



Rudi Mathematici



Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 167 – Dicembre 2012 – Anno Quattordicesimo



1. Il re del gioco dei re.....	3
2. Problemi.....	15
2.1 On the Road.....	15
2.2 Puzza di Ramsey.....	16
3. Bungee Jumpers.....	16
4. Era Una Notte Buia e Tempestosa.....	16
4.1 Enigma – La strana vita di Alan Turing.....	17
5. Soluzioni e Note.....	20
5.1 [Calendario 2006] – Aprile 2006: IMO 1959 – 4.....	21
5.2 [161] – Summer Contest – problema 9.....	22
5.3 [164].....	24
5.3.1 Vendetta, tremenda vendetta!.....	24
5.4 [165].....	27
5.4.1 Questo (non) è un problema.....	27
5.5 [166].....	29
5.5.1 Più che pace, tregua armata.....	29
5.5.2 Arriva un altro gioco!.....	42
6. Quick & Dirty.....	45
7. Pagina 46.....	45
8. Paraphernalia Mathematica.....	46
8.1 Per i campi dorati.....	46



	<i>Rudi Mathematici</i> Rivista fondata nell'altro millennio da <i>Rudy d'Alembert</i> (A.d.S., G.C., B.S) rudy.dalembert@rudimathematici.com
	<i>Piotr Rezierovic Silverbrahms</i> (Doc) piotr.silverbrahms@rudimathematici.com <i>Alice Riddle</i> (Treccia) alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com	
RM166 ha diffuso 2966 copie e il 01/12/2012 per  eravamo in 31'900 pagine.	
Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto <i>concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione</i> alle condizioni indicate alla pagina diraut.html del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.	

Non ci possiamo dire dei fanatici dell'ottovolante (o *roller-coaster*, come preferiscono gli anglofoni), ma l'idea messa in piedi a *Duisberg* da *Ulrich Gent* e *Heike Mutter* ci pare valida: un ottovolante senza vagoncini. Finalmente, possiamo goderci l'emozione con calma. Il primo che passa da quelle parti, ci fa sapere come si fa a fare il *loop*? Dalle foto non si è capito.

1. Il re del gioco dei re

*“Quando vedi una buona mossa,
cercale una migliore.”*

Sono passati giusto quarant’anni dall’ultima volta che una sfida scacchistica è finita sulle prime pagine di tutti i giornali del mondo.

Correva l’anno 1972, e tra agosto e settembre l’americano Robert J. Fischer sconfisse il campione del mondo in carica, il sovietico Boris Spasskij, in quel di Reykjavík, Islanda, con il punteggio di 12,5 a 8,5. I due contendenti erano scacchisti di grandezza assoluta: l’americano, in particolar modo, era un fenomeno così eccezionale che molti lo considerano tutt’ora il giocatore più forte della storia degli scacchi. Ciò non di meno, non era tanto per il valore dei contendenti che il mondo seguiva con apprensione l’esito della sfida, quanto per l’inevitabile inserimento dell’evento nello scontro che a quei tempi marcava quasi ogni tipo di competizione: la Guerra Fredda.

A guardare le cose a quasi mezzo secolo di distanza, è un po’ triste e un po’ buffo ricordare il modo di vivere le cose di allora. I ragazzini crescevano con l’idea della conquista dello spazio, e per quanto fosse ben chiaro anche a loro che il mondo era diviso in due grandi blocchi, quello degli USA e quello dell’URSS, pensavano di star vivendo un momento cruciale della storia dell’umanità. I razzi salivano sbuffando dalle rampe spaziali, sparivano nel blu del cielo della Florida o del Kazakistan, e la sensazione era quella che si stesse davvero partendo verso un viaggio grandioso e inarrestabile. Attaccati alle televisioni in bianco e nero che avevano una risoluzione che adesso viene usata al massimo per mascherare i dettagli di immagini che non si vogliono mostrare, avevano la stessa sensazione di coloro che, sul molo, agitano i fazzoletti salutando i fortunati passeggeri delle navi che vanno verso un altro continente. Adesso, invece, è abbastanza evidente che era solo una complicata competizione sportiva: un po’ come i cento metri piani alle Olimpiadi, solo che il filo di lana era posto sulla superficie della Luna, ed era oggettivamente complicato arrivare a tagliarlo.

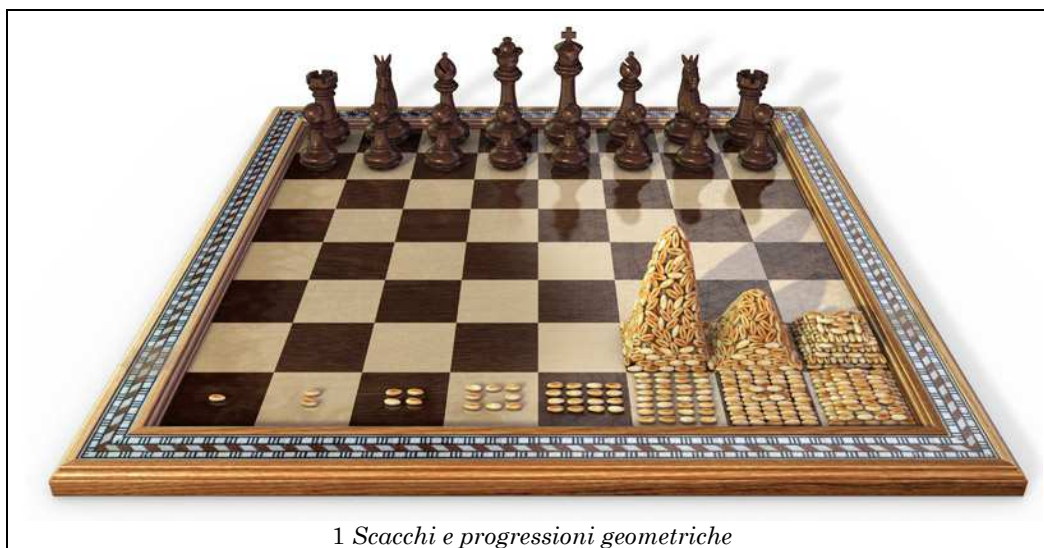
Era un periodo in cui era normale aspettarsi di morire sotto una bomba atomica: con le due superpotenze indaffarate a costruire bombe sempre più potenti, l’idea che prima o poi sarebbe scoppiato il disastro finale era considerata tutt’altro che folle. Si può dire che era considerata allora assai più probabile di quanto lo sia adesso l’idea di saltare per aria per causa di un attentato di qualche forma di integralismo religioso. Però i ragazzini guardavano lo stesso i razzi, e leggevano fantascienza, e magari si iscrivevano poi alle facoltà scientifiche non tanto per avere la sicurezza di un lavoro, quanto per la convinzione di poter partecipare attivamente ad una sorta di missione mondiale di progresso.

Quali che siano le ragioni vere e profonde di un evento considerato d’importanza cruciale, la risonanza è sempre tale da creare conseguenze, strascichi, affiliazioni: e gli scacchi trovarono un periodo d’oro, anche se il campionato del mondo del 1972 rientrò, forse senza neppure che gli scacchisti se lo aspettassero, pienamente nella logica dei Due Blocchi. Da moltissimo tempo i campioni di scacchi erano tutti oltrecortina, e il gioco ad alti livelli considerato quasi un monopolio del blocco orientale. Del resto, in Unione Sovietica e in molti paesi del Patto di Varsavia gli scacchi si insegnavano anche nelle scuole, e non c’era dilettante occidentale che non fosse colto da un sacro timor panico se per caso finiva di fronte ad una scacchiera contro un coetaneo russo o ungherese. Ciò non di meno, da qualche anno era salita nell’empireo degli scacchi la stella di Bobby Fischer, che fin da ragazzino aveva mostrato di saper trasformare i sedici pezzi affidatigli in una autentica macchina da guerra. L’idea che un americano potesse rompere, da solo, tutto il prestigio consolidato della scuola sovietica era un’occasione troppo ghiotta per non essere vissuta come “l’incontro del secolo”, e l’incontro Fischer-Spasskij diventò rapidamente, dal punto di vista mediatico, una specie di nuova corsa alla Luna. Visto che non è salutare vedere

chi sa far scoppiare meglio le bombe H, vediamo chi lancia gli astronauti più lontano. Visto che non è ancora il caso di vedere se salta prima New York o Mosca sotto un fungo atomico, vediamo chi è più bravo a spostare alfiere e cavalli sulle sessantaquattro caselle.

Certo, a rendere credibile il tutto contribuì anche il fatto che gli scacchi sono da sempre considerati uno sport altamente intellettuale: anzi, un vero e proprio indice di intelligenza. Questo è uno dei punti di contatto che hanno con la matematica; gli uni e l'altra possono piacere o no, ma è del tutto comune l'opinione che un matematico e uno scacchista debbano avere un cervello di prim'ordine. Inoltre, la radice di entrambe le attività sembra essere di natura logica, rigorosa, quasi meccanica: nessuno nega che "cervelli di prim'ordine" abbondino anche in molti altri campi; basti pensare alla genialità che occorre per diventare un grande musicista, o un medico di fama, o un luminare del diritto. Ma in qualche modo sembra che i meccanismi alla base del "gioco dei re!" coincidano con quelli della matematica, e spesso ci si aspetta dai matematici che siano dei buoni giocatori di scacchi.

In realtà, questa coincidenza di interessi è forse meno frequente di quanto ci si potrebbe a prima vista aspettare. Ci sono molti matematici che amano gli scacchi, e certo molti scacchisti trovano la matematica piacevole e divertente, ma è probabile che nella realtà l'intersezione tra le due discipline sia meno ampia di quella che si è usualmente portati a credere. Ciò non di meno, la più famosa leggenda sugli scacchi ha una natura matematica.



1 Scacchi e progressioni geometriche

Appare per la prima volta nel 1256, raccontato da Ibn Khallikan: il gran visir Sissa ben Dahir batté agli scacchi² il suo Re Shiran, e questi gli chiese cosa volesse in premio per la partita vinta. Sissa fece la sua celeberrima richiesta: un chicco di grano per la prima casella, due per la seconda, quattro per la terza, otto per la quarta, e così via. Richiesta apparentemente modesta, ad un primo sguardo, ma che diventava, appena liberata la dirimpiente energia della progressione geometrica, del tutto insostenibile³.

La relazione è comunque molto debole: in fondo, dal punto di vista matematico, avrebbe funzionato benissimo anche se i due avessero giocato a dama, o sulla spirale da novanta caselle del gioco dell'oca; anzi, in questo caso l'esplosione dei chicchi di grano sarebbe stata ancora più clamorosa. Un'altra relazione tra matematica e scacchi è il sistema di

¹ Gli Scacchi sono detti "Gioco dei re e re dei giochi".

² Visto che la leggenda si perde nella notte dei tempi, è verosimile che la partita in questione non fosse esattamente una partita di scacchi moderni, ma più probabilmente di Chaturanga o Shatranj, antenati del gioco moderno.

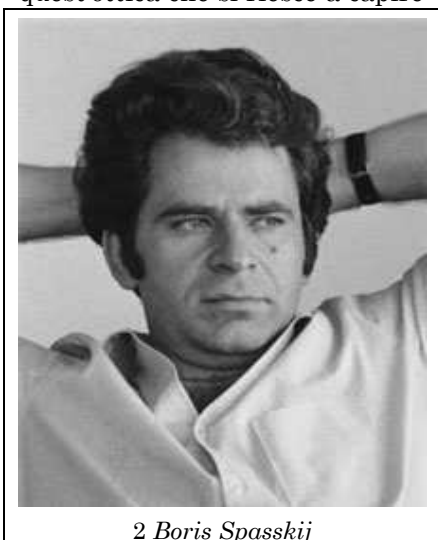
³ C'è chi si è divertito a calcolare a quanto corrispondano, in pratica, i $2^{64}-1$ chicchi richiesti: ponendo che trovino posto cento chicchi in un centimetro cubo (ipotesi estremamente ottimista), il carico totale di grano si dovrebbe stipare in due miliardi di vagoni merci. Un trenino lungo circa mille volte l'equatore.

calcolo della forza dei giocatori; inventato da un professore di cibernetica, il “Punteggio Elo” è diventato un mezzo di valutazione della forza dei giocatori così diffuso che sono davvero molti gli sport che lo hanno fatto proprio: quasi tutti i ranking mondiali di sport o giochi che prevedono sfide individuali si basano sul sistema inventato per gli scacchi. Quando il papà di Facebook, Mark Zuckerberg, decise di infestare il sistema informatico di Harvard con il suo “Facemask”, programma che consentiva agli studenti di decidere quale fosse la più bella tra due fanciulle presentate a video, chiese ad un compagno di corso l’algoritmo del sistema Elo, per valutare al meglio i risultati dei “duelli”.

È quindi probabile che per cercare una relazione convincente tra matematica e scacchi (e salvare così il luogo comune che li vede affratellati) occorra scavare soprattutto nel novero degli scacchisti. Il guaio è che gli scacchi, come tutti i giochi e gli sport⁴, sono soprattutto una attività per giovinastri: quelli molto bravi cominciano a fare sfracelli fin da ragazzini, e di solito non perdono troppo tempo a studiare le funzioni ellittiche, quando scoprono che riescono a guadagnarsi da vivere facendo (e vincendo) tornei. Bobby Fischer si guadagnò l’attenzione del mondo scacchistico quando, alla tenera età di tredici anni, strapazzò quello che era con ogni probabilità il più forte giocatore americano del tempo, Donald Byrne⁵. Diventò Grande Maestro all’età di quindici anni e allo stesso tempo il più giovane candidato della storia al Campionato del Mondo. È insomma evidente che per giocatori del genere non si possono trovare relazioni tra gli scacchi e la matematica o altre discipline, per la buona ragione che non esiste niente, nella loro vita, al di fuori degli scacchi. È solo in quest’ottica che si riesce a capire – almeno in parte – la profonda incapacità di vivere una



3 Bobby Fischer



2 Boris Spasskij

vita “normale” per Fischer e per altri che, come lui, non riuscivano ad uscire davvero dal limite quadrato delle 8x8 caselle. Quando divenne campione del mondo era assolutamente il più forte giocatore del pianeta, e di gran lunga, ma era anche una persona che faceva molta fatica ad inserirsi nel mondo.

Il suo avversario, Boris Spasskij, era assai più normale. Anche lui si mise in mostra da giovane, anche se non quanto il suo più celebre avversario americano. Era diventato campione del mondo nel 1966, e il celebre match del 1972 fu la sua seconda (e ultima) difesa ufficiale del titolo: la FIDE aveva stabilito che i match con il titolo mondiale in palio andavano disputati ogni tre anni. Tre anni durante i quali si sarebbero tenuti dei regolari tornei, detti “Zonali” e “Interzonali”, avrebbero infine ridotto la rosa dei possibili sfidanti ad un numero di otto.

Questi si scontravano poi in quello che si chiamava “Torneo dei Candidati”, il vincitore del quale era finalmente quello che poteva sfidare il campione del mondo in carica con il titolo in palio. Spasskij era stato tra i Candidati per tre volte, prima di conquistare

⁴ Sulla possibilità o meno di considerare gli scacchi uno sport, non ci soffermeremo troppo. È una diatriba che va avanti da decenni, e ognuno ha la sua irremovibile convinzione. Certo è che, per quel che può contare, un torneo impegnativo costa spesso diversi chili di peso ai partecipanti, e soprattutto che la FIDE (Fédération Internationale des Échecs, l’ente supremo mondiale degli scacchisti) ha delle rigorose normative antidoping.

⁵ È comunque bene non considerare questo un evento comune: quella partita è nota oggi con il modesto soprannome di “Partita del Secolo”.

l'accesso allo scontro decisivo: e ci tornò ancora per altre quattro volte, dopo la sconfitta contro Fischer. Le regole della Federazione erano molto rigide, ma tutto sommato necessarie: per molto tempo gli scontri con il titolo mondiale in palio erano stabilite dal campione in carica, ed erano quasi sempre spudoratamente sbilanciate a favore del detentore. Fischer, che probabilmente avrebbe potuto vincere per molti anni ancora qualsiasi avversario anche seguendo le norme prescritte, era però davvero fuori dal mondo. Colto un po' da mania di grandezza e un po' da manie di persecuzione, si rifiutò di mettere il suo titolo conquistato nel 1972 in palio secondo le regole federative, e così nel 1975 perse d'ufficio il Campionato del Mondo.



4 Anatolij Karpov

A succedergli fu Anatolij Karpov. Spasskij era stato il Campione del Mondo numero dieci, Fischer l'undicesimo, e Karpov fu pertanto il dodicesimo campione del mondo "ufficiale" della storia. L'aggettivo "ufficiale" serve soprattutto a chiarire che è solo da un certo momento ben preciso della storia, nel 1886, che il concetto di "Campione del Mondo di Scacchi" ha un significato formalmente preciso. In precedenza, una gran quantità di giocatori che hanno fatto la storia degli scacchi e i cui nomi assurgono a vere e proprie leggende per gli appassionati, non possono fregiarsi del titolo ufficiale. Per raccontare la storia del gioco, molti storici degli scacchi elencano nomi di quelli che si possono considerare "campioni del mondo non ufficiali" di scacchi, o quantomeno i giocatori più forti del loro tempo. Tra questi "non campioni del mondo" si trovano una pletora di leggende degli scacchi: giocatori che illuminano i sogni dei ragazzini che cominciano a muovere legname sulla scacchiera,

perché sono in gran parte gli eroi del cosiddetto "periodo romantico", quando un giocatore era considerato tanto più bravo quanto più spettacolari erano le sue partite, con combinazioni vertiginose e sacrifici dal travolgente senso estetico. Il diciottesimo e il diciannovesimo secolo abbondano di personaggi che, seppure non possono vantarsi del titolo "ufficiale", perché a quei tempi non v'erano regole consolidate, hanno lasciato i loro nomi indelebilmente scritti nella storia del gioco. Legall de Kermeur, il cui "matto" più



5 Wilhelm Steinitz

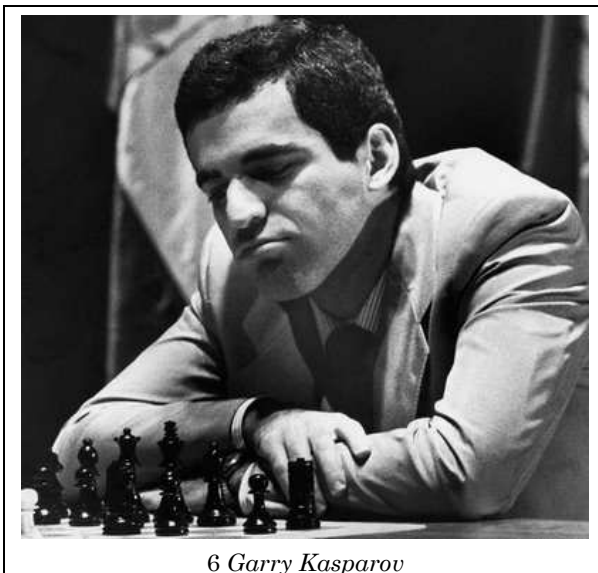
famoso è stato messo in versi; Philidor, che mostrò il ruolo essenziale dei pedoni; i francesi Deschappelles e La Bourdonnais, che sui tavolini dei caffè parigini dispensavano scacchi matti a chiunque fosse tanto folle da sfidarli; l'inglese Staunton, che oltre ad aver dato il nome alla forma dei pezzi ancora oggi più diffusa, era anche un giocatore di forza eccezionale. Soprattutto, verso la fine dell'Ottocento, lasciarono la loro impronta immortale il tedesco Adolf Anderssen e l'americano Paul Morphy: non c'è libro di scacchi che non ricordi le loro migliori partite, dense di combinazioni da capogiro. Morphy, in particolare, aveva in comune con Fischer la nazionalità e la giovane età, e il sentirsi un po' unico rappresentante del suo emisfero, visto che a quei tempi il centro del mondo degli scacchi era l'Europa; soprattutto, aveva in comune il fatto, riconosciuto in maniera unanime dagli storici, di essere stato per un certo periodo il giocatore più forte del suo tempo.

Subito dopo Morphy, tanto per rendere la sua figura

ancora un po' più tragica, i campioni del mondo diventano davvero "ufficiali", e il primo a potersi fregiare del titolo fu Wilhelm Steinitz, fortissimo giocatore austriaco (poi divenuto americano). Steinitz conservò accuratamente il suo titolo dal 1886 al 1894: il suo merito maggiore, cosa che lo rende un po' antipatico alle già menzionate schiere di ragazzini affascinati dal gioco combinatorio denso di sacrifici e di salti mortali, fu quello di dimostrare, sia in teoria sia in pratica, che un gioco "scientifico", metodico e razionale era più conveniente del gioco romantico che aveva spopolato per tutto il diciannovesimo secolo.

Se si vuole andare in cerca di glorie nazionali, per noi italiani è sufficiente scavare solo un po' di più nel passato. Gli scacchi arrivano in Europa più o meno nel Cinquecento, portati dagli arabi. Il primo testo importante sul gioco è scritto da uno spagnolo, Ruy Lopez, il cui nome è immortalato in una delle più celebri "aperture", che da lui viene ancora detta "spagnola". Dalla Spagna all'Italia: tra Cinquecento e Seicento i più forti giocatori del mondo sono tutti italiani: Leonardi da Cutri, Paolo Boi, Alessandro Salvio, Gioacchino Greco rinnovano le strategie del gioco, e le loro tracce si trovano nella "partita italiana", nel "gambetto Greco", e soprattutto nella "difesa siciliana", che è probabilmente tuttora la partita più giocata nei tornei in risposta all'apertura del pedone di re da parte del Bianco. Dopo di loro, anche per una diatriba sulle regole, la penisola è rimasta un po' isolata dagli scacchi⁶.

Sia come sia, quando Karpov diventò campione del mondo, molti erano insoddisfatti, perché non lo ritenevano forte quanto Fischer. Certo è che il giovane Anatolij, a differenza di Bobby, prese sul serio la sua carica e giocò come un matto, partecipando a tornei su tornei, e mostrando a tutti che era davvero un campione. Difese il titolo con successo nel 1978 e nel 1981 contro Korchnoj, e poi avvenne il patatrac. Le regole della FIDE prevedevano match al meglio di un certo numero di partite da svolgersi con il limite di due ore e mezzo per 40 mosse. Quando arrivò sulla scena mondiale un altro grande fenomeno come Garry Kasparov, ci si dovette confrontare col fatto che la formula del "match" poteva non essere la più efficace. Gli scacchi erano ormai diventati davvero una sorta di scienza, e gli scacchisti migliori qualcosa di molto simili a dei calcolatori infallibili. Il primo dei molti match "K-K", nel 1984, vide un iniziale vantaggio di Karpov, poi una difesa arcigna di Kasparov, e si arrivò a contare la bellezza di 40 partite patte. Il presidente della FIDE, alla fine, annullò il match per eccessiva lunghezza. Ne vennero fuori un bel po' di polemiche. Nel 1985 Kasparov riuscì a battere Karpov, ma entrò in polemica con la FIDE, e giunse al punto di fondare una nuova federazione di giocatori di scacchi professionisti. Per più di dieci anni si ebbero, più o meno come nella boxe, due diversi campioni del mondo: Kasparov per la sua nuova federazione, Karpov per la FIDE. Quel che è peggio è che la FIDE aveva certo più prestigio storico, ma era abbastanza evidente che Kasparov era ormai più forte di Karpov: Garry è considerato da molti il giocatore più forte di tutti i tempi, e il suo punteggio Elo ha superato quello che sembrava inarrivabile di Fischer.



6 Garry Kasparov

⁶ Ma è possibile che ritorni alla ribalta proprio nel prossimo futuro. Fabiano Caruana ha doppia nazionalità, americana e italiana, ma è un po' più italiano che americano, e soprattutto gioca per i colori italiani. È diventato Grande Maestro ancor prima di Fischer, ha vinto il titolo mondiale juniores, ed è attualmente tra i cinque giocatori più forti al mondo. Vedremo...



7 Viswanathan Anand

Negli ultimi anni, le cose sembrano essere appianate: i criteri per la selezione dei candidati al titolo sono cambiati, e soprattutto sono cambiate le regole delle partite. Oltre agli scontri classici che concedono due ore e mezzo per 40 mosse sono previste anche partite lampo e semilampo, e incontri che prevedono un incremento di tempo a disposizione dopo ogni mossa effettuata. In questa maniera Kasparov, che pure è rimasto nell'opinione comune il giocatore più forte dal 1985 ai primi anni Duemila, ha ceduto il titolo che è stato appannaggio di giocatori certo meno noti al

grande pubblico, come Khalifman, Kramnik, Kasimdzhanov⁷, Ponomarev, Topalov. Al momento, il campione del mondo in carica riunisce le due federazioni, e ha portato il titolo nella patria d'origine degli scacchi: Viswanathan Anand è infatti indiano.

Sono diciannove gli uomini che possono fregiarsi del titolo, al momento. Ma la nostra caccia alla relazione tra matematica e scacchi non ha dato grandi esiti, nella ricerca tra gli scacchisti degli ultimi quarant'anni. Forse avremo più fortuna cercando all'indietro.



