 *di* ***Br1****: la pavimentazione del* Giardino *partendo da* rettangoli squadrati

Di nuovo, a partire dal terzo quadratone aggiunto al *rettangolo squadrato*, il lato di ciascuna ulteriore piastrella è pari alla somma dei lati delle due precedenti; i valori delle lunghezze dei lati non seguono però stavolta la successione *standard* di Fibonacci (quella che inizia con 1, 1): quindi non vale più la 4)...

Si può però ricorrere ancora a Martin Gardner che, nello stesso volume sopra citato (stavolta nell'ottavo capitolo), nel raccontare faccende relative a φ segnala che:

In effetti, se cominciamo con due numeri qualsiasi e formiamo una serie additiva (per esempio 7, 2, 9, 11, 20, *...) si ha la stessa convergenza. Più va avanti la serie, più il rapporto fra due termini consecutivi si avvicina a φ.*

Questo significa che, anche partendo da *rettangoli squadrati*, si perviene a relazioni analoghe alla 9); cambierà semplicemente la costante moltiplicativa del termine φ^n.

Tutto ciò non vuol dire che non possano esistere tassellature *migliori*, nel senso che non è detto che φ sia il più basso valore possibile per q, per le *Sequenze Pavimentanti Esponenziali*. Si è solo mostrato che, per le tassellature in cui il lato dei quadrati segue la successione di Fibonacci, le *S.P.E.* esistono, sono infinite e per esse si ha $q=\varphi$.

Probabilmente Roger Penrose potrebbe trovar di meglio…

Chissà. E con questo dobbiamo proprio passare avanti.

4.2.2 Giovini, restituite il maltolto!

Ecco il solito problemino con giochini impossibili proposti ai poveri giovanotti che – malgrado il genitore – stanno veramente diventando uomini con monetine e dadi in mano:

Dicevamo, hanno usato tre monete (farlocche): la prima, che definiremo bronzo, ha la cifra 5 *sul recto e la cifra* 1 *sul verso; la seconda, detta argento, ha la cifra* 3 *sia sul recto sia su verso, mentre la terza, ovviamente oro, ha la cifra* 2 *sul recto e la cifra* 6 *sul verso.*

Alberto, a questo punto, chiede a Fred (che non sa che le monete sono truccate) di scegliere una moneta; dopo la scelta di Fred, Alberto sceglie una moneta tra le due restanti: la partita consiste in 1000 *lanci della moneta scelta e il giocatore con il lancio maggiore ad ogni tiro riceve* 10 *centesimi.*

Fred, evidentemente, sceglie la moneta oro, visto che la somma dei valori delle due facce è la maggiore: Alberto, con la massima tranquillità, sceglie quella d'argento: a fine partita, Fred perde 10 *euro.*

Per il secondo giro (sempre da mille lanci), Fred prende la moneta argento, e Alberto sceglie quella di bronzo: passati i mille lanci, Fred si accorge che questa volta ha addirittura perso il doppio della partita precedente.

TerzoGiro, Fred questa volta prende la moneta bronzo, come va a finire la terza partita?

Ma se si vincesse il valore indicato dalla moneta, e non i 10 *centesimi, si riuscirebbe a fare un gioco del genere?*

Ecco, un problema dietro l'altro.

Le soluzioni ricevute per questo sono arrivate da ***Alberto R.***, ***GaS***, ***Mirhonf*** e ***Actarus***, e visto che ci siamo dilungati sul primo problema, dovremo andare veloci su questo, cominciando proprio con ***Alberto***.

Tre monete truccate: Bronzo(5,1), Argento(3,3), Oro(2,6). Anzi, diciamo che solo due sono farlocche perché andare a truccare Argento(3,3) sarebbe un lavoro da stolti.

(A proposito, un dado si trucca zavorrandolo in prossimità di una faccia. Lo stesso accorgimento non funziona su una moneta dato il piccolo rapporto tra spessore e diametro. Allora, come si può truccare efficacemente una moneta? L'unico accorgimento che mi viene in mente è quello di usare a mo' moneta con una fetta di pane imburrata su un solo lato, che, è noto, cade quasi sempre col burro aderente al pavimento. Chiusa parentesi.)

Una partita consiste di 1000 lanci, numero sufficientemente grande per ammazzare di noia i giocatori, ma anche per un'attendibile stima delle probabilità mediante le frequenze riscontrate.

