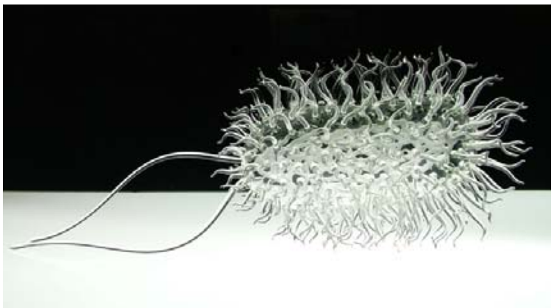
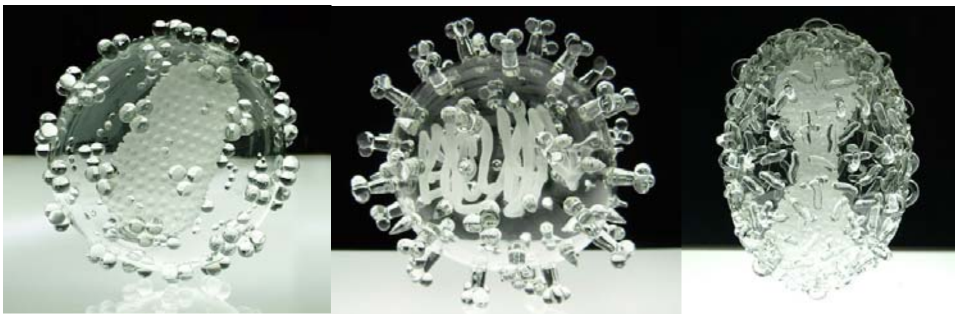
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 141 – Ottobre 2010 – Anno Dodicesimo





Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM140 ha diffuso 2'659 copie e il 30/09/2010 per Google eravamo in 17'000 pagine.

Tutto quanto pubblicato dalla rivista è soggetto al diritto d'autore e in base a tale diritto *concediamo il permesso di libera pubblicazione e ridistribuzione* alle condizioni indicate alla pagina `diraut.html` del sito. In particolare, tutto quanto pubblicato sulla rivista è scritto compiendo ogni ragionevole sforzo per dare le informazioni corrette; tuttavia queste informazioni non vengono fornite con alcuna garanzia legale e quindi la loro ripubblicazione da parte vostra è sotto la vostra responsabilità. La pubblicazione delle informazioni da parte vostra costituisce accettazione di questa condizione.

Non vorremmo che quest'anno vi faceste cogliere impreparati: si sta avvicinando il Natale, avete deciso cosa regalare al vostro medico? Vi consigliamo in alto ***Giant Microbes***, simpatiche epidemie di peluche da coccolare: da sinistra verso destra e dall'alto in basso, virus dell'antrace, piede dell'atleta, aviaria H5N1, clamidia, orecchioni, *escherichia coli*, cancrena, gonorrea. Nel caso si tratti invece di una persona seriosa, non avvezza alle coccole e che apprezza gli oggetti di design, vi proponiamo le opere in vetro di ***Luke Jerram***: sempre da sinistra a destra, *escherichia coli*, HIV, SARS e vaiolo. In elegantissimo vetro soffiato e cristallo.

1. Li Madou

Tutti i teoremi limitativi della metamatematica e la teoria della computazione suggeriscono che una volta raggiunta l'abilità di rappresentare la sua stessa struttura, si arriva ad un punto critico che è una sorta di bacio fatale: ti dimostra che non puoi mai rappresentare pienamente te stesso. Il Teorema di Incompletezza di Goedel, il Teorema di Indecidibilità di Church, il Teorema della Fermata di Turing, il Teorema della Verità di Tarski, tutti hanno il sapore d'una antica fiaba che ti ammonisce dicendoti: "Cercare la conoscenza di sè stessi è come imbarcarsi in un viaggio *che sarà sempre incompleto, impossibile da tracciarsi su una mappa, senza fine, e impossibile a raccontarsi"*
(D. R. Hofstadter)

La distanza più breve tra due punti
è un viaggio *poco interessante*
(R. Goldberg)

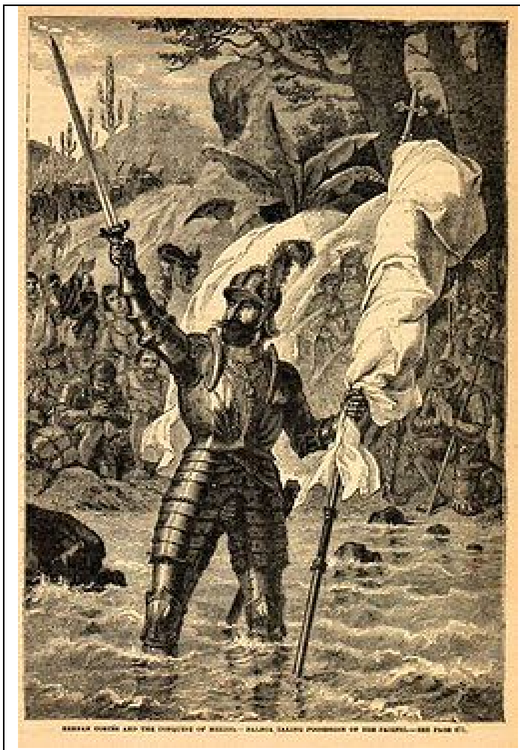
La saggezza non ci viene donata:
la dobbiamo scoprire in un viaggio
che nessun altro può fare al nostro posto
(M. Proust)

Gesuiti euclidei vestiti come dei bonzi
per entrare a corte degli imperatori
della dinastia dei Ming
(F. Battiato)

Deve essere comparso all'improvviso, come fa sempre. Probabilmente al di là d'una inattesa radura, sulla cima della cordigliera del Chucunaque: cordigliera che sarà stato ben faticoso scalare, chiusi com'erano nelle armature d'ordinanza. Ma la spedizione era stata organizzata proprio a quello scopo, per vedere se ciò che cercavano esisteva davvero, o se erano solo vuote chiacchiere di indigeni. Con un centinaio di portatori che arrancavano lungo il fianco della montagna, con il frate che poco distante arrancava anche lui, ma senza carichi sulle spalle e già prontissimo ad innalzare il Te Deum se l'occasione di gioire si fosse presentata, a dimostrazione dell'onnipresenza del Dio degli Europei; e certo con qualche compagno d'armi dotato di spada e altre lame, perché la giungla del mondo nuovo era pur sempre un luogo poco tranquillo e sicuro. Ma era certo Vasco all'avanguardia, e probabilmente lo avrà visto forse davvero per primo, giù in basso, blu intenso e scuro appena sopra gli alberi fitti, verdi e altrettanto scuri. Improvviso, inaspettato anche se erano tutti lì solo per vederlo, deve essere comparso il mare. Un mare vasto come il cielo e come il cielo azzurro: e perfino ricco d'oro, dicevano le voci. Era il 25 Settembre 1513.

Con buona pace di Sylvester Stallone, il Balboa che resterà stampato sui libri di storia non sarà il suo Rocky. Sarà invece Vasco Nuñez de Balboa, conquistatore spagnolo. Probabilmente non sarà stato neppure lui una persona particolarmente esemplare, dal punto di vista delle doti morali, al pari dei suoi colleghi; ma è pur sempre stato lui il primo occidentale ad aver visto il Pacifico dalle coste delle Americhe. Si era inoltrato nell'entroterra di quello che adesso sappiamo bene essere un istmo, in quella terra che oggi chiamiamo Panama, perché i suoi informatori nativi favoleggiavano l'esistenza del "Mare del Sud", e Balboa aveva tutte le intenzioni di regalarlo alla corona spagnola, questo mare, se davvero esisteva. Cristoforo Colombo aveva regalato a Isabella e Ferdinando un intero continente, per reggere il confronto, un mare poteva andar bene:

anche perché, anche se Vasco non lo sapeva, quel mare era la più grande distesa d'acqua del pianeta.



1 *Balboa reclama il Mare del Sud*

È difficile provare a guardare il passato con gli occhi degli abitanti del passato: o forse, più semplicemente, è difficile mettersi davvero nei panni altrui, nei loro usi, costumi, credenze, opinioni. Ogni volta che comincia a spiegare il Teorema di Pitagora ad una platea di ragazzini, un professore dovrebbe fare (e la maggior parte dei professori lo fa, con somma e devota abnegazione) lo sforzo di tenere presente che quelle nozioni che per lui ormai sono assolutamente note, ovvie, banali, e quindi travolgentemente semplici, per chi ascolta per la prima volta possono apparire impreviste, complesse, difficili e magari totalmente astruse. Così, occorre una sorta di decompressione, di cautela particolare, per cercare di mettersi nei panni altrui: e questa pratica serve ancor più quando si prova a capire alcuni eventi della storia. Il Mare del Sud di Balboa, ad esempio, a noi risulterebbe assai più familiare se portasse il nome di Oceano dell'Ovest: ma questa denominazione è figlia di preconcetti, perché sulla scala degli eventi di Balboa la distesa d'acqua era davvero più meridionale che occidentale: anzi, sotto certi punti di vista, poteva addirittura assurgere al paradossale toponimo di Mare dell'Est. Come sempre, è una questione essenzialmente di punti di vista.

A guardare una cartina di Panama, infatti, si vede subito che l'istmo ha un andamento essenzialmente orizzontale, con l'Oceano Atlantico a nord e il Pacifico a sud: è la nostra abitudine a visualizzare l'intero duplice continente americano come orientato da Nord a Sud a legare a doppio filo nei nostri neuroni l'idea dell'Atlantico ad est e il Pacifico ad ovest delle Americhe. La spedizione di Balboa, in quello che adesso è l'estrema regione orientale della Repubblica di Panama, attraversa l'istmo in direzione nord-sud quasi perfettamente, giustificando così pienamente il nome di "*Mar del Sur*"; ma le migliaia di navi che ogni anno evitano la circumnavigazione dell'America del Sud attraversando il Canale hanno un percorso più inclinato, con anche una evidente componente ovest-est; e ad essere orientale rispetto alla terra è il Pacifico, non l'Atlantico[1].

2 *Panama, zona del Canale*

Oltre a ciò, è difficile capire cosa davvero

[1] A ben vedere, non è necessario scomodare Panama per trovare decine di casi del genere. I milioni di italiani che discendono la costa ionica del Salento hanno quasi certamente in mente di dirigersi nettamente verso meridione, se vanno da Taranto in direzione di Gallipoli. In realtà si tratta di un percorso prevalentemente ovest-est, con certi tratti, come quello costiero sotto Manduria, in cui la latitudine aumenta addirittura.

accada nella testa d'un uomo nel momento d'una scoperta. Gli indigeni che accompagnavano Balboa erano probabilmente meno stupiti del conquistador: anche se fosse stata anche per loro la prima volta che lo vedevano, quell'oceano restava comunque un elemento tutto sommato naturale, nel loro mondo culturale: un grande mare a nord, un grande mare a sud, la loro stessa terra in mezzo, con le montagne a dividerla. Forse trovavano conferme in racconti di amici viaggiatori, di canti tradizionali, e comunque la scoperta di quel mare – sempre che di reale scoperta si trattasse – era solo una nuova informazione geografica.

Per Vasco Nuñez no: lui non è nativo, è un esploratore; e come tale è soprattutto un viaggiatore. Ha alle spalle un oceano la cui vastità è nota solo da un ventennio, e forse potrebbe già essere in grado di capire che quello che gli si para davanti è una distesa d'acqua di grandezza comparabile all'Atlantico[2]. Mentre gli indigeni vedono nel mare meridionale un'altra cornice alla loro terra, Balboa probabilmente si interroga se quella su cui si trova non sia poi davvero l'estrema propaggine dell'Asia: potrebbe in un colpo solo alimentare il dubbio di trovarsi su un continente nuovo – perché che le terre scoperte vent'anni prima fossero un continente era conoscenza ormai acquisita – e quindi anche la consapevolezza che il Catai, il Cipango e l'Asia tutta fossero ancora lontanissimi. E questa sarebbe stata davvero una consapevolezza nuova, del tutto impossibile per gli indigeni, e ancora non posseduta dai suoi connazionali. Esattamente il concetto di "scoperta", insomma, nel significato che condivide anche la scoperta scientifica.

Ma forse no, forse Balboa non si interrogò troppo sulla natura del "suo" mare: noi siamo cresciuti in un mondo dove il mappamondo decora perfino i palloni da spiaggia, dove le cartine geografiche sono così comuni da essere usate come motivi ornamentali per borse e vestiti, e la posizione delle terre emerse sul pianeta è ormai tutt'altro che un mistero[3]; ma per gran parte del tempo non è stato così. Quando gli Europei si sono messi alla caccia delle terre del mondo, le domande erano infinite. Il Mare del Sud di Balboa era raggiungibile solo da meridione, col passaggio a sud-ovest di Magellano, o anche a nord-ovest? Quella terra strana occidentale che i Portoghesi scoprirono mentre cercavano le correnti favorevoli per doppiare il Capo di Buona Speranza, il Brasile, era o non era un pezzo d'America? Il Catai raggiunto via terra da Marco Polo è davvero lo stesso paese della Cina che si raggiunge via mare doppiando l'India? Esisteva o non esisteva, il leggendario continente meridionale, al largo dell'Australia?

3 *Colombo parlava spagnolo*

Domande, domande, domande, certo non alimentate solo dalla sete di conoscenza: c'erano le vie commerciali da scoprire, i metalli preziosi da mettere in cassa; c'erano le ricchezze delle nazioni in ballo, c'era il potere; e perfino la volontà missionaria di portare al mondo la voce del proprio Dio. Cristoforo Colombo amava molto il suo nome spagnolo: Cristobal Colon, come lo chiamavano a Madrid, mantiene il significato di "portatore di Cristo" nel nome di battesimo, Cristoforo-Cristobal, ma il castigliano "colon" ha il medesimo significato dell'italiano "colono", o meglio ancora "colonizzatore". E così piaceva sentirsi, a Colombo: un colono diretto ad un

[2] Questo è naturalmente assai difficile da affermare con sicurezza. Per moltissimo tempo, anche dopo che la natura continentale dell'America era stata ben accertata, molti teorizzavano che il Pacifico non fosse altro che una "propaggine" dell'Oceano Indiano.

[3] Ci è perfettamente noto che la maggior parte dei giovani (e meno giovani) fortunati occidentali d'oggidì hanno serissimi problemi a trovare l'Ecuador o il Pakistan sul mappamondo, e forse perfino Taranto o Livorno sulla carta d'Italia: ma ciò non toglie che, alla bisogna, possono togliersi il dubbio in pochi minuti, cosa che rende la ricerca molto meno avventurosa di quello che era quattro o cinque secoli fa.

nuovo mondo, con lo scopo di portarvi la voce del Cristo. Gli spagnoli e gli europei che di lì a poco lo avrebbero seguito avevano probabilmente una strana idea della carità e della tolleranza cristiana da dispensare agli indios, ma questo è un discorso diverso. Certo è che è in quel periodo che inizia la vera esplorazione organica del mondo, condotta dagli europei.

È durata quasi esattamente tre secoli: un'approssimazione assai buona dal punto di vista temporale è considerare il periodo che va da 1480 al 1780 come quello in cui si è passati da una conoscenza davvero approssimativa della geografia del pianeta ad una consapevolezza quasi completa della disposizione di tutte le terre. Ad iniziare tutto sono stati i portoghesi: il re João II incaricò Bartolomeu Dias di trovare la via per l'Asia, per scoprire il modo di arrivarci per mare, e anche per trovare il leggendario prete Gianni, quel fantomatico re cristiano che si narrava vivesse in oriente o in Africa: avrebbe certo potuto aiutare la cristianità europea a ricacciare indietro gli invadenti musulmani. Dias compie la sua missione (beh, ritrovamento del prete Gianni escluso, a dire il vero) già al primo tentativo: discende le coste dell'Africa e arriva al Capo di Buona Speranza, dopo di lui, Vasco de Gama migliora la rotta e dopo aver doppiato il capo africano raggiunge le Indie, mettendo per la prima volta in contatto Oriente e Occidente via mare.