8 Mikhail Botvinnik

Tra la fine della seconda guerra mondiale e il 1972, il dominio è stato sempre sovietico. Nel 1948 si era di nuovo senza un campione in carica, e il torneo che sancì il nuovo titolare si tenne nel 1948: a vincerlo fu Mikhail Botvinnik. Questo è un nome che, in effetti, apre qualche spiraglio interessante nella nostra ricerca: se da un certo punto in poi i campioni del mondo sono infatti degli autentici professionisti, senza altro mestiere possibile che quello di scacchista, Botvinnik ha anche altre frecce al suo arco. Oltre a giocare a scacchi (e a giocare bene: è il solo giocatore che abbia vinto il titolo tre volte diverse) Botvinnik è stato anche ingegnere elettronico e pioniere dell'informatica. Mettete insieme le tre cose (ingegnere, informatico e scacchista) ed è inevitabile ritrovarsi fra le mani uno dei nomi più importanti nella ricerca dei calcolatori in grado di giocare a scacchi. È verosimile che, in una storia globale degli scacchi, la

notizia più clamorosa del periodo a cavallo tra il XX e il XXI secolo non siano tanto le incredibili prestazioni di Kasparov, quanto il fatto che il più grande giocatore del mondo (e, come detto, secondo alcuni il più grande giocatore della storia) sia stato battuto da un calcolatore elettronico. Deep Blue riesce a battere il campione del mondo nel 1997, e tutto sommato, buona parte di questa rivoluzione è dovuta proprio all'ingegnere sovietico con gli occhialini tondi. Ma forse si trattava di una sorta di derby fratricida, dal punto di vista di Botvinnik: se è stato lui a far fare enormi progressi ai computer che giocano a scacchi, è stato sempre lui a fondare una scuola per ragazzini particolarmente dotati nel gioco. E nella sua scuola sono cresciuti sia Karpov sia Kasparov.

L'idea di Botvinnik di insegnare a giocare a scacchi ad una macchina appare del tutto banale al giorno d'oggi, quando quasi ogni microchip è in grado di battere la grande maggioranza degli esseri umani che provino a sfidarli, ma a quel tempo era considerata pura follia. Proprio il gioco degli scacchi veniva considerato spesso l'esempio principe

⁷ Karpov, Korchnoj, Kasparov, Khalifman, Kramnik, Kasimdzhanov: è del tutto evidente che se il vostro cognome non inizia per "K" avete poche speranze di diventare campioni del mondo. Speriamo che Caruana accetti di cambiarsi in Karuana.

contro la possibilità di raggiungere una vera e propria “intelligenza artificiale”: i computer venivano considerati come degli spettacolari abachi elettronici, in grado di compiere un numero spaventoso di operazioni in breve tempo, ma comunque non in grado di fare delle vere e proprie scelte “intelligenti”⁸.

Di certo, Botvinnik intelligente lo era, anche dal punto di vista agonistico. Fu campione del mondo dal 1948 al 1963, ma non consecutivamente: perse il titolo nel 1957 contro Smyslov, lo riconquistò in un incontro di rivincita; lo perse di nuovo contro uno dei giocatori più brillanti del periodo, Mikhail Tal⁹, nel 1960, e lo rivinse ancora nel 1961, sempre in rivincita. La FIDE, proprio per mettere una pezza alla strana abitudine dell'ingegnere, eliminò a quel punto la clausola del “diritto di rivincita” di cui Mikhail sapeva fare così buon uso.

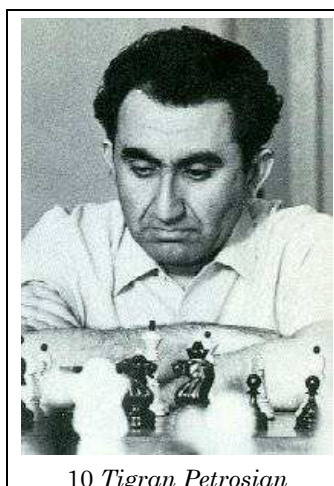


9 Vasily Smyslov e Mikhail Tal

A togliere definitivamente il titolo all'ingegnere russo fu uno scacchista armeno, Tigran Petrosian, nel 1963. Capelli scuri e faccia grintosa, restò famoso per il suo stile di gioco “a cassaforte”, che in qualche modo doveva assomigliare a quello che nel calcio è chiamato “catenaccio”. Del resto, il periodo in cui il catenaccio calcistico diventò famoso coincide grossomodo con il regno di Petrosian.

Regno che comunque durò abbastanza poco: tre anni dopo, alla sua prima sfida con il titolo in palio, Petrosian cedette la corona di Campione del Mondo a Boris Spasskij; tre anni dopo Petrosian, dopo aver vinto il Torneo dei Candidati, riaffrontò Spasskij nel match mondiale, e perse di nuovo.

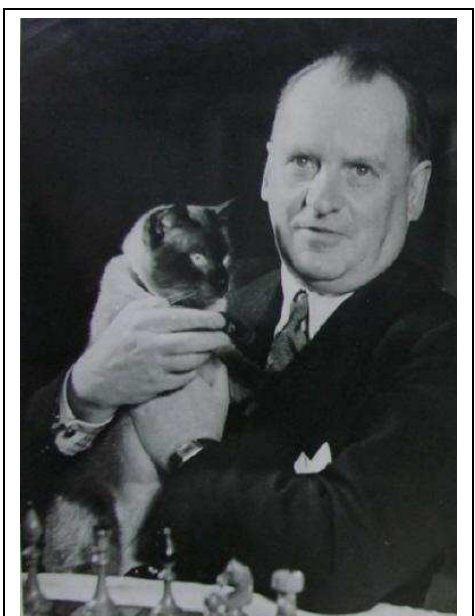
La ricerca dei matematici nel periodo che va dalla fine della guerra al 1972 è stata un po' più fruttuosa di quella fatta nel periodo da 1972 ad oggi, grazie a Botvinnik, ma non si può dire che sia stata del tutto gratificante. Non resta che spingerci ancora più indietro nel secolo. E fare la conoscenza con quelli che sono probabilmente le personalità scacchistiche più affascinanti della storia.



10 Tigran Petrosian

⁸ Anche dal punto di vista della mera enumerazione delle possibili partite giocabili, è facile vedere che il metodo “esaustivo” che si può applicare a giochi semplici non è praticabile per gli scacchi. Le partite possibili sono finite, perché una regola prevede che non possano effettuarsi più di 50 mosse senza effettuare una presa, perché a quel punto la partita è dichiarata patta. Anche tenendo conto di questo, comunque, le partite possibili sono circa $2,5 \times 10^{126}$ (no, non abbiamo verificato il calcolo di persona), numero che è enormemente più grande di quello stimato delle particelle elementari dell'Universo.

⁹ Curioso che uno scacchista abbia un nome che è del tutto confondibile, graficamente, con una mossa: “Tal” è quasi indistinguibile da “Ta1” (Torre in a1), ancora più notevole che “a1” è effettivamente la casa di partenza di una torre bianca.

11 *Aleksandr Alekhine*

Il torneo del 1948 si era reso necessario perché il campione in carica prima dello scoppio del conflitto era morto nel 1946: si trattava di Aleksandr Alekhine, che aveva conquistato il titolo nel 1927 ed è passato alla storia come un altro (l'ennesimo) papabile per il titolo di più grande scacchista di tutti i tempi.

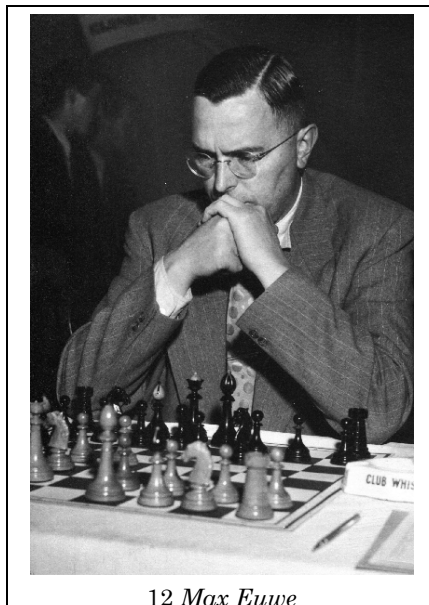
Era matto quasi quanto Fischer, e con una personalità non meno sconvolgente. Faceva incetta di quasi tutti i vizi possibili, aveva un caratteraccio, ma sapeva disegnare sulla scacchiera delle partite assolutamente incredibili. Nel gioco di determinare chi sia stato il più grande scacchista di tutti i tempi, gli elementi da considerare sono davvero molti, vista l'impossibilità di mettere davvero i candidati tutti di fronte ad una scacchiera (senza tener conto dell'impossibilità di valutarli correttamente in funzione del periodo in cui sono vissuti: la teoria scacchistica ai tempi di Ruy

Lopez era decisamente meno sviluppata di quella odierna): capacità teorica, abilità in torneo, visione strategica, predisposizione naturale, e molto altro ancora.

In queste classifiche parziali, Alekhine figura quasi sempre al primo posto nella sezione "il più forte attaccante". Difese il suo titolo due volte con successo contro Bogoljubov, sottovalutò lo sfidante del 1935, l'olandese Max Euwe, e si presentò al match spesso totalmente sbronzo e certo non adeguatamente preparato. Euwe non era certo alla sua altezza, ma non era uno che si potesse prendere poi troppo sottogamba, e vinse il titolo mondiale. Era però un gran signore, e concesse immediatamente la rivincita ad Alekhine: questi si preparò un po' meglio, e nel 1937 si riprese il titolo con ampio margine. Euwe era uno scacchista abbastanza insolito, ben lontano dal divismo che affliggeva tutti i grandi campioni del tempo. Per la sua estrema correttezza non mantenne a lungo il titolo mondiale, ma si guadagnò la presidenza della FIDE, che tenne onorevolmente per molti anni.

Non c'era però dubbio che tra i due il giocatore più forte fosse Alekhine: gli aneddoti su di lui si sprecavano, e probabilmente era davvero un tipo non facile da affrontare neanche in occasioni non scacchistiche. Del resto, quasi nulla della vita di Alekhine poteva dirsi non scacchistica: anche i suoi due gatti siamesi, vere e proprie star scacchistiche per luce riflessa, si chiamavano Scacco e Scaccomatto.

Un altro elemento che rese celebre Alekhine resta il fatto che si scontrò per il titolo mondiale con un altro scacchista che può essere annoverato tra i più grandi di tutti i tempi: Josè Raul Capablanca. Se la diatriba su chi sia stato il più forte giocatore di scacchi è infinita, se non c'è dubbio che a guardare i punteggi Elo il match Kasparov-Karpov è stato probabilmente quello di maggior impatto, se è indubbio che dal punto di vista mediatico l'incontro Fischer-Spasskij non ha rivali, è quasi altrettanto certo che per gli amanti degli scacchi è difficile immaginare un match per il titolo mondiale più significativo di quello che nel 1927 vide opposti Alekhine e Capablanca.

12 *Max Euwe*

Di Capablanca si dice spesso che è stato l'unico vero "genio naturale" degli scacchi. Imparò il gioco da solo, a quattro anni, guardando le partite del padre. Correva l'anno 1892, e il quattrenne Raul sembra che rimase colpito anche dall'aver visto nelle strade Steinitz e Cigorin, che proprio nella sua città, L'Avana, stavano disputando il campionato del mondo¹⁰. Cominciò a giocare seriamente a nove anni: batté in diverse partite il campione nazionale cubano all'età di tredici, e sconfisse il più



13 Jose Raul Capablanca

forte giocatore delle Americhe, il fortissimo Frank Marshall, quando ne aveva venti; in quell'occasione confessò di non aver mai aperto in vita sua un libro di teoria scacchistica.

L'incontro con Alekhine del 1927 lo vedeva inizialmente favorito, perché nessun giocatore sembrava avere le sua capacità di fronte alle trentadue figurine bianche e nere: lo stesso Alekhine, che tutto era meno che modesto (e neanche tanto sportivo) confessò che nel 1927 non pensava che sarebbe riuscito a sconfiggerlo.

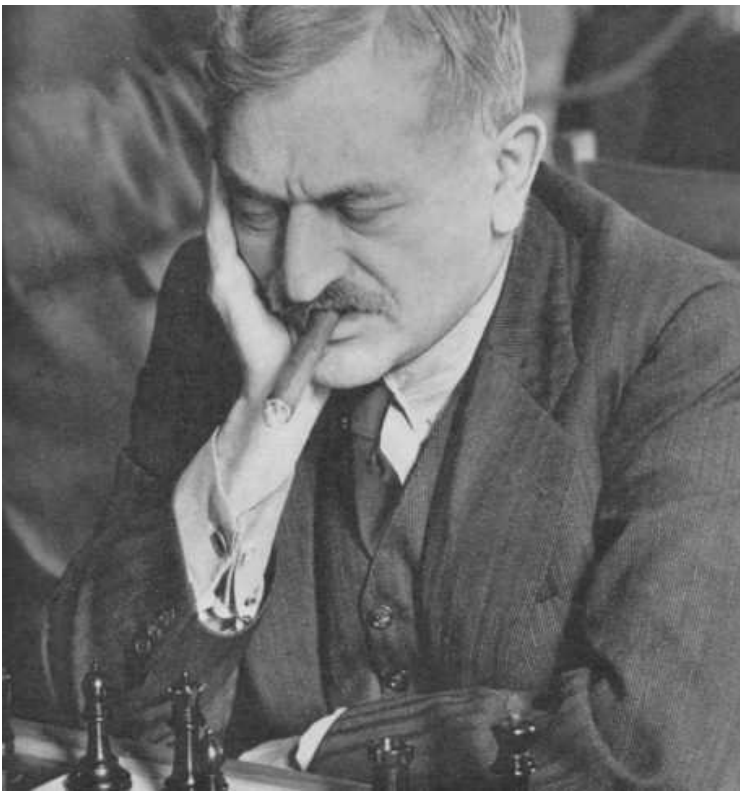
Sia come sia, la ricerca di matematici nel novero dei campioni del mondo sembra non aver avuto buon esito. Eravamo rimasti a contare Spasskij come il decimo della lista, e risalendo all'indietro abbiamo annoverato Petrosian come nono, Tal ottavo, Smyslov settimo, l'ingegner Botvinnik come sesto. Prima di lui regnava sulla scacchiera Alekhine, quarto, perché c'è da tener conto dell'interregno di Euwe, quinto. Il sublime Capablanca è pertanto il terzo campione del mondo ufficiale della storia; sappiamo già che il primo a fregiarsi del titolo è stato Steinitz, e quindi tutte le nostre speranze sono ormai concentrate sul Campione del Mondo numero due, colui che deve aver sconfitto il primo scacchista dell'era moderna, Steinitz, ed essere stato sconfitto dal più grande genio naturale degli scacchi, Capablanca.

L'ultima tessera da scoprire è comunque una tessera di grande valore: secondo molti critici e storici, si tratta davvero del "più grande" giocatore di scacchi di tutti i tempi: non "forte" come Fischer o Kasparov, forse; non travolgente come Alekhine, non naturalmente dotato come Capablanca, non stratega sopraffino come Botvinnik, ma con una quantità e qualità di caratteristiche che secondo molti¹¹ lo rendono "il più grande" giocatore di scacchi di tutti i tempi. Anche perché si tratta del giocatore che è restato campione del mondo in carica per più tempo, senza interruzioni, dal 1894 al 1921; del giocatore che, pur avendo perso contro Capablanca¹², ha avuto una carriera che è durata circa quarant'anni praticamente senza altre macchie significative. E, per finire, di un giocatore che non si limitava a fare il giocatore di scacchi: le sue note biografiche lo segnalano anche come filosofo, ad esempio, ma, soprattutto, come matematico. E matematico abbastanza in gamba da aver lasciato traccia di sé negli annali della scienza.

¹⁰ Era la quarta difesa del titolo mondiale da parte di Steinitz, che vinse.

¹¹ Ad esempio, questa è l'opinione di Mike Fox e Richard James, autori di "The Complete Chess Addict". Ma non sono certo i soli.

¹² Sconfitta che gli deve essere costata davvero molto: dopo il match è rimasto in ospedale per diversi mesi. E c'è da considerare che Capablanca all'epoca era al massimo della sua forza e aveva 33 anni, il nostro ne aveva ormai 53.



14 Emanuel Lasker

Emanuel Lasker nasce a Berlinchen, in quello che allora era il Regno di Prussia ed oggi è territorio polacco, il 24 Dicembre 1868.

Di famiglia ebrea, è figlio del cantore¹³ della locale sinagoga. Viene presto mandato a studiare a Berlino, dove un compagno di scuola gli insegna a giocare a scacchi. Verso i quindici anni diventa abbastanza bravo da guadagnare qualche soldo nelle sfide ai caffè (destinazione storica del gioco, come si è visto), al punto che la famiglia comincia a preoccuparsi un po' troppo del tempo che Emanuel dedica agli scacchi piuttosto che a studiare. Si preoccupano al punto di decidere di

prendere provvedimenti, e costringono il figlio a cambiare scuola: ma si sa, quando il Fato è contrario, non ci sono decisioni genitoriali che tengano. Accade infatti che nel nuovo liceo il preside sia anche presidente del club scacchistico locale e, come se non bastasse, che il professore di matematica non sia altro che il campione cittadino di scacchi: diventa a questo punto del tutto inevitabile che Emanuel Lasker faccia dei rapidi progressi sia negli scacchi sia nella matematica.

A differenza dei campioni moderni, Lasker non gioca solamente a scacchi: vi si dedica regolarmente e certo con una passione e un impegno eccezionali, ma nel contempo porta avanti i suoi studi. Si dedica alla matematica e alla filosofia, e lo fa in università di tutto rispetto: Berlino, Göttingen, Heilberg. Non si riesce a capire facilmente come potesse eccellere facilmente in tutti i campi, fatto sta che tra il 1891 e il 1893 se ne resta a lungo a Londra per partecipare ai più importanti tornei scacchistici, e trova il tempo anche di andare in America a vincere il prestigiosissimo torneo di New York, dove evita accuratamente di perdere anche una sola partita. Già che era in America, dove il campione del mondo Steinitz aveva eletto la sua residenza, e visto che i suoi risultati scacchistici glielo consentivano, acconsentì a sfidare il campione del mondo in carica in un match da tenersi in tre città americane: Philadelphia, New York e Montreal. Ma probabilmente considerò che gli avanzava del tempo e dei luoghi da visitare, visto che nel 1893 tenne una serie di lezioni sulle Equazioni Differenziali all'università Tulane di New Orleans.

Nel 1894 strapazzò uno Steinitz ormai vecchiotto, e divenne il secondo campione del mondo della storia degli scacchi. Tornò in Germania, e fu vittima di una febbre tifoide che lo debilitò davvero molto; nonostante la malattia, si presentò al "più grande torneo di scacchi del XIX secolo", quello che si tenne ad Hastings nel 1895, arrivando terzo. Appena riuscì a rimettersi del tutto dalla malattia difese con successo il titolo contro Steinitz e

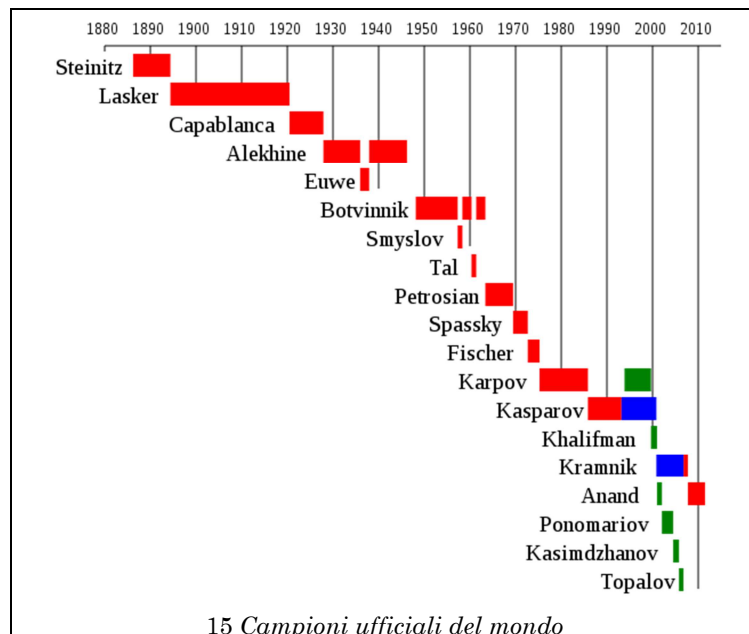
¹³ La nostra fonte (inglese) lo definisce "cantor". Non sappiamo se sia l'analogo del titolo di Bach o una carica religiosa.

vinse con percentuali incredibili i tornei di Pietroburgo, Norimberga e Parigi. Anche se vinceva come nessuno aveva mai fatto prima, c'era chi sosteneva che Lasker non partecipasse ad un numero elevato di tornei, per essere il giocatore più forte del suo tempo: e in parte i critici avevano ragione. La causa era sempre la solita, Emanuel non faceva il giocatore di scacchi a tempo pieno: nel 1895 pubblica due articoli su *Nature*, e nel 1900 presenta a Erlangen la sua tesi di dottorato sulla convergenza delle serie. Il suo relatore era Max Noether, il papà di Emmy¹⁴, e la tesi abbastanza importante da essere poi ritenuta degna di pubblicazione dalla Royal Society.

Una delle critiche che spesso si muovono a Lasker come campione del mondo di scacchi è che imponesse delle regole abbastanza capestro nei confronti degli sfidanti pretendenti al titolo. Il comportamento non è certo encomiabile, ma il nostro ha almeno un paio di scusanti: la prima è che questo era il comportamento abituale dei campioni del mondo; quando Max Euwe si disse disposto a concedere ad Alekhine la rivincita senza porre condizioni né di tempo né di regole, il mondo scacchistico fu sorpreso dalla sua correttezza. La seconda è che Emanuel faceva matematica.

Nel 1905, quindi poco prima della sua difesa del titolo contro Marshall nel 1907 (8 vittorie, 7 patte, nessuna sconfitta: il match mondiale più a senso unico della storia), introduce il concetto di “ideale primario”, una varietà che sta agli anelli polinomiali nella stessa ragione in cui i numeri primi stanno agli interi. Il teorema che proponeva fu poi esteso da Emmy Noether, ed è adesso noto come Teorema Lasker-Noether, e gli anelli commutativi di tipo R sono adesso noti come “Anelli di Lasker”. Probabilmente soddisfatto dei suoi risultati matematici, si dedica con maggiore impegno agli scacchi, e difende il titolo, oltre che con Marshall nel 1907, anche nel 1908 contro Tarrasch, nel 1910 contro Janowsky e già che c'è anche contro Schlechter. Per ingannare il tempo nel 1911 si sposa, si trasferisce a Berlino, e pianifica gli incontri per i futuri match col titolo in palio. Prevede di scontrarsi contro Akhira Rubinstein, stella nascente del periodo, e si prevede già che il vincente del match dovrà poi vedersela con Capablanca. Ma arriva la Prima Guerra Mondiale, e si ferma quasi tutto.

Dopo la guerra e il dopoguerra, si trova l'accordo (anche economico) per rimettere il titolo il palio. Lasker ha cinquantadue anni, e il giovane Capablanca riesce ad averne facilmente ragione. Emanuel si ritira prima della fine dell'incontro, adducendo problemi di salute. Non negherà comunque mai che Capablanca gli era certamente superiore, in quel momento¹⁵. Dopo ventisette anni di regno, Lasker cede la corona; che non fosse comunque un tipo da rottamare, lo dimostrò



15 *Campioni ufficiali del mondo*

pochi anni dopo, al grande Torneo di New York del 1924: lo vinse raccogliendo l'incredibile percentuale di 80% dei punti disponibili, lasciando a Capablanca il secondo

¹⁴ Protagonista di uno dei primissimi compleanni di RM, “Questione di attributi”, RM050, Marzo 2003. Abbastanza curiosamente, secondo Wikipedia (inglese), il relatore di Lasker sembra essere stato addirittura Hilbert.

¹⁵ “Ho conosciuto tanti giocatori di scacchi, ma un solo genio: Capablanca”, disse il vecchietto.

posto ed ad Alekhine il terzo. A quel punto, forse definitivamente soddisfatto, si dedicò soprattutto al bridge e al go.

Il go lo affascinava tantissimo; il bridge gli riusciva abbastanza facile da diventare un elemento della squadra nazionale tedesca. I giochi gli sono sempre piaciuti, ed era famoso per inventarne di nuovi¹⁶.

Ebreo tedesco, dovette scappare dalla Germania negli Anni Trenta per questioni razziali. Vagò un po' tra l'Europa e la Russia, e infine si trasferì a New York, dove si spense nel 1941. Pur non avendo solo giocato a scacchi, nella sua lunga e piena vita, è stato probabilmente colui che più ha cambiato la natura del gioco.

Curiosamente, da un matematico professionista ci si potrebbe aspettare che la sua impronta sugli scacchi sia prevalentemente analitica e "scientifica", mentre è vero tutto il contrario: l'analista perfetto era Steinitz, del quale si diceva che giocasse le sue partite considerando l'incontro dal punto di vista strettamente logico e meccanico, come se le figure si muovessero da sole sulla scacchiera. E Steinitz venne detronizzato da Lasker, che invece era il perfetto giocatore da torneo, che combatteva contro un giocatore, e non contro i suoi pezzi. Di Lasker si diceva che non giocava la mossa migliore, ma quella che più infastidiva l'avversario; per lungo tempo, si è addirittura pensato che giocasse appositamente delle mosse non particolarmente forti in apertura solo per indispettare la preparazione teorica degli avversari; analisti recenti e più accurati sono invece convinti, oggi, che conoscesse bene le analisi che gli avversari facevano delle aperture, ne trovasse una falla, e ci si ficcasse dentro con gioia.