Come risulta dalle vincite di Alberto, nella prima partita Argento(3,3) batte Oro(2,6) 550 a 450, e, nella seconda partita, Bronzo(5,1) batte Argento(3,3) 600 a 400.

Abbiamo quindi le seguenti probabilità stimate:

- Bronzo(5) 60%
- Bronzo(1) 40%
- Argento(3) 100% (come ovvio)
- Oro(2) 55%
- Oro(6) 45%

Nella terza partita Fred, scottato dal risultato delle sue due prime scelte, si butta sulla terza e prende Bronzo(5,1). Ma Alberto ragiona così: se prendo Argento(3,3) vinco solo contro Bronzo(1) cioè nel 40% dei lanci. Se invece prendo Oro(2,6) sono possibili i seguenti casi:

- Oro(2) Bronzo(5) prob 55% · 60% = 33% perdo
- Oro(2) Bronzo(1) prob 55% · 40% = 22% vinco
- Oro(6) Bronzo(5) prob 45% · 60% = 27% vinco
- Oro(6) Bronzo(1) prob 45% · 40% = 18% vinco

E vinco nel 67% dei casi, e così faccio.

Morale della favola: la relazione *"X vince su Y"* non sempre è transitiva, ma, come nella morra cinese, si possono formare dei loop. Nel nostro caso Bronzo vince su Argento, Argento vince su Oro e Oro vince su Bronzo. Quindi chi sceglie per secondo è sempre avvantaggiato.

È interessante osservare che è possibile inventare giochi con cicli di qualunque dimensione. Vi do un esempio di ciclo "esagonale".

I numeri da 1 a 36 sono distribuiti sulle 36 facce di 6 dadi onesti in questo modo:

- 1° dado 6, 11, 16, 21, 26, 31
- 2° dado 5, 10, 15 ,20, 25, 36
- 3° dado 4, 9, 14, 19, 30, 35
- 4° dado 3, 8, 13, 24, 29, 34
- 5° dado 2, 7, 18, 23, 28, 33
- 6° dado 1, 12, 17, 22, 27, 32

È facile verificare che, con probabilità 5/9, ogni dado vince sul successivo, ma il 6° vince sul 1° chiudendo il cerchio. (Questo gioco non spiegatelo ad Alberto, ma solo a Fred che ha diritto di recuperare quanto Alberto gli ha truffato con le monete truccate).

Infine la variante in cui la vincita, in centesimi, è pari al valore facciale della moneta vincente (anziché fissa a 10 centesimi) si risolve, mutatis mutandis, con calcolo analogo. Adesso il loop scompare e, su 1000 lanci, Oro vince mediamente € 14,90 su Bronzo ed € 10,50 su Argento; e Bronzo vince € 6.00 su Argento. Questa volta la relazione *"X vince su Y"* è transitiva quindi è avvantaggiato chi sceglie per primo e prende Oro.

Come vedete, la risposta del Nostro è senza dubbi alcuni, e lo stesso vale per ***Mirhonf***:

Prima partita.

Fred sceglie la moneta d'oro. Alberto quella di argento.

Dopo 1.000 lanci Fred perde €10. Se Fred ha vinto in x casi ed ha perso in (1.000-x) casi si ha:

0,1x – 0,1(1000-x) = -10 da cui x=450.

Cioè, Fred ha vinto 10 centesimi in 450 tiri, ed ha perso 10 centesimi in 550 tiri.

Poiché ad Alberto esce sempre 3 (la moneta d'argento ha 3 su entrambe le facce), la moneta d'oro è truccata: in 450/1000=9/20 casi esce 6, nei restanti 11/20 casi esce 2.

Seconda partita.

Fred sceglie la moneta di argento. Alberto quella di bronzo.

Dopo 1.000 lanci Fred perde €20. Se Fred ha vinto in x casi ed ha perso in (1.000-x) casi si ha:

0,1x – 0,1(1000-x) = -20 da cui x=400.

Cioè, Fred ha vinto 10 centesimi in 400 tiri, ed ha perso 10 centesimi in 600 tiri.

Poiché a Fred esce sempre 3, la moneta di bronzo è truccata: in 400/1000=2/5 casi esce 5, nei restanti 3/5 casi esce 1.

Terza partita.

Fred sceglie la moneta di bronzo. Alberto quella di oro (altrimenti si verificherebbe l'esito della seconda partita ma a parti invertite).