Una via per le navi è la cosa più preziosa al mondo, per una nazione marinara. Il passaggio sotto l'Africa, primo ad essere scoperto, resta un patrimonio portoghese a lungo, al punto che Cabral, quando avvista il Brasile, lo fa essenzialmente per sbaglio, mentre naviga alla ricerca di correnti migliori per doppiare il Capo di Buona Speranza. Ed è per questo che gli spagnoli acconsentono alla pazza idea di provare a "*buscar el levante yendo por el poniente*", perché, per dirlo in metafora, a "trovare il levante andando per il levante" c'erano già riusciti gli odiati vicini di casa. Nell'andare a ponente troveranno un gran bell'ostacolo verso la Cina: ma è un ostacolo che farà la loro fortuna. In breve si trova poi la via sudoccidentale, grazie a Magellano, cosa che dimostra così non solo che il mondo è tondo, ma anche che gli oceani sono tutti intercomunicanti: un'altra di quelle informazioni che adesso diamo per scontate e banali[4], ma che banale non era affatto appena cinque secoli fa. Ma anche se le scoperte si susseguono a ritmo vertiginoso, ancora più vertiginosi sono i misteri, le supposizioni, e gli interessi politici. Portoghesi e spagnoli firmano il Trattato di Tordesillas, che serve a dividere le loro zone di competenza (riepilogabile con la frase "Brasile e vie orientali al Portogallo, Americhe e vie occidentali alla Spagna") e soprattutto a tenere le altre potenze europee lontane dal Capo di Buona Speranza e dallo Stretto di Magellano. Ed è per questo che francesi e inglesi si concentrano sulla parte nord del continente americano, alla ricerca di passaggi a nord-est e a nord-ovest verso le Indie: è per questo che a New York si parla inglese e non spagnolo, mentre a Montreal si parla francese (e inglese).

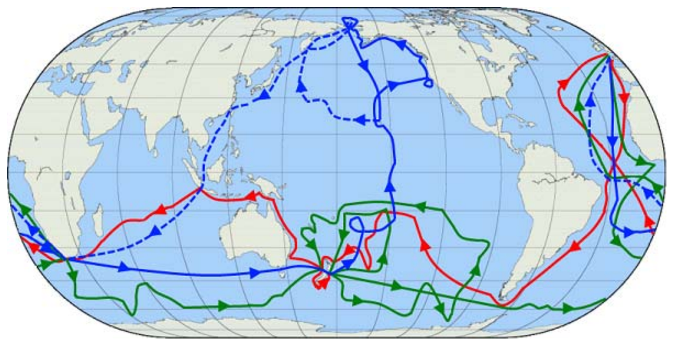
E l'Atlantico è solo lo zerbino fuori dall'uscio, per i navigatori d'Europa. Se l'età d'oro delle esplorazioni si chiude attorno al 1600, dopo aver stabilito in maniera ormai solida i legami, quantomeno di comunicazione marittima, tra Vecchio e Nuovo Mondo, c'e ancora mezzo pianeta da esplorare, dietro l'America e sotto la Cina. E saranno soprattutto le altre potenze, non più i "latini" iberici, a compiere le esplorazioni in mezzo all'immensa distesa, sostanzialmente vuota, del Pacifico. Perché i portoghesi sapevano arrivare in Cina e in Giappone, ma tutto sommato solo costeggiando la massa continentale[5], senza mai avventurarsi troppo in mare aperto: nel XVII e XVIII secolo questo non basta più.

---

[4] Basti pensare al fatto che misuriamo tutte le altezze "sul livello del mare": questa cosuccia implica, in un colpo solo, che di mare in fondo ce ne è solo uno, e che la meccanica dei fluidi è valida e democratica attraverso tutto il pianeta.

[5] Questo modo d'andar per mare si chiama "cabotaggio": non si sa bene se l'etimologia della parola discenda da Giovanni Caboto, altro grande esploratore delle Americhe (primo europeo a scoprire il Canada), o dal termine spagnolo "cabo", cioè "capo", intendendo con ciò il procedere in mare da capo a capo, tenendo più o meno sempre sott'occhio la costa.

Occorre davvero vedere ed esplorare ogni angolo della terra. Lo zar Pietro il Grande assume un navigatore danese, Vitus Bering, incaricandolo di esplorare le gelide coste del suo immenso impero; e questi scoprirà lo stretto che prende il suo nome, il canale che separa Asia ed America, e appurerà una volta per tutte che il famoso passaggio a Nord-Est, cercato almeno tanto quanto il confratello passaggio a Nord-Ovest, non esiste, o quantomeno è come se non esistesse, perché perennemente occupato dai ghiacci. Infine la corona inglese, dominatrice dei mari, manda molte delle sue navi alla ricerca di terre: il Pacifico viene percorso in lungo e in largo, scoprendo la costa orientale dell'Australia – che no, non era ancora stata scoperta – l'intera Nuova Zelanda, e soprattutto l'enorme vacuità del Pacifico, pieno di microscopiche isole, ma privo di masse continentali di qualsivoglia rispetto. Sono i viaggi di James Cook ad appurarlo, e alla fine di questi come dirà Lapérouse[6] "*rimarrà ben poco da scoprire*".



4 *I viaggi di James Cook*

Delle domande che hanno guidato inizialmente questo breve riepilogo dei tre secoli d'esplorazione europea, ce n'è almeno ancora una che rimane senza risposta, forse perché non può ricevere soluzione per via marittima: la Cina che i primi navigatori portoghesi giunsero a visitare a bordo delle loro caravelle alla fine del quindicesimo secolo era o non era la stessa favolosa nazione che Marco Polo aveva raccontato nel suo Milione tre secoli prima?

Tutto quello che riguarda le esplorazioni verso il Celeste Impero è sottoposto ad un vincolo culturale possente, che le pone sotto una luce ben diversa dalle altre esplorazioni europee: e questo vincolo è il malcelato riconoscimento che il popolo che abitava e abita quella remota regione d'oriente è sempre stato in possesso d'una cultura pari a quella degli occidentali. L'esploratore (per non dire direttamente il colonizzatore o il conquistatore) europeo è sempre stato caratterizzato essenzialmente da una marcata arroganza nei confronti dei popoli indigeni: non ha mai messo in discussione la sua superiorità culturale, dimostrata anche e soprattutto dalla maggiore efficienza militare, per concludere di avere il diritto di imporre agli altri popoli i propri principi, usi, costumi, leggi e convinzioni. Verso la Cina questo atteggiamento occidentale si è avuto solo per un periodo tutto sommato breve, che va dal periodo delle abominevoli Guerre dell'Oppio, iniziate negli anni '30 dell'Ottocento, fino alla fine della Seconda Guerra Mondiale; a parte questo periodo di particolare fragilità cinese, in cui gli occidentali hanno tentato di trattare il celeste Impero alla stregua d'una colonia, il rapporto di forza, non solo culturale, tra Cina ed Europa è stato quasi sempre paritetico, se non direttamente a favore della prima.

Gli occidentali che si avventuravano alla corte degli imperatori cinesi erano incredibilmente pochi, forse proprio perché poco gli si addiceva l'idea d'un confronto culturale alla pari. Certo è che nella storia cinese, così come gli stessi cinesi la trasmettono ai propri figli, non compaiono molti nomi di occidentali; anzi. L'Enciclopedia Nazionale Cinese è avarissima di parole, nei confronti degli stranieri, ma non è certo il solo caso; il Centro del Millennio di Pechino è la sede ove si riuniscono i massimi rappresentanti del partito comunista cinese, ed è decorato con un mastodontico fregio in

[6] Jean-François de Galaup, conte di Lapérouse, navigatore ed esploratore francese, contemporaneo (e concorrente) di Cook.

marmo che racconta l'intera storia della Cina. In questo riassunto marmoreo compaiono solo due ritratti non cinesi, ed è stupefacente notare che entrambi sono italiani. Il primo è naturalmente Marco Polo; il secondo, probabilmente assai più influente sulla cultura cinese per quanto molto meno noto del veneziano, è Matteo Ricci.

5 *Matteo Ricci*

Matteo Ricci nacque a Macerata il 6 Ottobre 1552, e condusse vita piena e assai avventurosa fino all'undicesimo giorno di Maggio del 1610, quando morì a Pechino. In altri termini, non solo in questo mese ricorre il suo compleanno, ma in quest'anno ricorre anche il quattrocentesimo anniversario della sua morte. Una delle cose che più caratterizzano la sua figura è la scarsa conoscenza che di lui si ha in patria[7]: e si è visto che la specificazione "in patria" è necessaria, se il governo di milletrecento milioni di persone si riunisce sotto una sua effigie. E non sono solo i cinesi, del resto, a riconoscere a Matteo Ricci un ruolo di prim'ordine: all'inizio del Terzo Millennio la nota rivista americana Life ha redatto una classifica delle cento personalità più importanti del Secondo, dove per "importanti" non si intende "benemerite", ma proprio "influenti": il testo originale parla di "major impact on the second millennium", tanto è vero che vi figurano anche persone poco raccomandabili come Adolf Hitler. Sfogliando la classifica[8] che, è giusto dirlo, è comunque squisitamente arbitraria e ampiamente contestabile, la prima cosa che sorprende il lettore italiano è la presenza di ben quindici personaggi italiani; una percentuale di assoluto prestigio, che immaginiamo sarà veramente difficile replicare nell'omologa classifica che qualche futuro giornale stilerà alla fine del Tremila. Ancora più sorprendente e lusinghiero per lo spirito nazionale è forse scoprire che ci sono addirittura tre italiani nelle prime cinque posizioni; dopo di che, è quasi inevitabile che l'ulteriore sorpresa sia proprio la presenza di Matteo in 68ª posizione, certo dietro a personaggi come Galileo, Leonardo e Colombo, ma ben al di sopra di Raffaello o Caterina dè Medici.

Le classifiche, lo si è detto e ripetuto, lasciano quasi sempre il tempo che trovano. Ma forse è il caso di interrogarsi, se suona nuovo un nome che sia dall'altra parte del continente eurasiatico, sia sull'altra sponda dell'oceano, viene considerato tra i più influenti della storia.

Macerata non è una città che ami mettersi in mostra: oggi non raggiunge i cinquantamila abitanti, e ai tempi di Matteo superava a stento i diecimila. I telegiornali la nominano assai di rado, e questo, al giorno d'oggi, è probabilmente la migliore garanzia che attesti che si tratta di una bella e serena città. I Ricci, nella seconda metà del sedicesimo secolo, sono una famiglia benestante, con quarti di nobiltà. Il piccolo Matteo viene educato inizialmente in casa, come si conviene a quei tempi per i giovani rampolli delle famiglie bene, e quindi, all'età di undici anni, mandato nella locale Scuola dei Gesuiti. La scuola della Compagnia di Gesù deve colpirlo assai, perché malgrado il padre una volta

[7] È sempre molto pericoloso fare affermazioni del genere: assumere che un certo argomento sia universalmente poco noto talvolta mostra solo che è chi fa l'affermazione ad essere pervaso da una profonda ignoranza sul tema. Per essere più chiari e onesti possibile, diremo allora che chi scrive sapeva pochissimo di Matteo Ricci, prima di mettersi alla ricerca del materiale necessario per scrivere questo articolo: se il resto del mondo – o anche solo dei lettori di RM – si trovasse in una situazione migliore, la cosa non può che farci piacere.

[8] La trovate qui: http://www.tostepharmd.net/hissoc/top100people.html

raggiunti i diciotto anni lo mandi a Roma per studiare legge, Matteo rimane così attratto dalla disciplina dei Gesuiti da entrare nell'ordine nel 1571, a ventuno anni di età. Ha la fortuna di trovare molti buoni maestri, che lo indirizzano e istruiscono verso le discipline scientifiche: gli si svelano i misteri della matematica, della fisica e della cartografia; ma è soprattutto in astronomia che troverà un maestro d'eccezione: Christopher Clavius[9].

Nel 1577 comincia il suo lungo viaggio. Si dirige in Portogallo, che a quei tempi, come abbiamo visto, era ancora la principale porta europea verso il mondo. Il tempo di tenere qualche lezione all'università di Coimbra, e poi si imbarca verso le Indie. Arriva a Goa, città portoghese sulle coste occidentali dell'India, dove si fermerà alcuni anni. Ed è proprio qui, nel subcontinente indiano, che riceve gli ordini sacerdotali: da questo momento in poi (siamo nel 1580), ci si dovrà rivolgere a lui come "padre Matteo Ricci".

6 *Matteo Ricci e Xu Guangqi*

Da Goa Ricci parte poi alla volta di Macao: vi arriva nel 1582, e si stabilisce nella provincia di Kwantung, non distante da Canton. Qui si predispone a studiare innanzitutto la lingua, ma anche la cultura e gli usi cinesi. Poi, col tempo e infinita pazienza, comincia il suo lento approccio verso la capitale, Pechino, che a quei tempi era rigorosamente chiusa agli stranieri. Nei primi anni di permanenza, Ricci comincia a tenere lezioni in cinese, a studenti cinesi, ma di contenuto occidentale. La scienza del suo maestro Clavius è l'oggetto delle sue lezioni, che incuriosiscono subito i suoi attenti discepoli. Si tratta, con ogni probabilità, del primo vero e proprio contatto tra le due culture scientifiche, quella cinese e quella occidentale. Da Shao-chou, dove teneva dal 1589 queste lezioni, tenta di muoversi nel 1595 verso Pechino, senza esito. Ripiega sullo Jiang-Xi, dove rimarrà a lungo continuando a illustrare la scienza e la tecnica occidentali.

L'esportazione della cultura è attività che probabilmente riesce assai più facilmente dell'esportazione della democrazia. Padre Matteo Ricci riscuoteva molta ammirazione nel mostrare alcuni strumenti occidentali sconosciuti alla scienza cinese, come l'orologio meccanico, la sfera armillare e l'astrolabio. Ma forse ancor più che gli strumenti, suscitarono ammirazione gli *Elementi*[10] di Euclide, che Ricci tradusse in cinese sulla base del lavoro del suo maestro Clavius. La matematica greca e il metodo euclideo erano profondamente distanti dalle logiche cinesi, e il confronto tra l'oriente e l'occidente, in questo caso, fu un vero e proprio shock culturale.

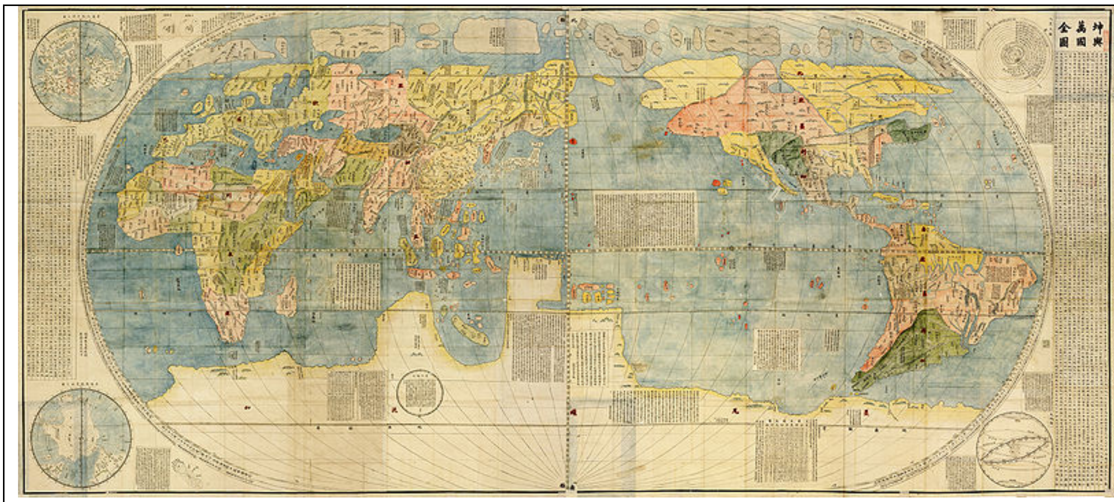
Nel frattempo, Matteo Ricci, pur senza dimenticare le sue origini occidentali – anche perché era soprattutto un religioso, un gesuita, e il suo intento principale, ancorché divulgativo, era sostanzialmente missionario – diventava sempre più cinese, sempre più un ponte fra le due culture così distanti, non solo in senso territoriale. In breve prese il nome di Li Madou, che era quanto di meglio potesse ottenere dai suoi allievi cinesi per ricordare il suo nome vero e proprio: "madou" era infatti il suono cinese più simile a "matteo", e il "li" preposto era la traduzione fonetica di "ri", che stava per l'iniziale di "Ricci".