Non era certo un romantico come Morphy o Anderssen, ma aveva una sua forte estetica del gioco: una sua famosa sequenza d'attacco prevede il sacrificio di entrambi gli alfieri sull'arrocco avversario, e quando la giocava era davvero improbabile che l'avversario potesse avvantaggiarsi del materiale regalato. Disse una volta *"prendete due giocatori molto accorti e molto attenti; otterrete una partita precisa, esatta, senza errori; la partita più noiosa del mondo"*.

Lui giocava contro i giocatori, non contro il gioco. Fumava sigari, e spesso infastidiva gli avversari soffiandogli il fumo addosso. Atteggiamento non troppo sportivo, ma probabilmente efficace. Trasformò l'approccio scientifico di Steinitz in uno sport anche fisico tra due concorrenti; visto che è stato il campione del mondo più longevo, è verosimile che la sua trasformazione avesse avuto ragione d'essere.




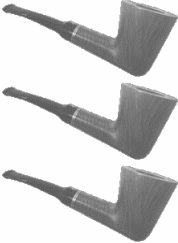


Ma il sospetto è anche un altro: e cioè che il suo innato senso del rigore scientifico aveva un'altra destinazione, che era la matematica.

Gli scacchi, per lui, erano certo un gioco e una professione, ma non tutta la vita.



¹⁶ Come i lettori di RM del resto ben sanno: la sua creazione più famosa, il "Lasca", si è meritata lo Zugzwang! in RM084, Gennaio 2006.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
On the Road			
Puzza di Ramsey			

2.1 On the Road

Questo problema nasce dalla coincidenza di TRE eventi.

Tanto per cominciare, mentre sto scrivendo questo [*Rudy speaking*], Alice non c'è.

Indi, io e Doc stiamo cercando di rilassarci perché siamo nervosi: guida Doc, piove e siamo diretti a Porto Sant'Elpidio¹⁷.

In ultimo, non mi sono portato dietro i dadi farlocchi¹⁸.

Insomma, io e Doc stiamo cercando un modo per arrotondare il rimborso spese: l'idea è di fermarci in qualche amena località mathematically challenged, aprire un banchetto e iniziare fare soldi a spese degli indigeni. Doc ha proposto il suo classico (il gioco delle tre carte), ma credo ormai l'intera popolazione mondiale sia opportunamente scafata in merito, quindi sto cercando qualcosa io per riequilibrare il bilancio: scavando nelle tasche della mia giacca¹⁹, sono saltati fuori tre dadi (purtroppo tutti "onesti"). Segue dialogo:

"Potremmo provare un gioco del genere: ogni giocatore punta su un numero, e si tirano i tre dadi; se esce il numero su un dado, vince quanto ha puntato, se esce su due dadi, vince due volte quello che ha puntato, se su tutti e tre i dadi vince tre volte quello che ha puntato. Che ne dici?"

"Dipende: 'vince' in che senso? Lui mi dà un euro che intasco, esce un dado col suo numero, quanto gli dò? Uno o due euro?"

"Due, chiaro."

"Mah... Non so. Sei sicuro che si torni a casa in giacca e cravatta, e non in mutande?"

"L'esperto dei conti sei tu. Io ho appena inventato il gioco"

Considerato che tra pochissimi chilometri dovremo quantomeno fare il pieno (benzina/birra/pizza/caffè) e l'area di servizio ha l'aria di un ottimo posto per organizzare una BVC [*Bisca Volante Clandestina*], potreste fare i conti alla svelta? Secondo voi, il gioco è a favore del banco, o no?

¹⁷ Trattasi della famosa conferenza a lungo pubblicizzata sul sito. Non lo sapevate? Sapevatelo!

¹⁸ Il titolo, invece, nasce dal fatto che ho trovato i miei due libri preferiti di Kerouak in *versione elettronica*! [Nota per gli storici: *On the Road* e *The Dharma Bums*]

¹⁹ Come avemmo a dire in un libro, io e Eta Beta ci serviamo dallo stesso sarto.

2.2 Puzza di Ramsey

...per favore, nessuna battuta sul fatto che *ram* si può tradurre come “caprone”. In questo caso il gioco di parole sarebbe completamente involontario.

Come dovrete sapere, ho [Rudy speaking] un rapporto molto tormentato con la Teoria di Ramsey: mi è simpatica, ha l’aria di una cosa dalla quale si possono ricavare un mucchio di problemi tanto simpatici quanto tosti (e sono molto tosti), ma ogni volta che provo ad enunciarne uno impallo la formulazione (di solito perché dimentico un “non” o cose del genere).

Capite quindi che, avendo trovato tempo fa un problema con una corposa “Puzza di Ramsey”, l’ho guardato, ho pensato “carino”, e sono passato ad altro; il mese scorso però mi è capitato sottomano un problema “con la stessa puzza”! A questo punto, ho immediatamente visto una possibilità: “...supponiamo di metterli tutti e due nello stesso problema: a questo punto, anche se li sbaglio tutti e due, ho sbagliato un solo problema!”.

Quindi questa volta vi ritrovate, al prezzo di uno, due problemi forse sbagliati: contenti?

Prendete (o meglio, prima riconoscete) un pentatetracontagono regolare, e denominate i vertici distribuendo un pari numero di lettere A, B, C (col che, dovrete aver dedotto che il pentatetracontagono ha un numero di vertici divisibile per tre). Quello che vi chiedete (io no di sicuro) è se sia sempre possibile trovare tre triangoli AAA, BBB e CCC isometrici.

Ammettete che qui la PdR è notevole. In compenso, non sono sicuro che lo sia anche nel prossimo problema, ma diciamo che un certo qual effluvio è comunque presente.

Avete nove punti (io direi “distinti”, ma la formulazione che ho trovato non lo specifica, anche se, secondo me, serve) sul piano, e la distanza tra due qualsiasi di loro è un numero intero.

Dimostrate che almeno sei tra queste distanze sono divisibili per tre.

Carino, vero?

Adesso tanto per cominciare li risolvete, e poi mi dite dove ho sbagliato la formulazione.

3. Bungee Jumpers

Provate che:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5 \neq 33.$$

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Non dovrebbe essere necessario rammentarlo, ma “era una notte buia e tempestosa” è la frase che l’immarcabile Snoopy²⁰ usa infallibilmente quando, seduto sul tetto della sua cuccia, comincia a scrivere uno dei suoi romanzi. Essendo Snoopy famoso per essere Snoopy, e non per essere un romanziere, ci pareva una buona idea usare il suo incipit preferito come titolo di una rubrica di recensioni destinata a commentare libri in cui hanno messo mano dei non professionisti: i lettori di RM.

Naturalmente, non vi è nessuna autentica consistenza logica in quanto appena detto: nulla vieta che un lettore di RM sia un autore professionista e si procuri pranzo e cena scrivendo libri; anzi, se così fosse, la cosa ci rallegrerebbe moltissimo. La supposizione nasce solo dalla constatazione che sia gli autori professionisti, sia i lettori di RM, sono degli insiemi ragionevolmente piccoli se confrontati con la popolazione del pianeta, e l’ipotesi che lo loro intersezione sia vuota ci pare la più probabile.

²⁰ Il bracchetto di Charlie Brown, protagonista dei “Peanuts” di Charles Monroe Schulz. Ma siamo sicuri che questa nota è del tutto inutile.

Questo ci consente una libertà d'azione che di solito è negata ai recensori di ruolo: visto che nessuno ci paga per scrivere recensioni e visto che per definizione vogliamo bene agli RMers, le recensioni di questa rubrica si possono permettere di essere spudoratamente parziali, e immancabilmente positive.

Quel che è accaduto questa volta è un po' diverso: forse perché Rudi Mathematici è diventato ormai mediamente famoso, o forse perché trainato dal (quasi) omonimo blog di Le Scienze, ci capita talvolta (troppo raramente, ahimè) di ricevere dei testi in visione, con preghiera di commento e diffusione. Questo ovviamente cambia le regole del gioco, perché i bilanci contabili sono notoriamente privi di vincoli d'affetto: se l'autore/editore invia un libro, RM intasca il libro e scrive in cambio una recensione (per bibliofili e grafomani come noi, si tratta di uno scambio perfetto), e il conto è così saldato. Quindi, qualora lo ritenessimo giusto, potremmo anche essere cattivissimi e stroncare il tapino con una severa critica distruttiva, senza senso di colpa veruno.

Chissà se Francesca Riccioni, quando ci ha inviato il libro/fumetto che, insieme a Tuono Pettinato, ha realizzato sulla vita di Alan Turing, sospettasse di correre un rischio simile. Forse no. Ma ormai è tardi... abbiamo già ricevuto e letto, e quindi non resta che recensire. Saremo spietati e severi come una commissione d'esame alla maturità.

4.1 Enigma – La strana vita di Alan Turing

*«Solo una cosa, Vostro Onore:
non riesco a vedere nulla
di sbagliato nelle mie azioni.»*

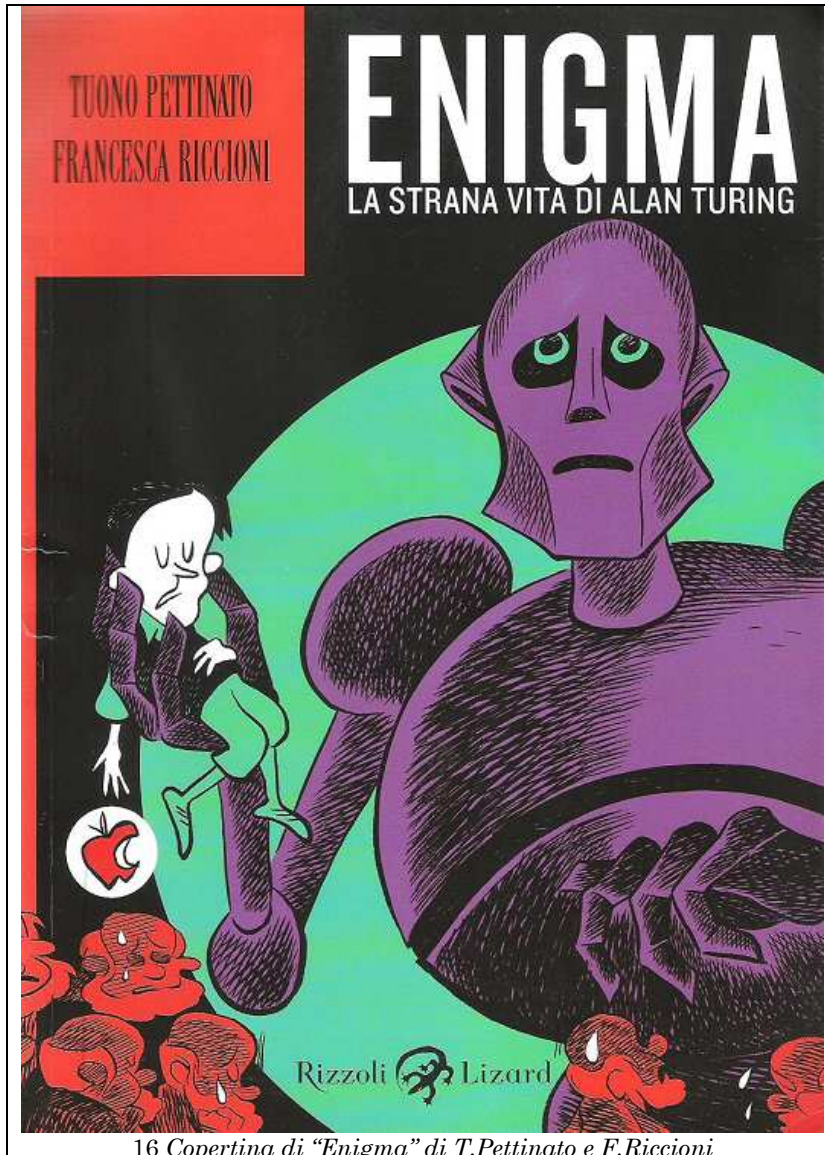
I fumetti hanno fatto davvero molta strada, da quando *Yellow Kid* fece la sua prima comparsa sulle pagine della rivista *Truth* nel 1894. Così tanta che ormai è difficile perfino parlare semplicemente di “fumetto”, essendo diventato il termine troppo generico, e forse anche impreciso. Non per niente negli ultimi anni è invalso l'uso del termine *graphic novel*, che dà certo un maggiore spessore, sia per il significato che veicola, sia per la (presunta) nobilitazione dell'inglese, a quelli che una volta i genitori consideravano giornalini corruttori delle giovani menti.

A voler essere precisi, per “romanzo grafico” si intende solitamente un'opera abbastanza ben definita: una storia a fumetti, certo, ma di respiro e lunghezza maggiori di una normale avventura di Zio Paperone²¹; è solitamente destinata ad un pubblico adulto (non per i contenuti necessariamente scabrosi, ma solo perché non si tratta di opere volutamente destinate a pubblico infantile), e particolarmente curata, al punto che talvolta si usa, in sostituzione di “graphic novel”, il termine “fumetto d'autore”.

Nel venire a conoscenza della pubblicazione di un lavoro a fumetti che tratta la vita di Alan Turing, è quasi inevitabile pensare che proprio di *graphic novel* si debba trattare: è il racconto di una vita, e quindi certo non una serie di avventure come quelle di Tex Willer o Dylan Dog; la vita in questione è così insolita, densa di avvenimenti e di aspetti coinvolgenti e tragici da meritarsi certo una narrazione: ma proprio per i contenuti (che devono contemplare argomenti davvero ineludibili come l'omosessualità, la guerra, il suicidio) difficilmente potrà essere destinata ad altri che ad adulti; infine, per quanto si celebri il centenario della nascita di Turing proprio quest'anno, è palese che il target di lettori che gli autori e gli editori si immaginano non è ampio quanto quello dei cultori del calcio. E si sa che se il target è piccolo, l'opera ad esso destinata è usualmente patinata, curata, d'affezione. Solitamente, è d'affezione anche il prezzo di copertina.

²¹ Sia detto e letto con tutto il sacro rispetto che alcune storie di Zio Paperone meritano: sotto le chine di Carl Barks sono nate delle autentiche opere d'arte, che lo scrivente annovera tutt'ora come alcune delle esperienze letterarie di maggior soddisfazione.

Quando si arriva a leggere “Enigma”, di Tuono Pettinato e di Francesca Riccioni, si possono finalmente mettere a bilancio le aspettative con la realtà. E, come quasi sempre accade, si scopre che alcune aspettative sono confermate, altre invece decisamente smentite.



16 Copertina di “Enigma” di T.Pettinato e F.Riccioni

“Enigma” è senza dubbio un “romanzo grafico”: ancora più certo è che sia un “fumetto d’autore”, perché autori a tutto tondo sono sia Tuono Pettinato, disegnatore ormai affermato, sia Francesca Riccioni, professionista nella comunicazione scientifica. E sono autori nel senso più significativo del termine, perché ognuno dei due marca fortemente la storia e il modo di raccontarla. Il marchio dell’autrice dei testi si riconosce nella completezza delle informazioni biografiche: ogni aspetto ragionevolmente significativo della vita del matematico inglese è presente nella storia. Certo, un fumetto ha dei limiti naturali nelle pagine che può occupare senza stravolgere la sua

natura di intrattenimento, e soprattutto i testi sono ancora più strettamente limitati, per la necessaria convivenza con i disegni. A ciò si deve aggiungere la necessità di dover “raccontare” una biografia, intrecciare le informazioni in una sequenza narrativa, con tutte le necessarie coloriture di emozioni che fanno da controcanto agli avvenimenti. Una cosa tutt’altro che facile, eppure Francesca Riccioni ci riesce con assoluta nonchalance.

Il marchio di Tuono Pettinato è verosimilmente ancora più profondo. Una vita vera e tragica, complessa, con molti tratti da dipingere (nel vero senso della parola) come quella di Turing lascia inevitabilmente immaginare un disegno a tinte fosche, cupo, drammatico, pronto a denunciare tensioni, conflitti, sofferenze: qualcosa di molto più simile ai tratti di Moebius e di Metal Hurlant che a quelli di Asterix e Lupo Alberto, insomma. E invece no, è vero tutto il contrario.

Quindi ci si ritrova a vedere Hilbert col cappello, come nella sua foto più famosa, che recita le sue frasi più famose con gli occhi di Paperoga, e non con quelli di Silver Surfer. Si incontrano le linee grafiche dinamiche, che ormai non usa più neppure Topolino: la

grafica sembra insomma davvero distante da quella che era lecito aspettarsi, e questa è stata certo una sorpresa, almeno per chi scrive.

Così, con lo scetticismo che nasce già dalla copertina, ci si avventura curiosi nella storia, e si capisce che Tuono Pettinato è un genio, e Francesca Riccioni la sua lampada.

Perché l'approccio è quello giusto, e non sarebbe stato possibile rendere la lettura altrettanto piacevole se alla narrazione si fosse sostituito il dramma, se alla giocosità dei fumetti per ragazzi si fosse sostituito il tratto, magari magistrale ma greve, delle chine scure, intellettuali e pesanti. Ci si affeziona a Turing nel vederlo disegnato come un ragazzino, non si può non sorridere quando lo si vede disegnato con due tette da quarta misura, non si riesce a credere di non aver notato prima l'evidentissima somiglianza che c'è sempre stata tra la Regina Cattiva di Biancaneve e Adolph Hitler.

C'è quasi tutta la verità possibile, nei testi di Francesca: e incredibilmente ci sono quasi tutte le coniugazioni fantastiche possibili, nei disegni di Tuono. Turing era così fuori dal contesto,

nella sua vita

reale, che è disegnabile solo come un vero personaggio dei comics. Un ragazzino delle elementari non si stupirà, a sentir dire che ha passato la sua prima settimana al college vestito col solo pigiama, perché nei fumetti può accadere questo ed altro. Quando poi scoprirà che è successo nella realtà, e non solo nei fumetti, sarà comunque una notizia accessoria, e sarà già affezionato al protagonista. E sapere che al geniale matematico che ha contribuito in maniera sostanziale alla vittoria su Hitler piacevano più i fidanzati che le fidanzate non lo sconvolgerà più di tanto; certo assai meno di quanto sconvolse il sistema giudiziario inglese.

Alan Turing non era Biancaneve²², ma era certo più a suo agio in quei panni che in quelli del conformista novecentesco: e non c'è maniera migliore di celebrarlo che tirandolo fuori dalla ruggine del conformismo vittoriano e lasciarlo correre di vignetta in vignetta con l'innocenza d'un ragazzino.

Anche perché un genio omosessuale, suicida, reietto, ingannato e ampiamente misconosciuto fino a non troppo tempo fa, non ha alcuna speranza di racimolare un happy



17 Hilbert, "matematico dal grande cappello", secondo Pettinato e Riccioni



18 "Hitler-Regina di Biancaneve" acerrimi nemici di Alan Turing.

²² Anche se perfino noi, nel celebrarlo nel compleanno di RM089 (Giugno 2006), lo abbiamo fatto intitolando il pezzo "Normale come Biancaneve".

ending nella sua vita reale, e meno che mai nelle biografiche drammatiche, di denuncia, o anche banalmente fedeli alla cronaca.

L'unica possibilità di happy ending sta proprio nelle pieghe del fumetto, dove i buchi disegnati nel muro diventano buchi veri, e dove la legge di gravità regala a Wile Coyote almeno cinque secondi di ritardo, prima di farlo cadere nel canyon. E Francesca Riccioni e Tuono Pettinato si possono così permettere di regalare ad Alan un lieto fine, che naturalmente trascende la realtà e perfino i confini del fumetto stesso, che in quanto biografico dovrebbe concludersi con la morte del protagonista. Ma gli autori vanno qualche vignetta oltre, per regalare un sorriso supplementare a Turing e ai lettori.

E fanno bene. Alan avrebbe apprezzato.

Titolo	Enigma
Sottotitolo	La strana vita di Alan Turing
Autori	Tuono Pettinato – Francesca Riccioni
Editore	Rizzoli Lizard
Data Pubblicazione	Ottobre 2012
Prezzo	16 Euro
ISBN	978-88-17-06067-7
Pagine	120

5. Soluzioni e Note

Dicembre.

Il mese in cui tutti dovrebbero essere un po' più buoni, noi compresi. Una volta dicevo che noi non siamo buoni nemmeno a Natale, ma all'improvviso, ripensandoci, mi sembra che non sia proprio vero: noi siamo buoni tutto il tempo, a Natale forse un po' meno. Forse è perché il mese è denso di attività, perché produciamo un numero ed un calendario (che vanno sommati al blog, l'articolo per Le Scienze e il lavoro di PR del nostro Postino), perché siamo sommersi dal lavoro, la famiglia, le liste di amici a cui vorremmo fare auguri o regali e in generale siamo persone normali, con tutte le preoccupazioni e tutti i doveri che ognuno a fine anno si ritrova a processare.

Ma quando ci si trova in una posizione come quella che ho io adesso, a scrivere un articolo per una rivista che sarà distribuita direttamente a circa tremila persone e scaricata da qualche altro, per un momento sembra che sia possibile mandare un messaggio universale. È dicembre, aspettiamo un Natale in tempi di crisi, fuori dalla mia finestra nevica disperatamente, e proprio oggi, proprio adesso, mi sembra di poter mandare a tutti coloro che nei prossimi giorni leggeranno queste righe, un augurio speciale. L'augurio di avere un lavoro che li soddisfa e mantenga le loro famiglie, l'augurio della serenità e di tutte le piccole cose che rendono la vita degna di essere vissuta e felice, e – perché no – l'augurio di avere tempo anche per un po' di divertimento matematico con noi.



19 Anita tra i Rudi

E proprio ripensando e ritornando alla matematica, devo dirvi che i miei colleghi si sono dati da fare anche questo novembre e hanno fatto faville a Porto Sant'Elpidio, dove presentavano la loro nuova conferenza. In realtà la conferenza l'hanno preparata apposta per l'evento, e non so se la presenteranno altrove, proprio per questo spero che i video dell'evento siano disponibili prima o poi in rete.

A quanto mi hanno riferito, l'evento è stato eccellente: Andrea Capozucca è stato organizzatore perfetto, villa Baruchello molto accogliente, i marchigiani li hanno ospitati con affetto e ottimo cibo, tra i presenti alla conferenza c'era un bimbo di sei anni che prendeva appunti e non ha esitato a fare domande da lasciare i poveri Rudi a bocca aperta, e gli organizzatori di *Colors of Math*, Riccardo Piergallini e Anita Eusebi, sono stati simpaticissimi compagni di avventura.



20 Il Grande Capo

A quanto pare il Capo era vestito da Charlie Epps con tanto di cappello, deve aver fatto un figurone. Li ho già visti in azione, ma a volte sono un po' triste di non aver modo di seguirli nelle loro avventure. Per esempio, a ottobre, sono stati a trovare **Sawdust**. Mi avevano promesso un rapporto completo su tutto quello che avevano visto e fatto, ma alla fine non si è visto niente, ho solo dato un'occhiata alle foto dell'evento, e mi sono piombati in testa nuovi problemi, certo.

Per fortuna lo stesso **Sawdust** sta lavorando ad un progetto per mostrarci tutte le proporzioni e gli angoli del suo famoso tavolo ad incastro, e speriamo di poterlo avere qui o in Bookshelf al più presto.

A proposito di Bookshelf, non perdetelo di vista: il nostro grandissimo Postino ha una certa lista di contributi da mettere in linea, e non appena trova il tempo di farlo, speriamo che vi interessiate tutti e subito a scaricarli.



21 Sawdust nel suo laboratorio

E non perdetevi di vista anche il Memento, che sul nostro sito (rudimathematici.com), continua a segnalarvi cosa succede in giro, per esempio le conferenze organizzate dalla Mathesis, ma non solo. E se avete un evento da segnalarci, non esitate a farlo, siamo sempre un po' lenti, ma prima o poi arriviamo.

Va bene, ora basta perdere tempo, passiamo alle soluzioni ai problemi del mese. E non dovrebbe essere una sorpresa che proprio ora che il nuovo calendario sta per uscire, giungano in redazione nuove soluzioni per i calendari passati!

5.1 [Calendario 2006] – Aprile 2006: IMO 1959 – 4

Chi poteva essere? Il solutore calendaristico per eccellenza, colui che ha iniziato la moda di inviare le soluzioni, sì, proprio lui, il grande **Sawdust**. Gli passo direttamente la parola:

Data la lunghezza $|AC|$, costruire un triangolo ABC rettangolo in B e con la mediana BM soddisfacente $BM^2 = AB \cdot BC$.

La situazione è la seguente, dato che, essendo rettangolo, il triangolo è inscritto in una semicirconferenza.

Proviamo 2 attacchi diversi, geometrico e trigonometrico.

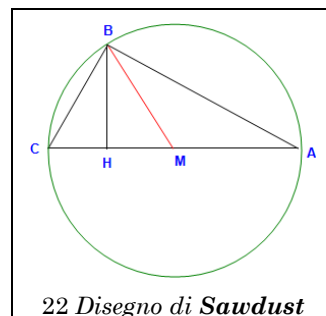
1) Geometria euclidea.