Mi aspetto che a Fred in 400/1000 casi esca 5 e in 600/1000 casi esca 1; ad Alberto in 450/1000 casi esca 6 e in 550/1000 casi esca 2.

Da cui si deduce che:

- in 180/1000 casi a Fred esce 5 e ad Alberto esce 6 (vince Alberto);
- in 220/1000 casi a Fred esce 5 e ad Alberto esce 2 (vince Fred);
- in 270/1000 casi a Fred esce 1 e ad Alberto esce 6 (vince Alberto);
- in 330/1000 casi a Fred esce 1 e ad Alberto esce 2 (vince Alberto).

Quindi in 780/1000 tiri Alberto vince 10 centesimi, in 220/1000 tiri Fred vince 10 centesimi: <u>quando si conclude la terza partita Alberto vince €56</u>.

Se ad ogni tiro, invece dei 10 centesimi, si vincesse il valore indicato dalla moneta, si avrebbero i seguenti 3 casi:

1. oro contro argento: in 450/1000 casi oro vince €0,06, in 550/1000 casi argento vince €0,03; dopo 1000 tiri oro vince €10,50.
2. oro contro bronzo: in 180/1000 casi oro vince €0,06; in 220/1000 casi bronzo vince €0,05; in 270/1000 casi oro vince €0,06; in 330/1000 casi oro vince €0,02. Quindi dopo 1000 tiri oro vince €22,60.
3. argento contro bronzo: in 400/1000 casi bronzo vince €0,05; in 600/1000 casi argento vince €0,03; dopo 1000 tiri, bronzo vince €2.

Quindi, se Fred sceglie la moneta d'oro, Alberto perde sicuramente: dovrà scegliere argento per perdere soltanto €10,50.

Se Fred sceglie la moneta d'argento, Alberto vincerà sicuramente: sceglie la moneta d'oro per vincere €10,50.

Se Fred sceglie la moneta di bronzo, Alberto dovrà scegliere la moneta di oro, vincendo così €22,60.

Non vi stupisce mai con quanta determinazione e certezza arrivano le risposte quando si tratta di probabilità? Mentre con un problema geometrico no? Non capirò mai i vostri ragionamenti. Ma non è poi così importante, quello che capisco io, l'importante è che ci si ritrovi su queste pagine il mese prossimo. A presto!

5. Quick & Dirty

Recentemente abbiamo comprato un libro di un matematico ricreativo italiano (per motivi che saranno chiari entro la fine del periodo, non vi diciamo chi sia) e siamo piuttosto seccati: pur avendo ***otto*** possibilità di citarci, il nostro nome non compare in nessun punto! Evidentemente, abbiamo letto il libro e abbiamo cercato di "fargli le pulci"...

Problema

Qual è la probabilità che gettando quattro volte un dado, si presenti sempre la stessa faccia?

Soluzione

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 .$$

La probabilità di avere un dato numero al primo tiro è 1/6, ed è 1/6 di 1/6, cioè 1/6x1/6 la probabilità che al secondo tiro si presenti ancora lo stesso numero, 1/6x1/6x1/6 al terzo tiro e 1/6x1/6x1/6x1/6 al quarto tiro.

Perché è una "pulce"?

6. Pagina 46

Utilizzeremo il metodo di induzione.

Il numero $\overline{aaa}$, formato da tre cifre uguali (utilizziamo la barra superiore per indicare che si tratta della *composizione* del numero, non di un prodotto) è evidentemente divisibile per 3, visto che la somma delle sue cifre è 3·*a*. Questo dimostra il caso *n*=1.

Supponiamo ora la proposizione sia stata dimostrata vera per i numeri di questo tipo formati da 3^n cifre: dimostriamo che sotto questa premessa la proposizione è vera per i numeri di questo tipo formati da 3^{n+1} cifre.

Un numero formato da 3^{n+1} cifre identiche si può scrivere sotto la forma:

$$\overline{a\underbrace{a\ldots a}_{3^n}\underbrace{a\ldots a}_{3^n}\ldots a\underbrace{a\ldots a}_{3^n}} = \overline{a\underbrace{a\ldots a}_{3^n}}\cdot 10\underbrace{0\ldots 0}_{3^n}10\underbrace{0\ldots 0}_{3^n}1.$$

Il secondo membro è composto da due termini: il primo, per l'ipotesi del principio di induzione, è divisibile per 3^n, mentre il secondo, essendo la somma delle sue cifre pari a 3 (compaiono solo tre termini "1" nel numero) è divisibile per 3.