[9] Nome latinizzato dell'originale Clau. Ma uno dei più famosi crateri lunari è universalmente noto come Clavius, ed è bene mantenere la denominazione anche per lo scienziato cui è dedicato.

[10] Segnatamente, solo i primi sei libri.

Anche se non direttamente, fu padre Matteo a rispondere alla domanda ancora aperta, quella che chiedeva se il Catai di Marco Polo fosse proprio la Cina che aveva la sua porta occidentale nel porto di Macao: Ricci ne era fortemente convinto, ma per dimostrarlo davvero era necessario che qualcun altro, dopo Polo, si avventurasse in un viaggio terrestre verso Pechino. Un confratello gesuita di Matteo, un tal De Goes, accettò l'avventura: partì dall'India nel 1602, diretto per vie continentali alla Cina. Non riuscì a raggiungere Pechino, perché morì nel 1607 senza riuscire a vedere la capitale cinese, ma era riuscito a mantenersi in contatto stabile con Ricci via lettera, e le loro comunicazioni erano sufficienti a stabilire che il Catai e la Cina erano davvero la medesima terra.

L'arte principale di Matteo Ricci era infatti la cartografia. Quando, nel 1601, riesce finalmente a raggiungere Pechino e ad essere accolto prima come bonzo, poi perfino come mandarino alla corte dell'Imperatore Celeste della dinastia Ming, fa dono a sua altezza di una sua opera di incommensurabile valore, per quei tempi: la Grande Mappa dei Diecimila Paesi, il suo grande studio cartografico che, per la prima volta, inserisce la Cina, e tutti gli altri paesi del mondo, in una sola vista di insieme.



7 *La Grande Mappa dei Diecimila Paesi*

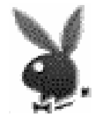
Macerata e le Marche hanno celebrato di recente il loro illustre figlio[11]; non meno avrà fatto la chiesa cattolica, che tiene il suo missionario in altissima considerazione. A noi piace ricordare soprattutto la sua capacità di trasmettere e ricevere la scienza, la sua abilità nello scoprire il linguaggio astronomico, matematico e scientifico come veicolo possibile per comunicare tra diverse culture. Del resto, Matteo Ricci era davvero un uomo in grado di adattarsi[12], e quindi di riconoscersi "simile" agli altri: questa, tra gli esploratori e i colonizzatori, è dote rara e quanto mai preziosa.

Matteo Ricci morì in quella che era ormai diventata la sua città, Pechino, nella primavera di quattrocento anni fa. Era diventato anche un abile pittore, e alcuni quadri di delicata fattura, paesaggi dei dintorni di Pechino, sono attribuiti a lui. Ci piace immaginare che fosse uomo capace di trovarsi a casa ovunque nel mondo: ovunque ci fossero uomini da conoscere, e non da schiavizzare.

[11] Si trovano buoni riferimenti in rete: http://www.limadou.it/, ad esempio, o anche http://padrematteoricci.it/Engine/RAServePG.php/P/250010010403/T/Home-Page

[12] Il verso della canzone "Centro di Gravità Permanente" di Franco Battiato citato in apertura (*gesuiti euclidei vestiti come dei bonzi per entrare a corte degli imperatori della dinastia dei Ming*) sembra troppo aderente alla vita di Ricci per essere casuale, ma il cantante ha negato che ci fosse intenzione di citare il gesuita di Macerata. Certo è che la coincidenza è quanto meno sorprendente…

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Ho visto cose…			
Qualche dubbio sul "Solito gioco dell'estate"			

2.1 Ho visto cose...

"*...che voi umani potete soltanto sognare*".

OK, Dick l'ha scritta diversa, ma Rudy normalmente parafrasa la nota frase in questo modo quando si trova davanti a qualcosa di sorprendente ed incredibile. E il fatto che questo problema abbia *tre* pipe, *una* birra e *un* coniglietto, scatena sicuramente in lui la citazione. E, chiaramente, la necessità di una spiegazione.

Il nostro tormentone preferito è, come ~~sapete~~ dovreste sapere, che Rudy taglia per i campi, Treccia è molto formale e Doc sostiene di non sapere nulla di matematica; in realtà, anche se nessuno dei tre sarà mai d'accordo, Rudy apprezza le svolte creative (inutili), a Treccia piacciono "gli esempi con le mele e le pere" (e la trigonometria), mentre Doc se la cava decisamente bene con la logica (matematica) a qualsiasi livello; insomma, Rudy saltella sul posto, Doc fa la maratona e Treccia accende il GPS e guida, se si parla di matematica.

Ora, quello che abbiamo trovato, Rudy lo ritiene quasi irrisolvibile, ma è convinto che se Treccia e Doc si mettessero assieme, lo risolverebbero in un amen: fortunatamente per il suo ego, sono distanti tra di loro circa quattrocento chilometri.

Bene, veniamo al problema. È di *linguistica*, ma i metodi dell'analisi matematica (no, non quella dell'esame! Quella del senso comune!) dovrebbero servire. Rispetto alla versione originale, cambiamo alcuni termini per impedirvi la ricerca su Wikipedia: sono quelli in corsivo.

L'*Aabaa* è un linguaggio della linea *Polinesiana*, parlato oggi da non più di un centinaio di persone *nell'omonimo arcipelago formato da due isole*; di fianco, trovate una serie di frasi in *Baabaab* (che è il dialetto *dell'isola più meridionale*) trascritte in alfabeto occidentale e la loro traduzione notate che "ŋ" e "'" sono consonanti, mentre ä è una vocale. Il due punti indica un prolungamento della vocale precedente.

b'ata zä:ŋini	i soldi[13] del ragazzo
si bogdoloi	la tua spalla
ja: xabani	la mammella della mucca
su zä:ŋiu	i vostri soldi
dili tekpuni	la pelle della testa
si ja:ŋi:	la tua mucca
bi mo:ŋi:	il mio albero
aziga bugdini	la gamba della ragazza
bi nakta diliŋi:	la testa del cinghiale
nakta igini	la coda del cinghiale
si b'ataŋi: bogdoloni	la spalla del figlio
teŋku bugdini	la gamba dello sgabello
su ja: wo:ŋiu	la coscia della mucca
bi wo:i	la mia coscia

Prima domanda: Traducete:

su b'ataŋiu zä:ŋini
si teŋku bugdiŋi:
si teŋkuŋi: bugdini

Seconda domanda: Traducete in *Baabaab*:

la coscia del ragazzo
il nostro cinghiale
l'albero di mia figlia

Terza domanda: Secondo voi, sono traducibili le seguenti frasi? Se sì, fatelo, se no, spiegatene il motivo:

bi xabai
su b'ataŋiu bugdiŋini
si igi

Quarta domanda: Traducete le seguenti frasi, spiegando in che cosa il loro significato differisce.

bi tekpui
bi tekpuŋi:

Beh, fateci sapere se vi è piaciuto: ne abbiamo un altro, ma è più facile, visto che lì il linguaggio lo parlano quasi mille persone... Non vorremmo ve la cavaste con qualche domandina agli amici.

2.2 Qualche dubbio sul "Solito gioco dell'estate"

Ve lo diciamo subito per evitare problemi di comprensione: il gioco ce lo siamo inventati come sostitutivo non violento della roulette russa, che consideriamo il secondo gioco più stupido mai inventato[14]; data la calura agostana, i VAdLdRM si sono volentieri prestati alla bisogna, anche se sostengono che un gioco simile glielo avevamo fatto fare già qualche anno fa (e si erano divertiti molto).

Alberto è circondato da sei paraventi attraverso i quali non può vedere, e dietro uno di questi si nasconde Fred, che non si muove; Alberto ha a disposizione due *waterbomb* (i soliti sacchetti pieni d'acqua gelida, equivalenti a due proiettili in camere contigue del tamburo) da cui Fred non vuole essere colpito e, se venisse colpito anche solo una volta, porrebbe fine al gioco (come quando qualcuno "vince" alla roulette russa); Alberto può scegliere dietro quale paravento tirare il primo gavettone, cosa che equivale, grosso modo, all'azione di far girare a caso il tamburo della rivoltella nel caso della roulette russa; solo

[13] Non necessariamente plurale: pensate all'inglese "money" o al francese "argent".

[14] La risposta alla domanda che vi state ponendo è: "Sempre la roulette russa, ma con una pistola automatica".

che qui si usa acqua fredda invece che piombo caldo e non si mira ad appendici vitali dei giocatori...

Dal punto di vista di Fred, dopo che Alberto ha tirato il primo sacchetto, è meglio se tira il secondo sacchetto dietro il paravento immediatamente successivo in senso orario (equivalente a un secondo colpo in successione della roulette russa, senza ruotare nuovamente il tamburo) o se, del tutto immemore del lancio precedente, tira di nuovo dietro un paravento qualsiasi (equivalente alla rotazione casuale del tamburo fra il primo e il secondo colpo della roulette russa)? E questa era la prima domanda, ossia: se avete due colpi in camere vicine nel revolver, vi conviene (vi supponiamo interessati alla sopravvivenza) dare una rotazione tra i due colpi, o no?

Ora, la seconda domanda prevede una *pre*(o *meta*) domanda: siamo sicuri di averci centrato, nella trasposizione? Siccome siamo pigri, traducetela voi nel gioco. E se invece di tirare due colpi, sempre con due proiettili contigui nel caricatore, doveste tirarne quattro, come vi comportereste? Rotazione o non rotazione del tamburo, tra un colpo e l'altro? E come possiamo tradurre nel gioco di Al & Fred il concetto dei quattro colpi con due proiettili? ...anche perché sarebbe interessante una terza domanda: sparando quattro colpi, se ci fosse un solo proiettile nel revolver, rotazione o no?

In definitiva, siamo consci di aver inventato un gioco che *non* è equivalente alla roulette russa; però, se qualcuno riesce ad inventarne uno che sia coerente con le nostre domande, saremo felici di pubblicare: a Rudy sono antipatici non solo gli ufficiali zaristi, ma in genere tutti gli scrittori russi[15], e il trovare un metodo *metamatematicamente corretto* per traslare queste idiozie, potrebbe interessarlo molto.

3. Bungee Jumpers

Provare che scrivendo i numeri della sequenza:

$$\frac{a_1}{p},\frac{a_2}{p^2},\frac{a_3}{p^3},\ldots,\frac{a_n}{p^n},$$

dove p è un primo diverso da 2 e da 5 e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono tutti interi primi rispetto a p, allora alcune delle prime frazioni possono contenere lo stesso numero di cifre nel loro periodo, ma le espressioni decimali delle frazioni seguenti conterranno p volte cifre nel loro periodo di quante ne ha il termine precedente.

Ad esempio:

$$\frac{1}{3}=0,\overline{3};$$
$$\frac{4}{9}=0,\overline{4};$$
$$\frac{10}{27}=0,\overline{370};$$
$$\frac{80}{81};$$
$$\frac{116}{243};$$
$$\frac{653}{729};$$
$$\ldots$$

[15] Tollera a malapena "Il Maestro e Margherita", di Bulgakov. Il "meno russo" degli scrittori russi, secondo Doc (al quale piacciono).

> *le prime due contengono entrambe una cifra nel loro periodo; la terza ne contiene* 3*, ossia il numero della precedente moltiplicato* 3*; la quarta ne contiene* 9*, ossia il numero della precedente moltiplicato* 3*; la quinta ne contiene* 27*, ossia il numero della precedente moltiplicato* 3*...*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ottobre, un'edizione di queste soluzioni e note particolarmente robusta, data la presenza di parecchi contributi e chiarimenti, e l'atteso risultato del Summer Contest.

Per non rubare troppo spazio con le note, dopotutto meno interessanti delle soluzioni, sarò brevissima.

Però ritengo importantissimo ricordarvi i *Gathering for Gardner* (http://www.g4g-com.org/): il grande e inimitabile Martin non ha voluto nessuna celebrazione, ma ha espresso il desiderio che la tradizione delle riunioni gardneriane continuasse. In tutto il mondo il 21 ottobre ci saranno riunioni, anche in Italia, e siete ancora in tempo per partecipare ad una di quelle segnalate o per candidarvi a organizzarne una dalle vostre parti: mi raccomando! Contiamo su di voi!

8 *Gathering for Gardner.*

Altra cosa importante: grazie ai nostri nuovi webmaster, abbiamo aggiornato finalmente un po' il sito (www.rudimathematici.com, non vi sarete mica dimenticati?). Andate a dare un'occhiata, la parte più bella è il nuovo Index Mundi, completamente ristrutturato, ma nei prossimi giorni dovremmo essere in grado di mostrarvi grandi novità!

Last but not least, in Bookshelf (http://www.rudimathematici.com/bookshelf.htm) continuano le avventure di Beau Geste, narrate dal prode ***Martino***: non perdete tempo, scaricatevi l'ultima versione! Come se non bastasse sono giunti in Redazione nuovi contributi che potrebbero stuzzicare la vostra curiosità, e il vostro spirito critico: dimostrazioni di identità, e di altro... abbiamo messo tutto in Bookshelf, e ci auguriamo di ricevere tantissimi commenti in proposito, comprese confutazioni e correzioni, secondo richieste degli autori.

Ed ora via alle danze.

4.1 [138]

4.1.1 Valor medio

Con questo mese vorremmo mettere la parola fine al problema del valor medio, pubblicato a giugno:

> *State partecipando a un gioco a premi dedicato ai campioni di calcolo mentale. Il nostro conduttore ha un sacchetto tipo tombola con dentro i numeri da 1 a 100; ne estrae dieci, e il vostro compito è, partendo da quei numeri, di trovare due insiemi disgiunti (l'unione dei quali non sia necessariamente tutto l'insieme iniziale: potete usarne meno) aventi la stessa somma. Avete un minuto di tempo.*
>
> *Supponendo che voi siate velocissimi a far di conto, quali sono le probabilità che avete di vincere? E se il conduttore potesse scegliere qualche numero in funzione di quelli già estratti?*
>
> *La seconda versione del gioco "per persone normali" consiste nell'estrarre meno numeri, rendendo la cosa più facile. Cosa succede se ne vengono estratti nove? E con otto?*

Su RM139 c'erano due soluzioni, di ***Millennium Bug*** e di ***Cid***, che a quanto pare non completamente corrette. Sullo scorso numero ***Michele***, ***Franco57*** e ***Cid*** si sono dati da fare per far luce sulla situazione, e non appena uscito RM140 ci ha scritto immediatamente ***Franco57*** lamentandosi delle obiezioni di ***Michele*** alla soluzione di ***Millennium***:

> ***Millennium Bug*** ci ha porto un magnifico esempio del principio della piccionaia, così semplice da sconcertare: il numero di insiemi da 1 a 9 elementi che si possono formare con 10 numeri estratti nei primi 100 è superiore al numero delle possibili somme che si possono ottenere sommando da 1 a 9 numeri diversi nel range 1-100, perciò questi insiemi non possono dare sempre somme diverse.