Per Euclide un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la propria proiezione sulla stessa:

$$CH : CB = CB : AC \text{ e } AH : AB = AB : AC$$

Stabilito di avere una cfr di raggio unitario, risulta $AC = 2$ e, posto $CH = x$, abbiamo le seguenti proporzioni:

$$x : CB = CB : 2 \text{ e } (2 - x) : AB = AB : 2, \text{ da cui } CB = \sqrt{2x} \text{ e } AB = \sqrt{2(2 - x)}.$$



22 Disegno di Sawdust

Ora dobbiamo solo trovare per quale valore di x è soddisfatta la $\sqrt{2(2-x)}\sqrt{2x} = 1$, da cui $x = 0,13397\dots\dots$, circa $2/15$ del raggio, ossia $1/15$ della lunghezza AC .

2) Trigonometria.

Dal disegno a lato si vede abbastanza agevolmente che
 $AB = 2\cos\alpha$ e $BC = 2\sin\alpha$, perciò basta risolvere la

$$2\sin\alpha * 2\cos\alpha = 1$$

$$\sin\alpha * \cos\alpha = 1/4$$

$$\sin\alpha * \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 1/4$$

$$\sin^2\alpha * (1 - \sin^2\alpha) = 1/16$$

$$\sin^2\alpha - \sin^4\alpha = 1/16$$

$$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + 1/16 = 0$$

posto $\sin^2\alpha = t$ si ha

$$t^2 - t + 1/16 = 0$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 1/4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}/2}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = 0,9330$$

$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 1/4}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}/2}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = 0,06699$$

da $t_1 \rightarrow \sin\alpha = 0,9659$ e $\alpha = 75^\circ$

da $t_2 \rightarrow \sin\alpha = 0,2588$ e $\alpha = 15^\circ$

Da quanto sopra si ha anche che $CH = 1 - \cos 30^\circ = 0,13397\dots$

C'è ancora tanto da vedere, andiamo avanti.

5.2 [161] – Summer Contest – problema 9

Ebbene, dopo i miei peana per le mancate soluzioni, qualcuno si è messo le mani sulla coscienza. Uno solo, ma meglio che niente.

Riporto velocemente il quesito:

È dato un punto K sul lato AB di un trapezio ABCD. Trovate un punto M su CD tale che sia massima l'area del quadrangolo dato dall'incrocio dei triangoli AMB e CDK.

Bene, vediamo la soluzione di **Mirhonf**:

In geometria un **trapezio** è un quadrilatero con due lati paralleli. Facendo riferimento alla figura, AB è parallelo a CD. Sia B_1 la base maggiore (AB); b_2 la base minore e h l'altezza del trapezio.

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane in modo tale che A coincida con l'origine di tale sistema e AB giaccia sull'asse delle ascisse.

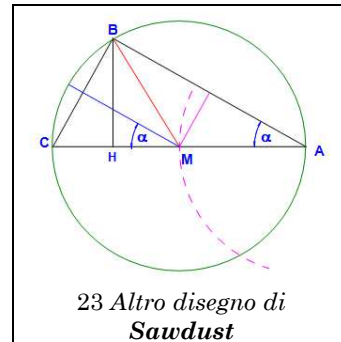
Quindi $A(0;0)$, $B(b;0)$, $C(c,h)$, $D(d,h)$, $K(k,0)$.

Se $M(z;h)$, voglio determinare il massimo dell'area del quadrilatero MEKF al variare di z tra d e c .

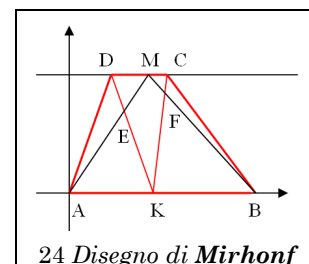
1. Determino le coordinate di E come intersezione delle rette AM e DK.

$$\text{Equazione della retta AM: } \frac{y-h}{0-h} = \frac{x-z}{0-z} \Rightarrow y = \frac{h}{z}x.$$

$$\text{Equazione della retta DK: } \frac{y-0}{h-0} = \frac{x-k}{d-k} \Rightarrow y = -\frac{h}{k-d}x + \frac{kh}{k-d}.$$



23 Altro disegno di Sawdust



24 Disegno di Mirhonf

Mettendo a sistema le due equazioni appena ottenute si ottiene $\frac{h}{z}x = -\frac{h}{k-d}x + \frac{kh}{k-d}$, da cui $x = \frac{kz}{k+z-d}$; $y = \frac{kh}{k+z-d}$ (coordinate del punto E in funzione di z).

2. Determino le coordinate di F come intersezione delle rette KC e MB.

$$\text{Equazione della retta KC: } \frac{y-0}{h} = \frac{x-k}{c-k} \Rightarrow y = \frac{h}{c-k}x - \frac{kh}{c-k}.$$

$$\text{Equazione della retta MB: } \frac{y}{h} = \frac{x-b}{z-b} \Rightarrow y = -\frac{h}{b-z}x + \frac{bh}{b-z}.$$

Mettendo a sistema le due equazioni appena ottenute si ottiene $\frac{h}{c-k}x - \frac{kh}{c-k} = -\frac{h}{b-z}x + \frac{bh}{b-z}$, da cui $x = \frac{bc-kz}{b+c-z-k}$; $y = \frac{h(b-k)}{b+c-z-k}$ (coordinate del punto F in funzione di z).

3. Ora, l'area di MEKF, che chiamo A, è uguale all'area A_1 del triangolo AMB, meno l'area A_2 del triangolo AEK, meno l'area A_3 del triangolo KFB.

$$A_1 = \frac{bh}{2}$$

$$A_2 = \frac{k}{2} \cdot \frac{kh}{k+z-d}$$

$$A_3 = \frac{b-k}{2} \cdot \frac{h(b-k)}{b+c-z-k}$$

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = \frac{bh}{2} - \frac{hk^2}{2(k+z-d)} - \frac{h(b-k)^2}{2(b+c-z-k)}.$$

4. Derivo A(z) e pongo la derivata uguale a 0.

$$A'(z) = 0 + \frac{hk^2}{2} \cdot \frac{1}{(k+z-d)^2} - \frac{h(b-k)^2}{2} \cdot \frac{1}{(b+c-z-k)^2} = 0.$$

Da cui si ottiene: $\frac{k^2}{(k+z-d)^2} = \frac{(b-k)^2}{(b+c-z-k)^2}$. Poiché $k \geq 0$, $(b-k) \geq 0$ (infatti K si trova

tra A e B); poiché M si trova tra D e C, $z \geq d$, quindi $k+z-d \geq 0$; poiché $b \geq k$ e $c \geq z$, si ha che $(b+c-k-z) \geq 0$. Quindi tutti i numeratori e tutti i denominatori della precedente sono sicuramente non negativi, quindi possiamo eliminare tutti gli esponenti:

$$\frac{k}{(k+z-d)} = \frac{(b-k)}{(b+c-z-k)} \text{ da cui, dopo semplici passaggi, si ha: } z = \frac{kc+bd-kd}{b}.$$

In corrispondenza di questo valore di z, si ottiene l'area massima:

$$A = \frac{bh}{2} - \frac{hk^2}{2} \cdot \frac{b}{bk+ck-dk} - \frac{h(b-k)^2}{2} \cdot \frac{b}{b^2-bk+bc-ck-bd+dk} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{c-d}{b+c-d} = \frac{B_1 h}{2} \cdot \frac{b_2}{B_1 + b_2} \quad (1).$$

Sinora non ho considerato i casi limite.

Se $k=b$, il punto F coincide con B, quindi $A_3=0$.

$$A = \frac{bh}{2} - \frac{hb^2}{2(b+z-d)} \Rightarrow A'(z) > 0. \text{ Quindi A è crescente da } z=d \text{ sino a } z=c. \text{ Infatti}$$

$$A(d)=0; A(c) = \frac{bh}{2} - \frac{hb^2}{2(b+c-d)} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{c-d}{b+c-d} \text{ (stesso valore della (1)).}$$

Se $k=0$, il punto E coincide con A, quindi $A_2=0$.

$A = A_1 - A_2 - A_3 = \frac{bh}{2} - \frac{hb^2}{2(b+c-z)} \Rightarrow A'(z) < 0$. Quindi A è decrescente da $z=d$

sino a $z=c$. Infatti, $A(c)=0$; $A(d) = \frac{bh}{2} - \frac{hb^2}{2(b+c-d)} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{c-d}{b+c-d}$ (stesso valore

della (1)).

Mentre ringraziamo **Mirhonf** per questo contributo, invitiamo tutti a finire di risolvere i problemi del *Summer Contest*. Speriamo che l'inverno porti consiglio: ora capisco perché il Capo non ha nemmeno voluto proporre un contest l'anno scorso...

5.3 [164]

5.3.1 Vendetta, tremenda vendetta!

Ancora? Ebbene sì, ancora. La vendetta del Capo continua a colpire. Dopo l'iniziale non-soluzione di **Franco57** in RM165 e i commenti di **trentatre** e **Rub**, nonché la lunga trattazione di **Robbin Threadbare**, è lo stesso **Franco57** a rifarsi sentire. Ma cominciamo dall'inizio e riportiamo qui il testo:

Abbiamo due giochi: Mati ne gioca uno, mentre Davide ne gioca un altro.

Mati ha a disposizione un certo numero N di palline in un sacchetto, originariamente colorate di N colori diversi: il suo gioco consiste nel tirare fuori due palline a caso e colorare la seconda del colore della prima, per poi rimetterle entrambe nel sacchetto; il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono dello stesso colore.

Davide ha a disposizione M palline in un (altro) sacchetto, originariamente non colorate: il suo gioco consiste nel tirar fuori una pallina a caso e colorarla di un dato colore; il suo gioco finisce quando tutte le palline del sacchetto sono colorate.

M&D vanno avanti a fare una "mossa" l'uno e una "mossa" l'altro, sin quando uno dei due termina il proprio gioco. Rudy ha deciso che (in media) Davide deve perdere se $N=80$, e vincere se $N=81$: quale valore di M , per i due N dati sopra, garantisce (in media) la vittoria o la sconfitta di Davide?

Bene, **Franco** ci ha scritto di non aver pensato ad altro da quando ci ha inviato la sua soluzione iniziale, per cui gli diamo senz'altro spazio subito:

Rudi amici, dopo la pubblicazione della mia non-soluzione, il mese di ottobre e l'inizio del mese di novembre ho continuato a lavorare solo su questo problema prendendo però ripetutamente sonore sberle, tanto che ho solidarizzato con Alice nella idiosincrasia sul calcolo delle probabilità. Ma ho tenuto duro e ripartendo dai ragionamenti di base, alla fine ho avuto la soddisfazione di pervenire anch'io ad una dimostrazione, che ho completato prima di leggere le soluzioni sul numero di novembre.

Quando le ho lette ho visto che anche **trentatre** e di **Robbin Threadbare** avevano avuto come me l'idea di concentrarsi su un solo colore per il calcolo del numero medio di estrazioni per Mati. Beh, naturalmente si può pensare che io *mi sia ispirato*, comunque ben vengano le copiatore delle buone idee!

trentatre ha mirabilmente dimostrato la congettura sul gioco di Mati usando una matematica molto evoluta dalla quale ho tutto da imparare (ad esempio la funzione generatrice).

Rub si chiede perché se Davide con al più 67 estrazioni ha il 50% di probabilità di aver completato il gioco, il numero medio di estrazioni risulta diverso. Credo che sia una di quelle sberle a cui mi riferivo: 67 dovrebbe essere la mediana e non la media. Un esempio può chiarire: $P(1)=25\%$; $P(2)=25\%$; $P(3)=50\%$. Fino a 2 siamo al 50%, ma la media vale in questo caso di meno: $1 \times 25\% + 2 \times 25\% + 3 \times 50\% = 1,75$.

Robbin Threadbare calcola in $M=768$ una soluzione (tra l'altro mi fatto capire che con $N=21$ io avevo dato una risposta finale sbagliata, perché avevo confuso N con M , forse a causa del fatto che Mati inizia per M).

Forse sbaglio ancora, ma con la formula della congettura tornerebbe un po' diverso: se Mati parte con $N=80$ palline, in media gli occorrono $(N-1)^2 = 79^2 = 6241$ estrazioni che con 81 palline salgono a $80^2 = 6400$. A Davide che parte con M palline di estrazioni ne occorrono in media $M \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{M}\right)$. Quindi si richiede

che queste ultime siano più di 6241 ma meno di 6400. Con un programma ho trovato che i valori di M che soddisfano la condizione sono nel range da 852 a 871, quindi un po' più alti di 768.

Passo ora alla promessa dimostrazione della (ormai non più) congettura che se Mati ha nel sacchetto n palline, in media gli sono necessarie $(n-1)^2$ estrazioni per completare il gioco.

L'idea che ho avuto per semplificare i calcoli è di fissare un colore, poniamo sia il nero, e calcolare in media quante estrazioni sono necessarie affinché tutte le palline diventino nere, ogni volta che ciò avviene. In altre parole si gioca fino a che tutte le palline siano nere o fino a che il nero sia scomparso. In questo ultimo caso si ignora l'evento e si ricomincia da capo il gioco.

Poiché questa media condizionata è identica per tutti gli N colori, deve coincidere con il numero medio di estrazioni necessarie per completare il gioco qualsiasi sia il colore ottenuto alla fine.

In generale il valor medio M di una funzione L su uno spazio discreto di probabilità E con funzione di probabilità P e condizionato ad un sottoinsieme $A \subset E$ è dato da

$$M(A) = \sum_{x \in E} P(x|A) \cdot L(x) = \sum_{x \in A} \frac{P(x)}{P(A)} \cdot L(x) = \frac{L(A)}{P(A)}, \text{ avendo posto } L(A) = \sum_{x \in A} P(x) \cdot L(x).$$

Nel nostro caso E è l'insieme di tutte le partite ed A il sottoinsieme di quelle in cui alla fine prevale il nero.

Indicando con S_k lo stato in cui ci sono k palline nere nel sacco, S_n ed S_0 sono gli stati finali. Generalizzare aiuta, allora poniamo che si possa fare un cambiamento di stato generico, sia

P_{ij} la probabilità di passare da S_i ad S_j ($0 < i < n$ $0 \leq j \leq n$);

A_i l'insieme delle partite vincenti cioè dei percorsi x che passano da S_i a S_n (ovviamente nel mezzo non si toccano mai gli stati finali S_0 ed S_n);

P_i la probabilità che da S_i si arrivi a S_n (e non a S_0), quindi $P_i = P(A_i) = \sum_{x \in A_i} P(x)$.

La nostra funzione $L(x)$ sarà la lunghezza del percorso, cioè il numero di transizioni di stato. Per semplicità $L(A_i)$ lo indichiamo con L_i , quindi per definizione $L_i = \sum_{x \in A_i} P(x) \cdot L(x)$.

Ora, considerando che per passare da S_i a S_n ci si può andare direttamente (cammino diretto $S_i S_n$) a oppure passando prima per S_j ($1 \leq j < n$) (cammino $S_i S_j \dots S_n$), possiamo stabilire delle relazioni tra gli L_i :

$$L_i = \sum_{1 \leq j < n} \sum_{x \in A_j} P_{ij} P(x) \cdot (L(x)+1) + P_{in} \cdot 1 = \sum_{1 \leq j < n} P_{ij} \sum_{x \in A_j} P(x) \cdot L(x) + \sum_{1 \leq j < n} \sum_{x \in A_j} P_{ij} P(x) + P_{in} = \sum_{1 \leq j < n} P_{ij} L_j + \sum_{x \in A_i} P(x)$$

cioè il sistema di equazioni $L_i = \sum_{1 \leq j < n} P_{ij} L_j + P_i$ (da notare che si sono usate la proprietà distributiva e commutativa su somme infinite e numerabili, il che è lecito poiché i termini sono tutti positivi).

Il valore medio cercato partendo dallo stato S_i vale $M_i = \frac{L_i}{P_i}$.

Queste relazioni valgono in generale e le possiamo applicare al nostro caso specifico, dove cerchiamo $M_1 = \frac{L_1}{P_1}$. Abbiamo che partendo da S_k , cioè da k palline

nera, la probabilità di vincita P_k è $\frac{k}{n}$. Un modo per convincersene è notare che la probabilità è la stessa che si ha nel problema originale quando prevale uno qualsiasi di k colori fissati e naturalmente che prevalga un dato colore la probabilità è $\frac{1}{n}$.

Inoltre dopo una estrazione a partire da $k > 1$ palline nere queste aumentano di 1 oppure diminuiscono di 1 scegliendo una pallina nera ed una bianca in $k(n-k)$ coppie delle possibili $n(n-1)$. In tutti gli altri casi rimangono stabili a k . Quindi abbiamo le equazioni:

$$L_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)} L_{k-1} + \frac{k(n-k)}{n(n-1)} L_{k+1} + \left(1 - 2 \frac{k(n-k)}{n(n-1)}\right) L_k + \frac{k}{n}$$

Portando L_k a fattor comune e dividendo per $\frac{k(n-k)}{n(n-1)}$ giungiamo ad una comoda definizione ricorsiva: $L_{k+1} = 2L_k - L_{k-1} - \frac{n-1}{n-k}$.

Per $k = 1$ non abbiamo L_{k-1} perciò l'equazione diventa $L_2 = 2L_1 - \frac{n-1}{n-1} = 2L_1 - 1$.

Ricavando successivamente L_3, L_4, L_5, \dots si scopre che

$$L_k = kL_1 - (n-1) \sum_{1 \leq i < k} \frac{k-i}{n-i} \quad 1 < k \leq n \quad \text{che è facile dimostrare per induzione.}$$

Verifichiamo i primi due casi: $L_2 = 2L_1 - 1 = 2L_1 - (n-1) \frac{1}{n-2}$,

$$L_3 = 2L_2 - L_1 - \frac{n-1}{n-2} = 2(2L_1 - 1) - L_1 - \frac{n-1}{n-2} = 3L_1 - (n-1) \frac{2}{n-1} - (n-1) \frac{1}{n-2} = 3L_1 - (n-1) \left(\frac{2}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right)$$

e il caso generale di L_{k+1} che dipende dai due valori precedenti:

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= 2L_k - L_{k-1} - \frac{n-1}{n-k} = 2 \left(kL_1 - (n-1) \sum_{1 \leq i < k} \frac{k-i}{n-i} \right) - \left((k-1)L_1 - (n-1) \sum_{1 \leq i < k-1} \frac{k-1-i}{n-i} \right) - \frac{n-1}{n-k} = \\ &= (2k - (k-1))L_1 - (n-1) \sum_{1 \leq i < k-1} \left(2 \frac{k-i}{n-i} - \frac{k-1-i}{n-i} \right) - 2(n-1) \frac{1}{n-(k-1)} - \frac{n-1}{n-k} = \\ &= (k+1)L_1 - (n-1) \sum_{1 \leq i < k-1} \frac{k+1-i}{n-i} - (n-1) \frac{2}{n-(k-1)} - (n-1) \frac{1}{n-k} = (k+1)L_1 - (n-1) \sum_{1 \leq i < k+1} \frac{k+1-i}{n-i} \end{aligned}$$

In particolare per $k = n$ si ha $L_n = nL_1 - (n-1) \sum_{1 \leq i < n} \frac{n-i}{n-i} = nL_1 - (n-1) \cdot (n-1) = nL_1 - (n-1)^2$.

Ma essendo $L_n = 0$ si ricava $L_1 = \frac{(n-1)^2}{n}$ ed infine, poiché $P_1 = \frac{1}{n}$, $M_1 = (n-1)^2$, che convalida la congettura.

Spero proprio che questa sia la fine, questa volta. Grazie ancora a **Franco57**.

5.4 [165]

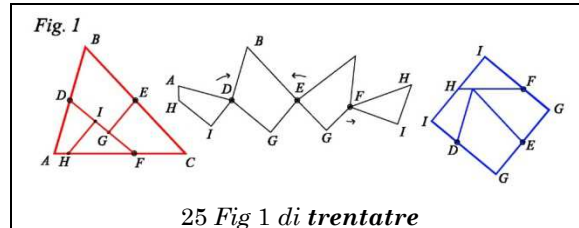
5.4.1 Questo (non) è un problema

Il mese scorso mi lamentavo dei pochi contributi per questo problema:

Trovare un sezionamento di un triangolo qualsiasi che permetta di risistemare i pezzi in modo tale da formare un quadrato. C'è un metodo generale di sezione? E si può incernierare come la nostra copertina?

Il mese scorso si è vista solo una soluzione, da parte di **Tartaruga**, e quando **trentatre** l'ha vista ha pensato bene di impaginare ed inviarci quello che aveva prodotto lui:

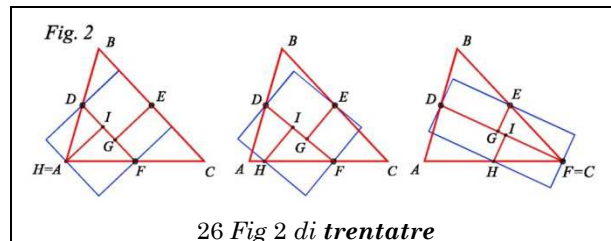
Aggiungo alcune precisazioni ed estensioni alla nota di **Tartaruga**. La scomposizione di Dudeney – per un triangolo non necessariamente equilatero – è quella in figura. La soluzione, salvo triangoli particolari, è minima: il risultato non si può ottenere con meno di quattro pezzi (occorre creare quattro angoli retti che nel triangolo non ci sono).



Con la costruzione indicata da **Tartaruga** (D, E al centro dei rispettivi lati, DF uguale al lato del quadrato) si ottiene un quadrato se valgono le condizioni

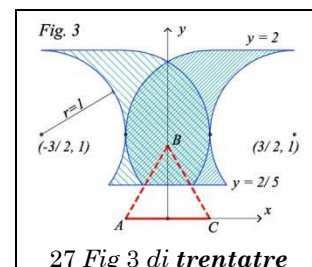
- I. $HI + GE = DF$ (implicita nella costruzione)
- II. segmento HF di lunghezza pari a DE e interno ad AC
- III. G ed I interni a DF .

Il quadrato si ottiene per una precisa posizione del segmento HF . In altre posizioni si ha un rettangolo (v. fig. 2 dove il risultato è sovrapposto al triangolo. Il segmento HF è posto, nelle tre figure, alla estrema sinistra, in posizione "quadrato" e alla estrema destra).



Se il triangolo non è simmetrico, le diverse posizioni ottenute per riflessione e rotazione portano a figure analoghe, ma con diverse (al massimo sei) forme dei pezzi.

Per rispettare le condizioni il vertice B , fissata la base AC , deve stare nello spazio colorato in fig. 3, dove il tratteggio fitto è lo spazio generato con il punto D sul lato AB , il tratteggio rado con D sul lato BC . Per un triangolo generico, si può far coincidere AC con un qualsiasi lato: la "quadratura" è possibile se il terzo vertice cade nell'area. Questo fornisce tutti i triangoli trasformabili in quadrato con il metodo Dudeney.



In coordinate cartesiane, con $AC = 1$, lo spazio è delimitato da

- quattro cerchi con centro in $(-3/2, 1)$, $(-1/2, 1)$, $(1/2, 1)$, $(3/2, 1)$ e raggio = 1
- due rette di ordinata $2/5$ e 2 .

Dato il vertice $B(x, y)$, il quadrato, se esiste, si ha con F nella posizione data da

$$AF = (5/2 - x - \sqrt{2y - y^2}) / 2.$$

Per il triangolo equilatero si ha $x=0, y=\sqrt{3}/2, AF=(5-\sqrt{\sqrt{48}-3})/4=0.7545$.

Tutte le soluzioni sono incernierabili in D, E e F (o anche H, D ed E).

La dimostrazione è riportata in calce.

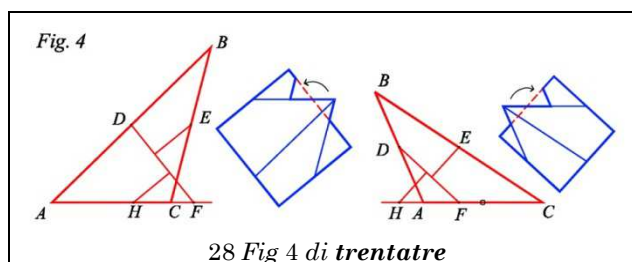
Dividiamo i triangoli in tre classi: (a) con B interno all'area colorata, (b) con B nella fascia $2/5 \leq y \leq 2$ ma escluso il caso (a), (c) gli altri.

Il caso (a) è risolto: "quadratura" Dudeney in quattro pezzi incernierabili.

Nel caso (b) vale la condizione III. ma non la II. Cioè G ed I restano interni a DF e generano 4 angoli retti, ma H ed F non sono interni ad AC . Si ottengono quadrati incompleti, che si possono completare tagliando ulteriormente i pezzi.

I casi sono quelli di fig. 4; si hanno in genere 6 pezzi non incernierabili.