Quindi il numero a primo membro è divisibile per 3^{n+1}, il che prova la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

Questa serie (e oggi questa parola smette di essere una speranza per diventare una realtà) è un contributo (in minima parte nostro) al 2013 come anno della *Matematica per il pianeta Terra*.

7.1 ...e adesso, un bel respiro!

Welcome, sulphur dioxide,
Hello, carbon monoxide,
The air, the air, is ev'rywhere
G. RAGNI e J. RADO, *Hair*

Il titolo è giustificato da due ragioni:

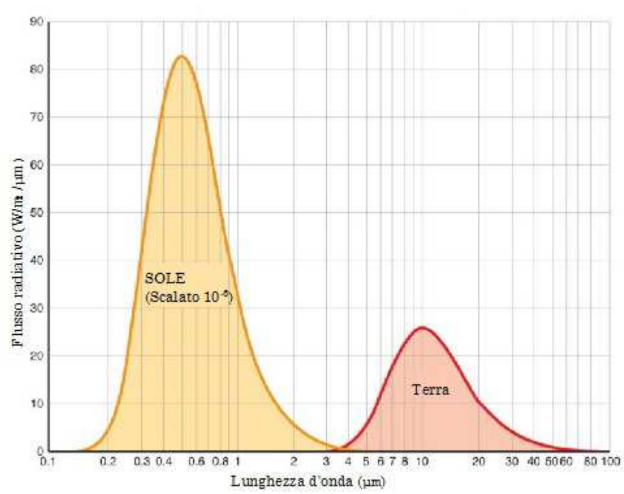
1. Secondo lo scrivente (Rudy) è una parte piuttosto noiosa
2. I risultati balordi dell'altra volta erano dati dalla presenza *dell'aria*.

Pronti? Via.

Riprendiamo i calcoli sbagliati dell'altra volta: avevamo considerato la Terra come un corpo nero all'equilibrio termico, poi avevamo detto che in realtà *assorbe* il 70% della radiazione che lo colpisce, il resto viene riflesso. Forse qui sta il *busillis*.

La Terra assorbe buona parte della radiazione che la colpisce sotto forma di *luce visibile*, ma la radiazione emessa è praticamente tutta nell'*infrarosso*, ossia viene emessa sotto forma i calore, e in questa zona dello spettro il nostro pianeta si comporta praticamente come un corpo nero, il che è bene.

La cosa è abbastanza chiara dalla figura a fianco: l'emissione del Sole si trova principalmente a lunghezze d'onda più basse rispetto a quelle della Terra, che ha uno spettro di emissione spostato in avanti con il massimo nella zona dell'infrarosso: come dicevamo, tutti e due i grafici seguono ragionevolmente bene la curva radiativa del corpo nero.



1 *Curve di emissione di corpo nero del Sole e della Terra*

"Rudy, non per fare il pignolo, ma a me avevano detto che le radiazioni infrarosse hanno una lunghezza d'onda *inferiore* a quella della luce visibile..."

Ottima domanda, vuol dire che siete attenti: notate che lo spettro di emissione solare è scalato di un fattore 10^{-6}, quindi la parte nella zona del visibile risulta minima: morale della favola, lo spettro di *emissione* della Terra è completamente diverso da quello di *assorbimento*.

E qui vale la pena di farci un pensierino: assorbimento ed emissione non sono altro che due facce della stessa medaglia e, dal *principio di reciprocità* (ricordate la terza legge della dinamica?), se $\boldsymbol{X}$ agisce su $\boldsymbol{Y}$, dobbiamo tenere conto del fatto che $\boldsymbol{Y}$ agisce su $\boldsymbol{X}$: ad ogni *azione* corrisponde una *reazione* opposta (lo abbiamo fatto apposta a non usare "forza"): una volta tanto, il modo meno chiaro di esprimersi non è appannaggio dei matematici, ma degli ingegneri, infatti, per loro:

> In un sistema lineare la reciprocità è il principio per il quale la risposta R_{ab} misurata nel punto a quando il sistema subisce un'eccitazione nel punto b è pari

alla risposta R_{ba} misurata nel punto *b* quando il sistema subisce la stessa eccitazione nel punto *a*.