Finalmente il Capo, nella sua immensa generosità, ci ha mandato la sua soluzione:

> Con 10 numeri, siamo sicuri che i due insiemi esistono. Infatti, essendo i numeri distinti, il totale non può superare 995=91+92+93+94+95+96+97+98+99+100.
>
> I sottoinsiemi non vuoti di questi 10 numeri sono allora $2^{10}-1=1023$ e quindi, per il *Principio della Piccionaia*, almeno due sottoinsiemi differenti devono avere lo stesso totale: a questo punto, basta cancellare gli elementi comuni ai due insiemi per ottenere gli insiemi disgiunti richiesti.
>
> Per quanto riguarda il gioco con 8, numeri, mostriamo che è possibile estrarre una mano perdente da un particolare insieme: in particolare, consideriamo i numeri:
>
> $$\{100,99,98,96,92,84,68,36\}=$$
> $$\{100,100-2^0,100-2^1,100-2^2,100-2^3,100-2^4,100-2^5,100-2^6\}.$$
>
> Un sottoinsieme di k numeri presi tra questi 8 ha una somma della forma $(100k-S)$, dove S vale zero o è una potenza di 2.
>
> Supponiamo i due insiemi E e E' abbiano lo stesso totale:
>
> $$100k-S=100k'-S'. \quad [1]$$
>
> Deve essere $k\neq k'$, in quanto nel caso contrario dovrebbero essere uguali anche i termini S e S'. L'equazione [1] si può scrivere come $(S-S')=100(k-k')$, dove $(S-S')$ è un multiplo di 100.
>
> Ora,
>
> $$S+S'=1+2+4+8+\ldots+64,\Rightarrow S+S'\leq 127 \quad [2]$$
>
> e quindi $S\leq 127$ e $S'\leq 127$.
>
> Posto $S>S'$, si vede che $S-S'\leq 127$, quindi l'unica possibilità restante è che.
>
> $$S-S'=100. \quad [3]$$
>
> Da questo si deduce che deve essere $k-k'=1$, ossia E contiene un numero in più rispetto a E'.
>
> Sommando le [2] e [3], otteniamo $2S\leq 127$, il che implica $S\leq 113$; d'altra parte, la [3] impone $100\leq S$, da cui $100\leq S\leq 113\Rightarrow 0\leq S'\leq 13$.
>
> $100\leq S$ implica che S contenga almeno i termini 64 e 32 più una terza potenza di 2, quindi ha almeno 3 termini, e quindi S' ne avrà almeno 4.
>
> $S'\leq 13$ implica che S' contenga al più i termini 0, 1, 2, 4 e 8: non può però contenerli tutti e cinque in quanto in questo caso sarebbe maggiore di 13: quindi può essere solo pari a 7, 11 o 13.

Identificando ora con x la terza potenza di 2 componente di S, possiamo scrivere:

$$100 \leq 64 + 32 + x \leq 113 \Rightarrow 4 \leq x \leq 17.$$

I soli valori possibili di x sono allora 4, 8 o 16, il che ci porta ai possibili valori di S 100, 104 o 112. Date le condizioni ottenute su S', è impossibile rispettare la condizione $S - S' = 100$, quindi E ed E' devono avere somme diverse.

L'analisi della seconda parte di questo problema è comparsa sul numero 18 della rivista francese *Quadrature*.

Io a dire il vero spero nella *verve* polemica di alcuni di voi, ma per il momento chiudo qui e passo avanti.

4.1.2 Summer Contest

Finalmente è giunto il momento di vedere le soluzioni di questo problema proposto per l'estate. Prima di darvene le soluzioni, riprendiamo il testo:

Un sultano prese i due più saggi visir, requisì i loro turbanti e disse loro queste parole: "Qui davanti avete una normale scacchiera, sulla quale io metterò un certo numero di pedine, non più di una per casella, e lascerò qualche casella vuota. Poi, chiamerò dentro uno di voi e gli indicherò una casella: questi avrà la possibilità, a sua scelta, di mettere una pedina in una casella vuota o di eliminare una pedina da una casella occupata. Quindi, toccherà al secondo di voi entrare, guardare la scacchiera e dirmi che casella avevo scelto. Avete dieci minuti per mettervi d'accordo sulla strategia, poi si gioca. Se la risolvete sarete come al solito ricoperti di monete d'oro, se invece non ce la fate, mi tengo i turbanti".

Riuscite ad aiutare i due visir, trovando una strategia?

Sono sempre i soliti a cimentarsi nei nostri SC, a dire il vero, ma è sempre ***Gnugnu*** a fare la parte del leone (ve lo ricordate quello dell'anno scorso con i Sangaku?)... per cui lo facciamo parlare per ultimo. Una mail velocissima ancora ai tempi del contest stesso ce l'ha mandata persino ***.mau.***:

Ci sono strategie interessanti, ma dipendono molto da quante pedine mette il sultano. Esempio stupido:

- una sola pedina, il sultano la indica; il primo visir ne aggiunge una vicina su una casella nera. Il secondo vede due pedine vicine, e sceglie se c'è la pedina bianca, altrimenti una pedina qualunque. Probabilità di vittoria: 75%

- una sola pedina, il sultano indica una casella vuota; il primo visir aggiunge una pedina immediatamente a destra (immaginando una scacchiera che vada a capo) della posizione, a meno che non sia vicina alla prima casella messa, nel qual caso ci si sposta su un angolo. La probabilità è un po' meno del 50%.

Ma non c'è stato seguito, non l'abbiamo più sentito. Anche ***Cid***, in un'estate che l'ha visto piuttosto sfortunato ed impegnato, ci ha mandato un contributo molto breve:

Per questo problema ho trovato una strategia che mi permette di avere una possibilità su 8 di indovinare la casella scelta.

La strategia è la seguente:

I due saggi scelgono sette caselle della scacchiera per codificare il numero corrispondente alla casella scelta dal sultano. La settima casella serve per stabilire se la presenza di una pedina corrisponda ad un 1 o a uno 0. Se il secondo saggio vedrà nella settima casella una pedina, calcolerà il numero binario formato dalle altre sei caselle tenendo conto che la presenza di una pedina corrisponde ad un 1 e l'assenza della pedina ad uno 0. Se invece nella settima casella scelta dai due saggi non c'è la pedina, il secondo saggio calcolerà il numero binario formato dalle altre sei caselle tenendo conto che la presenza di una pedina corrisponda ad uno 0 e l'assenza della pedina ad un 1.

Il primo saggio dovrà quindi, dopo aver visto quale casella gli indica il sultano, verificare se il numero corrispondente a questa casella corrisponde al numero binario formato dalle prime sei caselle considerando la presenza di una pedina pari al numero 1 e l'assenza pari allo 0. Se cosi fosse, verifica che nella settima casella ci sia una pedina e se non c'è ve ne mette una.

Se ciò non basta, verifica se il numero corrispondente alla casella scelta dal sultano corrisponde al numero binario formato dalle prime sei caselle considerando la presenza di una pedina pari al numero 0 e l'assenza pari al numero 1. Se cosi fosse, verifica che nella settima casella non ci sia una pedina e se c'è la toglie

Con queste due prime verifiche, ha già due probabilità su 64 di aver indovinato la casella.

Se non bastassero, il primo saggio guarda se la settima casella è occupata da una pedina e poi calcola il numero binario formato dalle prime sei caselle con la codifica stabilita dalla settima casella. Ci sono sei possibilità su 64 che questo numero differisca solo di un bit dal numero binario corrispondente alla casella scelta dal sultano. In tal caso, il primo saggio varia quel bit aggiungendo o togliendo una pedina da una di quelle sei caselle in modo di poter trasmettere l'informazione corretta al secondo saggio.

In totale quindi le probabilità di vittoria sono: $\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{6}{64}=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$.

Silvano, invece, dice di aver barato, e che la sua soluzione è solo mezza...

Secondo me la soluzione è una funzione hash, ossia una funzione che genera sempre valori diversi in funzione della combinazione dei dati in ingresso (0 e 1) che corrispondono alla scacchiera numerata da 0 a 63 che goda della seguente proprietà:

$$\forall x0,\ldots,x63\in 0,1\rightarrow \forall i\in 0,\ldots,63\ \exists k0\in 0,\ldots,63;fx0,\ldots,xk\ ,\ldots,x63=i \quad [1]$$

Dove con xk intendo una pedina che mi fa cambiare la funzione in modo che il suo valor valga i.

Vi vendo una piccola idea che spero non mi toccherà il turbante, magari il sultano si accontenta dei capelli rasati alla "nazi", anche perché sono comunque canuto di serie!

Non esplicitamente indicato nel problema, mi permetto di mettere in una casella vuota la pedina capovolta (in modo evidente) ma in tal caso essa sarà considerata come "-1", ovviamente di tale pedine ce ne può essere una sola quella che sono costretto a mettere se per caso la funzione che vado a scrivere mi obbliga togliere una pedina proprio da quella casella vuota, qualora fosse occupata anche la casella che mi consente di "sommare" normalmente.

La funzione che utilizzo è:

$$fx0,\ldots,x63=i=063i\cdot xi \bmod 64 \quad [2]$$

La funzione funziona in quanto per modificare il resto posso sempre rimuovere un numero da 0 a 63 nei seguenti casi: se la pedina è presente la tolgo, se è assente la metto capovolta (e vale -1).

In ogni caso, quindi, riesco ad ottenere un numero compreso da 0 a 63 da sottrarre ed ho la soluzione, se non riesco a mettere la pedina in una casella vuota che comunque mi da il totale.

Ora visto che avevo paura per la cotenna, mi sono cimentato un momento nel problema base, ossia quello senza la pedina capovolta. Solo che per rendermi le cose semplici mi sono fatto un caso 2x2 (e non sono andato oltre, anche se mi sembra la strada buona… andrebbe seguita con un po' di tempo al calcolatore…). Dunque nel caso 2x2 numerando le caselle da 0 a 63 ottengo numeri di 4 bit imponendo 0 se la casella è vuota e 1 se è piena.

In tal caso deve valere la [1] quindi per ogni combinazione devo trovarmi un adiacente (a distanza di hamming=1) che è sempre pari da 0 a 3.

Schiaffo il tutto su una mappetta per semplificare, indicando con i numeri 0,1,2,3 il numero DECIMALE della casella, costruita secondo la seguente logica: parto da 0000 che pongo pari a 0, ossia se ottengo all'arrivo del secondo malcapitato "0" ottengo che il sultano ha indicato il numero 0, mentre al contrario se il re non pone pedine mi trovo nella posizione "0000" e devo fornire indicazioni con la pedina.

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	2	1	3
	01	0	2	1	3
	11	1	3	0	2
	10	1	3	0	2

Ora seguo il presente algoritmo che parte da una casella occupata:

- se il numero della cella è pari (ossia ho già messo cella 0 o 2) allora modificando un bit alla volta il valore della cella da dx (meno significativo) a sx pongo i numeri in successione crescente modulo 4 a partire dal numero dato messo nella cella meno significativa. Esempio "0000" è 0, quindi "0001" è 0, "0010" è 1, "0100" è 2, "1000" è 3.
- Se il numero della cella è dispari (1,3), invece opero nello stesso modo ma in modo decrescente: esempio: "0010" è 1, quindi "0011" è 1, "0000" è 0 (ok torna), "0100" è 3, "1000" è 2.

Quella sopra è la mappa di karnaught nel caso 2x2 e "miracolosamente" quadra. Quindi se la scacchiera fosse piccola la risposta l'averi.. solo che con 64 bit non ho provato, anche perché un array da 2^64=18.446.744.073.709.551.616 è complesso da costruire ☺… e semplificare e verificare senza maclusky… (si scrive così???) e poi puzza di esponenziale come soluzione e quindi non mi piace (odio gli algoritmi esponenziale o NP).

Interessante anche il risultato semplificando il caso 2x2:

0: ABC+ABC

1: ABC+ABC

2: ABC+ABC

3: ABC+ABC

Approccio interessante. Vediamo ancora ***Millennium Bug***:

Descrivo un possibile modo per cercare di comunicare al mio socio visir quale casella ha scelto il sultano. Il metodo è applicabile per una scacchiera con un numero qualsiasi N di caselle, quindi non necessariamente quadrata, né rettangolare. Procedo così:

- numero le caselle della scacchiera da 1 a N e assegno a ciascuna un valore pari al numero assegnatole.

- eseguo la somma in modulo N delle caselle occupate da una pedina: il risultato identifica una casella della scacchiera; per convenzione diciamo che il risultato 0 corrisponde alla casella N (in alternativa potete numerare le caselle da 0 a N-1)

- metto o tolgo una pedina per generare una nuova configurazione che identifica la casella scelta dal sultano. Per spiegarmi meglio, se la configurazione iniziale corrisponde alla casella A, mentre io devo comunicare al mio socio la casella B, ho due alternative:

- posso inserire una pedina nella casella (N+B-A) mod N

- posso togliere una pedina dalla casella (N+A-B) mod N

Chiaramente, se ho già A = B lascio tutto come è, oppure, se proprio il sultano mi obbliga a fare una mossa, modifico lo stato della casella N che in modulo N non conta niente.

Il giochetto però non funziona sempre. Infatti se la casella in cui dovrei inserire la pedina è già occupata (a meno di poterne mettere anche due…) oppure se quella da cui dovrei toglierla è già vuota, non ho la possibilità di segnalare la configurazione B con una sola mossa.

Dato che questa condizione negativa si verifica una volta su 4, direi che i due visir hanno un buon 75% di probabilità di riavere indietro i turbanti.

Qualche esempio:

Considero scacchiera da 10 caselle così numerate:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

1) A = 4 = $(1+3)_{\text{mod}10}$ B = 6

O		O							

Soluzione: inserisco pedina in posizione 2.

2) A = 9 = $(5+6+8)_{\text{mod}10}$ B = 3

				O	O		O		

Soluzione: inserisco pedina in posizione 4 o tolgo quella in posizione 6.

3) A = 0 B = 5

Soluzione: inserisco pedina in posizione 5.

4) A = 1 = $(5+6)_{\text{mod}10}$ B = 6

				O	O				

Soluzione: tolgo pedina 5.

5) A = 3 = $(6+7)_{\text{mod}10}$ B = 9

					O	O			

Soluzione: nessuna; dovrei aggiungere un'altra a 6 o toglierne una inesistente a 4.

6) A = 5 B = 2

O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Soluzione: inserisco pedina in posizione 3.

Il fatto che comunque con questa strategia non utilizzo la casella N, mi porta a supporre che si possa fare qualcosa di meglio e forse garantire sempre la vittoria.

Dopo averci pensato ancora un po', mi sono convinto che esista una soluzione che garantisca sempre il successo (anche perché se no che summer contest sarebbe!!!).

Quindi ho tentato di elaborare un metodo di codifica che soddisfa queste condizioni:

- suddivide le 2^N combinazioni in N gruppi di $2^N/N$

- ognuno dei N gruppi è associato a una delle caselle

- per ognuna delle 2^N combinazioni posso, modificando una sola casella, passare a una combinazione appartenente a uno qualsiasi degli altri N-1.

Naturalmente è comodo ragionare in termini di numeri binari, associando ad ogni casella un bit: zero per casella vuota e uno per casella con pedina.

Ho provato a orientarmi su qualcosa derivato da estensioni dei codici di Gray. Poi dopo aver vagato nella nebbia per qualche giorno, ho elaborato qualcosa che potrebbe funzionare.

Ho innanzitutto trovato questa codifica che si può applicare per una scacchiera di 4 caselle e che rispetta le condizione elencate sopra: vedi tabella.

combinazion e	codifica
0000	c1
0001	c2
0010	c3
0011	c4
0100	c4
0101	c3
0110	c2
0111	c1
1000	c1
1001	c2
1010	c3
1011	c4
1100	c4
1101	c3
1110	c2
1111	c1

Se vi fidate bene, altrimenti verificate che, per ognuno dei 16 valori binari, modificando un solo bit posso sempre variare la codifica corrente in una delle altre 3.

Ora, avendo a disposizione questo aggeggio, posso pensare di estenderne l'utilizzo a una scacchiera da 16 e poi da 64 caselle se applico ricorsivamente la codifica.

Nel primo passaggio dovrei estendere la tabella a 2^{16} righe per tutte le combinazioni da 16 bit e fare in modo che ognuno dei 4 gruppi da 4 bit funzioni come prima: potrei così codificare ora 16 valori che posso scambiare come voglio modificando un solo bit. Nel passaggio successivo arrivo ai 64 che mi servono.

Purtroppo non sono riuscito a proseguire oltre e non vi posso dire come si può fare in pratica tutto ciò, ne tantomeno se sia possibile.

A questo punto arriviamo finalmente a ***Gnugnu***, e gli passiamo la parola...

Finalmente! Dopo un po' ci si stanca dei saggi consiglieri che trovano sempre il modo per avere la meglio sul loro sovrano. Questa volta, se non sbaglio e il sovrano conosce le tecniche adottate dai visir, il gioco è, come a pari o dispari, equo.