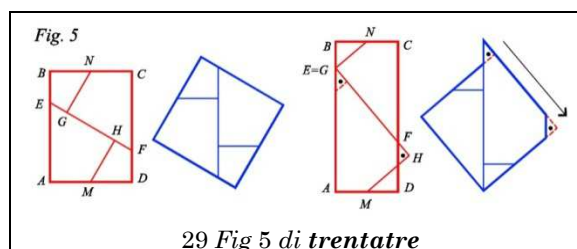
Resta il caso (c) che si potrebbe risolvere anch'esso, in modo complicato, applicando una sequenza di trasformazioni Dudeney. Ma in generale una soluzione non incernierata si può ottenere – per tutti i triangoli – in modo più semplice.



28 Fig 4 di trentatre

Qualsiasi triangolo ammette sempre la trasformazione in rettangolo, in tre pezzi incernierabili (basta condurre due ortogonali al lato maggiore dai punti di mezzo degli altri lati).

A sua volta dal rettangolo si ottiene un quadrato con lo schema di fig. 5, dove il segmento EF è uguale al lato del quadrato, e G, H si hanno dalle ortogonali a questo condotte dai punti M, N in mezzeria dei lati (lo schema deriva chiaramente da quello di Dudeney). Il risultato è una scomposizione in 4 pezzi. Se la proporzione del rettangolo supera 2, si può tagliare e ricomporre per mantenere un rapporto limitato, oppure (seconda figura) si ottiene un quadrato incompleto e i pezzi aumentano.

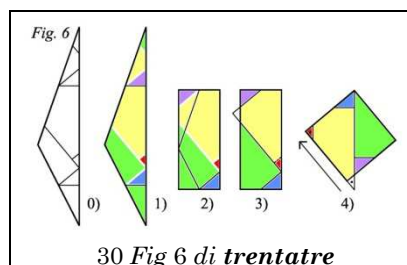


29 Fig 5 di trentatre

Quindi ogni triangolo generico può essere "quadrato" in un numero finito di pezzi.

Naturalmente, se applicabile, conviene la trasformazione di Dudeney, che fornisce solo 4 pezzi per di più incernierabili.

In fig. 6 un esempio: 1) è il triangolo iniziale (caso (c) che con due tagli diventa il rettangolo 2), da tagliare come in 3) per avere il quadrato finale 4). Riportando i tagli da 3) sui pezzi di 2) e poi su 1) si ottiene la ripartizione 0) del triangolo iniziale, in 8 pezzi che compongono il quadrato.



30 Fig 6 di trentatre

Dimostrazioni della fig. 3.

Siano s : area del triangolo, $a = 1, b, c$: lati, α : angolo in A

- si ha per il vertice $B(x, y)$

$$[1] \quad x = c \cos \alpha - 1/2, \quad y = c \sin \alpha$$

$$[2] \quad s = DF^2 = y/2 \text{ (area del quadrato = area del triangolo)}$$

[3] p : ascissa del punto medio di HF , con $-1/4 \leq p \leq 1/4$ (condizione II.)

- dal triangolo ADF (teorema del coseno)

[4] $s = DF^2 = AF^2 + AD^2 - 2AF \cdot AD \cos \alpha$, che con $AF = 3/4 + p$ e per [2] diventa

$$y/2 = (3/4 + p)^2 + c^2/4 - (3/4 + p)c \cos \alpha$$

- dalle [1] si ha $c^2 = y^2 + (x+1/2)^2$ e $c \cos \alpha = x+1/2$ da cui

$$[5] \quad (x+2p-1)^2 + (y-1)^2 = 1: \text{ un cerchio di raggio 1}$$

- applicando i limiti di p dati da [3], B deve stare fra i due cerchi

i. $p \geq -1/4$, $\boxed{(x-3/2)^2 + (y-1)^2 = 1}$: cerchio di centro $(3/2, 1)$ e raggio 1

ii. $p \leq 1/4$, $\boxed{(x-1/2)^2 + (y-1)^2 = 1}$: cerchio di centro $(1/2, 1)$ e raggio 1

Per la condizione III., con δ : angolo in F di ADF si ha

$$s = DF^2 = y/2 = DF \sin \delta \Rightarrow DF = \sqrt{y/2} = \sin \delta$$

$$HI^2 = 1/4 - IF^2 = IF^2 + 1/4 - IF \cdot \cos \delta \Rightarrow 2IF = \cos \delta$$

- e per I interno a DF , cioè $IF \leq DF$

$$\text{iii. } \cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = \sqrt{1 - y/2} \leq \sqrt{2y} \Rightarrow \boxed{y \geq 2/5}.$$

L'area descritta da i., ii., iii. è quella a tratteggio fitto (punto D sul lato AB); l'altra si ottiene per simmetria.

La posizione di F per il quadrato si ha risolvendo la [5] per p , con $AF = 3/4 + p$.

E con questo chiudiamo tutte le pendenze passate e arriviamo finalmente ai problemi dello scorso numero.

5.5 [166]

5.5.1 Più che pace, tregua armata

Problema di complicata rielaborazione, che coinvolge, come sempre, il giardino del nostro povero Postino Tuttodfare:

Definiamo come Poligono Diofanteo un poligono convesso avente i lati interi positivi e inscritto in un cerchio avente diametro intero; a margine, diciamo che un poligono diofanteo è incentrato se il centro del cerchio è all'interno del poligono, excentrato nel caso contrario; se poi un diametro del cerchio è un lato del poligono, lo definiremo diametrale.

Doc ha deciso di fare delle aiuole tali che siano tutte dei poligoni diofantei, intende inserire un solo poligono per ogni permutazione dei lati. Lavorando in metri e volendo limitare il diametro massimo del cerchio a 10 metri, quante aiuole potrà costruire? Troverà, con questa limitazione, un poligono diofanteo excentrato?

Se evitiamo ogni sovrapposizione tra le aiuole, ammettendo però che siano in contatto per un angolo o per un lato, quale dovrà essere la dimensione minima del giardino di Doc per contenere tutte le possibili aiuole diofantee con diametro minore o uguale a 10?

L'ultima parte era – secondo il Capo – difficilissima. Soluzioni poche, ma buone, come sempre. I nostri eroi sono **Br1** e **trentatre**, e cominciamo proprio da **Br1**. Mettetevi comodi, però, che non è una soluzione lampo.

Questa volta ci occupiamo di *Giardinaggio Ornamentale*. Si tratta di cercare tutti i poligoni convessi, con lati di lunghezza intera L_j , inscrittibili in cerchi di diametro D anch'esso intero, non superiore a 10 in lunghezza; per convenzione decidiamo di rappresentarli su un piano cartesiano con il centro dei cerchi nell'origine, e

stabiliamo di piazzare i lati del poligono a partire dal punto $A=(R, 0)^{23}$, procedendo poi in senso antiorario.

Cominciamo considerando un generico *Poligono Incentrato* (*Diofanteo* o no), ad esempio pentagonale; possiamo convenzionalmente indicarlo come segue:

$$S_{X,Y,W}=(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)$$

dove la S sta per *Sequenza* (di lati); il primo pedice della S indica il diametro del cerchio esaminato, il secondo un determinato insieme di lunghezze dei lati, ed i valori L_i sono le lunghezze dei lati stessi. La presenza del terzo pedice sarà chiarita in seguito. Possiamo rappresentarlo in verde come segue

Adesso consideriamo una qualsiasi coppia di lati consecutivi, ad esempio L_2 ed L_3 , e tracciamo la corda BD che unisce i vertici non in comune fra essi, poi i raggi OD e OB, e quindi la bisettrice OP dell'angolo in O del triangolo DOB.

Essendo questo triangolo isoscele, OP taglia DB perpendicolarmente, e suddivide il settore circolare ODPB in due parti uguali, simmetriche rispetto ad OP. Ora possiamo immaginare di riflettere specularmente il settore circolare rispetto ad OP: i due lati L_2 ed L_3 verranno ad assumere le posizioni L'_2 ed L'_3 , e la Sequenza:

$$S_{X,Y,Z}=(L_1, L_3, L_2, L_4, L_5)$$

rappresenterà anch'essa un *Poligono Incentrato*, ottenuto scambiando di posto due lati consecutivi.

Eseguendo successioni di simili scambi, è possibile costruire tutte le 120 *Sequenze* corrispondenti alle permutazioni dei 5 lati del *Poligono*. Quindi, se la prima *Sequenza* (la $S_{X,Y,Z}$) fosse *Diofantea*, tali sarebbero anche le altre 119. Viceversa, se non lo fosse la prima (perché contenente almeno un lato di lunghezza non intera), nessuna delle 120 *Sequenze* sarebbe *Diofantea*: non è possibile liberarsi di un lato non intero limitandosi a rimescolare l'ordine dei lati.

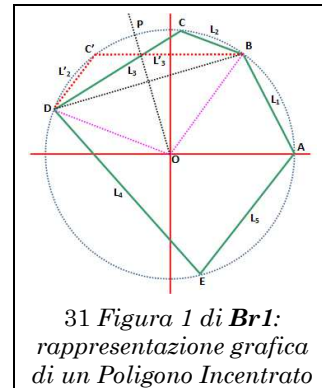
A questo punto si può chiarire la presenza del terzo pedice; a ciascuna permutazione di lati corrisponderà un diverso valore di esso.

Le cose si complicano un po' se il *Poligono* è invece *Excentrato*; consideriamo la Sequenza relativa al quadrilatero qui sotto rappresentato, sempre in verde:

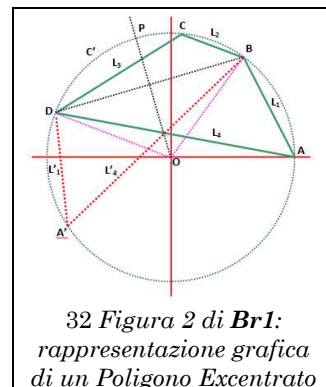
$$S_{X,Y,Z}=(L_1, L_3, L_2, L_4)$$

Se ora proviamo a scambiare di posto il lato più lungo L_4 con uno dei due adiacenti (ad esempio L_1), si vede che occorre *sradicare* il primo lato della Sequenza dalla posizione iniziale A che si era invece scelta *fissa* per convenzione; ad operazione compiuta, con L'_1 ed L'_4 indicati dalle linee rosse tratteggiate, possiamo però sempre immaginare di far compiere una *rotazione* al *Poligono*, che riporti A' nella posizione originale A. E quindi valgono ancora le stesse considerazioni fatte sopra per i *Poligoni Incentrati*.

I *Poligoni Diametrali* rappresentano un caso limite sia di quelli *Incentrati* che di quelli *Excentrati*, ed ancora vale per essi quanto visto sopra. Quindi, in ogni caso si può affermare che:



31 Figura 1 di Br1: rappresentazione grafica di un Poligono Incentrato



32 Figura 2 di Br1: rappresentazione grafica di un Poligono Excentrato

²³ Qui provo a conquistare il *Record Europeo Indoor* di pignoleria, precisando che con **R** si intende il raggio dei cerchi, cioè $R=D/2$. Ovviamente **R** risulterà non intero, per i valori dispari di **D**.

Se la Sequenza $S_{X,Y,Z}=(L_1, L_2, \dots, L_N)$ rappresenta un Poligono Diofanteo, allora tutte le Sequenze ottenibili permutando l'ordine dei lati produrranno anch'esse Poligoni Diofantei. Se invece la Sequenza $S_{X,Y,Z}$ rappresenta un Poligono non Diofanteo, allora tutte le Sequenze ottenibili permutando l'ordine dei lati produrranno anch'esse Poligoni non Diofantei.

In definitiva, per andare a caccia dei Poligoni Diofantei, è sufficiente analizzare una sola Sequenza per ciascun insieme di lunghezze dei lati; scegliamo allora ancora per convenzione di esaminare le particolari permutazioni che presentano i lati in ordine crescente; potremmo chiamarle Sequenze Base, o Sequenze Ordinate, identificandole per il valore del terzo pedice posto pari ad 1:

$$S_{X,Y,1}=(L_1, L_2, \dots, L_N), \text{ con } L_j \leq L_{j+1}$$

Una volta trovata una Sequenza Diofantea Ordinata, sarà possibile ricavare da essa tutte le Sequenze Diofantee Figlie $S_{N,K,M}$ permutando l'ordine dei lati in tutti i modi possibili. Se una o più lunghezze dei lati compaiono ripetute (come per L_3 ed L_5 nella Figura 1), sarà necessario scartare i duplicati; andranno anche scartate le Sequenze che portano a Poligoni sovrapponibili per rotazione, poiché ad esempio $S_{X,Y,1}=(L_1, L_2, L_3)$ e $S_{X,Y,2}=(L_3, L_1, L_2)$ identificano lo stesso Poligono disposto nel cerchio in modo diverso. Non vanno invece scartate le riflessioni, per cui ad esempio $S_{X,Y,1}=(L_1, L_2, L_3)$ e $S_{X,Y,3}=(L_2, L_1, L_3)$ vanno entrambe conservate.



Adesso, un primo compito consiste nell'elencare, per ciascun valore del diametro del cerchio, tutte le Sequenze Ordinate potenzialmente Diofantee, che andranno poi analizzate individualmente per verificare se producono o meno uno o più Poligoni Diofantei. Nella pratica, nello stilare questi elenchi, è possibile porre una serie di condizioni ragionevoli in grado di ridurre la quantità di Sequenze da analizzare, facendone scartare un certo numero in fase di preselezione; fra banali e meno banali, queste condizioni sono:

- a) i Poligoni hanno almeno 3 lati, e non sono cioè degeneri (per ciascun valore intero di D, il biangolo costituito da due diametri sovrapposti sarebbe in fondo un Poligono Diofanteo, e Doc potrebbe piantare filari rettilinei doppi di begonie e nasturzi lunghi da 1 a 10 metri. Comunque non ce ne occupiamo...)
- b) il perimetro dei Poligoni inscritti nei cerchi deve essere inferiore alla circonferenza dei cerchi stessi, o meglio non superiore alla parte intera di questo valore, per cui:

$$1) \sum_{j=1}^N L_j \leq \text{Int}(\pi D)$$

- c) l'ultimo lato di ciascuna Sequenza (il più esteso del Poligono) deve essere inferiore in lunghezza alla somma dei precedenti N-1 lati (è l'estensione ai Poligoni di N lati del fatto che in un triangolo la somma di due lati è inferiore al terzo)
- d) la lunghezza di nessun lato può superare quella del diametro ($L_j \leq D$)
- e) al più il solo ultimo lato (il più esteso del Poligono) può avere lunghezza pari al diametro (in caso contrario gli ultimi due lati si sovrapporrebbero), cioè $L_{N-1} < D$.

Volendo, si potrebbero inventare altre condizioni più complesse in grado di scremare ulteriormente le liste di Sequenze da sottoporre ad analisi approfondita. In ogni caso, la tabella qui a destra mostra il numero di

D	Criteri		D	Criteri	
	a, b	a, ..., e		a, b	a, ..., e
1	1	0	6	1497	892
2	14	6	7	3374	2113
3	67	33	8	9114	5753
4	223	118	9	18235	12042
5	612	345	10	35199	24171

33 Tabella 1 di Br1: le sequenze da esaminare

Sequenze da analizzare per valori di D da 1 a 10; nelle colonne verdi le Sequenze che soddisfano i soli criteri a) e b), in quelle violette quelle residue che li soddisfano tutti.

Ora, per eseguire l'analisi delle Sequenze superstiti, si può ragionare come segue: per i Poligoni Incentrati (come quello della Figura 3 che segue) si vede che affinché il Poligono sia Diofanteo occorre che la somma degli angoli al centro relativi a tutti i lati eguagli esattamente un angolo giro, cioè:

$$2) \sum_{J=1}^N \alpha_J = 2\pi$$

Adesso, dal Teorema della Corda si ha che:

$$3) L_J = 2R \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_J}{2}\right)$$

Da cui:

$$4) \alpha_J = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_J}{2R}\right)$$

Quindi la 2) si può riscrivere come segue:

$$5) \sum_{J=1}^N \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_J}{2R}\right) = \pi$$

Per i Poligoni Excentrati, le cose sono appena un po' più complicate; per il lato più lungo (L_N , ultimo della Sequenza) la 4) fornisce un valore di α_N improprio, perché valutato dalla parte sbagliata del cerchio. Ad esempio, considerando il Poligono della Figura 4 che segue, la formula restituisce l'angolo indicato in azzurro anziché quello in verde, che sarebbe quello corretto perché sommato ai primi $N-1$ angoli produce un angolo giro. Comunque si può scrivere, per i Poligoni Excentrati:

$$6) \alpha_N = 2\pi - 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_N}{2R}\right)$$

E l'equivalente della 5) diviene:

$$7) \sum_{J=1}^{N-1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_J}{2R}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{L_N}{2R}\right)$$

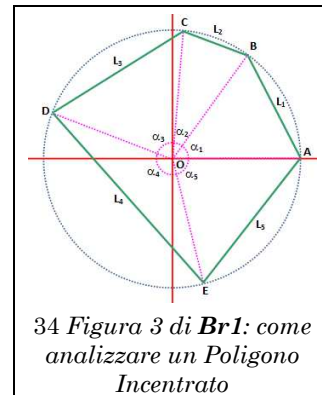
Per i Poligoni Diametrali, infine, l'angolo relativo a L_N vale π , e si può utilizzare indifferentemente la 5) o la 7).



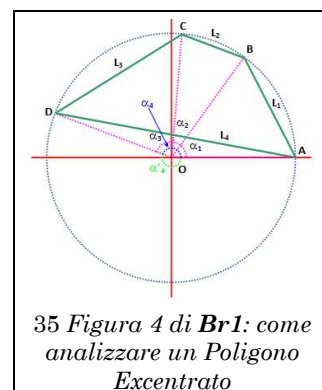
Adesso, applicare la 5) o la 7) nei 45.473 casi residui della Tabella 1 per via analitica *potrebbe* richiedere un po' troppo tempo, per cui ho deciso di demandare il compito al Picci, opportunamente istruito con un programmino VB®.

Il programma, per ciascun valore di D da 1 a 10, e per ciascun valore di N da 3 ad $\operatorname{Int}(\pi D)$, genera tutte le Sequenze che soddisfano i criteri a) e b) esposti sopra, scartando poi quelle che non superano il setaccio dei criteri c), d) ed e).

Per le Sequenze superstiti, dato che il Picci non sa a priori se si tratti di un Poligono Incentrato o Excentrato, vengono verificate sia l'eguaglianza 3) che la 5); le



34 Figura 3 di Br1: come analizzare un Poligono Incentrato



35 Figura 4 di Br1: come analizzare un Poligono Excentrato

Sequenze che superano uno dei due test vengono dichiarate *Sequenze Ordinate Candidate Diofantee*.

Perché *Candidate*? La ragione sta nel fatto che, se non ci si limita a trattare numeri interi, un *Picci* introduce errori di calcolo causati dalle inevitabili approssimazioni dovute ai troncamenti; anche se si sceglie di operare con variabili di tipo *Double*²⁴, la precisione è limitata a 15 cifre significative. E nei calcoli relativi alla 5) ed alla 7) sono valutati arcoseni *a gogò*, ed appare π , quindi troncamenti a tutto spiano...

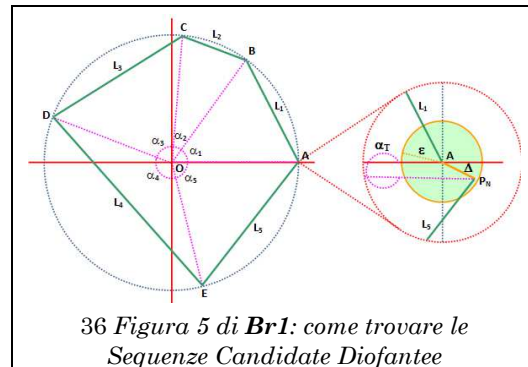
Allora si è scelto far lavorare il programma come segue: una volta calcolato l'angolo complessivo relativo a tutti i lati della *Sequenza*, (chiamiamolo α_T , dove T sta per *totale*), si ricavano le coordinate di P_N , ultimo punto del *Poligono* sotto esame:

$$8) \begin{cases} X_N = R \cos(\alpha_T) \\ Y_N = R \sin(\alpha_T) \end{cases}$$

Quindi si calcola la distanza Δ di tale punto da quello di partenza, cioè dal primo vertice del *Poligono*, che ricordiamo essere $A(R, 0)$:

$$9) \Delta = \sqrt{(X_N - R)^2 + Y_N^2}$$

Adesso, osserviamo con lo *zoom* cosa accade in un intorno del punto A (Figura 5, a destra); se il *Poligono* fosse davvero *Diofanteo*, P_N dovrebbe coincidere con A, qualunque fosse il livello di *zoom*. A causa delle suddette approssimazioni, il *Picci* rileva invece la distanza Δ fra P_N ed A; allora, per non scartare erroneamente *Sequenze Ordinate Diofantee*, vengono accettate come *Candidate* tutte quelle per le quali P_N cade nel cerchietto verde di raggio ϵ , cioè quelle per le quali si ha:



$$10) \frac{\Delta}{R} < \epsilon$$

Al primo membro della 10) si è normalizzato il valore di Δ per rendere ϵ adimensionale, e quindi indipendente da R in modo da rendere comparabili le approssimazioni che si compiono per il vari valori del diametro. Ricavate con questo metodo tutte le *Sequenze Ordinate Candidate*, queste andranno poi sottoposte ad una ben più rigorosa valutazione geometrica e/o analitica, per la sperata *consacrazione* finale...

Il valore di ϵ è cruciale, e va determinato con attenzione; se viene scelto troppo piccolo, si rischia di tener fuori *Sequenze Diofantee* valide. Se invece lo si sceglie troppo grande, verranno accettate per buone *Sequenze Candidate* che *Diofantee* non sono, e che costringono a valutazioni geometrico-analitiche che possono essere lunghe e complesse. Un buon metodo è tentare più valori di ϵ empiricamente per lo stesso valore di D, basandosi poi sui risultati che si ottengono per determinare quello ottimale.

²⁴ Cioè, secondo quanto affermala guida di VB®, “Un valore a virgola mobile a precisione doppia con un intervallo compreso tra -1,79769313486232E308 e -4,94065645841247E-324 per i valori negativi e tra 4,94065645841247E-324 e 1,79769313486232E308 per i valori positivi e zero”.

Ad esempio, con $D=9$ e $\epsilon=1E-4$, spuntano fuori le seguenti *Sequenze Ordinate Candidate*:

Osservando i valori di Δ corrispondenti alle varie *Sequenze*, si nota che l'ultimo è più di 3 miliardi di volte più elevato degli altri, il che fa nascere il lieve sospetto che non si tratti di una *Sequenza Diofantea*, bensì di un refuso dovuto al fatto di aver scelto un valore di ϵ troppo elevato; tutti gli altri Δ abbinati alle *Sequenze Ordinate Candidate* facendo variare D da 1 a 10 sono inferiori a $4E-15$...

Sequenza	Lati	Delta / R
$S_{9,1,1}$	1-6-6-9	3,8E-15
$S_{9,2,1}$	3-3-7-9	3,8E-15
$S_{9,3,1}$	1-1-6-6-6-6	2,4E-15
$S_{9,4,1}$	1-3-3-6-6-7	2,4E-15
$S_{9,5,1}$	3-3-3-3-7-7	2,4E-15
$S_{9,6,1}$	1-1-1-1-2-2-2-2-2-4-7	1,3E-05

37 Tabella 2 di **Br1**: Sequenze di tentativo per $D=2$



Scegliamo allora $\epsilon=1E-9$, cioè una equilibrata via di mezzo (*di mezzo* in senso logaritmico) fra il precedente $1E-4$ ed il $4E-15$ che pare caratterizzare le *Sequenze Ordinate Candidate* degne di questo nome.