...e la cosa si applica per tutte le frequenze di eccitazione.

Forse la cosa un volta tanto è più chiara dal punto di vista matematico puro: se abbiamo una funzione delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ continua e derivabile, e definiamo:

$$R_{ab} = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b},$$

Allora $R_{ab} = R_{ba}$.

Comunque questo aggeggio si traduce nell'ambito che ci interessa come: *la tendenza di un oggetto ad assorbire la luce ad una certa frequenza è pari alla sua tendenza ad emettere luce alla stessa frequenza.* La cosa comincia ad essere più chiara: la formulazione definitiva è nota come ***Legge di Kirchoff***[15] ***della radiazione termica***::

$$e_\lambda(T) = a_\lambda(T).$$

Che vuol dire quanto abbiamo detto sopra, tenendo conto della legge di Planck che impone una dipendenza dalla temperatura: ed è esattamente per questo motivo che abbiamo una capacità di emettere pari a 1 nell'infrarosso e pari a 0.7 nel visibile (vi ricordate dell'albedo, vero?).

Complicato? Tranquilli, adesso peggiora.

Quando la radiazione elettromagnetica attraversa un mezzo, ne succedono di tutti i colori[16]: può attraversare il mezzo, può essere *rifratta*... non solo, ma se il nostro mezzo è abbastanza caldo, può anche essere emessa: da esperienza personale possiamo dire che l'atmosfera non emette nel visibile, ma nelle microonde e nell'infrarosso qualcosa troviamo. Da cui, possiamo cominciare a pensare a un ***flusso di energia monocromatica***, e, siccome la radiazione elettromagnetica può essere emessa, assorbita o *scatterata*[17], dobbiamo lavorare su una funzione che preveda la distanza percorsa attraverso il mezzo. Quindi, una $I_\lambda(s)$: se, come al solito, diluiamo le nostre richieste, imponendo che la radiazione sia *solo assorbita* (quindi niente emissione o scattering), un notevole aiuto ci viene dall'***equazione di Beer-Lambert***:

$$\frac{dI_\lambda(s)}{ds} = -a_\lambda(s) I_\lambda(s).$$

Che, in soldoni, significa che l'ammontare di radiazione assorbita ad una certa distanza è proporzionale all'intensità della radiazione... e tante grazie, ci voleva tutta 'sta fatica, per dirlo? In realtà, sì: mettendo assieme tutto quanto, quando risolvete l'equazione tra due punti ottenete un aggeggio di questo genere:

$$I_\lambda(s_2) = \mathrm{e}^{-\int_{s_1}^{s_2} k_\lambda(s)\rho(s)ds} I_\lambda(s_1).$$

[15] Non quello, un altro. Quello al quale state pesando ha due "h" nel nome.

[16] Siete autorizzati a interpretare questa frase in senso letterale.

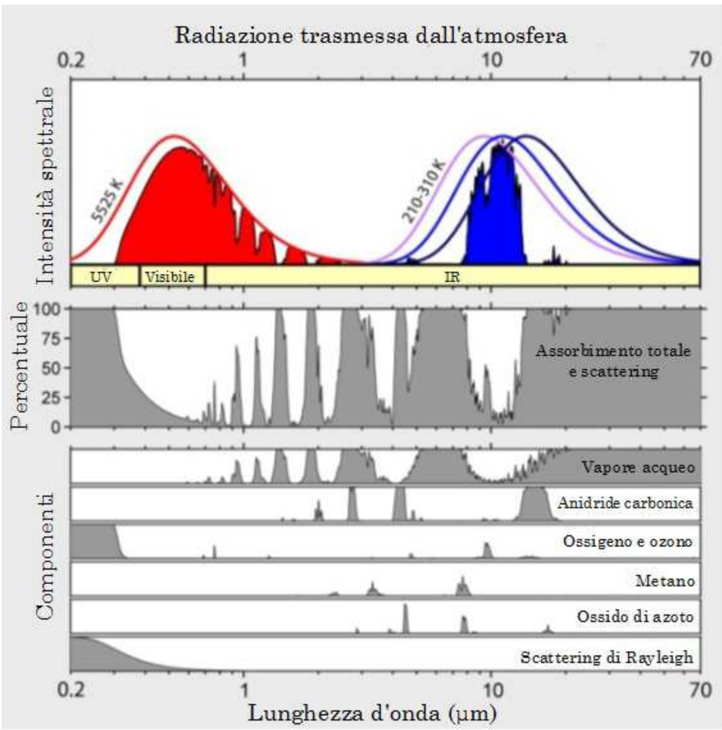
[17] Questa parola è qui espressamente per trovare una traduzione decente: anche durante i molti e lunghi anni passati all'Istituto Fisico, abbiamo sempre parlato di *scattering*.