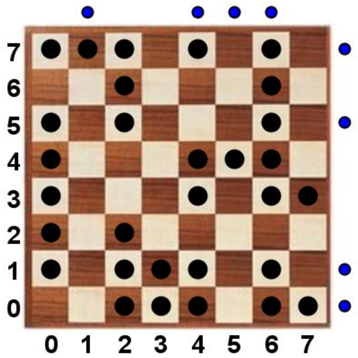
Il gatto e la volpe potrebbero pensare di conservare i turbanti ed alleggerire le casse del sovrano usando il seguente metodo:

a) numerano le colonne e le righe della scacchiera, da 0 a 7 partendo da un angolo prefissato;

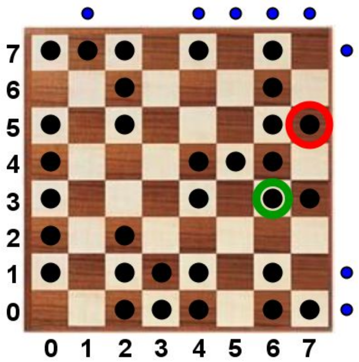
b) segnano le linee che contengono un numero dispari di pedine;

c) scrivono, in base 2, i numeri delle righe/colonne (separatamente) segnate, li incolonnano e ne calcolano la parità, scrivendo un 1 per le colonne che contengono un numero dispari di 1 e uno 0 per quelle che ne hanno un numero pari (questa operazione corrisponde ad eseguire la somma, sempre in base 2, trascurando i riporti o, meglio, ad eseguire lo xor bit a bit, quello che viene anche chiamato xor aritmetico), ottenendo un numero sempre compreso fra 0 e 7.

Per il secondo visir la fatica è terminata: i numeri trovati sono, come nello schema di esempio, le coordinate della casella da indovinare.

Visir indovino	Versione base		Versione semplificata	
	Colonne	Righe	Colonne	Righe
	1 → 0 0 1 4 → 1 0 0 5 → 1 0 1 6 → 1 1 0 6 ← 1 1 0	0 → 0 0 0 1 → 0 0 1 5 → 1 0 1 7 → 1 1 1 3 ← 0 1 1	Calcolo per le pari. 2 → 0 1 0 3 → 0 1 1 7 → 1 1 1 6 ← 1 1 0	Calcolo per le dispari. 1 → 0 0 1 5 → 1 0 1 7 → 1 1 1 3 ← 0 1 1

Il primo visir deve ancora lavorare: eseguendo nuovamente lo xor fra i risultati ottenuti e le coordinate della casella scelta dal sovrano, cerchiata in verde nel disegno, ottiene quelle della casella da modificare, cerchiata in rosso.

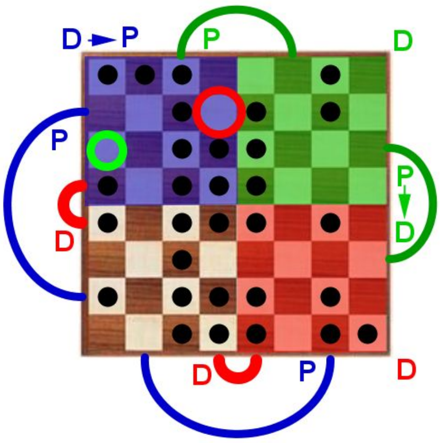
Visir informato	Versione base		Versione semplificata	
	Colonne	Righe	Colonne	Righe
	1 → 0 0 1 4 → 1 0 0 5 → 1 0 1 6 → 1 1 0 7 → 1 1 1 0 0 1 (6) → 1 1 0 7 ← 1 1 1	0 → 0 0 0 1 → 0 0 1 7 → 1 1 1 1 1 0 (3) → 0 1 1 5 ← 1 0 1	La 6 diventa pari. Calcolo per le pari. 2 → 0 1 0 3 → 0 1 1 6 → 1 1 0 7 ← 1 1 1	La 3 diventa dispari. Calcolo per le dispari 1 → 0 0 1 3 → 0 1 1 7 → 1 1 1 5 ← 1 0 1

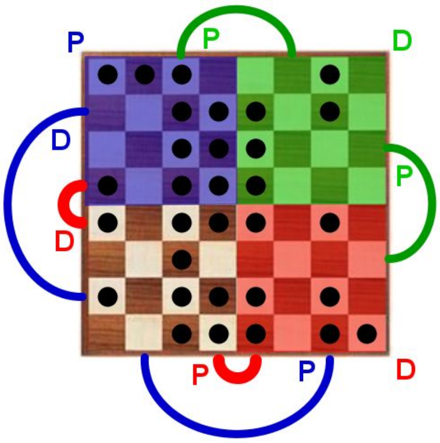
Tutte le operazioni sono eseguibili mentalmente, adottando, se necessario, alcune semplificazioni che consentono di calcolare, a ciascun visir, al più una coppia di xor bit a bit fra 3 numeri binari di tre cifre; si osserva infatti che:

- le linee 0 sono del tutto ininfluenti;
- invertendo preventivamente la parità della riga/colonna relative alla casella scelta, il visir codificante si trova ad operare in maniera identica all'altro;
- è indifferente eseguire lo xor tra le linee a contenuto dispari o fra le restanti.

Viva i colori, abbasso l'aritmetica

Modificando lo schema quadrato, 8 per 8, suggerito dalla scacchiera, in uno cubico di lato 4, come se questa fosse una versione da viaggio, ripiegata lungo gli assi paralleli ai lati, si può evitare l'uso della numerazione in base 2. Indipendentemente dall'ordine della piegatura le righe/colonne risultano accoppiate secondo la loro distanza dai bordi, come indicato negli schemi seguenti dagli archi colorati. Si considerano altresì i quattro quadranti individuati dalle pieghe.

Visir informato	Colonne	Righe	Quadranti
	La coppia R è dispari. La coppia G è pari. La coppia B è pari. Discorda la coppia rossa	La coppia R è dispari. La coppia G, dopo la correzione, è dispari. La coppia B è pari. Discorda la coppia blu	Il rosso è dispari. Il verde è dispari. Il blu, dopo la correzione , è pari. Discorda il blu

Visir indovino	Colonne	Righe	Quadranti
	Tutte le coppie contengono un numero pari di pedine. All'unanimità risulta la coppia neutra sui bordi.	La coppia R è dispari. La coppia G è pari. La coppia B è dispari. Discorda la coppia verde	Il rosso è dispari. Il verde è dispari. Il blu è pari. Discorda il blu

In ciascuna delle suddivisioni si trovano 4 gruppi di 16 caselle. Uno di questi (nell'esempio quello contenente la casella d'angolo in basso a sinistra) è considerato neutro e partecipa passivamente al conteggio. Dei restanti, per comodità individuati dai colori fondamentali RGB, si osserva se il numero di pedine contenuto sia pari o dispari.

Qualora le tre parità coincidano il risultato è la sedicina neutra; se non vi è coincidenza si sceglie quella discorde dalle due restanti. La casella bersaglio si trova all'intersezione, unica, dei tre gruppi risultanti.

Il primo visir, come nella versione semplificata del metodo precedente, deve invertire le parità dei sottogruppi contenenti la casella scelta dal sovrano.

Dalla parte del sovrano

Non si era detto che il gioco risulta equo? Qui vincono sempre i soliti intrallazzatori! Beh! A prescindere dalle dimostrazioni, che sono ancora da fare, si è sottinteso qualcosa che non è affatto certo.

A cosa serve la scacchiera? Il metodo funzionerebbe ancora se le caselle fossero 64 sottobicchieri disposti a casaccio? Sì, se i sottobicchieri riportassero diverse pubblicità di birre – no, se non si riesce, in qualche modo, a distinguerli! Occorre numerarli da 0 a 63; poi funziona tutto.

Nella scacchiera il sotto è diverso dal sopra e le caselle scure da quelle chiare, ma è arduo capire se è stata ruotata di 180°.

Le venature del legno usato negli esempi permettono di distinguere un angolo dall'opposto.

Il sovrano gioca, però, con un'intonsa scacchiera in platino e attilio (© RM139), che poi regala all'avversario... Farci un segno non è difficile… ma così si bara, rischiando, assieme al turbante, anche il suo sostegno.

Cosa succede se il secondo visir sceglie, come base, il vertice opposto a quello usato dal primo? Se le pedine sono dispari ritrova il risultato esatto, altrimenti indicherà una casella diversa da quella designata.

Supponiamo, ad esempio, che il sovrano disponga due pedine nei vertici chiari, una terza in uno scuro ed indichi la casella del quarto vertice. Il primo visir si vedrà costretto a presentare al secondo una scacchiera priva di qualsiasi informazione in merito alla sua, possibile, rotazione di 180° e questi saprà solo che la casella scelta si trova in uno dei vertici scuri. Il magnanimo sovrano può anche, ruotando la scacchiera di ±90°, segnalare quest'eventualità.

Dimostrazioni

L'operatore booleano binario *xor* primeggia per equità e democrazia. Non mostra preferenze fra lato destro e sinistro, è associativo, lo 0 funge da elemento neutro ed ogni elemento coincide con il proprio inverso.

Le proprietà relative al singolo bit si estendono all'intero numero scritto in notazione binaria.

Sia s lo *xor* fra i numeri delle colonne che contengono quantità dispari di pedine, v la colonna della casella scelta dal visir, $\boldsymbol{x}$ la colonna della casella modificata dal primo visir.

Xor	0	1
0	0	1
1	1	0

$$s \; xor \; v = x \quad \rightarrow \quad s \; xor \; s \; xor \; v = s \; xor \; x \quad \rightarrow \quad 0 \; xor \; v = s \; xor \; x \quad \rightarrow \quad v = s \; xor \; x$$

Cambiare il contenuto di una casella produce l'inversione della parità dei sottoinsiemi che la contengono, lo xor complessivo s', eseguito dopo il cambiamento, sarà uguale al precedente s xor x.

Il secondo visir non conosce né s né x, ma la manipolazione del primo gli consente, calcolando s', di ottenere v. Analogamente per le righe o i quadranti.

L'unica condizione per l'applicazione del metodo è che il numero di colonne/righe/quadranti presenti sia una potenza di 2 con esponente appartenente ai naturali: questo assicura che ogni possibile risultato appartenga all'insieme dei valori disponibili.

A patto che l'esponente sia almeno 2, d, lo xor delle etichette delle linee a contenuto dispari, e p, quello delle restanti, sono uguali. Lo xor esteso all'intero insieme delle scritture binarie dei numeri da 0 a $2^n - 1$ vale 0 (in ogni posizione il numero di 1 è uguale a $2^n/2$, che è pari), e perciò

$$d \; xor \; p = 0 \quad \rightarrow \quad p = d \; xor \, 0 = d \, .$$

Anche il metodo cromatico è immediata conseguenza di questa proprietà: quando i numeri sono esattamente 4, ognuno di quelli diversi dallo 0 e lo xor degli altri due.

Scambiare il vertice di base vuol dire invertire il verso della numerazione: ad ogni linea viene attribuito il numero $m^*= t - m$, dove $t = 2^n - 1$ ed m è l'etichetta assegnata nell'altro verso.

La scrittura binaria di t non contiene zeri, è una stringa di 1 consecutivi lunga n, perciò sarà anche $m^*= t - m = t$ xor m.

Ricordando che lo xor di più operandi uguali a t vale 0 oppure t, a seconda che questi siano in numero pari oppure dispari; possiamo distinguere due casi.

Se il numero di pedine è dispari; sarà, allora, pure dispari il numero di linee che ne contengono una quantità dispari. Il loro xor, che indichiamo con s, differirà per un numero dispari di operandi t da s^*, quello con base scambiata. Avremo, perciò, $s^*= t$ *xor* $s = t - s$ e verrà individuata la medesima casella.

Quando, invece, il numero di pedine è pari, con ragionamento analogo, otteniamo $s^*= 0$ *xor* $s = s$. Cambiando il vertice iniziale, questa volta, risulteranno caselle diverse, poste in posizioni simmetriche.

I visir possono cercare di ingarbugliare la situazione optando per numerazioni meno ordinate e stabilendo, ad esempio, di privilegiare quel vertice che abbia una maggior numero di pedine in un suo intorno prefissato. Se il sovrano conosce la strategia potrà sempre trovare opportune contromosse, altrimenti la sua sconfitta sarà più probabile, ma non diventerà mai certa.

Quisquilie & pinzillacchere

Le disposizioni delle pedine negli esempi non è casuale. Cosa nascondono?

Aiutino di prammatica: le quattro figure (disegnate con GeoGebra) necessiterebbero di un'ulteriore pedina, posta immediatamente sotto alla prima colonna oppure a destra dell'ultima riga.

Rudy, nel porre il problema, esclude la possibilità di una scacchiera priva di pedine o con tutte le caselle occupate.

Se questa limitazione vale unicamente per la posizione iniziale, poco male! Elimina due possibilità; non capisco perché lo faccia, ma può essere un semplice distrattore.

Qualora riguardi, invece, anche la situazione successiva alla mossa del primo visir, rende il problema, in certe configurazioni, impossibile. Boh!

Finito qui? Se avete ancora qualcosa da dire non esitate! Noi siamo sempre qui. Però, visto che il Capo mi ha mandato la sua soluzione, ve la faccio sbirciare:

L'accordo tra i due Visir potrebbe essere una cosa del genere: teniamo i casi particolari tra parentesi quadre.

Assegniamo ad ogni cella un numero, tra 0 e 63; sia X il numero della cella scelta dal sultano.

Il primo Visir somma i valori delle celle che hanno una pedina e sottrae dal risultato il numero delle celle che non hanno una pedina: il risultato sarà un numero pari [se il risultato è negativo, sommerà 128 sin quando il valore sarà positivo]; prendiamo comunque il numero modulo 128, dividiamolo per 2 (essendo pari non dà resto) e chiamiamolo Y.

Aggiungendo (o togliendo) una pedina, il primo Visir può cambiare il valore di Y, facendolo diventare X [se X è maggiore di Y, si aumenti Y di 64]. Sottraendo X da Y (il primo Visir li conosce entrambi) avrà il numero della casella su cui agire, e metterà una pedina se questa è vuota, la toglierà se questa è piena.

Il secondo Visir, guardando la scacchiera, potrà calcolare il nuovo valore di Y e identificare la casella scelta dal Sultano.

> ...e i loro cappelli vissero a lungo felici e contenti.

Come detto, aspetto critiche…

4.2 [140]

4.2.1 Zugzwang!

Vergogna, vergogna! Il Capo ha finalmente capito che i suoi giochi li legge solo ***Cid***: il Nostro ha infatti identificato un errore nella figura:

> Nel testo si parla di 50 pedine, ma nella tabella ne sono indicate soltanto 45. Perché???

Ed il Capo:

> Mi sono mangiato quelle Verdi-Blu (penultima riga). Di seguito, la tabella corretta:

Rosso/Verde	10
Rosso/Rosso	5
Rosso/Nero	5
Rosso/Blu	5
Rosso/Giallo	5
Verde/Verde	5
Verde/Nero	5
Verde/Blu	5
Verde/Giallo	5

Il solito, il Capo: anche quando si sbaglia, è per vedere se eravate attenti...