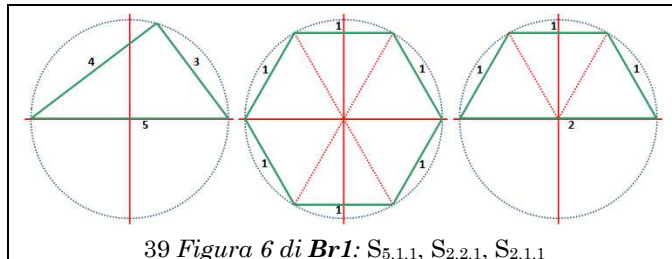
In qualche secondo, il programma sputa fuori la seguente lista di 23 *Sequenze*: in tabella. Adesso si tratta di convalidarle o scartarle in modo certo; vediamo come:

Sequenza	Lati	Delta	Sequenza	Lati	Delta	Sequenza	Lati	Delta
$S_{2,1,1}$	1, 1, 1, 2	2,9E-15	$S_{3,1,1}$	2, 2, 7, 8	3,8E-15	$S_{4,1,1}$	1, 3, 3, 6, 6, 7	2,4E-16
$S_{2,2,1}$	1, 1, 1, 1, 1, 1	1,5E-15	$S_{3,2,1}$	4, 4, 4, 8	2,9E-15	$S_{9,5,1}$	3, 3, 3, 3, 7, 7	2,4E-16
$S_{4,1,1}$	2, 2, 2, 4	2,9E-15	$S_{3,3,1}$	2, 2, 2, 2, 7, 7	6,4E-16	$S_{10,1,1}$	6, 8, 10	2,9E-15
$S_{4,2,1}$	2, 2, 2, 2, 2, 2	1,5E-15	$S_{4,4,1}$	2, 2, 4, 4, 4, 7	6,4E-16	$S_{10,2,1}$	5, 5, 5, 10	2,9E-15
$S_{5,1,1}$	3, 4, 5	2,9E-15	$S_{5,5,1}$	4, 4, 4, 4, 4, 4	1,5E-15	$S_{10,3,1}$	6, 6, 8, 8	6,4E-16
$S_{6,1,1}$	3, 3, 4, 4	1,5E-15	$S_{9,1,1}$	1, 6, 6, 9	3,8E-15	$S_{10,4,1}$	5, 5, 5, 6, 8	6,4E-16
$S_{6,2,1}$	3, 3, 3, 6	2,9E-15	$S_{9,2,1}$	3, 3, 7, 9	3,8E-15	$S_{10,5,1}$	5, 5, 5, 5, 5, 5	1,5E-15
$S_{8,1,1}$	3, 3, 3, 3, 3, 3	1,5E-15	$S_{9,3,1}$	1, 1, 6, 6, 6, 6	2,4E-16			

38 Tabella 3 di **Br1**: le sequenze ordinate candidate diofantee

Le *Sequenze* in verde chiaro della Tabella 3 ($S_{5,1,1}$ e $S_{10,1,1}$) sono relative a *Poligoni Diametrali* (due triangoli), formati da lati che costituiscono *Terne Pitagoriche*: costituiscono quindi le prime *Sequenze Diofantee confermate* che incontriamo... A titolo di esempio, $S_{5,1,1}$ è mostrata a sinistra nella Figura 6:

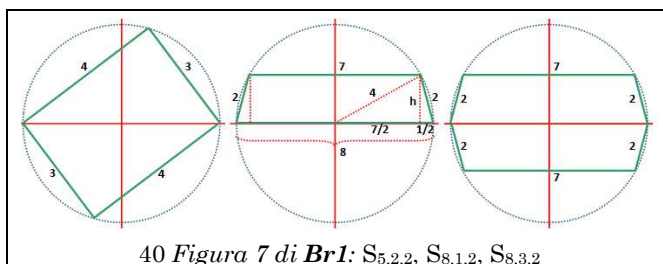
1. Le *Sequenze* in verde scuro ($S_{2,2,1}$, $S_{4,2,1}$, $S_{6,2,1}$, $S_{8,5,1}$ e $S_{10,5,1}$) corrispondono ad esagoni regolari; per questi, il diametro del cerchio circoscritto è pari al doppio del lato, per cui si tratta di *Sequenze* corrispondenti a *Poligoni Diofantei*. $S_{2,2,1}$ è mostrato come esempio qui sopra al centro



39 Figura 6 di **Br1**: $S_{5,1,1}$, $S_{2,2,1}$, $S_{2,1,1}$

2. Le *Sequenze* in giallo ($S_{2,1,1}$, $S_{4,1,1}$, $S_{6,1,1}$, $S_{8,2,1}$ e $S_{10,2,1}$) sono relative a *Poligoni Diametrali*, poiché l'ultimo lato è per essi sempre pari al diametro del relativo cerchio. I primi tre lati di queste *Sequenze* corrispondono alla metà superiore degli esagoni trattati nel punto precedente; per ragioni di simmetria, per tali esagoni il secondo punto di tangenza al cerchio del terzo lato giace sull'asse delle ascisse. Da questo stesso punto, per i *Poligoni Diametrali* di questa categoria, parte il 4° lato, che quindi coincide col diametro del cerchio. Si tratta allora ancora di *Poligoni Diofantei*; quello corrispondente alla Sequenza $S_{2,1,1}$ è mostrato come esempio a destra nella Figura 6

3. Per le Sequenze in azzurro scuro ($S_{5,2,1}$ e $S_{10,3,1}$), ricordiamo il fatto che si possono permutare a piacimento i lati di una qualsiasi Sequenza senza per questo alterarne lo stato di *Diofanticità* (o forse *Diofantezza?*); allora



40 Figura 7 di Br1: $S_{5,2,2}$, $S_{8,1,2}$, $S_{8,3,2}$

- ad esempio il Poligono corrispondente alla Sequenza $S_{5,2,2}=(3, 4, 3, 4)$, Figlia della $S_{5,2,1}$, si presenta come a sinistra nella Figura 7 che segue, con diametro del cerchio circoscritto pari a 5.
4. Le due metà del Poligono poste nel semicerchio superiore ed inferiore rispetto all'asse delle ascisse sono formate da 2 lati di triangoli che, con il diametro orizzontale del cerchio, formano *Terne Pitagoriche*, per cui siamo ancora in presenza di *Poligoni Diofantei*
5. Per quanto riguarda $S_{8,1,1}$, consideriamo la Sequenza Figlia $S_{8,1,2}=(2, 7, 2, 8)$ (mostrata al centro in Figura 7). Si tratta di una Sequenza corrispondente ad un Poligono Diametricale, essendo l'ultimo lato pari al diametro del cerchio circoscritto; note le lunghezze dei due lati paralleli, dimostriamo che i lati obliqui hanno lunghezza pari a 2.

Tracciate le altezze del poligono che partono dai vertici superiori, queste suddividono il diametro in tre parti: una centrale di lunghezza pari al lato superiore (7), e due laterali pari alla semidifferenza fra i due lati paralleli (cioè $(8-7)/2=1/2$). Adesso tracciamo il raggio che congiunge il centro del cerchio al vertice superiore destro; si ha, per l'altezza del Poligono:

$$11) h = \sqrt{4^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

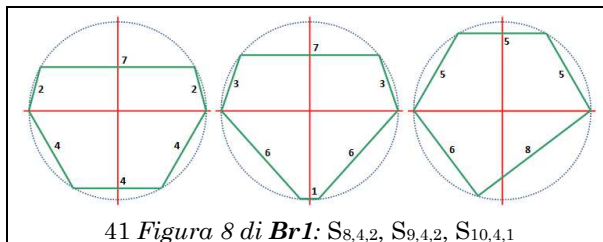
Il lato obliquo del poligono risulta allora pari a:

$$12) L_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Quindi, anche $S_{8,1,1}$ e le sue Sequenze Figlie corrispondono a Poligoni Diofantei. In modo analogo si dimostra che sono Diofantei anche i Poligoni corrispondenti alle Sequenze $S_{9,1,1}$ e $S_{9,2,1}$

6. Consideriamo adesso $S_{8,3,1}$, o meglio la sua Sequenza Figlia $S_{8,3,2}=(2, 7, 2, 2, 7, 2)$, rappresentata a destra in Figura 7. Si tratta di un Poligono ottenibile duplicando per riflessione rispetto all'asse delle ascisse $S_{8,1,2}$, discusso nel punto precedente. Anch'esso è quindi *Diofanteo*. Lo stesso ragionamento si può applicare a $S_{9,3,1}$ (derivabile da $S_{9,1,1}$) e $S_{9,5,1}$ (derivabile da $S_{9,2,1}$)

7. Rimangono $S_{8,4,1}$, $S_{9,4,1}$ e $S_{10,4,1}$, le Sequenze Figlie $S_{8,4,2}=(2, 7, 2, 4, 4, 4)$ e $S_{9,4,2}=(3, 7, 3, 6, 1, 6)$ delle prime due sono rappresentate insieme con $S_{10,4,1}$ nella Figura 8 che segue.



41 Figura 8 di Br1: $S_{8,4,2}$, $S_{9,4,2}$, $S_{10,4,1}$

La prima è un irrocervo formato incollando $S_{8,1,2}$, già incontrato nel precedente punto 5., ad un semiesagono. La seconda si può ottenere fondendo la Sequenza $S_{9,2,2}=(3, 7, 3, 9)$ con la $S_{9,1,2}=(6, 1, 6, 9)$. La terza, infine, è ottenuta combinando un semiesagono ad un triangolo dotato di lati costituenti una *Terna Pitagorica*. Poiché tutti gli elementi citati sono *Poligoni Diametricali* per i quali è

già stata dimostrata la *Diofanticità*, anche questi ultimi tre *Poligoni* sono *Diofantei*...



Quindi, tutte le 23 *Sequenze Ordinate Candidate* sono effettivamente *Diofantee*. Adesso, da ciascuna di esse bisogna generare tutte le possibili permutazioni di lati significative. Il numero N_P di permutazioni possibili per un insieme di elementi con ripetizioni è dato dalla relazione:

$$13) N_P = \frac{N!}{M_1! M_2! \dots M_K!}$$

Nella formula, N è il numero di lati di ciascuna *Sequenza*, K il numero di diverse lunghezze dei lati e gli M_j sono le molteplicità con cui ciascuna lunghezza si presenta. Eliminando poi le ulteriori duplicazioni (relative alle rotazioni), si ottiene N_{PC} , cioè il numero di *Sequenze Diofantee* significativamente diverse fra loro: in tabella 4.

Sequenza	Lati	N_P	N_{PC}	Sequenza	Lati	N_P	N_{PC}	Sequenza	Lati	N_P	N_{PC}
S _{1,1,1}	1, 1, 1, 2	4	1	S _{8,1,1}	2, 2, 7, 8	12	3	S _{9,4,1}	1, 3, 3, 6, 6, 7	180	30
S _{2,1,1}	1, 1, 1, 1, 1, 1	1	1	S _{9,2,1}	4, 4, 4, 8	4	1	S _{9,5,1}	3, 3, 3, 3, 7, 7	15	3
S _{4,1,1}	2, 2, 2, 4	4	1	S _{9,3,1}	2, 2, 2, 2, 7, 7	15	3	S _{10,1,1}	6, 8, 10	6	2
S _{4,2,1}	2, 2, 2, 2, 2, 2	1	1	S _{8,4,1}	2, 2, 4, 4, 4, 7	60	10	S _{10,2,1}	5, 5, 5, 10	4	1
S _{5,1,1}	3, 4, 5	6	2	S _{8,5,1}	4, 4, 4, 4, 4, 4	1	1	S _{10,3,1}	6, 6, 8, 8	6	2
S _{6,2,1}	3, 3, 4, 4	6	2	S _{9,1,1}	1, 6, 6, 9	12	3	S _{10,4,1}	5, 5, 5, 6, 8	20	4
S _{6,1,1}	3, 3, 3, 3, 6	4	1	S _{9,2,1}	3, 3, 7, 9	12	3	S _{10,5,1}	5, 5, 5, 5, 5, 5	1	1
S _{6,2,1}	3, 3, 3, 3, 3, 3	1	1	S _{9,3,1}	1, 1, 6, 6, 6, 6	15	3				

42 Tabella 4 di **Br1**: il numero di permutazioni per ciascuna sequenza diofantea

La tabella 5 riepiloga per categorie (diametro e numero di lati) gli 80 *Poligoni Diofantei*.

lati	Diametro										Tot
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	4
4	0	1	0	1	2	1	0	4	6	3	18
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
6	0	1	0	1	0	1	0	14	36	1	54
Tot	0	2	0	2	4	2	0	18	42	10	80

43 Tabella 5 di **Br1**: il numero di Aiule Diofantee

Infine l'ultima tabella, qui sotto riportata, elenca il dettaglio delle *Sequenze Diofantee* relative agli 80 *Poligoni Diofantei*; i doppi bordi della tabella racchiudono *Aiule Diofantee* che condividono diametro del cerchio circoscritto ed insiemi di lati.

Sequenza	Lati	> <	Sequenza	Lati	> <	Sequenza	Lati	> <	Sequenza	Lati	> <
S _{1,1,1}	1, 1, 1, 2		S _{8,4,4}	2, 2, 7, 4, 4, 4	A	S _{9,4,4}	1, 3, 6, 3, 6, 7	D	S _{9,2,1}	4, 4, 4, 8	B
S _{2,1,1}	1, 1, 1, 1, 1, 1		S _{8,4,5}	2, 4, 2, 4, 4, 7	C	S _{9,4,5}	1, 3, 6, 3, 7, 6	E	S _{9,2,5}	3, 3, 3, 3, 7, 7	N
S _{4,1,1}	2, 2, 2, 4		S _{8,4,6}	2, 4, 2, 4, 7, 4		S _{9,4,6}	1, 3, 6, 6, 3, 7	F	S _{9,2,6}	1, 7, 3, 6, 3, 6	M
S _{4,2,1}	2, 2, 2, 2, 2, 2		S _{8,4,7}	2, 4, 2, 7, 4, 4	C	S _{9,4,7}	1, 3, 6, 6, 7, 3	G	S _{9,2,7}	1, 7, 3, 6, 6, 3	F
S _{5,1,1}	3, 4, 5	A	S _{8,4,8}	2, 4, 4, 2, 4, 7	D	S _{9,4,8}	1, 3, 6, 7, 3, 6	H	S _{9,2,8}	1, 7, 6, 3, 3, 6	K
S _{5,2,1}	3, 5, 4	A	S _{8,4,9}	2, 4, 4, 2, 7, 4	D	S _{9,4,9}	1, 3, 6, 7, 6, 3		S _{9,2,9}	1, 7, 6, 3, 6, 3	D
S _{6,2,1}	3, 3, 4, 4		S _{8,4,10}	2, 4, 4, 4, 2, 7		S _{9,4,10}	1, 3, 7, 3, 6, 6	I	S _{9,2,10}	1, 7, 6, 6, 3, 3	A
S _{6,2,2}	3, 4, 3, 4		S _{8,5,1}	4, 4, 4, 4, 4, 4		S _{9,4,11}	1, 3, 7, 6, 3, 6	J	S _{9,3,1}	3, 3, 3, 3, 7, 7	
S _{6,1,1}	3, 3, 3, 3, 6		S _{9,1,1}	1, 6, 6, 9	A	S _{9,4,12}	1, 3, 7, 6, 6, 3	G	S _{9,3,2}	3, 3, 3, 7, 3, 7	
S _{6,2,1}	3, 3, 3, 3, 3, 3		S _{9,1,2}	1, 6, 9, 6		S _{9,4,13}	1, 6, 3, 3, 6, 7	K	S _{9,3,3}	3, 3, 7, 3, 3, 7	
S _{8,1,1}	2, 2, 7, 8	A	S _{9,1,3}	1, 9, 6, 6	A	S _{9,4,14}	1, 6, 3, 3, 7, 6	L	S _{10,1,1}	6, 8, 10	A
S _{8,1,2}	2, 2, 8, 7	A	S _{9,2,1}	3, 3, 7, 9	A	S _{9,4,15}	1, 6, 3, 6, 3, 7	M	S _{10,1,2}	6, 10, 8	A
S _{8,1,3}	2, 7, 2, 8		S _{9,2,2}	3, 3, 9, 7	A	S _{9,4,16}	1, 6, 3, 6, 7, 3	J	S _{10,1,3}	5, 5, 5, 10	
S _{8,2,1}	4, 4, 4, 8		S _{9,2,3}	3, 7, 3, 9		S _{9,4,17}	1, 6, 3, 7, 3, 6		S _{10,1,4}	6, 6, 8, 8	
S _{8,3,1}	2, 2, 2, 2, 7, 7		S _{9,3,1}	1, 1, 6, 6, 6, 6		S _{9,4,18}	1, 6, 3, 7, 6, 3	H	S _{10,1,5}	6, 8, 6, 8	
S _{8,3,2}	2, 2, 2, 7, 2, 7		S _{9,3,2}	1, 6, 1, 6, 6, 6		S _{9,4,19}	1, 6, 6, 3, 3, 7	N	S _{10,1,6}	5, 5, 5, 6, 8	A
S _{8,3,3}	2, 2, 7, 2, 2, 7		S _{9,3,3}	1, 6, 6, 1, 6, 6		S _{9,4,20}	1, 6, 6, 3, 7, 3	I	S _{10,1,7}	5, 5, 5, 8, 6	A
S _{8,4,1}	2, 2, 4, 4, 4, 7	A	S _{9,4,1}	1, 3, 3, 6, 6, 7	A	S _{9,4,21}	1, 6, 6, 7, 3, 3	C	S _{10,1,8}	5, 5, 6, 5, 8	B
S _{8,4,2}	2, 2, 4, 4, 7, 4	B	S _{9,4,2}	1, 3, 3, 6, 7, 6	B	S _{9,4,22}	1, 6, 7, 3, 3, 6	L	S _{10,1,9}	5, 5, 8, 5, 6	B
S _{8,4,3}	2, 2, 4, 7, 4, 4	B	S _{9,4,3}	1, 3, 3, 7, 6, 6	C	S _{9,4,23}	1, 6, 7, 3, 6, 3	E	S _{10,1,10}	5, 5, 5, 5, 5, 5	

44 Tabella 6 di **Br1**: il dettaglio delle Aiule Diofantee

Con una stima molto approssimativa (valutando cioè lo spazio occupato da ciascun *Poligono* come area del cerchio circoscritto per i *Poligoni Diofantei* non *Diametrali* e la metà per quelli invece *Diametrali*), il *Giardino di Doc* si piazzerebbe attorno ai 3400 m²; non c'è che dire, davvero un bel giardino...

Appendice

In una seconda fase di analisi, sono spuntati fuori anche i *Poligoni Diofantei Excentrati*... In effetti, non erano poi tanto lontani, bastava inoltrarsi fino a D=14 per beccarli...

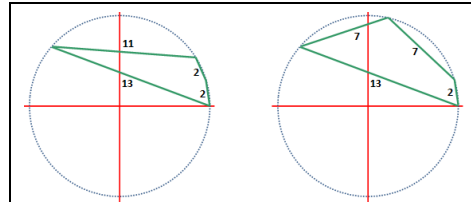
Posto infatti D=14, il programmino VB© sopra menzionato trova immediatamente la seguente *Sequenza Diofantea Candidata Excentrata*:

$$S_{14,1,1}=(2, 2, 11, 13)$$

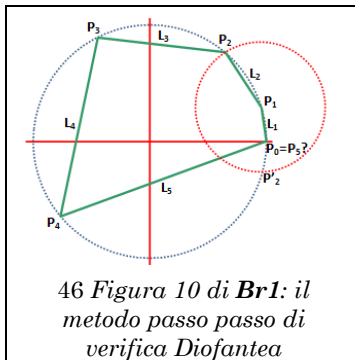
e, pochi μ s dopo, anche questa:

$$S_{14,2,1}=(2, 7, 7, 13)$$

Naturalmente, anche se il valore di Δ riportato dal *Picci* è decisamente confortante in entrambe i casi ($3,1E-15$ per il primo ed addirittura $0,0E00$ per il secondo), c'è bisogno di una verifica geometrico/analitica per consolidare queste *potenziali* soluzioni *Candidate*, mostrate graficamente in Figura 9.



45 Figura 9 di **Br1**: i primi Poligoni Diofantei Candidati Excentrati: $S_{14,1,1}$ e $S_{14,2,1}$



46 Figura 10 di **Br1**: il metodo passo passo di verifica Diofantea

Per eseguire la verifica, si può applicare il metodo di seguito descritto, consistente nel calcolare passo passo le coordinate dei lati del *Poligono*.

Supponiamo di aver già calcolato le coordinate di K vertici del *Poligono* ($K=1$ nell'esempio di Figura 10); per trovare la posizione di P_{K+1} si possono cercare le intersezioni della circonferenza di centro P_K e raggio L_{K+1} con la circonferenza del cerchio di raggio R sotto esame. Le equazioni di queste due circonferenze sono date da:

$$14) \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = L_{K+1}^2 \end{cases}$$

Il sistema 14) ammette le seguenti soluzioni:

$$15) \begin{cases} y_{K+1} = \frac{y_K(2R^2 - L_{K+1}^2) \pm x_K L_{K+1} \sqrt{4R^2 - L_{K+1}^2}}{2R^2} \\ x_{K+1} = \pm \sqrt{R^2 - y_{K+1}^2} \end{cases}$$

Poiché nelle 15) il simbolo ‘ \pm ’ compare 2 volte, per ciascun nuovo punto verranno generate 4 soluzioni; 2 di esse sono in generale soluzioni fantasma, che vanno scartate (sono coincidenti con le altre 2, oppure producono posizioni del punto P_{K+1} tali che la distanza da P_K risulta diversa da L_{K+1}). Fra le 2 superstiti, va scelta quella che fa progredire in senso orario la sequenza di lati. Nel seguito, il simbolo ‘ \Rightarrow ’ indica la scelta dei segni eseguita coerentemente con questi criteri.

Applichiamo il metodo alla Sequenza Candidata $S_{14,2,1}$; per essa si ha $P_0=(7, 0)$ ed $L_1=2$, per cui:

$$16) \begin{cases} y_1 = \frac{0 \cdot (2 \cdot 7^2 - 2^2) \pm 7 \cdot 2 \sqrt{4 \cdot 7^2 - 2^2}}{2 \cdot 7^2} = \pm \frac{8\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \frac{8\sqrt{3}}{7} \\ x_1 = \pm \sqrt{7^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \pm \frac{47}{7} \Rightarrow \frac{47}{7} \end{cases}$$

Per P_2 si ha poi:

$$17) \begin{cases} y_2 = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{7} \cdot (2 \cdot 7^2 - 7^2) \pm \frac{47}{7} \cdot 2 \sqrt{4 \cdot 7^2 - 7^2}}{2 \cdot 7^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 8 \pm 47}{2} \Rightarrow \frac{55\sqrt{3}}{14} \\ x_2 = \pm \sqrt{49 - \left(\frac{55\sqrt{3}}{14}\right)^2} = \pm \frac{23}{14} \Rightarrow \frac{23}{14} \end{cases}$$

Continuando con P_3 si ha:

$$18) \begin{cases} y_3 = \frac{\frac{55\sqrt{3}}{14} \cdot (2 \cdot 7^2 - 7^2) \pm \frac{23}{14} \cdot 2\sqrt{4 \cdot 7^2 - 7^2}}{2 \cdot 7^2} = \frac{\sqrt{3}}{14} \frac{55 \pm 23}{2} \Rightarrow \frac{39\sqrt{3}}{14} \\ x_3 = \pm \sqrt{49 - \left(\frac{39\sqrt{3}}{14}\right)^2} = \pm \frac{71}{14} \Rightarrow -\frac{71}{14} \end{cases}$$

Infine, per P₄:

$$19) \begin{cases} y_4 = \frac{\frac{39\sqrt{3}}{14} \cdot (2 \cdot 7^2 - 13^2) \mp \frac{71}{14} \cdot 2\sqrt{4 \cdot 7^2 - 13^2}}{2 \cdot 7^2} = \frac{2769\sqrt{3}}{1372} (-1 \mp 1) \Rightarrow 0 \\ x_4 = \pm \sqrt{49 - (0)^2} = \pm 7 \Rightarrow 7 \end{cases}$$

E quindi, essendo P₄ coincidente con P₀, la Sequenza S_{14,2,1} corrisponde ad un Poligono Diofanteo Excentrato! In modo analogo si può poi procedere per S_{14,1,1}, e per tutti gli Excentrati con diametro superiore...



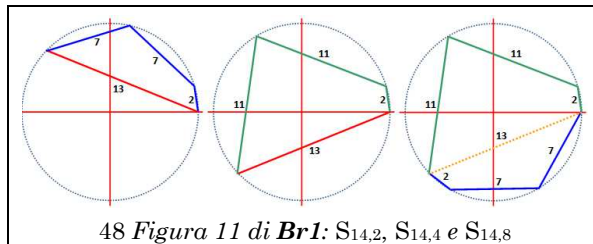
Adesso, esaminiamo un po' più in dettaglio la Famiglia F₁₄ di Sequenze Diofantee relative al cerchio con diametro D=14²⁵ (dove ovviamente nella Tabella 7 che segue le sigle nelle colonne Tipo identificano le Sequenze Excentrate, Diametrali ed Incentrate).

Sequenza	Lati	Tipo	Sequenza	Lati	Tipo
S _{14,1}	2, 2, 11, 13	EXC	S _{14,6}	7, 7, 11, 13	INC
S _{14,2}	2, 7, 7, 13	EXC	S _{14,7}	2, 2, 2, 11, 11, 11	INC
S _{14,3}	2, 7, 11, 14	DIA	S _{14,8}	2, 2, 7, 7, 11, 11	INC
S _{14,4}	2, 11, 11, 13	INC	S _{14,9}	2, 7, 7, 7, 7, 11	INC
S _{14,5}	7, 7, 7, 14	DIA	S _{14,10}	7, 7, 7, 7, 7, 7	INC

47 Tabella 7 di Br1: la famiglia di sequenze diofantee per D=14

Vediamo adesso che aspetto hanno S_{14,2}, S_{14,4} ed S_{14,8}.

Si osserva che (a meno di un rimescolamento di lati) il Poligono Incentrato associato a S_{14,8} si può costruire staccando il lato di S_{14,4} di lunghezza pari al lato più lungo di S_{14,2}, e sostituendolo con quest'ultimo Poligono Excentrato. In pratica, S_{14,8} si può ottenere incollando insieme S_{14,2} e S_{14,4} in corrispondenza del lato maggiore di S_{14,2}; almeno in questo caso, un Poligono Incentrato è ricavabile accoppiando un altro Poligono con un Poligono Excentrato. Possiamo dire che S_{14,8} è la Somma Diofantea di S_{14,2} e S_{14,4}, ed indicare tale somma come segue:



$$20) S_{14,8}(2, 2, 7, 7, 11, 11) = S_{14,4}(2, 11, 11, 13) \oplus S_{14,2}(2, 7, 7, 13)$$

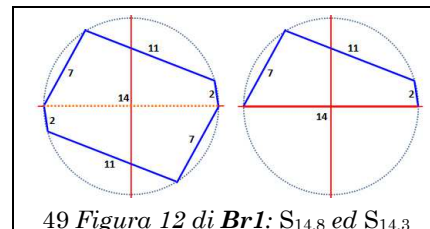
dove i colori rosso e blu indicano rispettivamente quali lati siano coinvolti nell'operazione *stacca & incolla*...