Dove abbiamo inserito la densità e i necessari coefficienti di assorbimento: sempre in soldoni, l'assorbimento dipende non solo dalla distanza, ma anche dalla composizione del mezzo, il che è un guaio se consideriamo che densità e umidità dell'atmosfera variano con l'altezza.

E non stiamo considerando l'assorbimento. Qui, per fortuna, le cose vanno un po' più lisce: vale ancora la ***legge di Planck***, di cui abbiamo parlato il mese scorso. In fin della fiera, esplicitando un po' di termini, abbiamo:

$$\frac{dI_\lambda(s)}{ds} = a_\lambda(s)\cdot\left(\frac{2hc^2}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1} - I_\lambda(s)\right).$$

Ci pare evidente che un aggeggio così complicato debba avere un nome complicato: infatti, è noto come ***equazione di Schwarzschild***.



2 *Praticamente, tutto*

Un grafico vale mille parole (e una parolaccia vale mille grafici), quindi è meglio se proviamo a raccogliere le idee. Mettiamo tutto in un disegno solo, poi cerchiamo di capirlo dall'alto al basso.

Il primo grafico ci dice cosa succede in teoria e in pratica nell'atmosfera: la parte rossa indica, con la curva, quale *dovrebbe essere* la radiazione ricevuta dalla Terra se il Sole fosse un corpo nero che emette a 5525 gradi (Kelvin!), quello che arriva effettivamente al suolo lo vedete campito in rosso. La parte blu indica il contrario, ossia cosa vedete emettere alla Terra se siete nello spazio: in viola, blu, nero, le aspettative di un corpo nero alle temperature tra 210 e 310 (sempre Kelvin!), mentre la parte campita in blu come al solito indica la realtà.

Spero siate d'accordo che il secondo grafico, con buona approssimazione, è "il primo al contrario", ossia dove ci sono i picchi nel primo ci sono i buchi nel secondo: detta alla grossa, è "quello che perdiamo rispetto alla teoria", ossia il motivo per il quale considerare la Terra un corpo nero non funziona[18].

[18] Stiamo approssimando ***molto***: dovremmo solo contare le curve teoriche, vedere cosa succede dove le curve teoriche valgono zero... Sarebbe un'enorme fatica e i risultati sarebbero sostanzialmente gli stessi. Un po' come per l'albedo la volta scorsa: e se non ci credete, fatevi i conti.

Finalmente, nel terzo grafico (che in realtà sono sei) troviamo i colpevoli: chi assorbe e chi scattera[19]. Tra l'altro, come diceva il prof di Fisica Generale II preferito da due di noi *[Ciao, "Pirag"! RdA & PRS]*, l'ultimo grafico è il motivo per cui il cielo è blu: diffusione delle alte frequenze.

Torniamo un attimo al primo grafico (o al secondo, se preferite, tanto sono la stessa cosa): vi siete accorti che c'è *un mucchio di spazio tra le curve teoriche e la realtà*? Considerato che la Terra (escludendo l'atmosfera) *ci prova*, a fare "la teorica", dove va a finire tutta quella roba? Risposta nei sei grafici sotto: l'assorbono (scaldandosi, siamo negli infrarossi!) le varie molecole presenti nell'aria.

E questo, casomai non ci foste arrivati da soli, si chiama ***effetto serra***. E le parolacce di cui sopra, a questo punto, ci starebbero proprio bene, visto che la differenza tra il teorico e il pratico, nel punto topico, se la fa proprio l'anidride carbonica, e quella la emettiamo noi!

Se il "thrilling" della cosa vi ha fatto tenere il fiato sin qui, non emettendo anidride carbonica avete contribuito a ridurre l'effetto serra. Siamo fieri di voi.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[19] OK, se siete arrivati fin qui vi meritate un premio: in italiano si dice *diffusione*. "E perché non l'hai detto prima?" "Perché volevo vedere se arrivavate sin qui".