4.2.2 IMHO, hanno ragione ad arrabbiarsi

Il primo problema del mese scorso ha avuto un successo enorme, saranno stati i canguri, o Fibonacci, o la crudeltà dell'idea di paracadutarli... ma, per prima cosa devo ricordarvi il testo:

> *Prendete il deserto australiano, piantate una serie di cartelli a partire da un punto dato verso Sidney; tutti i cartelli, all'inizio, puntano verso Sidney e, se indichiamo con* 1 *il primo cartello mettete nelle posizioni* 0 *e* –1 *due reti acchiappacanguriarrabbiati (a.c.a.) a capacità infinita. Poi, riempite un aereo di canguri paracadutisti e svolazzate da quelle parti, scaricando un canguro sul punto* 1*. Il primo canguro, atterrando davanti al cartello* 1 *che indica Sidney, per prima cosa gli tira un pugno che lo gira di centottanta gradi, poi gli dà retta (ora indica dall'altra parte, verso le posizioni negative) e salta di due posti nella direzione indicata da cartello, finendo nella rete a.c.a. piazzata in* –1.
>
> *Ora, lanciate il secondo canguro, sempre sulla posizione* 1*. Questo arriva, vede il cartello che indica verso le reti, tira un pugnaccio al cartello (che quindi indica di nuovo verso Sidney) e gli dà retta, saltando di un posto nella direzione indicata dal cartello, e finendo davanti al cartello* 2*; questo indica Sidney, ma provvediamo subito: un pugnattone, indica dall'altra parte, il canguro gli dà retta, salta di due posti nella direzione indicata e si ritrova nella rete a.c.a. in* 0*. Insomma, i nostri incavolati marsupiali arrivano, tirano pugno, guardano cartello e saltano di due se indica "indietro", di uno se indica "avanti". Notate che scarichiamo solo un canguro per volta.*

> *Siamo sicuri che non ci sia il rischio di un canguro che saltella infinitamente in un intervallo di cartelli? Le reti a.c.a. hanno capacità infinita: stimate quanti canguri conterranno: tutte e due uguale, o una di più e una di meno e, nel caso, quale percentuale rispetto all'altra?*

Soluzioni a bizzeffe. ***Andrea***, ***Alberto***, ***Cesare***, ***Cid***, ***Millennium Bug***, ***Franco57***, ***Gnugnu***, ***Marco***... abbiamo solo l'imbarazzo della scelta, ma possiamo permetterci una sola soluzione, data la mole di questo numero... e così prima di passarvela estrarremo delle chicche qua e là tra le soluzioni. Per esempio beccatevi questi pezzi di frasi di ***Gnugnu***:

> Ci troviamo di fronte un succulento babà napoletano grondante distillato di Fibonacci. (...)
>
> Corbezzolini giuggiolosi! I canguri paracadutisti, a pugni e salti, operano esattamente in questo modo. Siamo certi che agiscano così solo per dar sfogo alla loro rabbia?
>
> L'etologo canadese Sebastian Contraire critica severamente l'ordinario approccio degli umani allo studio dei comportamenti animali; lo ritiene viziato da presuntuosi preconcetti di superiorità e suggerisce di considerare sempre gli altri viventi come esseri alieni giunti sulla terra alla guida di un'astronave. In quest'ottica è possibile che i canguri abbiano sviluppato un sistema di numerazione posizionale e si servano dei cartelli come un comodo abaco per contare il numero di atterraggi. L'uso dell'inconsueta base potrebbe, forse, derivare dall'eccezionale proliferazione dei conigli importati in Australia, specie antagonista agli erbivori autoctoni.
>
> Ad avvalorare l'ipotesi che i paracadutisti non siano affatto incolleriti, ma stiano contando, giocando e… prendendosi gioco dei loro osservatori, troviamo, da un lato lo sviluppo degli arti posteriori, ben più idonei di quelli umani per assorbire l'impatto con il suolo, dall'altro la perseveranza con cui cadono nelle reti: essere catturati è condizione indispensabile per partecipare a futuri lanci. Altri indizi paiono evidenziare la propensione al gioco, preferibilmente matematico: se la notazione utilizzata è legata al nim di Fibonacci, la scelta della rete è collegata a quello di Wythoff.

Irripetibile... tra l'altro nella sua soluzione consiglia la lettura dei post di ***.mau.*** sull'argomento, e noi ovviamente ci aggreghiamo e vi passiamo il link: http://xmau.com/notiziole/arch/201004/006506.html. Simpaticissimo ***Alberto*** (IMHO = In My Humble Opinion, un modo del Capo per darsi importanza, visto che lui umile non lo è per niente) che ci scrive:

> Bravi voi che con la *soluzione* avete solo "qualche problema". Io non vedo il minimo spiraglio di luce.
>
> Però anch'io ho la *risposta*: al crescere del numero dei lanci, il rapporto tra il numero di canguri che finiscono nella prima rete e quello dei canguri che finiscono nella seconda tende al rapporto aureo [rad(5)-1]/2 . Dopo mille lanci i due rapporti coincidono per 3 cifre decimali e per ben 7 cifre dopo un milione di lanci.
>
> Questa curiosa notizia me l'ha fornita il mio computer che, sarà pure stupido, ma se interpellato con la dovuta grazia, si appalesa testimone accurato e sincero. (Ciò non toglie che anche lui possa, in buona fede, sbagliarsi, soprattutto nei paraggi dell'infinito, infatti crede che 10^307 sia il più grande numero esistente! Ho cercato di convincerlo che non è vero, ma non ci sono riuscito).
>
> Lo stesso computer mi dichiara sotto giuramento che:
>
> - Tutti i canguri prima o poi finiscono in rete. Cioè nessuno incapperà in un loop infinito;

- L'andamento non presenta cicli, cioè la situazione dei cartelli (direzione Sidney o direzione opposta) dopo l'ennesimo lancio é diversa da quella risultante dopo qualunque lancio precedente;

- Mediamente la distanza percorsa dall'ennesimo canguro prima di finire in rete cresce con n in modo meno che lineare, ma la crescita non è asintotica.

Ed ancora la soluzione di ***Andrea***, che supera le 4 pagine, ma che presenta un approccio interessante (del resto tentato anche da altri):

Innanzi tutto consideriamo tutti i cartelli iniziali rivolti verso Sidney come cartelli in "stato 0". Quando arriva il primo canguro ruota il primo cartello che diventa di "stato 1" e poi va a finire nella rete in -1. A questo punto possiamo studiare i vari stati dei cartelli come numeri scritti in base 2. I primi canguri quindi produrranno la serie di numeri 000000000 = 0, 000000001 = 1, 000000010 = 2, 000000011 = 3, 000000101 = 5, 000000110 = 6, 000000111 = 7, 000001010 = 10, 000001011 = 11, 000001101 = 13, 000001110 = 14, 000001111 = 15... e così via, dove gli 1 e gli 0 sono gli stati dei cartelli come descritti prima. La prima cosa da notare è che in questa maniera i canguri otterranno solo alcuni numeri, in particolare nei numeri così trovati non ci saranno mai 2 zeri consecutivi a parte lo stato iniziale in cui il numero è 0. Questo fatto si può facilmente dimostrare per assurdo, in particolare ho ragionato nel modo che segue:

Supponiamo che ci siano 2 zeri consecutivi in un numero della serie e che questi 2 zeri siano compresi tra la prima cifra 1 a sinistra e l'ultima cifra a destra del numero in notazione binaria in questione (il numero è quindi 1...00... dove non conosciamo le cifre a destra e a sinistra dei 2 zeri dati a parte l'1 che è la prima cifra a sinistra del numero). La cifra immediatamente a sinistra dei 2 zeri può essere o un 1 o uno 0. Se fosse un 1 allora significa che il canguro sarebbe dovuto tornare 2 cartelli indietro rendendo il primo 0 un 1, cosa che è assurda perché noi sappiamo che le cifre consecutive che stiamo considerando sono entrambe 0. La cifra immediatamente a sinistra dei 2 zeri deve quindi essere uno zero, e reiterando lo stesso ragionamento abbiamo che le cifre a sinistra dei 2 zeri in questione possono essere solo degli zeri. Ma per ipotesi avevamo scelto degli zeri consecutivi tali che alla loro sinistra prima o poi si potesse trovare un 1, cosa che invece non accade. Quindi non ci possono essere due zeri consecutivi in nessun numero creato dai canguri. Le cifre a destra dei 2 zeri dati non hanno influenza sui due zeri stessi a meno di non formare un ulteriore gruppo di 2 o più zeri. Se così fosse allora arriveremo all'assurdità di prima.

Ora le richieste del problema si possono riformulare in questo modo:

- Quanti numeri dispari in relazione ai numeri pari si formano seguendo questo tipo di criterio per la formazione di questi numeri?

- La serie di numeri creata continua all'infinito o si interrompe in qualche punto?.

Complimenti ad ***Andrea***, e lasciamo la parola a ***Franco57***:

Ogni volta che paracaduto un canguro, fintanto che questo trova cartelli sbagliati (diciamo verso Ayers Rock), compreso il caso che non ne trovi alcuno, li corregge uno dopo l'altro rivoltandoli, fino a che non giunge al primo cartello giusto n che indica Sidney e lo incontra sicuramente perché sono infiniti. Lo rivolta e torna indietro a balzi di 2 rivoltando una seconda volta verso Ayers Rock i cartelli già visitati e con la stessa parità di n . Infine termina nella rete a.c.a. con la parità di n.

Per inciso, anche se non lo utilizzo per la soluzione, ogni canguro è una macchina di Turing a 2 stati ("arrivato davanti a un cartello" e "in fase di salto doppio") che calcola il successivo di un numero binario (0 = verso Sidney, 1 = verso Ayers Rock) che non contenga due 0 consecutivi dopo il primo 1 più significativo. Esempio (il riquadro indica la testina-canguro):

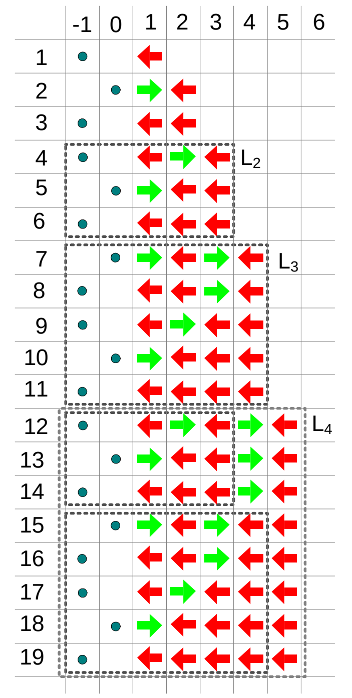
$10111\boxed{1}$ ⇨ $1011\boxed{1}0$ ⇨ $101\boxed{1}00$ ⇨ $10\boxed{1}000$ ⇨ $1\boxed{0}0000$ ⇨ $110\boxed{0}00$ ⇨ $11010\boxed{0}$ ⇨ 110101 ⇨ stop/a.c.a.-1

La soluzione ha a che vedere con i numeri di Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per $n > 1$.

Infatti, dividendo i canguri secondo l'ordine di lancio in lotti contigui L_n inizianti per la successione crescente $F_{n+3} - 1 = 1,2,4,7,12,\ldots$, per $n \geq 0$, si può dimostrare per induzione su n che:

i canguri del lotto L_n che finiscono nella rete rete a.c.a. 0 (aca0) sono F_n e quelli che finiscono nella rete a.c.a. -1 (aca1) sono F_{n+1};

il lotto L_n termina con primi $n+1$ cartelli verso Ayers Rock e tutti gli altri, mai colpiti, verso Sidney.



9 *La figura di* ***Franco57***.

L'idea è illustrata dalla figura a fianco, dove ho riportato le situazioni lasciate dai primi canguri.

In orizzontale c'è la numerazione dei cartelli; in verticale quella dei canguri al termine della propria performance; in verde i cartelli giusti verso Sidney, che suppongo a destra; in rosso i cartelli sbagliati vero Ayers Rock. Ho volutamente omesso i cartelli non ancora ammaccati dai pugni, perché hanno un ruolo nella dimostrazione.

I cerchietti indicano in quale rete a.c.a. il canguro riamane intrappolato.

Si nota che certe configurazioni si ripetono a lotti. Ogni lotto inizia subito dopo il precedente e termina con $n+1$ cartelli verso Ayers Rock e gli altri non ancora ammaccati.

Ho segnato alcuni lotti con linea tratteggiata. L'unione di due lotti consecutivi, con qualche aggiunta di cartelli in fondo, dà il lotto successivo e nei lotti sono compresi gli intrappolamenti. Ecco perché vengono fuori i numeri di Fibonacci.

Veniamo alla dimostrazione.

Caso $n = 0$.

Il lotto è costituito dal solo canguro 1. a) Nessun canguro, $0 = F_0$, viene lasciato in aca0 ed $1 = F_1$ in aca1. b) Verificata la figura, è immediata.

Caso $n = 1$.

Il lotto è costituito dai canguri 2 e 3. a) Un canguro, $1 = F_1$, finisce in aca0 ed uno, $1 = F_2$, in aca1. b) Verificata la figura, è immediata.

Caso $n > 1$.

La dimensione di L_n è pari a $(F_{n+4} - 1) - (F_{n+3} - 1) = F_{n+2}$ quindi la somma delle dimensioni di due lotti consecutivi dà quella del lotto successivo.

Per l'ipotesi induttiva b) per L_{n-1}, L_n inizia con n cartelli verso Ayers Rock e gli altri mai toccati verso Sidney. Per i primi $n-2$ cartelli questa è la stessa situazione che si presenta all'inizio di L_{n-2} (es. L_4 vs L_3 in fig.).

Visto che n e $n-2$ hanno la stessa parità entrambi i canguri di inizio lotto L_n e L_{n-2} produrranno lo stesso effetto sui primi $n-1$ cartelli e saranno catturati nella stessa rete a.c.a..

Il canguro $F_{n+3}-1$ di inizio lotto L_n avrà inoltre variato il cartello $n+1$ verso Ayers Rock ed il cartello n verso Sidney.

Poiché F_n è la dimensione di L_{n-2}, l'ipotesi induttiva b) per L_{n-2} ci dice che per i successivi F_n-1 canguri di L_n si agisce solo sui primi $n-1$ cartelli e dunque le catture sono le stesse di L_{n-2}. In definitiva dei primi F_n canguri di L_n ne catturiamo, come per L_{n-2}, F_{n-2} in aca0 e F_{n-1} in aca1.

La situazione dei cartelli per L_n adesso è la stessa di inizio lotto L_{n-1}: $n-1$ verso Ayers Rock, garantiti dall'ipotesi induttiva b) per L_{n-2}, e lo n esimo verso Sidney (in L_{n-1} perché mai toccato e in L_n perché è rimasto tale da quando è stato variato dal primo canguro del lotto). Quindi i prossimi F_{n+1} canguri catturati in L_n saranno, come per L_{n-1}, F_{n-1} in aca0 e F_n in aca1.

Abbiamo esaurito il lotto n [16] catturando in totale $F_{n-2}+F_{n-1}=F_n$ canguri in aca0 e $F_{n-1}+F_n=F_{n+1}$ in aca1. La a) è quindi verificata.

Anche la b) è verificata perché, in accordo alla b) per L_{n-1}, i primi n cartelli puntano ad Ayers Rock e lo $n+1$ esimo, girato verso Ayers Rock dal primo canguro del lotto, non è stato più toccato. I successivi cartelli, come abbiamo visto, non sono mai stati toccati da nessun canguro.

In conclusione il numero di catture in aca1 rispetto a quello in aca0 tende al rapporto aureo.

E qui ci dobbiamo fermare, che se no non finiamo più. Ma non prima di avervi passato la ciliegina sulla torta, la soluzione di ***Cesare*** detto anche ***Caronte*** e altro... Per le solite ragioni di margini ridotti e difficoltà di compattazione, l'ho salvata sul nostro sito e vi passo il link: http://www.rudimathematici.com/Bookshelf/cangurifin.pdf. Non perdetela.

4.2.3 Satollare il cefalopode teutonico

Io abito in Svizzera, e guardo poca televisione. Così ci ho messo ancora una volta un sacco di tempo a capire di cosa diavolo parlava il Capo proponendo il problema...

Avete organizzato, a difesa del PolpoPaul, una vasca dotata di fossato nella quale nuotano dei piraña. La struttura ha la forma di una vasca rettangolare con intorno un fossato che ha (sui lati) larghezza costante. Vi hanno incaricato di progettare la vasca, e sarete voi a nutrire Paul. Dovete stabilire quanto debba essere ampio il fossato:

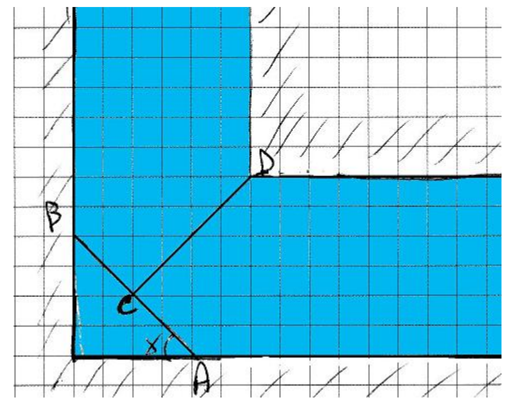
1. *avete a disposizione due assi da 10 metri per arrivare alla vasca centrale: Paul è innocuo, ma i piraña proprio no. Quanto fate largo il fossato?*

[16] e forse un eventuale lettore che abbia seguito tutti i passaggi...