Come altro esempio di Somma, consideriamo ancora S_{14,8}, stavolta confrontato con S_{14,3}:

Possiamo scrivere in questo caso:

$$21) S_{14,8}(2, 2, 7, 7, 11, 11) = S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \oplus S_{14,3}(2, 7, 11, 14)$$

Viene poi naturale definire l'operazione di Differenza Diofantea, che produce un nuovo



²⁵ D'ora in poi, si lascerà cadere il 3° pedice nella descrizione delle Sequenze, e con ciascuna Sequenza si intenderà l'intero insieme di Sequenze da essa derivabili per permutazioni di lati, rotazioni o riflessioni. Inoltre, si intenderà che tutti i Poligoni di seguito citati (e le Sequenze ad essi associate) siano Diofantei (o presunti tali), salvo precisazioni.

Poligono staccando un Poligono Diofanteo da un altro più esteso; ad esempio, utilizzando gli stessi Poligoni visti sopra:

$$22) S_{14,4}(2, 11, 11, 13) = S_{14,8}(2, 2, 7, 7, 11, 11) \ominus S_{14,2}(2, 7, 7, 13)$$

Torniamo adesso alle 6 Sequenze Incentrate della Tabella 7 più in alto; per esse si può scrivere:

$$\begin{aligned} S_{14,4}(2, 11, 11, 13) &= S_{14,8}(2, 2, 7, 7, 11, 11) \ominus S_{14,2}(2, 7, 7, 13) = \\ &= S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \oplus S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \ominus S_{14,2}(2, 7, 7, 13) \\ S_{14,6}(7, 7, 11, 13) &= S_{14,9}(2, 7, 7, 7, 7, 11) \ominus S_{14,2}(2, 7, 7, 13) = \\ &= S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \oplus S_{14,5}(7, 7, 7, 14) \ominus S_{14,2}(2, 7, 7, 13) \\ S_{14,7}(2, 2, 2, 11, 11, 11) &= S_{14,1}(2, 2, 11, 13) \oplus S_{14,4}(2, 11, 11, 13) = \\ &= S_{14,1}(2, 2, 11, 13) \oplus S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \oplus S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \ominus S_{14,2}(2, 7, 7, 13) \\ S_{14,8}(2, 2, 7, 7, 11, 11) &= S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \oplus S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \\ S_{14,9}(2, 7, 7, 7, 7, 11) &= S_{14,3}(2, 7, 11, 14) \oplus S_{14,5}(7, 7, 7, 14) \\ S_{14,10}(7, 7, 7, 7, 7, 7) &= S_{14,5}(7, 7, 7, 14) \oplus S_{14,5}(7, 7, 7, 14) \end{aligned}$$

Si vede allora che, almeno per D=14, tutte le Sequenze Incentrate (in verde) si possono esprimere come Somme e/o Differenze Diofantee dei Poligoni Excentrati e Diametrali (in blu) della Famiglia F₁₄...



Ripeschiamo le Famiglie F₂... F₁₀ relative al Giardino di Doc, richiamate nella Tabella 8 che segue; per le Sequenze Incentrate di queste Famiglie si ha:

Sequenza	Lati	Tipo	Sequenza	Lati	Tipo	Sequenza	Lati	Tipo
S _{2,1}	1, 1, 1, 2	DIA	S _{2,1}	2, 2, 7, 8	DIA	S _{2,4}	1, 3, 3, 6, 6, 7	INC
S _{2,2}	1, 1, 1, 1, 1, 1	INC	S _{2,2}	4, 4, 4, 8	DIA	S _{2,5}	3, 3, 3, 3, 7, 7	INC
S _{4,1}	2, 2, 2, 4	DIA	S _{3,3}	2, 2, 2, 2, 7, 7	INC	S _{10,1}	6, 8, 10	DIA
S _{4,2}	2, 2, 2, 2, 2, 2	INC	S _{3,4}	2, 2, 4, 4, 4, 7	INC	S _{10,2}	5, 5, 5, 10	DIA
S _{5,1}	3, 4, 5	DIA	S _{3,5}	4, 4, 4, 4, 4, 4	INC	S _{10,3}	6, 6, 8, 8	INC
S _{5,2}	3, 3, 4, 4	INC	S _{2,1}	1, 6, 6, 9	DIA	S _{10,4}	5, 5, 5, 6, 8	INC
S _{6,1}	3, 3, 3, 6	DIA	S _{2,2}	3, 3, 7, 9	DIA	S _{10,5}	5, 5, 5, 5, 5, 5	INC
S _{6,2}	3, 3, 3, 3, 3, 3	INC	S _{2,3}	1, 6, 6, 6, 6	INC			

50 Tabella 8 di Br1: le famiglie di sequenze del giardino di Doc

$$\begin{aligned} S_{2,2}(1, 1, 1, 1, 1, 1) &= S_{2,1}(1, 1, 1, 2) \oplus S_{2,1}(1, 1, 1, 2) \\ S_{4,2}(2, 2, 2, 2, 2, 2) &= S_{4,1}(2, 2, 2, 4) \oplus S_{2,1}(2, 2, 2, 4) \\ S_{5,2}(3, 3, 4, 4) &= S_{5,1}(3, 4, 5) \oplus S_{5,1}(3, 4, 5) \\ S_{6,2}(3, 3, 3, 3, 3, 3) &= S_{6,1}(3, 3, 3, 6) \oplus S_{6,1}(3, 3, 3, 6) \\ S_{8,3}(2, 2, 2, 2, 7, 7) &= S_{8,1}(2, 2, 7, 8) \oplus S_{8,1}(2, 2, 7, 8) \\ S_{8,4}(2, 2, 4, 4, 4, 7) &= S_{8,1}(2, 2, 7, 8) \oplus S_{8,2}(4, 4, 4, 8) \\ S_{8,5}(4, 4, 4, 4, 4, 4) &= S_{8,2}(4, 4, 4, 8) \oplus S_{8,2}(4, 4, 4, 8) \\ S_{9,3}(1, 1, 6, 6, 6, 6) &= S_{9,1}(1, 6, 6, 9) \oplus S_{9,1}(1, 6, 6, 9) \\ S_{9,4}(1, 3, 3, 6, 6, 7) &= S_{9,1}(1, 6, 6, 9) \oplus S_{9,2}(3, 3, 7, 9) \\ S_{9,5}(3, 3, 3, 3, 7, 7) &= S_{9,2}(3, 3, 7, 9) \oplus S_{9,2}(3, 3, 7, 9) \\ S_{10,3}(6, 6, 8, 8) &= S_{10,1}(6, 8, 10) \oplus S_{10,1}(6, 8, 10) \\ S_{10,4}(5, 5, 5, 6, 8) &= S_{10,1}(6, 8, 10) \oplus S_{10,2}(5, 5, 5, 10) \\ S_{10,5}(5, 5, 5, 5, 5, 5) &= S_{10,2}(5, 5, 5, 10) \oplus S_{10,2}(5, 5, 5, 10) \end{aligned}$$

E allora, possiamo dire che anche per queste Famiglie tutti i Poligoni Incentrati si possono esprimere come Somma di Poligoni Diametrali...

Facendo frullare il programma di cui in precedenza per una notte, questo ha esaminato circa 5 miliardi di Sequenze, con valori di D fino a 34; sono spuntate fuori 229 Sequenze Diofantee, di cui 58 Diametrali, 19 Excentrate e 152 Incentrate, distribuite per valori di D come nella Tabella 9 qui a destra.

Si verifica facilmente, con un po' di pazienza²⁶, che anche adesso tutti i 152 *Poligoni Incentrati* sono ricavabili da quelli *Diametrali* ed *Excentrati* tramite *Somme* e *Differenze*; si potrebbe allora dire che le categorie comprendenti *Diametrali* ed *Excentrati* siano quelle *fondamentali*, mentre gli *Incentrati* rappresentano una categoria in qualche modo *secondaria*, derivata da quelle. Denominando allora collettivamente i *Poligoni* (e le *Sequenze*) *Diametrali* ed *Excentrati* come *Poligoni Primi*, si può formulare la seguente Congettura:

D	DIA	EXC	INC	D	DIA	EXC	INC	D	DIA	EXC	INC	D	DIA	EXC	INC
1	0	0	0	10	2	0	3	19	0	0	0	28	2	2	6
2	1	0	1	11	0	0	0	20	2	0	3	29	1	0	1
3	0	0	0	12	1	0	1	21	1	1	2	30	3	1	7
4	1	0	1	13	1	0	1	22	1	0	1	31	0	0	0
5	1	0	1	14	2	2	6	23	0	0	0	32	9	4	49
6	1	0	1	15	1	0	1	24	2	0	3	33	1	1	2
7	0	0	0	16	4	2	12	25	5	2	16	34	2	0	3
8	2	0	3	17	1	0	1	26	3	2	9				
9	2	0	3	18	4	0	10	27	2	2	5				

51 Tabella 9 di **Br1**: le quantità di poligoni diofantei per valori di D fino a 34

Ogni Poligono Incentrato è la Somma Algebrica di 2 (o più) Poligoni Primi.

Se la *Congettura* fosse vera, poiché tutti i *Poligoni Diametrali* ed *Excentrati* sono confinabili in un semicerchio, la ricerca esaustiva dei *Poligoni Diofantei* potrebbe essere limitata ai *Poligoni* contenibili appunto in un semicerchio...



Un'ulteriore osservazione; se il diametro D del cerchio è un numero composto, la *Famiglia* F_D comprenderà tutti i *Poligoni* delle *Famiglie* relative ai fattori del valore del diametro, espansi di un fattore di scala. Ad esempio si potrebbe scrivere (considerando le sole *Sequenze Prime*):

$$F_{10} = (S_{10,1}(6, 8, 10), S_{10,2}(5, 5, 5, 10)) = (2 \bullet S_{5,1}(3, 4, 5), 5 \bullet S_{2,1}(1, 1, 1, 2))$$

Quindi si può dire che i *Poligoni Diofantei* veramente interessanti sono quelli relativi a cerchi con diametri espressi da numeri *primi*.

Ma non solo; talvolta, anche se il valore di D non è *primo*, possono apparire *Sequenze* non riferibili alle *Famiglie* di ordine inferiore. Ad esempio $S_{8,1}(2, 2, 7, 8)$ non è multipla di nessuna *Sequenza* contenuta in F_2 ed F_4 ...

Sequenza	Lati
$S_{2,1}$	1, 1, 1, 2
$S_{3,1}$	3, 4, 5
$S_{8,1}$	2, 2, 7, 8
$S_{9,1}$	1, 6, 6, 9
$S_{9,2}$	3, 3, 7, 9

52 Tabella 10 di **Br1**: il numero minimo significativo di sequenze diofantee con D fino a 10

Comunque, considerando le sole *Sequenze Prime* e scartando da questo insieme anche quelle multiple di *Sequenze* d'ordine inferiore, con $D \leq 10$ quelle che sopravvivono sono indicate in Tabella 10.

Quindi, se Doc non fosse troppo propenso a dedicarsi al *Giardinaggio Ornamentale*, potrebbe limitarsi a questo insieme di 5 aiuole, che compendia in sé l'essenza *Diofantica* di tutte le 80 del set completo. Un *Giardino Diofanteo Minimale Zen*...



53 Giardino Diofanteo Minimale Zen di **Br1**

E *trentatré* non è stato senz'altro da meno, anche se servono molte meno pagine per riportare la sua soluzione:

Definiamo con

$$P = (L_1, L_2, \dots, L_N \parallel D) \text{ un poligono diofanteo}$$

²⁶ Vi risparmio l'elenco dei *Poligoni*, e la relativa dimostrazione di *Diofantezza*...

N il numero di lati

D il diametro

$L_k, k = 1 \dots N$ le lunghezze dei lati, in ordine crescente

α_k il semiangolo al centro del lato L_k

P^I, P^E, P^D i poligoni *incentrati, excentrati, diametrali*

nei P^E il lato maggiore L_N è indicato con il segno (-)

nei P^D il lato maggiore è $L_N = D$.

I P^E hanno un angolo α maggiore di 90° : gli α possibili sono

$$[1] \quad 0 < \alpha \leq 90^\circ \text{ dati da } \alpha_k = \arcsin(k / D), k = 1 \dots D$$

$$90 < \alpha < 180^\circ \text{ dati da } \alpha_{D+k} = 180^\circ - \alpha_{D-k}, k = 1 \dots (D-1)$$

- in questo modo gli α_k sono crescenti con l'indice $k = 1 \dots (2D-1)$.

Per ogni P vale la

$$[2] \quad \sum_{k=1}^N \alpha_k = 180^\circ.$$

Dati D ed N , gli angoli si calcolano con la [1] e il problema si riduce a determinare le permutazioni di N indici (k_1, k_2, \dots, k_N) degli angoli α , scelti con ripetizione, tali da rispettare la [2]. Cercando un solo poligono per ogni permutazione dei lati, basta considerare solo le permutazioni di indici – e quindi di angoli – non decrescenti.

I poligoni si possono comporre.

Ogni P dilatato di un fattore di scala m intero è ancora un P , cioè

$$[3] \quad P = (L_1, \dots, L_N \parallel D) \Rightarrow P' = (mL_1, \dots, mL_N \parallel mD) \text{ per ogni } m: \text{ intero } > 1$$

che abbreviamo con $P' = m \times P$: un poligono *multiplo*.

Se esistono due P *diametrali* P^D, P'^D questi si possono riunire, dopo opportune dilatazioni, accostando ed eliminando i diametri; i due diametri devono risultare uguali, perciò il diametro finale è il *minimo comune multiplo* di quelli iniziali; per esteso

$$[4] \quad P^D = (L_1, \dots, L_N \parallel D), P'^D = (L'_1, \dots, L'_{N'} \parallel D') \Rightarrow P'' = (aL_1, \dots, aL_{N-1}, bL'_1, \dots, bL'_{N'-1} \parallel D'')$$

con $D'' = mcm(D, D')$, $a = D'' / D$, $b = D'' / D'$, $N'' = N + N' - 2$

se $D = D'$ allora $D'' = D$, $a = b = 1$, che abbreviamo con $P'' = P^D + P'^D$: un poligono *composto*.

NB: i lati non sono più ordinati per grandezza; in generale P è *composto* se gli α si possono dividere in due gruppi ognuno con somma 90° .

Con un programma che calcola tutte le permutazioni non decrescenti e scarta quelle che non rispettano la [2], ho ottenuto per $D \leq 10$ i seguenti risultati. Ci sono in totale 23 poligoni distinti, di cui nessuno *excentrato*. Tutti si possono costruire con [3] e [4] dai seguenti cinque P *primitivi*, tutti *diametrali*

$$a = (1, 1, 1, 2 \parallel 2), b = (3, 4, 5 \parallel 5), c = (2, 2, 7, 8 \parallel 8), d = (1, 6, 6, 9 \parallel 9), e = (3, 3, 7, 9 \parallel 9).$$

L'elenco dei P e la loro composizione è

$$N = 3 \quad k \times (3, 4, 5 \parallel 5) = k \times b, k = 1, 2$$

$$N = 4 \quad k \times (1, 1, 1, 2 \parallel 2) = k \times a, k = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$k \times (3, 3, 4, 4 \parallel 5) = k \times (b + b), k = 1, 2$$

$$(2, 2, 7, 8 \parallel 8) = c, (1, 6, 6, 9 \parallel 9) = d, (3, 3, 7, 9 \parallel 9) = e$$

$$N = 5 \quad (5, 5, 5, 6, 8 \parallel 10) = a + b$$

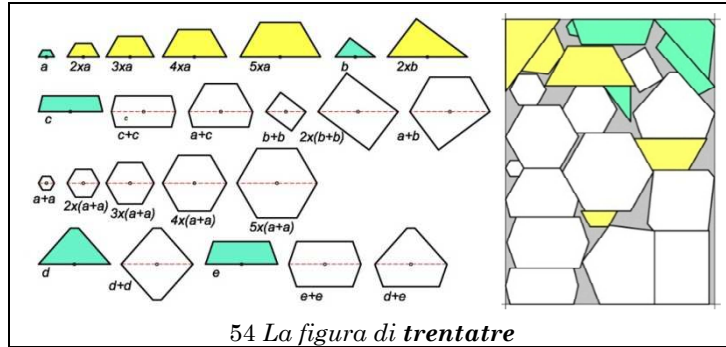
$$N = 6 \quad k \times (1,1,1,1,1 \parallel 2) = k \times (a + a), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$(2, 2, 2, 2, 7, 7 \parallel 8) = c + c, \quad (2, 2, 4, 4, 4, 7 \parallel 8) = a + c$$

$$(1, 1, 6, 6, 6, 6 \parallel 9) = d + d, \quad (1, 3, 3, 6, 6, 7 \parallel 9) = d + e, \quad (3, 3, 3, 3, 7, 7) = e + e$$

$N \geq 7$: nessun poligono.

In figura i 23 poligoni, in azzurro i 5 primitivi, in giallo gli altri diametrali. La permutazione dei lati può produrre forme diverse dello stesso P , ma l'area è invariante. In alcuni P ho permutato i lati per avere forme



54 La figura di trentatre

simmetriche; tutti hanno due vertici opposti al centro.

Il poligono $(3, 4, 5 \parallel 5) - b$ in figura – è il primo triangolo pitagorico. Tutti i triangoli pitagorici sono P^D , con ipotenusa uguale a D . Una qualsiasi coppia genera con la [4] un quadrilatero.

Non ci sono P excentrati per $D < 13$; i primi sono $(2, 2, 11, -13 \parallel 14)$ e $(2, 7, 7, -13 \parallel 14)$.

Il primo P triangolare non pitagorico è $(15, 15, -24 \parallel 25)$ che è isoscele ed excentrato.

Se l'unità di misura è il metro, i 23 poligoni (o aiuole) disegnati hanno un'area complessiva di 619,76 mq.

Per impacchettarli in modo minimo occorre scegliere per ognuno una delle forme alternative. Riporto in figura un tentativo con quelli del disegno (i più simmetrici); stanno in un rettangolo di $31,40 \times 23,00 = 722,20$ mq. Un bel giardino, anche se per goderselo bisogna pestare i fiori. Lo sfrido (grigio) è il 14.2 %. Dando magari al giardino una forma strana, si può certamente migliorare, ma non di molto. E non vedo proprio come possa esistere un "metodo" per farlo.

Non fermiamoci qui, siamo solo a metà, ora arriva il secondo problema.

5.5.2 Arriva un altro gioco!

Ecco, un altro gioco. Eccolo:

Abbiamo un quadrato di lato n sul quale sono scritti tutti i numeri da 1 a n^2 . Il primo giocatore barra un numero pari a suo piacere: nei turni successivi, il giocatore di turno barra un numero non ancora barrato che sia un multiplo o un divisore del numero barrato dall'altro giocatore al turno precedente. Il primo giocatore che non può giocare causa numeri barrati perde. Se gioca sempre per primo Alberto, chi dei due ha una strategia vincente?

Uno dei due, stanco di perdere continuamente, decide di mettersi a giocare da solo, con le stesse regole; il suo scopo è di barrare il massimo numero possibile di caselle: quante caselle riuscirà a barrare, al massimo?

Anche qui la seconda parte era data dal Capo come difficilissima, vediamo come se la sono cavata i nostri solutori, **Actarus** e **Fabrizio**, cominciando proprio dal mangiatore di insalate di matematica²⁷, che afferma di aver solo cominciato:

La strategia vincente per Alberto si basa sul concetto di mobilità (come negli scacchi). La mobilità consiste nel numero di mosse possibili a disposizione.

²⁷ Se non sapete di cosa parliamo vergognatevi! Da "Ufo robot" – Actarus è l'equivalente di Clark Kent per Superman – il testo della canzone include: "Mangia libri di cibernetica / Insalate di matematica / E a giocar' su Marte va".

Ad ogni giocatore conviene sempre cercare di ridurre il più possibile la mobilità dell'avversario e mantenere alta la propria mobilità (questa è la ragione della lotta per il centro negli scacchi).

Quindi Alberto sceglierà un numero che riduca al minimo le scelte possibili del suo avversario: sarà quindi un numero maggiore di 72 (in modo che non vi siano multipli a disposizione) e sarà il doppio di un numero primo (visto che deve essere un numero pari e deve avere il minor numero possibile di divisori).

Inoltre dovrà scegliere un numero minore di 97 in modo di esser sicuro che qualunque sia la scelta dell'avversario avrà sempre a sua disposizione almeno due differenti multipli del numero che l'avversario ha scelto (...in modo da massimizzare la propria mobilità).

Corollario 1

A questo punto occorre tener conto che se l'avversario barra il numero 1 per Alberto la partita è vinta in quanto ha la possibilità di barrare un numero primo maggiore di 72 (che essendo maggiore di 72 non ha multipli minori di 144 ed essendo un numero primo non ha altri divisori oltre al numero 1 e se stesso e quindi rende impossibile all'avversario trovare altri numeri da barrare).

Fatte queste considerazioni, si deduce che Alberto vince la partita in 7 mosse (al massimo).

Esempio:

Alberto sceglie 86 (che è minore di 96 ed è il doppio del numero primo 43) (1° mossa di Alberto)

L'avversario ora ha solo 3 scelte a sua disposizione:

- o sceglie 1 e perde subito (vedi Corollario 1)
- o sceglie 2 e perde in 6 mosse [l'analisi di questa variante l'analizzo successivamente]
- o sceglie 43 e perde in 7 mosse [riporto qui sotto l'analisi di questa scelta]

Se l'avversario barra il numero 43, Alberto barra il numero 129 (2° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il 3 o il numero 1 (che però sappiamo che è perdente, vedi Corollario 1), quindi sceglierà il 3, ed ora Alberto barra il numero 111 (3° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il 37 o il numero 1, quindi sceglierà il 37, ed ora Alberto barra il numero 74 (4° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il 2 o il numero 1, quindi sceglierà il 2, ed ora Alberto barra il numero 82 (5° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il 41 o il numero 1, quindi sceglierà il 41, ed ora Alberto barra il numero 123 (6° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il numero 1 a sua disposizione... quindi sceglierà il numero 1, ed ora Alberto barra il numero 73 e vince... (7° mossa di Alberto)

Analisi della variante (alla 1° mossa Alberto barra il numero 86 e l'avversario barra il numero 2)

Se l'avversario barra il numero 2, Alberto barra il numero 82 (2° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il 41 o il numero 1 (che però sappiamo che è perdente, vedi Corollario 1), quindi sceglierà il 41, ed ora Alberto barra il numero 123 (3° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il 3 o il numero 1, quindi sceglierà il 3, ed ora Alberto barra il numero 111 (4° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il 37 o il numero 1 quindi sceglierà il 37, ed ora Alberto barra il numero 74 (5° mossa di Alberto)

l'avversario ora ha solo il numero 1 a sua disposizione... quindi sceglierà il numero 1, ed ora Alberto barra il numero 73 e vince... (6° mossa di Alberto)

Ecco, ora vediamo la versione di **Fabrizio**:

Nel cercare di risolvere il problema, mi è venuto spontaneo partire dall'ultima domanda relativa al caso di un solo giocatore.

Per poter fare qualche considerazione di carattere generale proviamo a riformulare il gioco sfruttando la teoria dei grafi: dato il quadrato Q di lato $n = 12$, sia G il grafo non orientato con $n^2 = 144$ vertici ottenuto a partire da Q associando a ciascun vertice v_i di G un elemento q_i di Q e collegando ciascuna coppia di vertici (v_i, v_j) di G con un arco se e solo se il numero q_i associato al vertice v_i è un multiplo od un divisore del numero q_j associato al vertice v_j . Il problema relativo alla determinazione del massimo numero di caselle che è possibile barrare nel quadrato Q è allora equivalente alla determinazione del cammino hamiltoniano (ossia un cammino che tocca i vertici del grafo una ed una sola volta) di lunghezza massima presente in G .

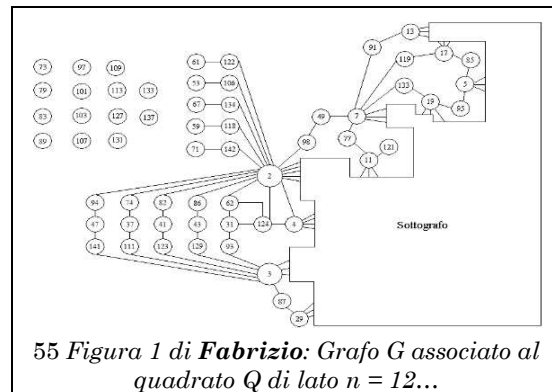
In figura 1 ho evidenziato le parti più interessanti del grafo G ottenuto a partire da Q nel caso $n = 12$. Per semplicità di rappresentazione ho escluso dal disegno il vertice v_1 associato al numero 1 e i relativi archi collegati a tutti i restanti 143 vertici.

I 14 vertici isolati in alto a sinistra rappresentano tutti i numeri primi superiori a $144/2 = 72$ che in quanto tali non possono essere collegati ad alcun altro vertice (fatta eccezione per il vertice associato al numero 1 ovviamente).