2. *avete a disposizione tre assi da 10 metri, per lo stesso scopo: stessa domanda.*
3. *avete a disposizione un numero n di assi da 10 metri, solita solfa.*

Probabilmente nessuno voleva salvare il polpo, perché ci sono arrivate solo le soluzioni di ***Millennium Bug*** e ***Cid***... Ma a noi fa già piacere riportare queste, cominciando dal nostro caro ***Cid*** a cui facciamo tanti auguri di guarire presto:

Nel caso si abbiano a disposizione due assi da 10 metri, la disposizione delle assi che permette di massimizzare l'ampiezza del fossato è quella rappresentata nella figura, in cui l'angolo x misura 45° e l'asse CD è perpendicolare all'asse AB.



10 *Figura I di **Cid**.*

Se ad un asse basta sfiorare il fossato per garantire la stabilità durante l'attraversamento, abbiamo che la diagonale che va da D allo spigolo esterno del fossato misura: $(10+5)=15$ metri. Quindi la larghezza massima del fossato è: $\frac{15}{\sqrt{2}} = 10{,}606\,6$ metri.

In realtà, occorre tener conto che una parte dei due estremi degli assi devono essere utilizzati come appoggi per garantire la stabilità (onde evitare di cadere in acqua), per cui il fossato sarà ampio non più di 10 metri e 60 centimetri.

A questo risultato si può giungere considerando che la distanza in orizzontale del fossato misura in decametri: $(1-AC)*\cos(x)+sen(x)$, mentre la distanza in verticale del fossato misura in decametri: $AC*sen(x)+\cos(x)$.

Siccome l'ampiezza del fossato è costante, uguaglio i due valori:

$$(1-AC)*\cos(x)+sen(x)=AC*sen(x)+\cos(x)$$

$$\cos(x)-AC*\cos(x)+sen(x)=AC*sen(x)+\cos(x)$$

$$sen(x)=AC*sen(x)+AC*\cos(x)$$

$$AC=\frac{sen(x)}{sen(x)+\cos(x)}$$

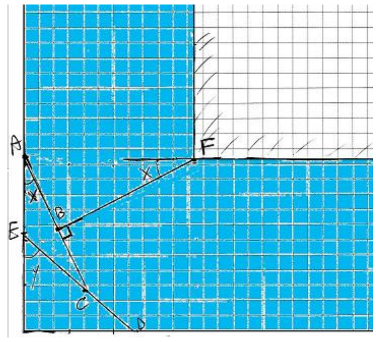
L'ampiezza del fossato misura quindi:

$$AC*sen(x)+\cos(x)=\frac{sen^2(x)+sen(x)\cos(x)+\cos^2(x)}{sen(x)+\cos(x)},$$

cioè: $\frac{1+sen(x)\cos(x)}{sen(x)+\cos(x)}$ decametri.

Facendo la derivata ed uguagliandola a zero, si trova il valore di $\boldsymbol{x}$ che rende massima l'ampiezza del fossato; che risulta essere uguale a $x=45°$, in corrispondenza di tale valore di x, si ottiene l'ampiezza di $\frac{15}{\sqrt{2}}=10{,}606$ metri.

Nel caso si abbiano a disposizione tre assi da 10 metri, la disposizione delle assi che permette di massimizzare l'ampiezza del fossato è quella rappresentata nella seconda figura.



11 *Figura II di* ***Cid***.

Per determinare i valori di x e di y che permettono di rendere massima l'ampiezza del fossato, faccio le seguenti considerazioni:

- l'asse AC dovrà essere perpendicolare all'asse BF
- l'angolo x formato dall'asse AC con la sponda verticale esterna sarà uguale all'angolo formato dall'asse BF con la retta parallela alla sponda orizzontale (questi due angoli sono uguali tra loro essendo AC perpendicolare a BF)
- come conseguenza della considerazione precedente, si ha che la misura in decametri della proiezione di BF sull'asse orizzontale vale $\cos(x)$ e la misura in decametri della proiezione di BF sull'asse verticale vale $sen(x)$
- la distanza in decametri tra la sponda verticale e il punto F vale quindi: $\cos(x)+AB*sen(x)$
- la distanza in decametri tra la sponda orizzontale e il punto F vale quindi: $sen(x)+BC*\cos(x)+CD*\cos(y)$

Ora, siccome l'ampiezza del fossato è costante, deve essere:

$$\cos(x)+AB*sen(x)=sen(x)+BC*\cos(x)+CD*\cos(y)$$

Tenendo conto che: $BC=AC-AB$ e che AC è uguale a 1 (in decametri), ottengo:

$$\cos(x)+AB*sen(x)=sen(x)+(1-AB)*\cos(x)+CD*\cos(y)$$

$$\cos(x)+AB*sen(x)=sen(x)+\cos(x)-AB*\cos(x)+CD*\cos(y)$$

$$AB*sen(x)=sen(x)-AB*\cos(x)+CD*\cos(y)$$

$$AB*sen(x)+AB*\cos(x)=sen(x)+CD*\cos(y)$$

$$AB=\frac{sen(x)+CD*\cos(y)}{sen(x)+\cos(x)}$$

Ora tenendo conto che anche ED vale 1 (in decametri), abbiamo: $CD=1-EC$, e siccome: $EC*sen(y)=AC*sen(x)=sen(x)$ si ha: $CD=1-\frac{sen(x)}{sen(y)}$.

Quindi: $AB=\dfrac{sen(x)+\cos(y)-\dfrac{sen(x)*\cos(y)}{sen(y)}}{sen(x)+\cos(x)}$.

L'ampiezza del fossato vale quindi:

$$Ampiezza = \cos(x) + AB * sen(x) = \cos(x) + \frac{sen(x) + \cos(y) - \frac{sen(x) * \cos(y)}{sen(y)}}{sen(x) + \cos(x)} * sen(x)$$

$$Ampiezza = \cos(x) + \frac{sen^2(x) + sen(x) * \cos(y) - \frac{sen^2(x) * \cos(y)}{sen(y)}}{sen(x) + \cos(x)}$$

Calcolare i valori esatti di x e di y che rendono massima questa ampiezza è impegnativo; se però si tiene conto del fatto che non viene richiesta l'ampiezza massima, ma la più grande ampiezza che permetta di attraversare il fossato senza rischi, si può considerare che qualche millimetro di appoggio dovranno averlo le assi per non cadere nel fossato. Quindi è sufficiente trovare un valore del punto di massimo approssimato al centimetro.

Per trovare il valore approssimato procedo cosi:

Prendo la funzione: $$\cos(x) + \frac{sen^2(x) + sen(x) * \cos(y) - \frac{sen^2(x) * \cos(y)}{sen(y)}}{sen(x) + \cos(x)}$$

e faccio una tabella dei valori di questa funzione al variare di x e di y. Trovato il valore massimo, ripeto il procedimento costruendo una tabella nei dintorni di quel punto, con variazioni degli angoli più piccole rispetto a prima. Itero il procedimento, con variazioni degli angoli sempre più piccole, fino ad ottenere un valore dell'ampiezza approssimato sufficientemente. I valori che ho trovato sono i seguenti:

x = 0,458544 radianti

y = 0,866566 radianti

Da cui deriva un'ampiezza del fossato di 11,32684887792 metri, che può essere fissata a 11 metri e 32 centimetri (tenendo conto che almeno tre millimetri per lato mi servono come base di appoggio per i tre assi).

Anche ***Millennium Bug*** è arrivato alle stesse conclusioni:

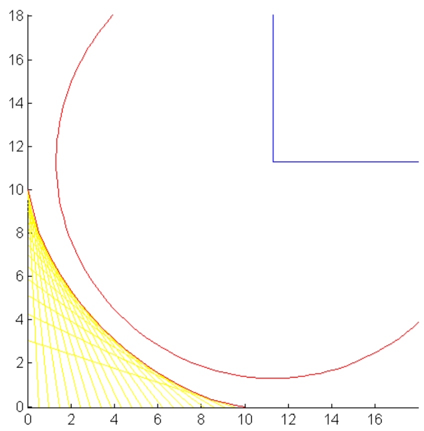
Evidentemente con 2 o 3 assi da 10m la larghezza massima del fossato è rispettivamente 20m e 30m, o poco meno. Però, siccome ho ragione di credere che i 3 redattori di RM non siano stati abbastanza furbi da usare chiodi e martello per collegare insieme le assi, suppongo abbiano elaborato una soluzione in cui potevano semplicemente appoggiare le assi ai bordi della vasca.

Con due assi la soluzione ottimale per mettere in salvo il cefalopode e consentirci altresì di foraggiarlo, prevede di sistemare uno degli assi in diagonale a 45° su uno degli angoli esterni; il secondo asse farà da ponte tra il centro del primo asse e l'angolo interno della vasca.

Ho fatto un rozzo disegnino[17]… Supponendo assi e vasche ideali, appoggi puntiformi, etc., con due rapidi calcoli trovo che il fossato può essere largo fino a $15\frac{\sqrt{2}}{2}$ m ovvero circa 10.6m.

[17] Disegno che è identico al primo di ***Cid***, quindi non inseriamo, in cui l'asse 1 è CD e l'asse 2 è AB. Qui ***Millennium Bug*** si raccomanda: "vi faccio notare che è meglio non seguire la mia numerazione delle assi nel

Ho provato ad analizzare gli angoli dei due assi per vedere se effettivamente questo è il caso ottimale.



12 *Figura di* ***Millennium Bug***.

Facendo riferimento alla figura, la circonferenza rossa rappresenta i punti che posso raggiungere con l'asse 1 piazzato sull'angolo interno della vasca (linee blu). Le linee gialle sono invece le possibili posizioni dell'asse 2.

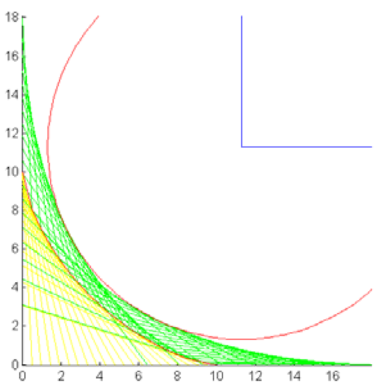
Con mezza pagina di calcoli abbastanza noiosi, ho ricavato che l'inviluppo (curva rossa) è espresso dall'equazione

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 10^{2/3}$$

In figura non ho indicato gli assi (cartesiani questi, non quelli di legno…) ma dovrebbe essere chiaro. A questo punto, cerco la larghezza L del fossato per cui ho l'intersezione con la circonferenza determinata dall'asse 1: $(x-L)^2 + (y-L)^2 = 10^2$.

Non lo faccio: vado sulla fiducia. Verificate voi che si ritrova il valore di L scritto sopra quando le due curve sono tangenti.

Nel caso di 3 assi il gioco si complica, ma posso risolvere in via grafica basandomi sul risultato precedente. Traccio ancora l'inviluppo di prima che rappresenta tutti i punti di appoggio che posso creare usando l'asse 2. Per ognuno di questi punti traccio (linee verdi) i due possibili posizionamenti dell'asse 3, sul bordo verticale e orizzontale.



13 *Altra figura di* ***Millennium Bug***.

Non mi sono nemmeno azzardato a cercare un'espressione analitica di quest'altro inviluppo, però in teoria si procede come prima cercando il massimo L per cui riesco a intersecare la circonferenza data dall'asse 1.

Graficamente (dovete ingrandire parecchio la figura) vedo che ora il punto di contatto non è più il centrale a 45° ma ho due soluzioni simmetriche. Per via numerica ho trovato che dovrebbe essere circa L=11.3.

Il discorso si estende facilmente (a parole) per casi in cui ho a disposizione un numero maggiore di assi. Posiziono gli estremi dell'asse successivo uno sul bordo e uno sull'inviluppo dei precedenti e cerco di avvicinarmi il più possibile al cerchio.

Comunque resto dell'idea che è più facile con chiodi e martello….

posizionamento, per evitare di fare un bagno in mezzo agli allegri terzini; posizionate l'asse 2 e solo in seguito il n.1"

Io, Alice, sono più che d'accordo. Ma sono arrivata al fondo di questa lunghissima rubrica e vi rimando solo più al mese prossimo. Buon lavoro!

5. Quick & Dirty

Il numero $123456789ABCDE_{15}$ è divisibile per 7?

6. Pagina 46

Il numero delle cifre nel periodo delle frazioni $\frac{a_n}{p^n}$ e $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ sono uguali ai minimi interi positivi k e l ,rispettivamente tali che $10^k - 1$ sia divisibile per p^n e $10^l - 1$ sia divisibile[18] per p^{n+1}. Consideriamo ora la differenza:

$$(10^l - 1) - (10^k - 1) = 10^k (10^{l-k} - 1).$$

Dato che questa differenza è divisibile per p^n, $10^{l-k} - 1$ deve essere divisibile per p^n.

Mostreremo ora che p^d, dove d è il Massimo Comun Divisore di $l - k$ e k, è anch'esso divisibile per p^n.

Se definiamo $l - k = qk + r$, possiamo scrivere:

$$10^{l-k} - 1 = 10^{qk+r} - 1 = 10^r (10^{qk} - 1) + (10^r - 1).$$

Ma $10^{qk} - 1 = (10^k)^q - 1^q$ è divisibile per $10^k - 1$, e quindi per p^n, da cui $10^r - 1$ è divisibile per p^n. Nello stesso modo si può dimostrare che $10^{r_1} - 1$ (dove r_1 è il resto della divisione di k per r) è divisibile per p^n, che $10^{r_2} - 1$ (dove r_2 è il resto della divisione di k per r_1) è divisibile per p^n, che $10^{r_3} - 1$ (dove r_3 è il resto della divisione di k per r_2) è divisibile per p^n, e avanti in questo modo.

Si dimostra facilmente quindi che la sequenza di interi positivi $r, r_1, r_2, \ldots$ deve includere il numero d; siccome sia $l - k$ e k sono divisibili per d, deve essere $r = (l - k) - qk$; siccome sia k che r sono divisibili per d, deve esserlo anche r_1; siccome sia r che r_1 sono divisibili per d deve esserlo anche r_2, e così via.

Conseguentemente, tutti i numeri (resti) della sequenza che abbiamo formato sono divisibili per d; inoltre, questa sequenza è strettamente decrescente e quindi deve terminare con zero. Se l'ultimo resto diverso da zero è r_k, allora r_{k-1} è divisibile per r_k (in quanto il prossimo resto e ulteriore termine della successione sarà zero); r_{k-2} sarà divisibile per r_k (in quanto sia r_{k-1} e r_k sono divisibili per r_k), e così via. Infine, anche k e $l - k$ risulteranno divisibili per r_k. La diseguaglianza $r_k > d$ contraddice allora il fatto che d è il massimo comun divisore di $l - k$ e k, quindi deve essere $r_k = d$ (siccome d divide $r_k \neq 0$, $r_k < d$ è impossibile).

[18] Si veda BJ&P46_123.

Ricordiamo che *k* è stato definito come il minimo intero per cui $10^k - 1$ è divisibile per p^n; quindi, essendo anche $10^d - 1$ divisibile per p^n, segue che $d = k$ e $l - k$ è un multiplo di *k*, ossia che è $l = kr$.

Possiamo espandere $10^l - 1$ come:

$$10^l - 1 = 10^{kr} - 1 = \left(10^k - 1\right)\left[10^{(r-1)k} + 10^{(r-2)k} + \ldots + 10^k + 1\right].$$

Siccome $10^k - 1$ è divisibile per p^n, 10^k dà resto ***1*** quando viene diviso per p^n, segue che $10^{2k}, 10^{3k}, \ldots$ danno tutti resto ***1*** se divisi per p^n; quindi ogni termine della somma entro parentesi quadre della formula qui sopra dà resto ***1*** quando viene diviso per p^n, e quindi il resto della divisione dell'intera somma deve essere *r*. Da questo segue che 10^{k+1} non è divisibile per p^{n+1}, e quindi il valore minimo di *l* per cui $10^l - 1$ è divisibile per p^{n+1} è *pk*, e quindi $10^{pk} - 1$ è divisibile per p^{n+1} ma non lo è per p^{n+2}, in quanto l'espressione tra parentesi non è divisibile per p^2, e da questo segue l'asserto del problema.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Sulla Strada

Hopping a freight out of Los Angelesat high noon one day in late September 1955 I got on a gondola and lay down with my duffel bag under my head and my knees crossed and contemplated the clouds as we rolled north to Santa Barbara. It was a local and I intended to sleep on the beach at Santa Barbara that night and catch either another local to San Luis Obispo the next morning or the first class freight all the way to San Francisco at seven p.m. Somewhere near Amarillo...
Jack KEROUAC[19]

In realtà, per iniziare questo pezzo poteva andare bene anche "Viaggio con Charley" di Steinbeck, citando una volta tanto non l'inizio (che abbiamo già usato almeno un paio di volte), ma la fine: "Agente, ho guidato questo arnese per tutto il paese, montagne, pianure, deserti. E ora che sono tornato a New York, dove vivo, mi sono perso". "Non ci badi, amico. Sabato mi sono perso anch'io, a Brooklyn".