Le coppie (61, 122), (53, 106), (67, 134), (59, 118) e (71, 142) si collegano al solo vertice 2 mentre le terne (94, 47, 141), (74, 37, 111), (82, 41, 123), (86, 43, 129) sono tutte in parallelo ai vertici 2 e 3. Visto che da ciascun vertice posso passare una ed una sola volta, qualunque percorso massimo io possa considerare potrà contenere al più soltanto 9 dei 36 vertici sopra elencati (ad esempio potrei scegliere il percorso $94 \rightarrow 47 \rightarrow 141 \rightarrow 3 \rightarrow 111 \rightarrow 37 \rightarrow 74 \rightarrow 1 \rightarrow 123 \rightarrow 41 \rightarrow 82 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$ oppure $94 \rightarrow 47 \rightarrow 141 \rightarrow 3 \rightarrow 111 \rightarrow 37 \rightarrow 74 \rightarrow 2 \rightarrow 82 \rightarrow 41 \rightarrow 123 \rightarrow 1 \dots$) e pertanto il cammino di lunghezza massima non potrà essere maggiore di $144 - (36 - 9) = 117$.

Raffinando ulteriormente l'analisi si potrebbe ridurre ancora un po' questo limite superiore, ma una volta raggiunto il minimo m rimarrebbe sempre la necessità di capire se il grafo G costituito dagli m vertici restanti contenga un percorso hamiltoniano di lunghezza m oppure no.

Purtroppo, trovare in un generico grafo G con m vertici un cammino hamiltoniano di lunghezza m (in tal caso si dice che il grafo G è *hamiltoniano*) vuol dire risolvere un problema appartenente alla classe dei problemi NP completi che in quanto tali sono piuttosto ostici da trattare. Ciò non significa ovviamente che non si possano trovare metodi di soluzione in tempo polinomiale per alcuni casi specifici (ad esempio sappiamo che tutti i grafi completi sono *hamiltoniani*, lo stesso dicasi per i grafi in cui tutti i vertici del grafo hanno un grado maggiore o uguale ad $m/2$ con m numero di vertici del grafo) ma il fatto stesso che il nostro problema possa appartenere a tale classe suggerisce quantomeno che trovare una soluzione potrebbe non essere facile. Dal canto mio non sono riuscito a trovare un metodo



risolutivo per il caso $n=12$ ma ho trovato solo un cammino di lunghezza pari a 102 che riporto qui di seguito:

86→43→129→3→141→47→94→1→87→29→58→116→4→68→34→136→17→51→102→6→66→33→99→9→81→27→54→18→126→42→84→14→56→112→28→140→70→35→105→21→63→7→77→11→55→110→22→88→44→132→12→108→36→72→144→48→96→24→120→40→80→16→32→128→64→8→104→52→26→78→39→117→13→65→130→10→50→100→20→60→30→90→45→135→15→75→25→125→5→115→23→69→138→46→92→2→76→38→114→57→19→133.

Grazie a quanto detto in precedenza possiamo comunque affermare che il percorso di lunghezza massima presente in G deve essere necessariamente compreso tra 102 e 117.

Veniamo adesso alla prima parte del problema relativa al caso dei due giocatori. Il grafo di figura 1 ci viene nuovamente in aiuto: se il primo giocatore riuscisse a far in modo di finire in una foglia dopo un certo numero di mosse, l'altro giocatore sarebbe necessariamente costretto a selezionare il vertice associato al numero 1 per continuare il gioco e a quel punto il primo giocatore potrebbe selezionare un qualunque numero primo e chiudere così la partita. Vediamo un esempio: supponiamo che Alberto selezioni come primo numero 94, Fred dovrà allora scegliere necessariamente tra 47 o 2. Nel primo caso Alberto potrebbe ad esempio vincere la partita in questo modo:

94(A)→47(F)→141(A)→3(F)→111(A)→37(F)→74(A)→2(F)→82(A)→41(F)→123(A)→1(F)→107(A)

nel secondo caso Alberto potrebbe invece vincere la partita con la seguente sequenza:

94(A)→2(F)→74(A)→37(F)→111(A)→3(F)→123(A)→41(F)→82(A)→1(F)→107(A).

Qualunque sia la mossa del secondo giocatore, il primo giocatore ha sempre una sequenza vincente a sua disposizione.

Complimenti a tutti i solutori e ai lettori che sono arrivati fino a qui. Io mi fermo qui, vi ripeto tutti i miei auguri e vi dò appuntamento all'anno prossimo. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Anche con pochissimi pezzi, si possono costruire dei problemi complicati. Abbiamo preso tre carte da un mazzo di cinquantadue, e le abbiamo messe sul tavolo a faccia in giù; vi diciamo (e fidatevi, questa volta è vero) che:

Alla destra di un Re ci sono una o due Regine.

Alla sinistra di una Regina ci sono una o due Regine.

Alla sinistra di un Cuori ci sono uno o due Picche.

Alla destra di un Picche ci sono uno o due Picche.

Ora, dovrete poterci dire quali sono le tre carte...

7. Pagina 46

L'espressione si fattorizza come:

$$(m - 2n)(m - n)(m + n)(m + 2n)(m + 3n).$$

Se $n \neq 0$, non ci sono due fattori uguali tra loro; ciò nonostante, 33 può essere fattorizzato come:

$$33 = (-11) \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-11)$$

$$33 = 11 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot (-1).$$

Se $n=0$, la scomposizione dell'espressione vale m^5 , che non può essere pari a 33 per nessun valore di m .



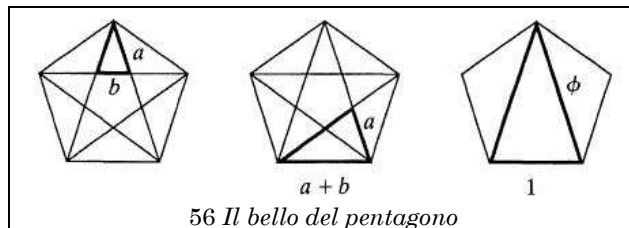
8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Per i campi dorati

Anche se la sezione aurea la conoscono tutti, uno dei segreti *burn-before-read*²⁸ della geometria è proprio un po' di sano calcolo sui rapporti tra le diagonali dei poligoni regolari: aveva cominciato Archimede, cercando di tenere nascosto il fatto che il rapporto tra il lato²⁹ del quadrato e la sua diagonale era un numero irrazionale.

Nostra intenzione è giustappunto fare un giro da queste parti, trattando piuttosto velocemente la parte riguardante il pentagono che diamo per scontata e cercando di capire se in zona ci sia qualcos'altro di interessante.

Quali sono le misure delle diagonali di un poligono (regolare) di lato unitario? Buona parte si possono scoprire applicando semplicemente il Teorema di Pitagora o calcolando il seno o il coseno di angoli particolari, ma ottenere la forma chiusa che non utilizzi funzioni trigonometriche spesso non è semplicissimo: alcuni escamotage aiutano, come lo scoprire le similitudini tra i triangoli indicati nella figura e ricavare:



56 Il bello del pentagono

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{\varphi}{1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

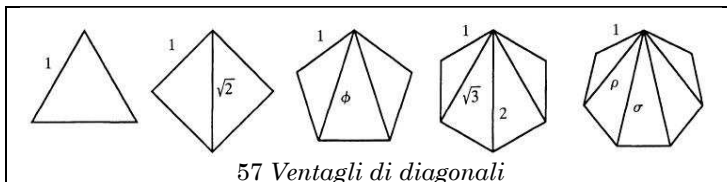
Un metodo simile, anche se più complesso, funziona anche per l'ettagono: qui, se indichiamo le diagonali con $d_1 = \rho$ e $d_2 = \sigma$, i risultati finali (dotati, secondo noi, anche loro di una notevole forza espressiva) sono:

$$\begin{aligned} \rho + \sigma &= \rho\sigma, \\ \rho^2 &= 1 + \sigma. \end{aligned} \quad [11]$$

E la prima è, secondo Rudy, una delle poche cose simpatiche legate al numero sette.

Sostituendo una nell'altra si arriva all'equazione $\rho^3 - \rho^2 - 2\rho + 1 = 0$, le cui soluzioni sono scomode da trattare, visto che contengono radici cubiche; infatti, per portarsele dietro si preferiscono le forme:

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \cos \frac{\pi}{7}, \\ \sigma &= 4 \cos^2 \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$



57 Ventagli di diagonali

Se riepiloghiamo le diagonali dei primi poligoni (nella cosiddetta "forma a ventaglio": figura a fianco) e guardiamo con più attenzione la prima delle [11], possiamo cominciare a porci delle

²⁸ Citazione di Charles Stross: forse non si è notato, ma Rudy si sta entusiasmando ai suoi romanzi.

²⁹ Liquidiamo adesso una notazione che useremo nel seguito: il lato è la *diagonale zero*, quella immediatamente più lunga del lato la *diagonale uno*, e avanti così.

domande. Notiamo, ad esempio, che la prima delle [1] ha un corrispettivo. Infatti, consideriamo le diagonali dell'esagono³⁰:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cdot 2 &= \sqrt{3} + \sqrt{3} \Rightarrow d_1 \cdot d_2 = d_1 + d_3; \\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} &= 1 + 2 \Rightarrow d_1 \cdot d_3 = d_0 \cdot d_2; \\ 2 \cdot 2 &= 1 + 2 + 1 \Rightarrow d_2 \cdot d_2 = d_0 + d_2 + d_4. \end{aligned}$$

È una relazione occasionale, o esiste una qualche ragione soggiacente³¹?

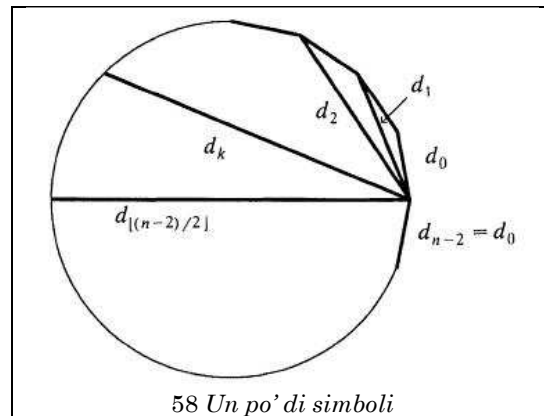
In un n-gono regolare, se d_0 è la lunghezza del lato e d_k la lunghezza della k-esima diagonale, posto $r_k = \frac{d_k}{d_0}$ ($k \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$), allora è:

$$r_h r_k = \sum_{i=0}^h r_{k-h+2i} \text{ e } d_h d_k = d_0 \sum_{i=0}^h d_{k-h+2i}, \text{ con } h \leq k. \quad [2]$$

Per capire cosa sta succedendo, meglio fare riferimento alla figura qui a fianco: insomma, la nostra relazione è vera!

Per mantenervi attenti, vi risparmiamo la dimostrazione: si basa su considerazioni piuttosto semplici relative alle radici (complesse, chiaramente) dell'unità; definendo r secondo queste, costruendo le somme, riorganizzandole e ridenominandole opportunamente, si viene ad applicare la disuguaglianza triangolare a due rette parallele, e quindi vale l'uguaglianza³².

La [2], se applicata al pentagono, ci fornisce le identità della sezione aurea che ci sono note; è sorprendente, però, che cosa si riesca a generare applicandole (con qualche manipolazione) all'ettagono³³:



$$\begin{aligned} \rho^2 &= 1 + \sigma & \frac{\sigma}{\rho} &= \sigma - 1 & \frac{1}{\sigma} &= \sigma - \rho \\ \rho\sigma &= \rho + \sigma & \frac{\rho}{\sigma} &= \rho - 1 & \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} &= 1 \\ \sigma^2 &= 1 + \rho + \sigma & & & \frac{1}{\rho} &= 1 + \rho - \sigma \end{aligned}$$

Il Polinomio Aureo $x^2 - x - 1 = 0$ ha radici φ e $-\frac{1}{\varphi}$; per quanto riguarda l'ettagono,

³⁰ Nell'ultima abbiamo stressato un po' la simbologia, ma ci scuserete.

³¹ Nel seguito parleremo molto poco dei poligoni a lato pari: l'esagono ve lo studiate da soli che è facile, per quanto riguarda l'ottagono, trovate tutto cercando "Sezione Sacra" (Inglese: *Sacred Cut*): è riferita alla diagonale dell'ottagono $\vartheta = 1 + \sqrt{2}$, ma qui i conti ve li fate voi che non sono un problema.

³² Contenti, che ve l'abbiamo risparmiata?

³³ Rudy si aspetta (quantomeno) una *ola*. Per la fatica che ha fatto a scriverle con Formula Editor.

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = \rho, \frac{1}{\sigma}, -\frac{\sigma}{\rho}.$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = \sigma, \frac{1}{\rho}, -\frac{\rho}{\sigma}.$$

In parole, tutti e sei i *rapporti ettagonali* compaiono come valore assoluto come radici dei due polinomi: non ci³⁴ risulta alcuno schema generale relativo a queste comparse).

Attraverso una serie di sostituzioni a catena nell'espressione del prodotto delle diagonali, si arriva ad una espressione che fa sospettare qualcosa di importante:

$$\binom{k}{0}x^k - \binom{k-1}{1}x^{k-2} + \binom{k-2}{2}x^{k-4} - \dots = \binom{k-1}{0}x^{k-1} - \binom{k-2}{1}x^{k-3} + \dots \quad \text{con } k = \frac{n-1}{2}.$$

Se scriviamo questa espressione come $P_k(x) = 0$, si vede che abbiamo la ricorrenza $P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x)$; e se *qualcuno ci spiega cosa vuol dire la prossima frase*, potremmo essere molto contenti.

P_k può essere espresso in termini di derivate di polinomi di Chebishev; P_k è irriducibile su \mathbb{Q} se e solo se n è primo: per l'undecagono, ad esempio, r_1 è un quintico (*contiene una radice quinta*), mentre per il pentadecagono (15 lati) P_k ha grado sette e al suo interno esiste un quartico (*radice quarta*) irriducibile che ha r_1 come radice.

Il motivo per cui vorremmo capire cosa vuol dire è semplicissimo: qui stiamo parlando di *pochi* numeri (uno, rho, phi, sigma...) che sono in grado di generare, attraverso *combinazioni lineari*, tutti gli altri. Ma allora, **questo è un campo!**

Secondo noi in quella frase c'è dentro un mucchio di roba significativa: viene definito *Primo Campo Aureo*³⁵ quello generato da:

$$Q(\varphi) = \{a\varphi + b : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Infatti, se provate a guardare³⁶:

1. È un gruppo (operazione binaria associativa, elemento neutro, esistenza dell'inverso).
2. È un anello (gruppo abeliano rispetto alla somma, prodotto associativo, proprietà distributiva).
3. È un corpo (elemento neutro per il prodotto, esiste l'inverso per il prodotto)
4. Il prodotto è commutativo.

Sicuri comunque che non sia una caratteristica del caso particolare del pentagono? Ragionevolmente: tant'è che il *Secondo Campo Aureo*, $Q(\rho) = \{a\rho + b\rho + c : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ (e, probabilmente, tutti i successivi), meriterebbe degli studi più approfonditi che vi lasciamo liberi di fare. Infatti, adesso cambiamo discorso.

³⁴ Il "ci" è riferito a tutti e quattro: Rudy e i tre matematici (seri) che ne hanno parlato. Quindi, se lo trovate, pubblicate. Almeno tre persone vi pagheranno una birra.

³⁵ Capita, adesso, la battuta del titolo? Sveglia!

³⁶ È implicito che queste *ve le dimostrate da soli*. Rudy ha ponzato un quarto d'ora prima di trovare "l'inverso", poi quando l'ha trovato ha detto una parola che non si trova sui dizionari per bene.

Il motivo per il quale i rapporti notevoli dell'ettagono non furono scoperti ai greci è, secondo molti, il fatto che ρ e σ sono dei numeri *cubici*, e quindi non costruibili con riga e compasso; per questa ragione, molto probabilmente, la scoperta di altri interessanti rapporti non venne notata. Ripartiamo dalla sezione aurea.

La sezione aurea è, da un punto di vista di estetica della formula, l'unico modo possibile per organizzare una proporzione non banale (che richiede quindi *quattro* valori) avendo a disposizione solo due entità: se, nel caso dell'ettagono, cerchiamo di definire le diagonali come sezioni di un segmento, arriviamo anche in questo caso a proporzioni interessanti, come si vede nella

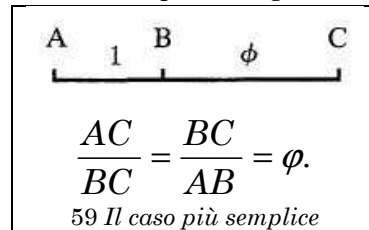
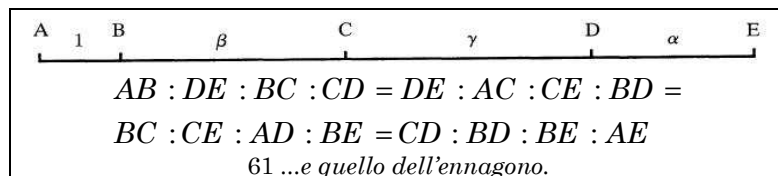


figura qui di fianco.



Il punto interessante è che questa ottimalità delle proporzioni tra le diagonali dei poligoni

prosegue: se passiamo all'ennagono, utilizzando le opportune diagonali, possiamo trovare altre serie di proporzioni armoniche: e ci fermiamo



a questo punto non perché questa rappresenti la fine delle proporzioni, ma solo in quanto lo schema ci pare ormai assodato e, se siete interessati, potete procedere da soli.

Sempre nella nostra metodologia di partire da un caso semplice, prendiamo le espressioni delle potenze della sezione aurea. Si vede facilmente che è:

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= 1\varphi + 0; \\ \varphi^2 &= 1\varphi + 1; \\ \varphi^3 &= 2\varphi + 1; \\ \varphi^4 &= 3\varphi + 2; \\ \varphi^5 &= 5\varphi + 3; \\ \varphi^6 &= 8\varphi + 5; \\ &\dots \end{aligned} \quad [3]$$

e ci fermiamo qui, visto che dovrete ormai aver individuato nei coefficienti la serie di Fibonacci. Ma cosa succede nel nostro ettagono?

Qui la cosa si fa leggermente più complessa, ma è comunque possibile trovare una logica:

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= 1\sigma + 0\rho + 0; \\ \sigma^2 &= 1\sigma + 1\rho + 0; \\ \sigma^3 &= 3\sigma + 2\rho + 1; \\ \sigma^4 &= 6\sigma + 5\rho + 3; \\ \sigma^5 &= 14\sigma + 11\rho + 6; \\ &\dots \\ \sigma^{k+1} &= (a_k + b_k + c_k)\sigma + (a_k + b_k)\rho + a_k. \end{aligned} \quad [4]$$

Una sequenza simile vale anche per ρ , evidentemente.

La [4] può essere considerata come un'espansione della [3] e si vede, procedendo con gli ulteriori poligoni *dispari*, che il fenomeno si ripete, aggiungendo un termine ad ogni coefficiente e generando un ulteriore termine ad ogni passaggio.

Ricordate tutti che la serie di Fibonacci nasce come problema relativo alla riproduzione dei conigli; ignorando alcuni dettagli legati alla biologia (quali ad esempio il fatto che per riprodursi sia necessario essere in due), possiamo enunciare la regola di riproduzione secondo la formula:

$$\begin{cases} 1 \rightarrow \varphi; \\ \varphi \rightarrow 1\varphi. \end{cases}$$

Dove la prima sta a significare che ogni coniglietto (1) all'età di un anno diventa adulto (φ), mentre la seconda statuisce che ogni adulto (φ) genera un coniglietto e sopravvive (1φ).

Diventa interessante esaminare come si svolga la sequenza nel momento stesso nel quale *i conigli non si spostano*; ossia se applichiamo successivamente le leggi ad una sequenza: si ha:

$$1 \rightarrow \varphi \rightarrow 1\varphi \rightarrow \varphi 1\varphi \rightarrow 1\varphi\varphi 1\varphi \rightarrow \varphi 1\varphi 1\varphi\varphi 1\varphi \rightarrow 1\varphi\varphi 1\varphi\varphi 1\varphi 1\varphi\varphi 1\varphi \rightarrow \varphi 1\varphi 1\varphi\varphi 1\varphi 1\varphi\varphi 1\varphi\varphi 1\varphi\varphi 1\varphi \rightarrow \dots$$

...e le altre ve le calcolate voi.

Se fate un po' di conti sulla serie, vi accorgete di un paio di caratteristiche particolari: tanto per cominciare, il rapporto tra i simboli tende a φ ; inoltre, le loro frequenze in ogni iterazione successiva sono numeri di Fibonacci (consecutivi).

La cosa ha un motivo? Certo, visto che anche con l'ettagono³⁷ si generano serie dello stesso tipo:

$$\begin{cases} 1 \rightarrow \sigma \\ \rho \rightarrow \rho\sigma \\ \sigma \rightarrow 1\sigma\rho \end{cases}$$

$$1 \rightarrow \sigma \rightarrow 1\sigma\rho \rightarrow \sigma 1\sigma\rho\rho\sigma \rightarrow \dots$$

Questa è molto più difficile da scrivere, quindi ci fermiamo prima. Comunque, anche qui potete vedere i rapporti tra le frequenze visti sopra, solo che questa volta seguono i coefficienti della [4], come logico.

Se guardate le serie, può venirvi un fondatissimo dubbio: ma c'è una periodicità? La risposta è un preclaro "no"; ho trovato [*Io! Rudy! Whoppee!*] una bellissima dimostrazione di questo fatto, ma sapete, il margine³⁸...

Fermiamoci su quella aurea, che tanto i risultati sono immediatamente espandibili.

Non sarà periodica, ma ci va decisamente vicino: tant'è che queste vengono dette sequenze *quasi-periodiche*: secondo noi pessimo termine, ma a quanto pare servono a qualcosa.

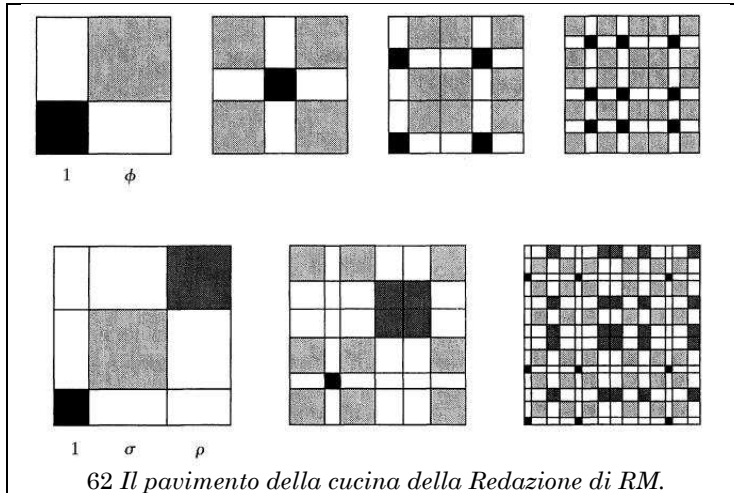
In matematica, contrariamente alla barzelletta sulla ragazza che dice al padre di essere "un po' incinta", essere "un po' periodico" vuol dire non essere periodico; se pensiamo alla

³⁷ ...e se i "conigli ettagonali" a voi ricordano il sistema riproduttivo dei Morbidi di "Neanche gli dei" di Asimov, vuol dire che avete avuto la stessa idea (sbagliata) di Rudy.

³⁸ Il margine non basta, ma *la nota basta e avanza!* Supponiamo ci sia una periodicità: allora per avere il rapporto totale di frequenza tra i due simboli basta considerare il rapporto tra i simboli all'interno del periodo; quindi questa sarà una frazione finita. Ma allora il rapporto tra i simboli è razionale. Abbiamo però visto che il numero dei simboli segue la progressione di Fibonacci, che tende ad un irrazionale (φ). Quindi l'ipotesi è falsa. Q.E.D. Ne sono molto fiero.

sequenza di simboli come ad una “tassellatura dell’asse dei numeri”, abbiamo dimostrato che non è periodica e che va avanti all’infinito: come si fa a portare tutto questo sul piano?

Semplice: si incrociano due tassellature aperiodiche, una sull’asse x e l’altra sull’asse y . Se guardate i disegni, vedete i primi passi delle due sequenze che abbiamo trovato poco sopra.



62 Il pavimento della cucina della Redazione di RM.

sopra. A noi è venuta un’idea, ma è talmente balzana che la mettiamo in nota³⁹.

“Rudy, le sequenze pentagonali quasi-periodiche hanno una relazione con le tassellature di Penrose?” Sì, nel senso che potete trasformare la sequenza vista sopra in un aggeggio che genera una tassellatura aperiodica di Penrose: io però considero la cosa scarsamente interessante, se si esclude il problema ancora

irrisolto del fatto che nessuno ha ancora trasformato la sequenza ettagonale in una tassellatura aperiodica di Penrose. La faccenda sembra legata al vecchio problema della costruibilità con riga e compasso degli opportuni poligoni e ai rispettivi gruppi diedrici: ma questa è, come sempre, un’altra storia.

Rudy d’Alembert
 Alice Riddle
 Piotr R. Silverbrahms

³⁹ Ma secondo voi, $\{1, \varphi, \rho, \sigma\}$ è una tassellatura aperiodica dell’iperspazio?