Insomma, si tratta di andare in giro. E adesso, come d'uso nei PM, la prendiamo alla larga.

Chiunque sia stato bloccato in autostrada dal lento procedere di un camion gli ha mandato un mucchio di ingiuste maledizioni; e ha fatto male, perché il camion sta *pensando*.

In effetti, per lungo tempo il problema è rimasto in sospeso; stiamo parlando, in prima istanza, del *problema del commesso viaggiatore*,o, se preferite l'inglese, il ***Traveling Salesman Problem***, per brevità detto ***TSP***.

Cominciamo in modo semplice.

L'idea è di avere un commesso viaggiatore che, partendo da un punto ***X***, debba visitare i punti $A, B, C, \ldots, Z$ una ed una sola volta, tornando ad ***X*** alla fine del giro. Evidentemente, dobbiamo definire un costo nel partire da casa del commesso viaggiatore (o del camion) per arrivare ad un qualunque punto, e possiamo anche definire un costo tra un punto che verrà toccato nel nostro percorso e un altro punto; i più scafati di voi avranno già capito che qui si impone una matrice: infatti, possiamo indicare il costo dello spostamento di quel che vi pare dal punto *i* al punto *j* con c_{ij}, e lavorare su qualcosa di più comodo di una cartina stradale. Per non perdere in generalità, come amano dire i matematici seri, la considereremo non simmetrica (la parola "senso unico" dovrebbe essere illuminante, per quanto riguarda quelli di voi con l'aria perplessa) e ammetteremo anche valori negativi, nell'ipotesi che *vi paghino* per passare da lì (qui la faccia perplessa l'abbiamo noi: mai successo, e a voi?).

Le complicazioni possono essere aggiunte a iosa: ad esempio il nostro camion può avere una capacità limitata, imponendo comunque dei ritorni alla base per ricaricarlo; oppure, il camion oltre a consegnare oggetti potrebbe anche doverne ritirare... insomma, è facile vedere che si tratta di un problema difficile: anche nella versione base, ogni volta che

[19] NON dal romanzo che dà il titolo al pezzo, ma da "The Dharma Bums" (*I Vagabondi del Dharma*), che è il romanzo di Kerouac preferito da Rudy: ha copiato questo pezzo dall'edizione Harper Collins del '92, che conserva gelosamente (anche perché gli è stata regalata da un amico scozzese di nome Brian, e con tutte le dicerie su costoro l'evento era chiaramente eccezionale): "Saltato su un treno merci che partiva da Los Angeles in pieno mezzogiorno di una giornata di fine settembre del 1955 presi posto su un carro aperto e mi sdraiai con il mio sacco a spalla sotto la testa a gambe accavallate e contemplai le nuvole mentre correvamo a nord verso Santa Barbara. Era un treno locale e la mia intenzione era di dormire quella notte sulla spiaggia di Santa Barbara e salire la mattina dopo su un altro treno locale fino a San Luis Obispo oppure su un merci espresso che arrivava direttamente a San Francisco alle sette di sera. All'altezza di Amarillo..." (Traduzione di Magda de Cristofaro, Oscar Mondadori, 1975)

aggiungete un punto dovete riesaminare tutti i punti restanti e può presentarsi una soluzione ottimale senza nessuna parentela con la precedente. Ossia, la complessità del problema, all'aggiungere un punto, si moltiplica per il numero di punti che avevamo prima, quindi è esponenziale, o, come si preferisce dire, *NP-completo*: al punto che è diventato un interessante problema lo stabilire se il gioco valga la candela, ossia se sia il caso di affrontare il costo del calcolo della soluzione ottimale per il caso dato o se non sia conveniente accontentarsi di una soluzione sub-ottimale.

Fortunatamente, esistono delle persone testarde che non si fanno scoraggiare da bazzecole come l'essere non polinomiale (il problema, non loro: ma forse ci vuole il plurale... beh, comunque avete capito): ***Clarke*** e ***Wright*** sono due di questi, e hanno sviluppato un algoritmo (noto giustamente come *Algoritmo di Clarke-Wright*), o meglio un algoritmo e mezzo, nel senso che per una parte esistono due varianti. Ma procediamo con calma, e per prima cosa inquadriamo il problema: quello che i Nostri risolvono, è il caso di un gruppo di camion identici, ciascuno dei quali ha una data capacità di carico (peso o volume), tutti localizzati nel *deposito*; inoltre, esiste una collezione di *clienti* a ciascuno dei quali dobbiamo consegnare una certa quantità di merce (che può essere diversa per ognuno dei clienti), e sappiamo i costi (in spazio o in tempo) necessari per andare dal deposito ad un qualsiasi cliente e da un qualsiasi cliente ad un altro qualsiasi cliente; per semplificarci la vita nell'esempio[20], supporremo che i percorsi siano *simmetrici*, ossia andare da un punto ad un altro abbia lo stesso costo del tornare dall'altro all'uno; inoltre, denomineremo il deposito con il pedice 0, mentre i diversi clienti saranno numerati 1,...,*n*; nella nostra matrice, l'indice di riga sarà quello del sito di partenza, quello di colonna sarà quello di arrivo.

Ora, supponiamo che un camion vada dal deposito al cliente i e ritorno, mentre un altro camion vada dal deposito al cliente j e ritorno; per il primo camion, ricordando la simmetria dei percorsi, avremo un costo pari a: $c_{0i} + c_{i0} = 2c_{0i}$ e, identicamente, per il secondo camion ricaveremo un costo $2c_{0j}$.

Ora utilizziamo un camion solo; se parte dal deposito, va dal primo cliente, poi dal secondo e poi torna al deposito, abbiamo un costo pari a $c_{0i} + c_{ij} + c_{j0}$, e possiamo calcolare la differenza di costo tra i due diversi metodi:

$$S_{ij} = 2c_{0i} + 2c_{0j} - \left(c_{0i} + c_{ij} + c_{0j}\right) = c_{0i} + c_{0j} - c_{ij}.$$

Ora, l'algoritmo di Clarke-Wright è un cosiddetto algoritmo *ingordo*, parola che anche se può sembrare immediatamente comprensibile ha un significato molto ben definito (e difficile da capire, in molti casi) in matematica; significa che ad un certo momento l'algoritmo può fare delle scelte che sono *localmente* le migliori, ossia *in quel dato momento*: ad una visione globale, le scelte possono essere delle solenni stupidaggini, ma in quel momento rappresentano la scelta migliore.

L'idea alla base dell'algoritmo di Clarke-Wright è quella di mettere assieme dei "sottoviaggi" sin quando questo permette di ottenere un viaggio più economico, fermo restando che deve essere possibile (potrebbe non esserlo, ad esempio, per problemi di capacità di camion).

Vediamo 'sto algoritmo, sì? Come dicevamo, ci sono due varianti, il che ci costringe ad una notazione un po' balorda.

Passo 1:

> Calcolate tutti i risparmi S_{ij} associato al viaggio da i a j, con $i \neq j, i, j \neq 0$, e metteteli in ordine non crescente

[20] L'algoritmo originale non ha questa restrizione.

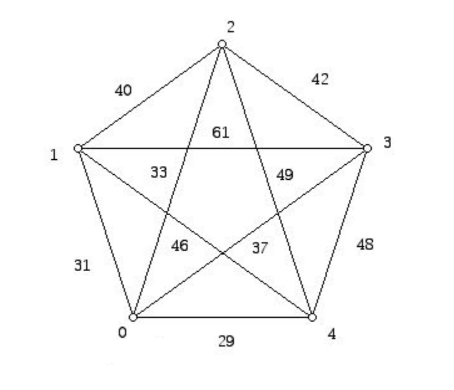
Passo 2:

Iniziate con il viaggio in cima all'elenco.

Variante A	**Variante B**
Scorrete la lista dei risparmi; quando considerate il risparmio S_{ij}, verificate se vi sono al momento dei viaggi che utilizzino gli archi $0, j$ e $0, i$, e verificate se possono essere uniti tra di loro, inserendo il percorso i, j in sostituzione di questi due archi.	Utilizzate il prossimo arco nella lista dei risparmi per espandere il percorso sul quale state lavorando; se il percorso non può essere esteso, provate con un altro percorso; se nessun percorso può essere esteso utilizzando quest'arco, passate al prossimo arco.

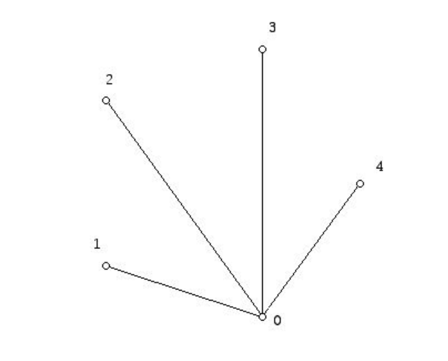
Notate che le eventuali altre limitazioni (capacità dei camion, ad esempio) possono essere inserite nel metodo: molto semplicemente, se "non ci sta" nel camion, si va al passo successivo.

Per capire meglio come funziona l'aggeggio, utilizziamo la variante A per risolvere un caso semplice: trovate il grafo dei percorsi e i costi relativi nella Figura 14 qui di fianco. "0" è il nostro deposito, "1", "2", "3", "4" sono i luoghi da visitare, i numeri sugli archi sono i costi relativi: stiamo evidentemente considerando un caso *simmetrico*.



14 *Un esempio (facile)*

Partiamo allora dal "piano zero", ossia ipotizziamo di avere quattro camion ciascuno dei quali va dal deposito ad uno dei punti e torna indietro; la situazione risulta del tipo indicato in Figura 15, e nostro intento è riuscire a fare di meglio.



15 *Eravamo quattro amici in camion...*

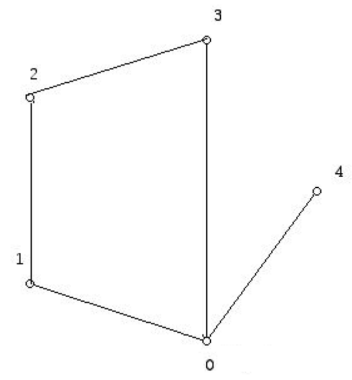
Supponiamo (caso semplice) i nostri camion abbiano capacità infinita; cominciamo, come da algoritmo, a considerare i risparmi che avremmo connettendo due siti (diversi dal deposito e diversi tra di loro); qui viene la parte noiosa, ma ve la facciamo noi:

$$\begin{aligned}
S_{12} &= 31 + 33 - 40 = 24; \\
S_{13} &= 31 + 37 - 61 = 7; \\
S_{14} &= 31 + 29 - 46 = 14; \\
S_{23} &= 33 + 37 - 42 = 28; \\
S_{24} &= 33 + 29 - 49 = 13; \\
S_{34} &= 37 + 29 - 48 = 18.
\end{aligned}$$

Ossia i nostri risparmi sono, in ordine, $S_{23}, S_{12}, S_{34}, S_{14}, S_{24}, S_{13}$.

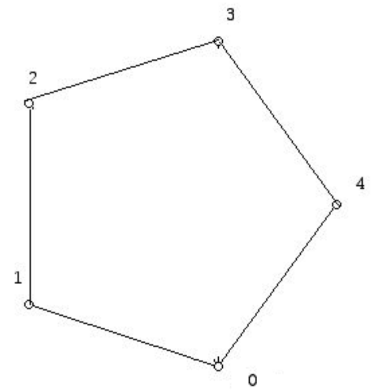
Visto qual è il risparmio maggiore, sostituiamo $(0,2,0)$ e $(0,3,0)$ con $(0,2,3,0)$: il nostro giro diventa quindi più corto, e abbiamo risparmiato un camion.

Avanti il prossimo: si tratta del risparmio S_{12}, che ci permette di unire i viaggi $(0,1,0)$ e $(0,2,3,0)$ ottenendo un unico viaggio $(0,1,2,3,0)$: a questo punto, la nostra situazione è quella indicata in Figura 16, che usa solo due camion; prima di fare di meglio, però, vediamo un caso in cui non si può fare niente.



16 ...*Ora siamo due amici in camion...*

Ignoriamo temporaneamente l'arco $(3,4)$, e consideriamo il successivo, ossia $(2,4)$; in questo caso, non avremmo evidentemente potuto utilizzarlo per ottimizzare il nostro giro, in quanto non ci permette di unire i due percorsi; se fosse stato più economico $(1,4)$ avremmo potuto costruire il circuito $(0,3,2,1,4,0)$, che sarebbe stato il più economico: si noti che in questo caso avremmo avuto delle intersezioni, ma mai nessuno ha detto che non debbano esserci.



17 ...*Me ne stavo qui da solo in camion...*

Torniamo al nostro caso: con un altro passo, la nostra situazione giunge al termine, e otteniamo un percorso percorribile da un unico camion avente costo $31+40+42+48+29=190$; lo trovate in Figura 17.

Esistono anche altri metodi per trovare percorsi che facciano risparmiare; uno dei più semplici è quello del *vicino più prossimo*: partite dal deposito e, ad ogni passo, andate verso il vicino non ancora visitato che costa meno; applicando questo metodo al nostro grafo, otteniamo il percorso $(0,4,1,2,3,0)$ con un costo pari a $29+46+40+42+49=206$; peggiore del giro precedente, ma comunque interessante.

Il guaio è che, se proprio vogliamo trovare il circuito *migliore di tutti*, dobbiamo esaminare tutti i percorsi possibili, e questo significa, anche nel nostro caso decisamente semplice, esaminare $5!/2=60$ percorsi[21], e se aggiungete un punto... Insomma, è un'esplosione fattoriale.

Proviamo a complicarci la vita: supponiamo ci siano delle raccolte (senza scarico) da fare nei vari siti: 4 oggetti dal primo sito, 2 dal secondo, 3 dal terzo e 1 dal quarto: tutti questi oggetti vanno portati al deposito, e i nostri camion(cini) hanno una capacità di 6 oggetti: cosa succede in questo caso, se applichiamo il nostro algoritmo?

Si procede esattamente nello stesso modo: partendo dal grafico di Figura 15, ci accorgiamo che nessuno dei camion viaggia al massimo carico; possiamo unificare i viaggi $(0,2,0)$ e $(0,3,0)$ in $(0,2,3,0)$ in quanto in questo modo il camion avrà un carico di 5, il che è ancora sotto la massima capienza; a questo giro non potremo associare il percorso $(0,1,0)$, in quanto ci servirebbe una capienza 9: passiamo allora al risparmio successivo, $(0,4,0)$, e vediamo che possiamo unificarlo al nostro percorso ottenendo $(0,2,3,4,0)$ con il camion carico al limite di 6: a questo punto, abbiamo due camion che ci costano

[21] Il "fratto due", evidentemente, nasce dal fatto che lo stesso percorso effettuato in senso inverso è altrettanto economico quanto il senso diretto.

$31+31=62$ per il percorso $(0,1,0)$ e $33+42+48+29=152$ per il percorso visto sopra; totale 214, che *non* è comunque il percorso ottimale (ma questo ve lo cercate voi).

Le limitazioni che si possono inventare sono quasi infinite, forzando determinate tipologie di camion per determinate consegne, imponendo la consegna entro una determinata data di scadenza, richiedendo che oltre a scaricare qualcosa venga anche caricato altro da portare al deposito o a un altro sito... Insomma, abbiamo appena affrontato la superficie, ma ci fermeremo qui.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms