# Rudi Mathematici

*Rivista fondata nell'altro millennio*

Numero 140 – Settembre 2010 – Anno Dodicesimo


Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

***Rudi Mathematici***
Rivista fondata nell'altro millennio da
*Rudy d'Alembert* (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
*Piotr Rezierovic Silverbrahms* (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
*Alice Riddle* (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM139 ha diffuso 2659 copie e il 03/09/2010 per Google eravamo in 17'500 pagine.



***Guardatela solo in fotografia***. La *Conus Textile* ha un aculeo in grado di iniettarvi una neurotossina letale in pochi minuti (e durante quei pochi minuti fa *molto* male). Avendone fatta una conoscenza per fortuna puramente teorica, ci chiediamo se la conchiglia sia così "per caso" o effettivamente cresca secondo un algoritmo di automa cellulare.

# 1. Le opere e le facce[1]

*Quando il mio amore giura d'essere pura verità io le credo,*
*sebbene sappia che sta mentendo*
(William Shakespeare, Sonetto 138)

*La verità è la verità, fino alla resa dei conti*
(William Shakespeare, *Misura per misura*, atto V, scena I)

Scomparso alla giovane età di trentacinque anni: davvero pochi, soprattutto se segnano la sparizione di un genio universale. E anche se quegli anni di fine diciottesimo secolo non erano certo anni facili, naturalmente disposti alla longevità, la metà di settanta resta pur sempre la metà della lunghezza d'una vita normale[2]. Ma i conti sono presto fatti: Wolfgang Amadeus Mozart nacque il 27 Gennaio 1756 e scomparve il 5 Dicembre1791, un paio di mesi prima di compiere trentasei anni. Quasi in povertà, nonostante lo splendido successo che gli arrise in vita; quasi dimenticato in una tetra fossa comune, nonostante la forza della sua musica avesse rallegrato sia i nobili della corte austriaca sia i teatri popolari della splendente Vienna.


1 *Wolfgang Amadeus Mozart*

Curiosamente, sembrano essere quasi sempre i posteri a non riuscire a rassegnarsi. I contemporanei di Mozart probabilmente conoscevano fin troppo bene la caducità dei propri tempi o, più semplicemente, non riuscivano ancora a leggere nella musica del bambino prodigio di Salisburgo il segno del genio senza tempo: così, veder calare nella fossa un musicista che pure aveva avuto il suo lungo quarto d'ora di celebrità non li avrà sconvolti più di tanto. Ma le generazioni successive fanno confronti, studiano vita e opere, riescono a pesare e a valutare meglio – non fosse altro che per maggiore disponibilità di tempo e di dati – la grandezza di una mente. E se dalle pieghe della storia sembra uscir fuori una sorta di ingiustizia, di cosmica sfortuna, è possibile che sorga anche un senso di dispiaciuta impotenza, di intellettuale disperazione: scomparso a soli trentacinque anni… cosa avrebbe potuto estrarre dal pentagramma, un Mozart maturo? Quali armonie abbiamo perduto prematuramente, nel Dicembre del 1791?

Sono domande destinate a rimanere senza risposta, ovviamente: domande oziose, ucroniche, di quelle che una volta erano severamente bandite dai corsi di storia. La storia non si fa con i "se", dicevano i saggi accademici: l'immanenza della storia è di per sé stessa un valore, un punto fermo, quasi una giustificazione circolare degli eventi. Ma, forse per fortuna, c'è chi continua a chiedersi "cosa sarebbe successo se…", anche senza alcuna reale velleità di scoprire chissà quali verità perdute. Anche solo per gioco, per sottolineare qualche curiosa somiglianza di vita, di spirito: forse, addirittura, di stile.

[1] Se pensate che il titolo sia una citazione, più o meno irriverente, del celebre "*Le Opere e i Giorni*" di Esiodo, naturalmente avete ragione. Ci è parso però appropriato sostituire i "giorni" con le "facce", perché ci vogliono imperlappunto *facce* di bronzo come le nostre per far uscire RM con così tanti *giorni* di ritardo.

[2] Non è certo un caso se Dante, che nel 1300 ha giusto trentacinque anni, principia la sua somma opera proprio con "*Nel* mezzo *del cammin di nostra vita…*"

Così, non è poi strano se qualcuno si è messo a giocare con le date, al punto di notare che, neanche due mesi dopo la scomparsa in quel di Vienna di Mozart, nasceva nell'italica e ridente Pesaro un musicista quasi altrettanto magistrale, non meno allegro e irrispettoso, forse ancora più capace di godersi la vita: Gioachino[3] Rossini.


2 *Gioachino Rossini*

Tanto per mostrare subito la sua originalità, il pesarese decide di nascere nel giorno bisestile di un anno bisestile, il 29 Febbraio 1792[4], e la vicinanza tra la data di morte di Mozart e quella di nascita di Rossini ha proprio l'aspetto di un passaggio di testimone, ancora più deciso di quello, celebre tra i cultori della storia della scienza, tra Galileo e Newton[5]. Ma i "passaggi di testimone" avvengono tra persone chiaramente separate e distinte, anche perché i già citati trentacinque anni di vita saranno molto pochi per morire, ma decisamente troppi per spacciarsi per coetanei, se misurano una differenza di età: eppure c'è stato chi ha immaginato che Rossini e Mozart potessero essere, tutto sommato, la stessa persona. Naturalmente si tratta di ipotesi altamente romanzesche e niente affatto credibili, create senza dubbio a tavolino partendo da alcune somiglianze nel loro modo di far musica, o forse ancor più di far vita. C'è perfino chi ha notato il comune amore per la buona tavola (celeberrimo quello di Rossini, ma anche quello di Mozart non scherzava), e giocando sulle condizioni di particolare indigenza del genio austriaco, ha immaginato una fuga segreta verso l'Italia dopo aver organizzato la messinscena della propria dipartita a beneficio dei creditori. Altri ancora, per superare l'ostacolo davvero alto dei sette lustri di differenza, ha immaginato che l'esule Amadeus trovasse riparo proprio nelle Marche, e qui, in incognito, si procurasse da vivere dando lezioni di musica e di composizione ai giovani talenti italiani, tra i quali – inutile dirlo – spiccava sopra tutti l'irruento Rossini[6].

Assai meno romanzesche, al punto da essere diatriba celebre anche al di fuori della ristretta cerchia degli addetti ai lavori, sono le supposte relazioni pericolose che potrebbero sussistere tra il maggior poeta di lingua inglese, William Shakespeare, e un certo numero di suoi colti contemporanei. Il punto essenziale è che a molti critici pare impossibile che un giovinastro inglese d'estrazione popolare potesse mostrare non solo un così alto senso poetico, ma anche una conoscenza dettagliata di diversi arti e mestieri. Come disse Mark Twain, uno dei più noti propugnatori dell'idea che a scrivere le opere di Shakespeare non sia stato Shakespeare: "*Dicono che abbia maturato la sua vasta conoscenza della legge e la sua accurata familiarità con i modi, il gergo e i costumi degli avvocati dopo essere stato lui stesso per poco tempo il cancelliere del tribunale di*

[3] Gioachino, con una sola "c": a sentire gli esperti, sembra la forma più corretta, anche se rimane diffusissima la forma tradizionale con la doppia, Gioacchino.

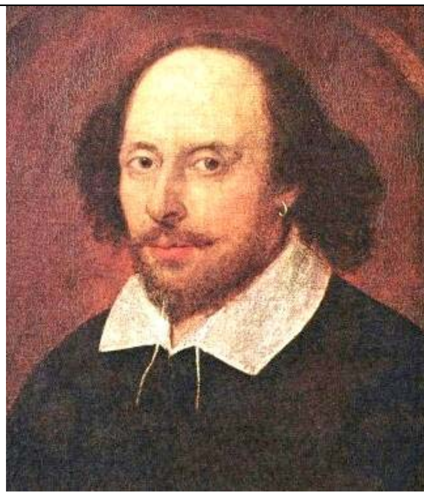
[4] Sappiamo benissimo che in realtà il vero "giorno bisestile" non è il 29 febbraio, ma il 24, ovvero il "sesto giorno" prima delle calende di Marzo. La duplicazione del "sesto" avveniva tramite l'inserimento di un "*bis sextum*", da cui discende proprio il termine "bisestile". Ciò non di meno, ci pare legittimo, al giorno d'oggi, considerare "bisestile" il saltuario 29 Febbraio, non foss'altro che per far contento proprio Gioachino.

[5] Galileo muore nel Gennaio 1642, Newton nasce nel Gennaio 1643 (o il giorno di Natale del 1642, come raccontiamo nel suo compleanno: http://www.rudimathematici.com/archivio/071.pdf#page=1)

[6] Se siete incuriositi, potete trovare maggiori informazioni seguendo questo link: http://editore.slowfood.it/editore/riviste/slowfood/IT/15/articoli/slowfood15_35.pdf

*Stratford; proprio come se un giovanotto sveglio come me, cresciuto in un paesino sulle rive del Mississippi, potesse sviluppare una conoscenza perfetta della caccia alla balena nello stretto di Bering e del gergo dei veterani passando qualche domenica a pescare pescegatti.*"

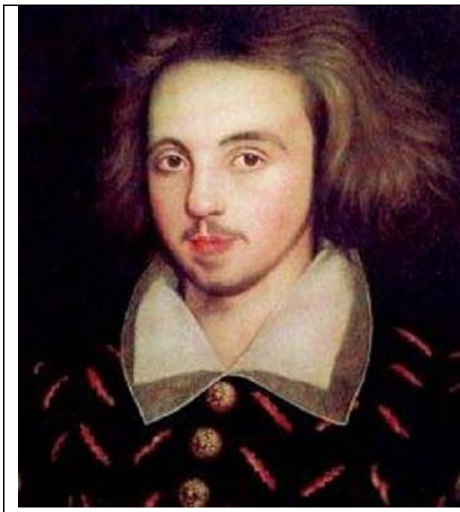
L'obiezione di Twain è probabilmente un po' troppo caustica, ma di certo l'idea è stata cavalcata a lungo e da più parti, al punto che l'argomento "attribuzione delle opere di Shakespeare", se non raggiunge forse ancora i livelli di discussione dell'attribuzione delle opere di Omero, è comunque abbastanza noto da meritarsi una lunga ed estesa voce apposita[7] non solo sulla Wikipedia di lingua inglese, ma anche su quella italiana[8].


3 *William Shakespeare*

Le ragioni che vengono addotte sono in effetti affascinanti: le notizie sulla biografia di Shakespeare sono abbastanza povere di dettagli da lasciare spazio libero a congetture. In realtà, a ben vedere, si scopre facilmente che non esiste nessun drammaturgo dell'era elisabettiana di cui si conoscano più notizie biografiche; ma esistono comunque dei veri periodi oscuri nella vita del bardo, e questi bastano a dar adito a congetture. Gli appigli dei critici spaziano su fronti diversissimi: quello della vastità delle conoscenze che sono sottintese nelle commedie e tragedie è forse il maggiore, ma di certo non l'unico: anche il fatto che nell'opera omnia di Shakespeare si contino la bellezza di 29.000 parole diverse viene considerato indicativo del fatto che ben difficilmente un tale vocabolario potesse essere a disposizione di quello che, in ultima analisi, restava un incrocio tra un guitto da palcoscenico e un uomo d'affari. Una delle prime ipotesi alternative, infatti, elesse come candidato autore quello che fu probabilmente l'uomo di maggior cultura contemporaneo, ovvero sir Francis Bacon: la buona coincidenza delle date di nascita e di morte (1564-1616 per Shakespeare, 1561-1626 per Bacon), ha fatto addirittura supporre a qualcuno che Shakespeare non fosse altro che un "*nom de plume*" del celebre filosofo.


4 *Francis Bacon*

L'ipotesi che a scrivere *Amleto*, *Giulietta e Romeo*, *Sogno di una Notte di Mezza Estate* e tutti gli altri capolavori del bardo di Stratford-on-Avon sia stato invece Christopher Marlowe, l'autore di "Doctor Faustus" discende probabilmente da una certa somiglianza fisica tra i due autori e dal fatto che


5 *Christopher Marlowe*

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Shakespeare_authorship_question

[8] http://it.wikipedia.org/wiki/Attribuzione_delle_opere_di_Shakespeare

Marlowe è morto giovane, a soli ventinove anni, nel 1593, e in circostanze violente e drammatiche. Pur essendo giunto fino a noi il rapporto del medico legale che ne certificò il decesso, la somiglianza formale nei versi poetici (il "*blank verse*") e il fascino del mistero hanno fatto sì che qualcuno potesse identificare integralmente Marlowe con Shakespeare: l'ipotesi romanzesca cavalca naturalmente l'idea che Marlowe non sia in realtà deceduto nella rissa del 1593, ma che abbia deciso di continuare in segreto la sua alta opera di drammaturgia sotto il nome di William Shakespeare.


6 *Edward de Vere*

Ma non è certo l'ultimo dei possibili Shakespeare: Edward De Vere, diciassettesimo Conte di Oxford, è un altro candidato di tutto rispetto. Bello, nobile, affabile e di altissima cultura, è un candidato che piace davvero molto all'ancor viva e potente aristocrazia inglese: tutto il contrario, probabilmente, della candidatura di Michel Agnolo Crollalanza, linguista siciliano.

I ricercatori britannici hanno a lungo indagato sulla possibile natura del cognome del bardo, per diverse ragioni. La prima è che nei dintorni del 1600, la grafia delle parole inglesi non era ancora ben definita, e si poteva facilmente trovare la notazione "*Shakspere*" al posto della classica "*Shakespeare*", cosa che ovviamente allarga il possibile campo di ricerca sulle origini e sulla natura del nostro William di Stratford on Avon. Analogamente, anche la forma con trattino, "*Shake-speare*", che si ritrova ad esempio sulla copertina della prima edizione dei *Sonetti*, comporta dubbi, analisi e problemi: di solito, infatti, i "nomi con trattino" indicano un soprannome più che un vero e proprio nome di famiglia o di battesimo, dal che William potrebbe davvero risultare identificato in un generico scuotitore ("*to shake*") di lance ("*spear*"). E se pensate che "*scuoti lancia*" possa sembrare un soprannome troppo sciocco per un attore, è bene rammentare che la scuotitrice di lancia per eccellenza è Atena, Minerva, nata già adulta, vestita e dotata d'armatura dalla fronte del padre Zeus: la dea "scuote la lancia" fin dalla nascita, e non a caso è la patrona delle scienze e delle arti, e quindi anche degli attori e degli autori di teatro.

Sotto simili fragili condizioni al contorno, è palese che l'arrivo sulla scena di un Crollalanza può suscitare qualche albionica preoccupazione, specie se nell'*Amleto* si riconoscono alcune insolite citazioni di proverbi d'origine siciliana, e soprattutto se il siculo linguista può annoverare tra le sue opere una certa "*Troppu trafficu pì nenti*" il cui titolo, una volta tradotto, assomiglia davvero fin troppo al noto "*Much ado for nothing*", ovvero "*Molto rumore per nulla*".


7 *Shakespeare quindicenne?*

Ma il punto essenziale è che la voglia di associare opere e facce è profondamente umana, radicata e potente, per quanto assolutamente inutile, da un punto di vista razionale. Serve davvero a qualcosa vedere l'alopecia di un poeta, se i versi che di lui possediamo sono folti di poesia e di passione? È importante riconoscere gli occhi come azzurri, marroni o verdi, se leggendolo si riesce in ogni caso a vedere l'intero arcobaleno delle emozioni, o addirittura la lucida razionalità della natura, netta e ripulita dalle nebbie della faticosa ricerca? Fatto sta che la curiosità permane, al punto che c'è chi si è messo a ricostruire, sulla base di ritratti e informazioni storiche, addirittura le sembianze di Shakespeare quindicenne. Il risultato sembra un incrocio tra i cinematografici Frodo del *Signore degli Anelli* e Harry Potter, ed è comunque molto inglese: ma non aiuta a capire come dietro quel giovane volto possa essere sbocciato l'amletico assillo del *to be or not to be*.

Del resto, la mania di vedere i volti dei nomi familiari non è propria solo degli amanti delle lettere e delle arti: anche la scienza ha i suoi fan, e tra loro è generalmente altrettanto forte la curiosità di vedere le facce dei propri beniamini: anche perché, più ancora che tra i cultori della letteratura, è frequente nelle scienze trovare dei singoli nomi legati a doppio filo ad una singola proposizione, ad un unico concetto, cosicchè la stretta associazione tra concetto e nome spesso travalica e oscura del tutto quello tra nome e immagine. Teorema di Pitagora, Numero di Erdős, Congettura di Goldbach, Ipotesi di Riemann, Paradosso di Russell, Problemi di Hilbert, Assiomi di Peano, Relazione di Eulero… nomi e concetti legatissimi tra loro, a centinaia: e quasi nessuna faccia[9].

Prendete Legendre, ad esempio. È difficilissimo concludere un corso di laurea in una materia scientifica senza aver incontrato i suoi Polinomi, ma quanti degli studenti che si sono dannati su di essi hanno anche solo una pallida idea del suo volto?


8 *Adrien-Marie Legendre?*

Adrien-Marie Legendre nacque il 18 Settembre 1752 a Parigi, dove di fatto trascorse la sua intera esistenza; in realtà le notizie sui suoi primi anni di vita sono così scarse che è anche possibile che sia nato a Tolosa, come si potrebbe dedurre da alcune fonti, ma di fatto non è possibile trarre conclusioni certe. Si sa comunque che la sua famiglia era benestante, che a Parigi frequentò il prestigioso *Liceo Mazarin*, e che qui ottenne la sua licenza in matematica e fisica nel 1770, fresco diciottenne. Come è facile leggere anche solo dalle date, erano tempi davvero particolari per la Francia e la matematica francese, davvero densissima di nomi altisonanti: non erano certo ancora famosi come lo sono oggi, ma Legendre si ritrova, appena ventenne, a collaborare con Laplace e D'Alembert, e i suoi primi studi lo misero subito in luce e in contatto con matematici del calibro di Lagrange. L'occasione era stata il suo studio "*Ricerche sulla traiettoria dei proiettili nei mezzi resistenti*" che vinse il premio messo in palio proprio dall'Accademia di Berlino presieduta da Lagrange. Dopo questi approcci molto militareschi (del resto, Legendre e Laplace insegnavano entrambi nella prestigiosa *Ecole Militaire* di Parigi), Adrien-Marie si dedica allo studio delle attrazioni sugli ellissoidi, argomento già affrontato a suo tempo da Maclaurin; nel farlo introduce quelle che adesso chiamiamo con il suo nome, *funzioni di Legendre*, e lo studio gli vale l'ingresso all'Accademia delle Scienze di Francia.

Legendre continua, apparentemente senza sosta (almeno a giudicare, duecentocinquanta anni dopo, dalla sua opera e dalla sua biografia), a produrre matematica e risultati: il suo studio sul moto dei pianeti (*Recherches sur la figure des planètes*) introduce e presenta i suoi celeberrimi "polinomi"; studi sull'analisi indeterminata e sulla teoria dei numeri lo

[9] Per fortuna, con la scusa di raccontare delle storie di compleanno, una prestigiosa rivista di matematica ricreativa prova, almeno una volta al mese, a far vedere la faccia di un matematico. Non che ci riesca sempre, comunque…

portano, all'alba del 1785, a trovare due risultati molto significativi (la legge della reciprocità quadratica per i residui e la regola che ogni serie aritmetica col il primo termine coprimo alla differenza comune contiene un numero infinito di primi) che però non godono di sufficiente rigore nelle dimostrazioni, che arrideranno poi infatti a Gauss e a Dirichlet.

Pochi anni prima dello scoppio della Rivoluzione Francese che avrebbe raffreddato molto i rapporti fra Francia e Inghilterra, Legendre viene eletto alla Royal Society di Londra, in riconoscimento del lavoro di triangolazione fatto in comune con gli scienziati inglesi per la determinazione della dimensione della Terra, un lavoro che giunse a "connettere", dal punto di vista delle triangolazioni geodetiche, gli osservatori di Parigi e di Greenwich. Quando poi la Bastiglia viene presa dai rivoluzionari, tutto cambia in fretta: Legendre è scienziato abile e famoso da meritarsi nel 1791 un posto nella celebre Commissione Pesi e Misure, incaricata di standardizzare le unità di misura, ma la furia rivoluzionaria lo riduce presto, se non proprio in povertà, certo in condizioni meno agevoli di quelle cui era abituato. Eppure lavorò molto per la scienza rivoluzionaria: insieme a Carnot, De Prony e un centinaio di oscuri assistenti, passò interi anni alla compilazione di tavole logaritmiche e trigonometriche[10], nonostante la chiusura dell'Accademia delle Scienze che per lui significa la perdita di un importante introito finanziario.


9 *No, Louis Legendre!*

Era un matematico forte, deciso e convinto delle sue opinioni, anche se un po' succube sia di Laplace sia della sua orgogliosa timidezza: Poisson disse di lui che "… *il nostro collega ha spesso espresso il desiderio che, dovendo parlare di lui, ci si limiti a parlare solo degli argomenti dei suoi studi che, di fatto, coincidono in toto con la sua stessa vita*[11]…". Le sue opere, pubblicate in più edizioni, rimangono ancora delle vere e proprie pietre miliari della matematica: i suoi *Elementi di Geometria*, il testo sulla *Teoria dei Numeri*, il *Trattato sulle Funzioni Ellittiche*, ottennero grande successo fra i suoi contemporanei, e si è già visto che Legendre aveva per "contemporanei" nomi come Gauss, Lagrange, Laplace e molti altri di analoga levatura.

Timido ma battagliero, non accettò di votare per il candidato governativo all'Accademia, cosa che certo non gli fu d'aiuto nella sua carriera universitaria: e, nonostante il vento non-euclideo soffiasse già forte nelle opere di Bolyai, rifiutò sempre di accettare l'idea che la somma degli angoli di un triangolo potesse in nessun caso essere diversa da 180°. Questa sua carica battagliera è in realtà poco ben rappresentata dal suo celebre ritratto, che lo mostra di profilo, con le guance pienotte e un'espressione non troppo intelligente, forse a causa della bocca semiaperta e delle palpebre vagamente cascanti.

Per la gioia di coloro che amano la matematica romantica e la immaginano popolata solo da volti nobili ed espressivi, una scoperta relativamente recente ha sanato un errore che si protraeva da decenni, forse addirittura da secoli. Come è stato ben raccontato da Peter

[10] Che non è attività di poco conto: secondo molti storici della scienza, fu proprio la stesura di tavole come queste a diffondere in Europa, e in un certo senso a "democratizzare", il metodo scientifico.

[11] Detto per inciso: Poisson sta parlando di Legendre non per fargli dispetto, ma per celebrarlo; è un estratto della sua orazione funebre.

Duren nel suo articolo "*Changing Faces*" disponibile in rete[12], due studenti di Strasburgo si sono resi conto, un bel giorno, che il medesimo ritratto litografico si trovava sui testi sia per illustrare le fattezze del matematico Adrien-Marie Legendre sia per quelle del politico (un montagnardo della rivoluzione) Louis Legendre. Era evidente che l'omonimia, almeno a livello di cognome, aveva causato il perdurare di un'errata attribuzione iconografica. Già, ma quale era il Legendre correttamente raffigurato? Il matematico o il rivoluzionario? La scoperta di una litografia che riproduceva un gran numero di montagnardi del 1795 nel quale faceva bella mostra di sè il noto ritratto risolveva il dubbio a favore del politico (e quando mai la matematica è riuscita a spuntarla contro la politica?); l'effige era quella di Louis, non quella di Adrien-Marie.

10 *Legendre e Fourier*

Se una scoperta è sempre una buona notizia, rimane però la tristezza di perdere del tutto l'idea della faccia di Legendre, perché quello che si è poi rivelato essere il ritratto d'un politico era anche l'unica immagine che si pensava di possedere del matematico: restituita l'effige alla politica, la matematica rimaneva senza appigli grafici per il "suo" Legendre. Per fortuna, poco dopo la terribile scoperta dell'errata attribuzione, è venuta alla luce, dai profondi archivi matematici francesi, una serie di caricature matematiche. In una di queste, ad un rubicondo, tondo e allegro Fourier viene affiancato un affilato, serio e quasi demoniaco Legendre. Capelli bianchissimi e ribelli, lineamenti così acuti e tesi da essere raffigurati con tratti quasi esclusivamente obliqui e verticali, Adrien-Marie sembra quasi furibondo con il caricaturista che si è permesso di riportare le sue fattezze su carta, anziché "parlare solo delle sue opere", come lui aveva sempre preteso.

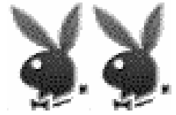
11 *Adrien-Marie Legendre!*

Certo è che, seppur solo in forma di caricatura e non di ritratto; seppur solo come disegno e non in fotografia (come sarebbe stato possibile, del resto?); seppur con un'espressione tanto arcigna da farci rallegrare di non averlo avuto come professore al liceo, non possiamo non essere lieti che qualche forma del grande francese sia giunta fino a noi.

Quel tanto che basta per immaginare – né più né meno come con la faccia del quindicenne Shakespeare – le connessioni, le sinapsi, le gioie e le irritazioni che devono aver percorso quelle rughe, mentre da qualche parte nel suo cervello prendevano forma le pagine dei suoi libri e le strutture delle sue funzioni e dei suoi polinomi.

[12] http://www.ams.org/notices/200911/rtx091101440p.pdf

# 2. Problemi

| | **Rudy d'Alembert** | **Alice Riddle** | **Piotr R. Silverbrahms** |
|---|---|---|---|
| IMHO, hanno ragione ad arrabbiarsi |  |  |  |
| Satollare il cefalopode teutonico |  |  |  |

## 2.1 IMHO, hanno ragione ad arrabbiarsi.

Per questo problema, siamo grati ai colleghi australiani che ci hanno procurato un numero sufficiente di soggetti per effettuare l'esperimento e, data la loro riottosità, si sono anche presi l'incarico di tenerli a bada: il valoroso contributo ci ha permesso di arrivare alla *risposta*, anche se abbiamo qualche problema con la *soluzione*.

Per prima cosa, prendete il deserto australiano, visto che vi serve un posto largo e piatto; indi, piantate una serie di cartelli a partire da un punto dato (non Ayer's Rock, che rischiate di rovinarla) verso Sidney; tutti i cartelli, all'inizio, puntano verso Sidney e, per buona misura, se indichiamo con 1 il primo cartello (quello "non a Ayer's Rock"), mettete nelle posizioni 0 e –1 due reti acchiappacanguriarrabbiati a capacità infinita.

Poi, riempite un aereo di canguri paracadutisti[13] e svolazzate da quelle parti, scaricando (col paracadute! Dai, fate i bravi) un canguro sul punto 1.

Ora, i canguri paracadutisti, anche se sanno lanciarsi con il paracadute, non hanno nessuna voglia di farlo, quindi quando atterrano sono piuttosto arrabbiati: il primo canguro, atterrando davanti al cartello 1 che indica Sidney, per prima cosa gli tira un pugno che lo gira di centottanta gradi, poi gli dà retta (ora indica dall'altra parte, verso le posizioni negative) e salta di *due* posti nella direzione indicata da cartello, finendo nella rete a.c.a. piazzata in –1.

Ora, lanciate il secondo canguro, sempre sulla posizione 1.

Questo arriva, vede il cartello che indica verso le reti, tira un pugnaccio al cartello (che quindi indica di nuovo verso Sidney) e gli dà retta, saltando di *un* posto nella direzione indicata dal cartello, e finendo davanti al cartello 2; questo indica Sidney, ma provvediamo subito: un pugnattone, indica dall'altra parte, il canguro gli dà retta, salta di *due* posti nella direzione indicata e si ritrova nella rete a.c.a. in 0.

Insomma, i nostri incavolati marsupiali arrivano, tirano pugno, guardano cartello e saltano di *due* se indica "indietro", di *uno* se indica "avanti".

[13] Nota per i biologi: i canguri paracadutisti si differenziano dai canguri normali per due caratteristiche fondamentali: (1) Sanno paracadutarsi, (2) hanno un colore più chiaro rispetto a quelli normali. La seconda aiuta, visto che testando la prima caratteristica il canguro "normale" rischia grosso.

Notate che, per evitare risse, scarichiamo solo un canguro per volta; ora, ci poniamo alcune domande (a una sappiamo addirittura rispondere!):

Tanto per cominciare, siamo sicuri che non ci sia il rischio di un canguro che saltella infinitamente in un intervallo di cartelli? Sarebbe un guaio, se l'aereo finisse la broda.

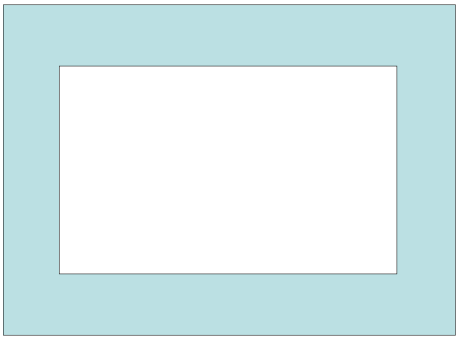
Poi, dicevamo che le reti a.c.a. hanno capacità infinita: beh, qualcuno riesce a stimare quanti canguri conterranno? Insomma, tutte e due uguale, o una di più e una di meno e, nel caso, quale percentuale rispetto all'altra?

*Narcotizzate il nolente marsupiale!*

## 2.2 Satollare il cefalopode teutonico

Francamente, non ricordiamo se si tratti di cefalopode, ma ci stiamo riferendo al polpo Paul (che si legge *Pa-u-l*, non *Pol*: è, giustappunto, tedesco, anche se svariate città italiane con trascorsi marinari ne stanno rivendicando la genealogia), quello che prevedeva il risultato nelle fasi finali dei mondiali di calcio; vogliamo sperare ve lo ricordiate[14], e vi poniate tutti a sua difesa nei confronti dell'idea delle squadre sconfitte di organizzare una gustosa insalata di mare.

Bene, avete organizzato, a difesa del PolpoPaul, una vasca dotata di fossato nella quale nuotano terzini brasiliani[15]. La struttura ha, suppergiù, la forma indicata in figura: vasca rettangolare, fossato che ha (sui lati) larghezza costante. Insomma, nel rettangolo centrale (bianco) c'è il nostro Paul, mentre nella zona azzurra nuotano i terzini. Il guaio è che vi hanno incaricato di progettare la vasca, e sarete voi a nutrire Paul.



12 *La vasca*

L'idea è che voi dobbiate stabilire, in funzione del vostro incarico vitalizio di Foraggiatore di Cefalopodi Premonitori, quanto debba essere ampio il fossato; e qui nascono le domande:

**Prima**: avete a disposizione due assi da 10 metri per arrivare alla vasca centrale: Paul è innocuo[16], ma i terzini proprio no. Quanto fate largo il fossato? (Facile)

**Seconda**: avete a disposizione tre assi da 10 metri, per lo stesso scopo: Paul è innocuo uguale, e i terzini come sopra. Stessa domanda. (Meno facile).

Per le prossime, non abbiamo idea della risposta: sentitevi liberi di esplorare qualsiasi possibilità.

**Terza**: avete a disposizione un numero $n$ di assi da 10 metri, solita solfa.

**Quarta**: siete il polpo Paul, e avete appena eliminato il Brasile: cosa pensano di voi i terzini che vi nuotano attorno?

---

[14] Mentre stendiamo queste note, si sono appena concluse le sue epiche gesta: azzeccarla con una probabilità su trentadue non è da tutti *[Treccia, tranquilla. Il Prob non è di Prob]*.

[15] È lì, se non ricordiamo male, che sfocia il Rio delle Amazzoni. Ci riferiamo a branchi di famelici *pirañas*.

[16] Beh, mica tanto: ci pare di ricordare che basti un polpetto di un paio di kilogrammi, per tenere sotto una persona... Comunque, supponiamo gli stiate simpatici; in fondo, i polpi hanno sempre un sorriso sulle labbra (se riuscite a trovarle: non sono dove c'è il sorriso).

# 3. Bungee Jumpers

Provare che per qualsiasi primo $p$ è possibile trovare due interi $x$ e $y$ tali che $x^2 + y^2 + 1$ sia divisibile per $p$.

*La soluzione, a "Pagina 46"*

# 4. Soluzioni e Note

Settembre, andiamo.

Tanto vale che ve lo dica subito: siamo in ritardo di brutto, e soprattutto per colpa mia, di Alice. Però c'è da dire che agosto è stato mese tumultuoso e non propriamente felice per alcuni di noi, malgrado uno degli eventi più piacevoli della programmazione annuale di RM: il CdR estivo.

13 *La Redazione di RM alle sorgenti del Danubio.*

Anche quest'anno il CdR si è svolto in territorio elvetico, pur comprendendo una gita sul suolo teutonico: come ormai da tradizione, vi passo una foto di repertorio, perché anche se siamo timidi (ok, almeno due di noi), sono comunque troppo felice di essere riuscita ad organizzare un paio di giorni tanto belli malgrado le avverse condizioni atmosferiche.

L'unica cosa che mi terrorizza è quali e quanti problemi il Capo riuscirà a trarre da ogni singolo e minuscolo episodio, ma dopotutto i problemi li risolvete voi lettori e a me tocca solo impaginare le soluzioni.

Resta comunque il fatto che in agosto non ci ha scritto nessuno per commentare la chiusura del forum delle olimpiadi della matematica, quando mi aspettavo repliche ed arrabbiature... ma probabilmente ad agosto non ci ha letto quasi nessuno.

Comunque, l'ho detto, siamo in ritardo terribile, per cui passo subito alle soluzioni, ma non prima di avervi ricordato di fare un salto in Bookshelf al più presto per dare un'occhiata alle magnifiche avventure di Beau Geste che Martino continua ad aggiornare ogni mese.

## 4.1 [138]

### 4.1.1 Valor medio

Abbiamo ricevuto tante proteste sul problema del valor medio, pubblicato a giugno:

> *State partecipando a un gioco a premi dedicato ai campioni di calcolo mentale. Il nostro conduttore ha un sacchetto tipo tombola con dentro i numeri da 1 a 100; ne estrae dieci, e il vostro compito è, partendo da quei numeri, di trovare due insiemi disgiunti (l'unione dei quali non sia necessariamente tutto l'insieme iniziale: potete usarne meno) aventi la stessa somma. Avete un minuto di tempo.*
>
> *Supponendo che voi siate velocissimi a far di conto, quali sono le probabilità che avete di vincere? E se il conduttore potesse scegliere qualche numero in funzione di quelli già estratti?*

> *La seconda versione del gioco "per persone normali" consiste nell'estrarre meno numeri, rendendo la cosa più facile. Cosa succede se ne vengono estratti nove? E con otto?*

Se non vi ricordate, andate a dare un'occhiata al numero scorso: c'erano due soluzioni, di ***Millenium Bug*** e di ***Cid***, che a quanto pare non erano esattamente corrette. ***Michele*** ci ha scritto:

> Ho pensato per tutto il mese di luglio al problema 138/2, quello del gioco in cui bisogna dividere un insieme di numeri da 1 a 100 in due insiemi disgiunti con la stessa somma. Mi è sembrato bello e difficile, spesso ci ho pensato in piena notte, tra un sonno e l'altro (è il mio momento più fertile :-) ), ma non sono arrivato a nulla e dunque appena è uscito RM139 sono corso a vedere le soluzioni. La soluzione di Millennium bug mi sembra sbagliata: 1022 non sono le somme che si possono fare; una stessa somma può essere ottenuta con sottoinsiemi diversi. Per esempio 10 = {4,6}, {3,7}, {2,3,5}, {1,2,3,4}, ...
>
> Anche la soluzione di Cid mi sembra sbagliata.
>
> *"In generale, se il sacchetto contiene i numeri da* 1 *a N: si ha probabilità di vincere minore del 100% solo se ne vengono estratti non più di* 1+*Int(log*2*(N))."*
>
> Cioè: se estraggo un insieme di *M* numeri, con *M*>1+*int(log*2*(N))*, la probabilità di vincere è 1. Controesempio: *N*=15, *M*=5>1+*int*(*log*2(15))=4. L'insieme di 5 numeri {6,10,11,12,14} (per esempio) non si può suddividere in due insiemi disgiunti di ugual somma e dunque non è vero che la probabilità di vincere è 1.

A distanza di pochi giorni ***Franco57*** e ***Cid*** si sono mossi a studiare il problema e ci hanno fornito un riassunto dei loro risultati, ***Cid*** insiste nel sottolineare che chi ha fatto la maggior parte del lavoro è stato ***Franco57***, che ha poi fatto il sommario dei risultati:

> Cercando una dimostrazione alla congettura che se il sacchetto contiene i numeri da 1 a *N* si abbia probabilità di vincere minore del 100% solo se ne vengono estratti non più di $(1+Int(Log_2 N))$, sono stati trovati alcuni controesempi, scoperti da entrambi, il più semplice dei quali è il seguente: *N* = 7; insieme estratto = 3, 5, 6, 7. Chiaramente da 1 a 7 ci sono 3 potenze del 2 e quindi secondo la congettura comunque si estraggano più di 3 numeri, ad esempio 4, il gioco riesce sempre, ma con 3, 5, 6, 7 appunto non si riesce. Per *N*=7 questo è l'unico caso "storto".
>
> L'analisi è proseguita da una parte con un attacco massivo: sono stati verificati col computer un miliardo di differenti combinazioni per 8 numeri nel range 1-100 trovando sempre almeno due sottoinsiemi disgiunti aventi la stessa somma (con la sorpresa che per molte combinazioni vi erano anche più di venti somme differenti che si potevano ottenere con due differenti sottoinsiemi degli 8 numeri).
>
> La verifica esaustiva avrebbe richiesto di verificare più di 186 miliardi di combinazioni: $\frac{100!}{92!\cdot 8!}=186087894300$.
>
> Dall'altro lato l'analisi è proseguita nel tentativo di identificare quali sono i casi che sfuggono alla congettura, sperando (vanamente) di dimostrare che fossero gli unici. Un modello di controesempio è il seguente: $N-k_1, N-k_2, \ldots, N-k_s$ con $k_s$ che rispetti le regole:
>
> $$k_1 \geq 0$$
>
> $$k_{2r} > k_{2r-1} + k_{2r-2} + \cdots + k_{2r} - k_{2r-1} - k_{2r-2} - k_1$$

$$k_{2r+1} > k_{2r} + k_{2r-1} + \cdots + k_{2r} - k_{2r-1} - k_{2r-2} - k_1$$

Il motivo è che per $N$ abbastanza grande, si scopre proprio $N = k_{s+1}$, due suoi sottoinsiemi disgiunti possono dare la stessa somma solo se contengono lo stesso numero di elementi, perché il $N$ si semplifica. Quindi i $k_s$ stessi sono scelti in modo da avere con sicurezza questa proprietà. Ad esempio il modello

$N$, $N$–1, $N$–2, $N$–4, $N$–7, $N$–13, $N$–24, $N$–46 dà per $N$ = 100 ($N$>46+24+13+7–2–1–0) un caso in cui il gioco non riesce per 8 numeri estratti

100, 99, 98, 96, 93, 87, 76, 54

Queste generazioni, come la congettura, sembrano anch'esse avere una relazione stratta con le potenze del 2.

Altri esempi che rientrano nel modello sono:

100, 99, 98, 96, 92, 84, 72, 44

100, 99, 98, 96, 92, 84, 71, 45

100, 99, 98, 96, 92, 84, 70, 46

100, 99, 98, 96, 92, 84, 48, 24

Infine è stato trovato un esempio che sfugge anche a questa regola:

100, 99, 98, 96, 48, 24, 12, 6

In conclusione:

- grazie a Millenium Bug sappiamo che il gioco riesce sempre con 10 numeri estratti sui primi 100

- sappiamo che ci sono casi, pensiamo abbastanza rari, che il gioco non riesce per 8 numeri su 100

- non sappiamo niente per 9 numeri su 100 e

- non sappiamo niente per il caso generale $K$ numeri su $N$.

Loro a questo punto ci chiedono la soluzione istituzionale, ma come sempre in questi casi il Capo preferisce lasciare un po' più di tempo per vedere se si fa avanti qualcun altro.

## 4.2 [139]

### 4.2.1 Alieni [1] (Alla conquista di un buffo pianeta)

I problemi di agosto avevano entrambi come protagonisti due simpatici alieni, vediamo prima il primo di cosa parlava:

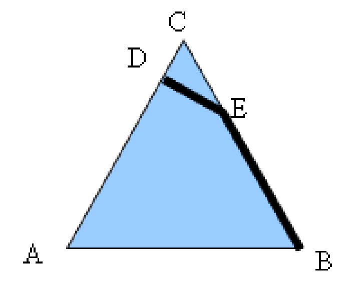
> *Pluff e Ciuff stanno cercando di assalire una fortificazione piuttosto strana: l'unico modo per entrarci è quello di riuscire ad arrivare quasi alla cima di un cono perfettamente liscio che, visto da lontano, sembra evidentemente un triangolo isoscele con angolo al vertice $\alpha$. Ciascuno dei due sviluppa per conto proprio la medesima strategia: l'idea è di tirare un "lazo", prendere la cima della montagna e poi tirarsi su per la corda, ma con alcune differenze nell'esecuzione. Pluff ha fatto un anello fisso di corda e ha legato un'altra corda all'anello; il lazo, quindi, non risulta scorsoio. Ciuff ha invece fatto un perfetto lazo con nodo scorsoio al fondo. Senza ingombrarsi tra loro, i due si apprestano alla conquista della roccaforte.*
>
> *Per quali valori di $\alpha$ i nostri eroi riusciranno a salire sul cono?*

Tante le soluzioni che abbiamo ricevuto per questo problema: ***Andrea***, ***trentatré***, ***Franco57***, ***Silvano***. Il *premio speciale del problemista di agosto*, che consiste nella stima infinita del Capo, lo vince ***Franco57*** che ha notato un'incongruenza:

> Ma non ho capito una cosa: nel quesito 1 è Ciuff ad essere una femmina e Pluff per contrapposizione un maschio, ma nel quesito 2 è Pluff ad essere la femmina. A me pare Pluff un nome maschile e Ciuff un nome femminile, forse si tratta di un errore tipografico nel quesito 2.

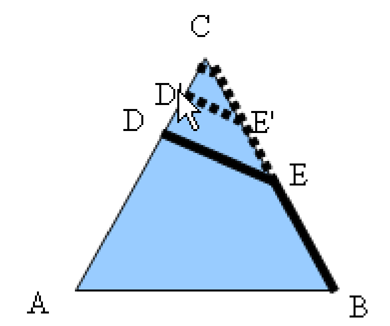
A quanto pare il Capo l'aveva fatto apposta. Secondo noi per vedere se ve ne accorgevate, secondo lui per dimostrare che Ciuff e Pluff sono una razza in cui il sesso ha valenze diverse dalle nostre. Ma lasciamo perdere i trucchi del Capo e andiamo avanti: per una volta ***Andrea*** ci ha mandato soluzioni tutte belle impaginate su un foglio elettronico, per cui lo pubblico proprio volentieri:

> In questo problema abbiamo due approcci differenti allo stesso problema. Per prima cosa dobbiamo considerare sia le corde che il cono in questione privi di attrito, le corde inestensibili e i due alieni alla base del cono. Nel caso di pluff abbiamo che il suo anello si stabilizzerà quando le forze che tendono a spingerlo verso l'alto o verso il basso si annullano e quindi quando l'anello scarica tutta la forza perpendicolarmente alla parete del cono.




14 *Figura I di* ***Andrea***.

> Quindi dobbiamo imporre un angolo α = ACB tale che il segmento DE in figura (1) riesca ad essere perpendicolare alla parete del cono prima di superare il vertice, quindi dobbiamo imporre
>
> $\alpha < 90°$
>
> con il caso limite α = 90° in cui la corda raggiunge la perpendicolarità quando arriva il corrispondenza del vertice. L'altezza in cui si colloca DE dipende solo dall'ampiezza della circonferenza di corda scelta da pluff. Il caso di ciuff crea qualche problema in più perché, quando il suo anello raggiunge la perpendicolarità con la parete del cono, ciuff ha la possibilità di diminuirne la lunghezza facendo salire il suo anello fino a quando non coinciderà con il vertice.




15 *Figura II di* ***Andrea***.

> A prima vista è necessaria solo la condizione di α < 90° per fare in modo che l'anello non sfugga dal cono una volta raggiunto il vertice. A seconda vista si vede che solo con questa condizione si possono creare situazioni paradossali. Immaginiamo che l'anello di ciuff sale di 10 metri dopo che ciuff ha tirato la corda di 2 metri. Allora avremo che anche la stessa ciuff sarà salita di circa 8 metri sulle pareti del cono, cosa che dobbiamo considerare inaccettabile in primo luogo perché ciuff deve posizionare la corda prima di cominciare a salire, in secondo luogo per motivi fisici (anche se in realtà stiamo parlando di alieni...).
>
> Dobbiamo quindi calcolare il caso limite in cui ogni circonferenza parallela alla base è lunga tanto quanto la lunghezza dell'apotema del cono formato dal vertice e dalla circonferenza stessa. Abbiamo che
>
> $$l = \text{lunghezza apotema};$$
>
> $$r = \text{raggio circonferenza} = l \operatorname{sen}(\alpha/2)$$
>
> e quindi

Circonferenza base = apotema;

$2\pi l$ sen($\alpha$) = $l$;

sen($\alpha$) = $1/2\pi$.

Con la duplicazione del seno abbiamo che

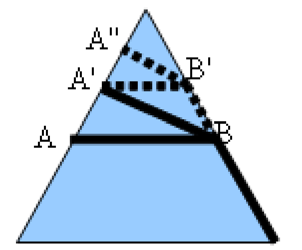
sen($\alpha$) = 2sen($\alpha$/2)cos($\alpha$/2) = 2 x $1/2\pi$ x ($\sqrt{4\pi^2 - 1}$)/$2\pi$ =

= $\sqrt{4\pi^2 - 1}/2\pi^2$ = 6,20/19,73 = 0,314

da cui si ricava l'angolo al vertice $\alpha$ = 19°, approssimato per eccesso all'intero più vicino. In questo caso abbiamo che l'anello può variare la sua posizione senza che ciuff tiri di una certa lunghezza la corda. Per arrivare al caso reale dobbiamo imporre che l'anello decresca più velocemente del caso limite, e quindi dobbiamo imporre un angolo $\alpha$ > 19°.

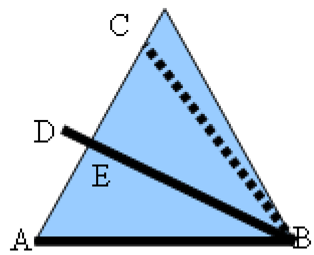
Quindi gli angoli al vertice per i quali è possibile riuscire a penetrare all'interno della fortezza-cono sono gli angoli 19° < $\alpha$ < 90°.

Ho considerato le circonferenze parallele alla base anziché le ellissi perpendicolari alla parete perché più facili da trattare, ma praticamente non ci dovrebbero essere problemi fondamentali.



16 *Figura III di* ***Andrea***.

L'unica cosa che cambia leggermente è che le ellissi decrescono un po' più lentamente delle circonferenze in base al ragionamento che segue. Abbiamo visto che gli angoli $\alpha$ per cui è possibile un assalto sono quelli compresi tra 20° circa e 90°, per cui gli angoli alla base del triangolo isoscele saranno compresi tra 160° e 90°. Un angolo alla base è quindi compreso tra 45° e 80°. Consideriamo gli angoli alla base 60° < DAB < 80°.



17 *Figura IV di* ***Andrea***.

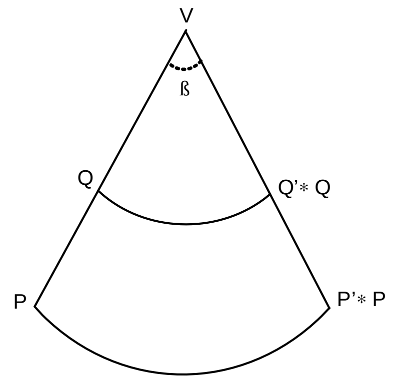
Con un movimento rigido facciamo ruotare la circonferenza di base (che sarebbe il segmento AB di figura (4)) sul perno B fino a farla "poggiare" di nuovo alla parete del cono, cosa che è possibile dal momento che abbiamo scelto degli angoli alla base opportuni. Qualunque circonferenza compresa tra la base AB e la circonferenza BC di figura (4) ottenuta ruotando la circonferenza di base sul perno B sarà quindi maggiore della lunghezza dell'ellisse ottenuta intersecando il cono con il piano su cui giace la circonferenza che abbiamo scelto (la spiegazione di questo fatto è che la circonferenza sarà tutta esterna al cono mentre l'ellisse sarà esattamente sul cono, per cui la prima è chiaramente maggiore della seconda). Visto che l'angolo CAB=ACB Є [60°;80°] allora tra le circonferenze intermedie ce ne sarà una che giace su un piano che interseca perpendicolarmente il cono, e quindi che formerà l'ellisse perpendicolare alla parete che ci serve. Per quanto detto sopra abbiamo che la circonferenza di base è quindi "più lunga" dell'ellisse perpendicolare alla parete che passa per lo stesso punto di origine B. Lo stesso tipo di ragionamento si fa con l'insieme degli angoli rimanenti. Ora quindi abbiamo che una circonferenza e un'ellisse, una volta che la loro origine ha percorso l'intera lunghezza dell'apotema, saranno tutte e 2 di lunghezza 0. Come conseguenza le ellissi decrescono più lentamente delle circonferenze perché, arrivando entrambe a 0 partendo dallo stesso punto di partenza, le ellissi di questo tipo sono sempre più piccole delle circonferenze, anche se non sono sicuro al $10^9$ % di questo ragionamento. L'unica variazione quindi sarebbe un angolo limite $\alpha$ leggermente maggiore di quello per le circonferenze, cosa che però non cambia il significato della soluzione.

Il modo in cui Andrea dubita dei suoi ragionamenti ci è sembrato eccezionale... ***Franco57*** a proposito risolve con la solita nonchalance:

Innanzi tutto, sia per Pluff che per Ciuff, occorre che il proprio lazo "tenga", cioè non sfugga oltre il vertice del cono. In generale, una volta lanciato, il lazo si disporrà attorno al cono in una posizione tale da minimizzare l'energia potenziale, cioè quella che porta Pluff o Ciuff il più in basso possibile (trascurando il peso della corda).

Tagliamo idealmente la superficie del cono e stendiamola su un piano: diventerà un settore circolare di angolo $\beta$ (vedi figura).

Tra $\alpha$ e $\beta$ c'è una relazione diretta: $\frac{r}{l}=\sin\frac{\alpha}{2}$ ; $\frac{2\pi\cdot r}{l}=\beta$ dove $r$ è il raggio della base del cono e $l$ il lato obliquo, da cui $\alpha = 2\cdot\arcsin\frac{\beta}{2\pi}$.



18 *Figura di **Franco57***.

Supponiamo che il lazo sia inizialmente poggiato in $P$, dove gravita il peso, e sia steso circolarmente: la sua lunghezza è quindi l'arco $PP'$.

Per Pluff (anello fisso) il valore limite affinché il lazo non sfugga è l'angolo $\beta$ per cui $\overline{PV}$ andata e ritorno è uguale all'arco $PP'$, cioè $\beta = 2$ radianti, quindi $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{\pi}$. Se infatti $\beta > 2$ un lembo del lazo riesce a risalire sempre più fino alla cima diminuendo l'energia potenziale del sistema. Per affermarlo basta osservare che se il lazo si deforma in modo da puntare verso il vertice, fino ad un punto $Q$ intermedio tra $P$ e $V$ (vedi figura), fare un giro circolare e ritornare al punto di partenza, quest'ultimo necessariamente si abbassa, infatti ciò si ottiene quando

$$arco(PP') > 2\cdot\overline{PQ} + arco(QQ') \Leftrightarrow \beta\cdot\overline{PV} > 2\cdot\overline{PQ} + \beta\cdot\overline{QV}$$
$$\Leftrightarrow \beta\cdot\left(\overline{PV} - \overline{QV}\right) > 2\cdot\overline{PQ} \Leftrightarrow \beta\cdot\overline{PQ} > 2\cdot\overline{PQ} \Leftrightarrow \beta > 2$$

D'altro canto, se $\beta < 2$ il lazo non può uscire dal cono perché dovrebbe prima ridursi ad una corda doppia che punta verso V e torna indietro e questo farebbe risalire il punto di partenza dove gravita il peso di Pluff.

Nel caso di Ciuff il ragionamento è analogo e questa volta il valore limite è $\beta = 1$ radiante, quindi $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{2\pi}$. Infatti, per vedere che per $\beta > 1$ il cappio può stringersi fino ad uscire diminuendo costantemente l'energia potenziale, basta che valga per ogni $Q$ intermedio tra $P$ e $V$:

$$arco(PP') > \overline{PQ} + arco(QQ') \Leftrightarrow \beta\cdot\overline{PV} > \overline{PQ} + \beta\cdot\overline{QV}$$
$$\Leftrightarrow \beta\cdot\left(\overline{PV} - \overline{QV}\right) > \overline{PQ} \Leftrightarrow \beta\cdot\overline{PQ} > \overline{PQ} \Leftrightarrow \beta > 1$$

E se $\beta < 1$ il cappio non può chiudersi ed uscire dal vertice perché porterebbe Ciuff più in alto.

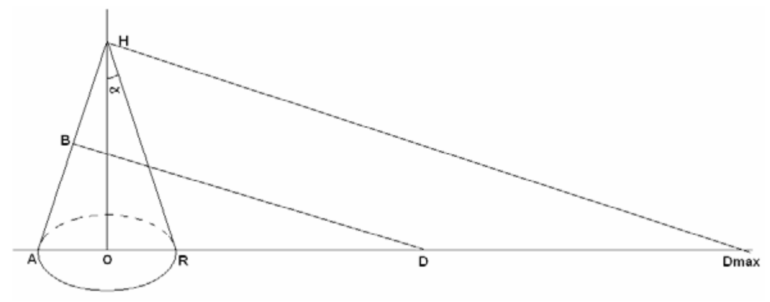
Pluff, per arrivare abbastanza in alto, dovrà costruire un lazo chiuso sufficientemente corto ed essere quindi molto preciso nel lancio come un vero space cowboy, il doppio della distanza dal vertice sulla superficie del cono è ad esempio sufficiente. Quale forma prenderà il lazo una volta assestato non è facile da calcolare (presumo una ellisse) ma non ha importanza.

Ciuff dopo il lancio attenderà che il sistema assuma energia potenziale minima e perciò si troverà con lazo completamente aperto e di forma ottimale (perciò scenderà un poco). Poi dovrà stringere il lazo, che mentre si riduce manterrà la sua forma ottimale attorno al cono, fino a portarsi abbastanza vicina al vertice (non facile senza attrito sul cono, manovra degna di una vera space cowgirl).

Prima di passare oltre, vogliamo ancora proporvi la versione di ***Silvano***:

Allora io approccio il problema così (speriamo bene): incomincio con analizzare **il caso del nodo scorsoio** e aggiungo 3 "ovvie" ipotesi:

1. Le pareti del cono sono perfettamente lisce e la corda non ha attrito con esse.
2. H del cono è tale per cui è necessaria la corda (altrimenti il cono potrebbe essere più basso degli alieni…) → altezza cono >> altezza alieni
3. Il nodo scorsoio è ideale, ossia stringe e non si allarga (mi serve perché altrimenti quando il nostro alieno si avvicina dopo aver fatto centro si allarga il cappio…)




19 *Figura di **Silvano**.*

In queste condizioni ignorando il problema di fare centro (semplicemente perché si potrebbe girare intorno al cono e poi fare il cappio :D; nel caso interessi la probabilità è legata alla gaussiana bidimensionale di fare centro con le sue variabili aleatorie X e Y) il nostro alieno tirando la corda farà sì che questa si ponga in modo ortogonale al lato opposto del cono, quindi allontanandosi dal solido, la fa avvicinare alla vetta.

Il disegno illustra il ragionamento: innanzitutto si ha che in base al triangolo "HOR":

$$\frac{R}{H} = \tan(\alpha) \leftrightarrow R = H \cdot \tan(\alpha) \qquad [4]$$

Supponendo la corda lanciata e tirata in "D" il triangolo ABD per l'ipotesi 1) è ortogonale, in quanto, se così non fosse, avrebbe scorso lungo la parete AH.

Si può provare la cosa con un pezzetto di spago e una matita inclinata… ci fermiamo sempre all'ortogonalità. Questo perche in quel caso e solo in quello le componenti "della forza che tira la corda verso il lanciatore" e "la forza di resistenza della pareti" sono sullo stesso asse e quindi a meno di non tagliare le pareti (ed in quel caso viene una bella conica ellittica) si rimane equilibrio statico.

Mettendoci dentro un po' di formule:

$$r_{AH}: Y = \frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot X + H \qquad [5]$$

$$r_{BD}: Y = -\tan(\alpha) \cdot (X - D) \qquad [6]$$

Ora, per non uscire dal cono, la distanza D è tale che:

$$D \in \left[ R; \frac{H}{\tan(\alpha)} \right] \qquad [7]$$

Questo perché se D>Dmax (ossia $D > \frac{H}{\tan(\alpha)}$) si ha per X=0 Y>H in $r_{BD}$ il che significa che la corda esce dal cono.

Se sostituisco R nella [7] con la [4] si ha una formula di D più chiara per un'altra considerazione:

$$D \in \left[ H \cdot \tan(\alpha); \frac{H}{\tan(\alpha)} \right] \qquad [8]$$

Ossia che si può salire sul cono tirando la corda solo fin quando $\tan(\alpha)$<1, ossia un angolo di 45°, altrimenti l'intervallo ha un valore assurdo.

Questo è dovuto al fatto che se l'angolo è maggiore di 45° la corda uscirà inesorabilmente dal cono (consiglio per gli assediati!).

**Lancio con cerchio fisso:**

Anche in questo caso valgono le considerazioni sull'angolo limite di 45°, solo che occorre aggiungere 2 postille: una prima è che occorre calcolare la probabilità di fare centro (e questo dipende dalle capacità del nostro lanciatore: io metto la formula della gaussiana bidimensionale per il resto occorrono un po' di tentativi con gli alieni) la seconda è che la corda non può essere tirata e quindi avvicinata alla vetta, ma solo cinta intorno ad essa secondo un ellissi e quindi una volta arrivato in cima il nostro scalatore potrebbe non arrivare comunque alla vetta se il cerchio a cui ha attaccato la corda è troppo grande.

Il problema è quindi MOLTO più complesso in questo caso.

Gaussiana Bidimensionale:

$$P(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} \qquad [9]$$

Ovviamente si fa centro (supponendo il cerchio rigido in aria, altrimenti occorre considerare anche le deformazioni che non è detto siano) se $X^2 + Y^2 < R^2$, trasformo in polari:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot sen(\theta) \end{cases} \qquad [10]$$

Ipotizzo che la varianza dell'errore sia la stessa nelle 2 variabili e che sia nullo il valore medio (insomma l'alieno sa quel che fa con la corda…), si ha che:

$$P.centro = \int_{Cerchio:R} P(x, y) = \int_{Cerchio:R} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2} e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2}\left[X^2 + Y^2\right]} dx \cdot dy \qquad [11]$$

Calcolo lo Jacobiano della trasformazione:

$$J(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\cdot sen\theta\\ sen\theta & r\cdot\cos\theta\end{pmatrix} \qquad [12]$$

Da cui:

$$\det(J)=r \qquad [13]$$

Quindi effettuando il cambio di variabili e considerando R il raggio del cerchio fatto con la corda in [11] si ha:

$$P.centro=\int_0^R\int_0^{2\cdot\pi}\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot r\cdot d\theta\cdot dr=\int_0^R\frac{r}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{r^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot dr=\left[-e^{-\frac{r^2}{2\cdot\sigma^2}}\right]_0^R=1-e^{-\frac{R^2}{2\cdot\sigma^2}} \qquad [14]$$

Che con il test Piotr :D torna (se R=0 → non ci becco mai, se R è infinito ci prendo sempre).

Rimane ora da vedere se l'ellisse che ha tagliato il cono riesce a farci salire fino alla vetta o almeno ad una distanza inferiore a quella dell'altezza del bipede umanoide che scala il cono una volta arrivati al nodo!

Sarebbe da calcolare (a partire dalla circonferenza della corda e la relativa ellisse…) solo che a parte il fatto che le funzioni in questione non sono elementari, è più semplice allo scalatore tirare 2 corde invece che 1 una volta giunto al nodo per riportarsi al caso del cappio e quindi, alla fine arrivare in cima.

Ora basta, siamo in ritardo e non commento nemmeno più.

### 4.2.2 Alieni [2] (in realtà, stiamo ascoltando i Deep Purple)

Allora, questo problema era difficile, o più che altro era difficile capire come diavolo era fatto il pineta. Vediamo cosa vi avevamo scritto:

*Ci troviamo su un pianeta dal nome MadeInJapan, è il solito sferoide oblato con l'asse di rotazione coincidente con l'asse minore, ma dalla composizione originale: a seconda della distanza dall'asse di rotazione (è come se fosse una girella tagliata a forma di sfera) è composto da strati omogenei di materiali diversi.*

*Lo strato più esterno è fatto di Attilio, mentre lo strato immediatamente più interno è formato da monossido di diidrogeno. Ciuff e Pluff sono sul pianeta per cercare di stabilire se sia sfruttabile o no come miniera: il business plan prevede che si parta con l'impresa se ci sono almeno un milione di snort cubici di attilio nello strato più esterno.*

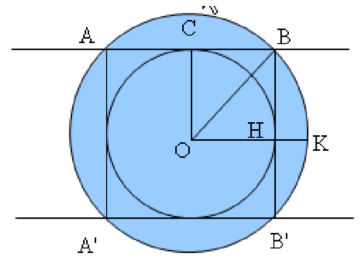
*Tutto quello che sappiamo sul pianeta lo ha comunicato Pluff: nel suo solito modo oscuro ci ha detto che il rapporto tra il volume della più piccola sfera che può contenere il pianeta e il volume della più grande sfera che può essere contenuta dal pianeta è di* 1.331 *a* 1*; la spiegazione piuttosto oscura nasce dal fatto che lei e Ciuff, a causa di un piccolo incidente in fase di atterraggio, sono atterrati in punti diversi del pianeta. Gli è andata comunque bene, visto che Pluff e Ciuff possono sopravvivere solo sulla linea di confine tra l'attilio e il monossido di diidrogeno: sono finiti su due linee di confine diverse, ma hanno calcolato che la distanza in linea retta tra di loro è di* 120 *snort e, in queste condizioni, meglio di così non poteva andare.*

*Ora, dovete decidere: parte o no, il progetto di sfruttamento minerario?*

Alzi la mano chi ha capito al volo che cosa c'entravano i Deep Purple con tutta la storia degli alieni sulla girella... no, quello che intendo dire è che ci ho messo ora a capire io com'era fatto il pianeta, tanto che poi non ho nemmeno tentato di risolvere il problema.

Potenza delle spiegazioni criptiche del Capo... anche se questa volta ho avuto la mia vendetta: anche ***Zar*** si è lamentato!

Ma veniamo al dunque: ci hanno provato in pochi, solo ***Andrea*** e ***Franco57***, quindi pubblichiamo entrambi, cominciando proprio con ***Andrea***:




20 *Figura I di **Andrea***.

> Le sfere indicate da pluff nel problema sono il pianeta stesso (la più grande sfera che può contenere una sfera è la sfera stessa) e la più grande sfera tangente internamente al cilindro di area di base maggiore (la più grande sfera che può essere contenuta dal pianeta diversa dal pianeta stesso). L'indicazione sulla distanza tra ciuff e pluff è data dalla lunghezza minima in linea d'aria tra le due circonferenze che determinano i confini tra attilio e diidrogeno. In pratica la distanza tra i due non è altro che l'equivalente tridimensionale del segmento AB tangente alla circonferenza più piccola in figura (1). Infine viene fornito il rapporto tra i volumi delle due sfere prese in considerazione.
>
> Per calcolare il rapporto tra i raggi delle due sfere è sufficiente calcolare la proporzione
>
> $$4/3\pi\ R^3 : 4/3\pi\ r^3 = 1331 : 1$$
>
> dove $R$ = raggio sfera più grande e $r$ = raggio sfera più piccola. Dalla proporzione si ricava
>
> $$4/3\pi\ R^3 = 4/3\pi\ r^3 \text{ x } 1331;$$
>
> $$R^3 = r^3 \text{ x } 1331;$$
>
> $$R = 11\ r.$$
>
> Avendo il rapporto tra i due raggi possiamo calcolare quanto vale effettivamente il raggio più piccolo applicando il teorema di Pitagora al triangolo COB di figura (1)
>
> $$OB^2 - OC^2 = 60^2;$$
>
> $$R^2 - r^2 = 3600;$$
>
> $$121\ r^2 - r^2 = 3600;$$
>
> $$r^2 = 3600/120;$$
>
> $$r = \sqrt{30};\ R = 11\sqrt{30}.$$
>
> A questo punto possiamo calcolare il volume del pianeta, che è
>
> $$4/3\pi\ R^3 = 4/3 \text{ x } 3,141 \text{ x } 1331 \text{ x } 30 \text{ x } 5,47 = 914.730,\ 81 \text{ snort}^3$$
>
> e il volume del cilindro maggiore senza considerare le sezioni di sfera che produce, che sarebbero l'analogo tridimensionale a base circolare delle porzioni di piano della figura (1) delimitate dall'arco e dal segmento AA' e dall'arco e dal segmento BB' (il fatto che AA' e BB' sono tangenti alla sfera interna è solo una casualità dovuta alla mia scarsa abilità nel disegno al computer). Il volume di questo cilindro è
>
> $$\pi\ r^2 \text{ x } 120 \text{ (Area base x altezza)} = 3,141 \text{ x } 30 \text{ x } 120 = 11.307,6 \text{ snort}^3.$$
>
> A questo punto si può dimostrare che la somma dei volumi delle sezioni di sfera che abbiamo escluso è minore del volume appena calcolato del cilindro. Per la dimostrazione ci basiamo sempre sul modello bidimensionale del pianeta in figura (1) (che alla fine è solo il pianeta tagliato in 2 parti da un piano passante per l'asse cui fanno riferimento anche i cilindri di vario materiale). La dimostrazione

dovrebbe essere abbastanza facile perché basta notare che sia il cilindro che le sezioni di sfera hanno la stessa base circolare, ma che l'altezza del cilindro è molto più grande dell'"altezza" delle sezioni di sfera. Infatti l'altezza del cilindro è

$$AB = 120 \text{ snort}$$

mentre la somma delle altezze delle sezioni di sfera è

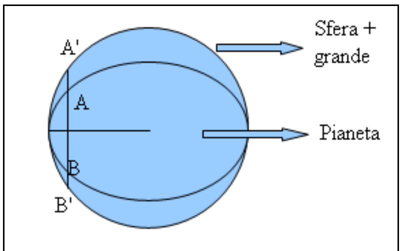
$$2(OK - OH) = 2(R - 60) = 2(60{,}24 - 60) = 2 \times 0{,}24 = 0{,}48 \text{ snort}$$

dove l'altezza della sezione di sfera è definita come il segmento di maggiore lunghezza perpendicolare alla base della sezione di sfera condotto da un punto della calotta sferica. Quindi, anche a volere calcolare il volume delle due sezioni di sfera con la formula "base x altezza", il loro volume sarebbe in ogni caso molto minore di quello del cilindro. Come conseguenza immediata abbiamo che, se viene rispettata la disequazione

[1] (Volume sfera più grande) – 2(Volume cilindro più grande) > 1.000.000

a maggior ragione sarà rispettata la disequazione

(Volume sfera più grande) – (Volume cilindro più grande) – 2(Volume sez. sfera) > 1.000.000.



21 *Figura II di* ***Andrea***.

In ogni caso questa formula non dovrebbe essere necessaria in quanto basta vedere che il volume dell'intera sfera è minore di un milione. Le cose cambiano se consideriamo "la più grande sfera che può contenere il pianeta" non il pianeta stesso, ma la più grande sfera contenente il pianeta che consideriamo schiacciato ai poli. In questo modo il teorema di Pitagora applicato prima non si applica più con al secondo membro $60^2$, ma con il secondo membro uguale a $(60 + y)^2$ in quanto nel teorema di Pitagora dobbiamo considerare anche il segmento AA' di figura (2) che prima non abbiamo preso in considerazione perché pensavamo il pianeta perfettamente sferico. La lunghezza che pluff e ciuff determinano tra di loro è il segmento AB, che però non possiamo utilizzare per il teorema di Pitagora perché dobbiamo usare la corda A'B', quindi i calcoli successivi sono giustificati.

In questa maniera i calcoli diventano

$$R^2 - r^2 = (60 + y)^2;$$

$$120\, r^2 = (60 + y)^2;$$

$$r^2 = (60 + y)^2/120$$

$$r = (60 + y)/2\sqrt{30};\ R = 11(60 + y)/2\sqrt{30}$$

Quindi il volume del pianeta diventa abbastanza problematico perché in questa maniera abbiamo solo 2 dei 3 elementi che ci servono per calcolarne il volume in quanto, detti $a=R$ e $b$=(asse minore)/2 abbiamo che il volume dello sferoide è $4/3\pi R^2 b$ dove non conosciamo $b$. In ogni caso possiamo dire che il volume del pianeta è tanto minore di quello della sfera quanto maggiore è il suo "schiacciamento ai poli, e la formula del volume con l'incognita $b$ diventa

$$4/3 \times 3{,}141 \times 121(60 + y)^2 \times b = 4{,}17 \times 121(60 + y)^2 \times b = 504{,}57(60 + y)^2 \times b$$

Il volume del cilindro diventa

$$120 \times (\pi\, r^2) = 120 \times 3{,}141 \times (60 + y)^2/ 120 = \pi(60 + y)^2$$

La formula [1] quindi diventa

$$b \text{ x } 504{,}57(60+y)^2 - 2\pi(60+y)^3 =$$

$$= 1.816.452b + 60.548{,}\,4\,by + 504{,}\,57\,by^2 - 1.356.912 - 67.845{,}6\,y - 1.130{,}\,76\,y^2 - 2y^3 =$$

$$= -\,2y^3 + y^2(504{,}\,57b - 1.130{,}\,76) + y(60.584{,}\,4b - 67.845{,}6) + 1.816.452b - 1.356.912 > 1.000.000$$

Ora si tratta di capire per quali valori di $y$ e di $b$ il polinomio ottenuto diventa > 1.000.000. Per $b$=0 dovremmo scegliere una $y$<0 che non è possibile in base alla definizione di $y$ (che è il segmento AA’ di figura (2)) e a maggior ragione con $b$<0, quindi dobbiamo imporre per prima cosa $b$>0. Da notare che la condizione di $b$ per rendere ancora valida la dimostrazione sulle sezioni di sfera anche nelle porzioni di sferoide, e quindi per rendere valido il ragionamento anche per lo sferoide, è che ($b$–$r$)<AB/2, perciò

$$b < 60 + r;$$

$$b < 60 + (60 + y)/2\sqrt{30};$$

$$b < (120\sqrt{30} + 60 + y)/2\sqrt{30};$$

$$b < 65{,}\,47 + y/2\sqrt{30}$$

inoltre si deve verificare che $b < R$, e quindi

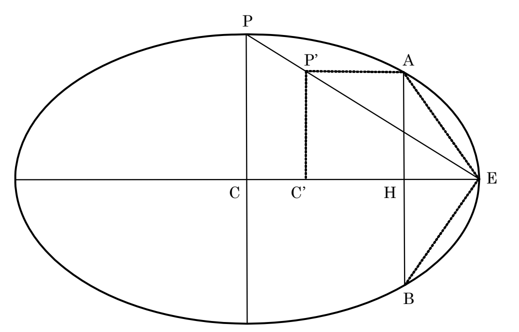
$$b < R = 60{,}24 + y$$

Quindi se lo sferoide è contenuto all’interno della sfera, come effettivamente succede in questo caso, il ragionamento sulle porzioni di sfera-sferoide vale sempre perché $b$ è sempre più piccolo del valor limite calcolato prima. Inoltre vediamo che il termine noto della [1] con $b$>1,3 è maggiore di 1.000.000, per cui basta prendere una $y$ sufficientemente piccola per fare in modo che i termini con la $y$ “contino relativamente” ai fini del risultato finale. In conclusione possiamo dire che i due alieni possono cominciare la trivellazione solo per valori di $b$>1,3 e con un valore appropriato della $y$ anche se non sono in grado di dire se c’è qualche limitazione superiore per $y$ e anche se dovessero esistere valori validi che non soddisfano la [1] a causa delle numerose approssimazioni usate nei calcoli.

Se vi sembra di avere ancora dei dubbi sulla geografia del continente, vediamo la versione di ***Franco57***:

Poniamo $P$ sia il polo nord (io lo definirei quello alla sinistra di dove sorgono le stelle fisse), $C$ il centro del pianeta, $A$ e $b$ i punti di atterraggio di Pluff e Ciuff, $E$ il punto sull’equatore sullo stesso mediano di $A$ e di $B$, come in figura.

Lo sferoide è un convesso, quindi $A$ sta dalla parte opposta di $C$ rispetto a $PE$.



22 *Figura di **Franco57**.*

$\overline{CP} = r$ è il semi-asse minore; $\overline{CE} = R$ è il semi-asse maggiore; $H$ è all’incrocio di $AB$ con $CE$.

$\overline{AH} = \overline{BH} = d$ (si suppone la parte sud simmetrica alla parte nord).

Poiché $1.331 = \dfrac{\frac{3}{4}\pi \cdot R^3}{\frac{3}{4}\pi \cdot r^3} = \left(\dfrac{R}{r}\right)^3$ conosciamo $k = \dfrac{R}{r} = \sqrt[3]{1.331} = 1.1$ e $d = \dfrac{\overline{AB}}{2} = 60$

snort.

Fissato $\overline{HE} = x$, il minimo volume di attilio deve essere dato dal solido di rotazione del triangolo (*ABE*) di area $S = d \cdot x$ poiché è il minimo convesso per *ABE*. Il volume del solido vale $V = S \cdot 2\pi \cdot b$, essendo *b* la distanza del baricentro del triangolo dall'asse di rotazione. *b* si minimizza individuando come polo nord $P'$ invece di $P$, che si trova all'incrocio di *PE*, per rispettare il rapporto *k*, con la parallela a *CE* per *A*, per rispettare la convessità. Il centro del pianeta "ottimizzato" è ora in $C'$, piede della perpendicolare a *CE* per $P'$.

Dunque abbiamo $\overline{P'C'} = d$ e $\overline{EC'} = kd$.

Ricordando che il baricentro di un triangolo è $\frac{1}{3}$ sopra la base, *b* per il pianeta ottimizzato vale $kd - \frac{2}{3}x$ ed il volume di attilio in funzione di *x* vale

$V_{\min}(x) = xd \cdot 2\pi\left(kd - \frac{2}{3}x\right)$ che assume il minimo per $x = \frac{\frac{3}{2}kd + 0}{2} = \frac{3}{4}kd$, essendo $V_{\min}(x)$ una parabola rovesciata che si annulla in 0 e in $\frac{3}{2}kd$. È un valore ammissibile perché rispetta il vincolo $x \leq kd$, necessario perché *A* si trovi sopra *PE*. Il volume minimo assoluto di attilio risulta alla fine

$$V_{\min} = \frac{3}{4}kd \cdot d \cdot 2\pi\left(kd - \frac{2}{3}\frac{3}{4}kd\right) = \frac{3}{4}kd^2 \cdot 2\pi\frac{1}{2}kd = \frac{3}{4}\pi \cdot k^2 d^3 \cong 615814{,}992 \text{ snort}^3$$

e quindi per fortuna il pianeta sembra salvo dallo scempio.

Io, lo ammetto, ancora adesso non ho le idee troppo chiare. Ma che importa, siamo già in ritardo e bisogna chiudere questo numero.

A rileggerci a ottobre!

# 5. Quick & Dirty

Ve lo diciamo? Massì, ve lo diciamo. Rubato a Ian Stewart, ma cambiati i nomi dei personaggi. Attenti, che la soluzione è molto "Dirty" (no, niente altri aiutini. Detto anche troppo).

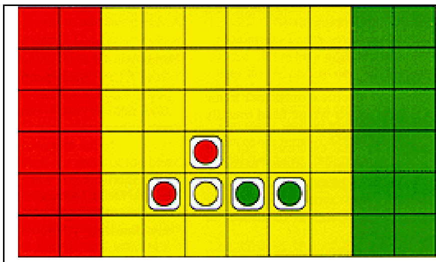
Sul pianeta PluffCiuff (sferoide oblato, tranquilli: certe perfidie le teniamo per un'altra sezione), nella galassia di Ademordna (orpo, suona bene! Potremmo riciclarla per un racconto di fantascienza...) vivono due soli esseri senzienti, Pluff e Ciuff. Pluff vive su un vasto continente in mezzo al quale c'è un enorme lago, Ciuff vive su un'isola in mezzo al lago. Né Pluff né Ciuff sanno nuotare, volare o teletrasportarsi: il loro unico modo di spostarsi è camminare sul suolo asciutto. Eppure, ogni mattina uno dei due va a fare colazione a casa dell'altro. Come fanno?

*La spiegazione più semplice (ma, come dicevamo, cattivissima...) è che PluffCiuff sia un pianeta composto da un emisfero di terre emerse e da un emisfero di acque (dolci, visto che è un lago); a quel punto, il "continente" di Pluff coincide con l'"isola" di Ciuff, e quindi non hanno problemi ad incontrarsi ogni volta che vogliono. Noi non abbiamo nessuna intenzione di andare avanti, ma ci sembra una splendida idea per il primo capitolo di un libro che si intitoli "Singularities for Dummies"...*

# 6. Zugzwang!

Quando ci hanno spiegato questo gioco, ci hanno messo su una peana sul fatto che bellissimi giochi hanno avuto vita brevissima e sono caduti da tempo nel dimenticatoio, e questo è un peccato, eccetera, eccetera, eccetera. Siamo stati pazientemente a sentire, ma questo gioco a noi non sembra proprio rientrare nella categoria degli "indimenticabili dimenticati"; non ve lo passiamo per cattiveria, ma vorremmo la vostra opinione.

Il gioco si chiama *Mentalis* ed era prodotto, nel 1977, dalla *Mentalis Ltd.* (alla faccia della fantasia...).



23 *La scacchiera*

Cominciamo dall'***attrezzatura***: vi servono una scacchiera, del tipo mostrato in figura, e una serie di pedine; attenzione che le pedine sono "tipo dama", ma con un punto colorato su ognuno dei due lati, e ve ne servono 50, distribuite come indicato nella tabella: all'inizio del gioco, tutte le pedine vengono messe in un contenitore che impedisca di vederle (il classico sacchetto della tombola va benissimo).

| **Recto** | **Verso** | **#** |
|---|---|---|
| Rosso | Verde | 10 |
| Rosso | Rosso | 5 |
| Rosso | Nero | 5 |
| Rosso | Blu | 5 |
| Rosso | Giallo | 5 |
| Verde | Verde | 5 |
| Verde | Nero | 5 |
| Verde | Giallo | 5 |

Mentre colorate le pedine, esaminiamo la scacchiera; la zona 6x6 centrale (gialla) è la cosiddetta ***zona di gioco***, mentre le due zone ai lati sono le ***zone di cattura***, e servono unicamente come deposito delle pedine catturate (per vedere "al volo" la situazione di gioco); e adesso, finalmente, si comincia a giocare.

Per prima cosa, si decide in un qualche modo chi tiene il ***rosso***, che gioca per primo; indi si orienta la scacchiera in modo tale che la zona di cattura rossa sia dalla parte di questo giocatore; ognuno dei giocatori a questo punto pesca dal sacchetto quattro pezzi senza sceglierli e guarda che colori hanno, ***senza farli vedere all'altro giocatore***. Uno di questi gettoni viene messo dal rosso sulla zona di gioco (gialla) in modo da avere visibile il colore verde o rosso: notate che, a questo punto, il rosso sa che colore c'è sotto, ma il verde no.

A questo punto, i giocatori si alternano (quindi tocca al verde) e hanno due possibilità:

1) Piazzare un pezzo su una casella della scacchiera: il pezzo deve sempre mostrare la faccia rossa o verde, e il giocatore avversario non sa che colore c'è sotto: attenzione che il pezzo deve essere piazzato sempre in una casella ortogonalmente adiacente ad un pezzo già presente.
2) Girare uno dei pezzi presenti sulla scacchiera che non sia stato girato al turno precedente: qui, dipende da che colore vi viene fuori:
    a) Se saltano fuori verde o rosso, non succede niente e il turno finisce.
    b) Se salta fuori il nero, chi ha girato paga la penalità di un pezzo all'avversario, spostando un pezzo dalla sua zona di cattura a quella dell'avversario; se il giocatore che paga penalità non ha pezzi nella zona di cattura, pesca un pezzo a caso dal sacchetto e lo mette nella zona di cattura dell'avversario; successivamente al pagamento della penalità, il pezzo nero viene rivoltato sul verde o rosso, com'era prima.
    c) Se salta fuori il blu, il giocatore ha il diritto di saltare con la pedina blu un pezzo ortogonalmente adiacente atterrando in una casella libera subito dopo il pezzo saltato e di portare entrambi i pezzi nella propria zona di cattura; se questa mossa non è possibile (o perché non c'è un pezzo ortogonalmente adiacente, o perché ce ne sono più di uno e non è possibile atterrare nella casella libera), allora il pezzo blu viene posto nella zona di cattura dell'avversario.
    d) Se salta fuori il giallo, il giocatore può far saltare qualsiasi pezzo (anche giallo, ma non quello appena girato) in qualsiasi punto della zona di gioco (purché sia

ortogonalmente adiacente a un pezzo presente); il pezzo giallo, dopo la mossa, resta dalla parte gialla e non può essere più girato: se il "salto" è impossibile (ad esempio perché è l'unico pezzo sulla scacchiera e lo avete girato), non si fa nulla.

E adesso, un po' di casi particolari.

- Ogni volta che si forma un quadrato 2x2 rosso o verde, viene immediatamente catturato dal giocatore rosso o verde, il quale aggiunge i pezzi alla propria zona di cattura ("immediatamente" significa che potete catturare anche se sta toccando all'avversario).
- Ogni volta che si forma un quadrato 2x2 giallo, il giocatore che l'ha formato lo cattura immediatamente (attenzione che potreste trovarvi dei casi strani tipo "due gialli, giro un pezzo vicino che è giallo, sposto un giallo in modo da fare un 2x2 giallo, prendo": perfettamente regolare).
- Quando un giocatore ha finito i pezzi in mano, non parte subito a pescare dalla sacca, ma aspetta il proprio turno; a questo punto, *gira due pezzi* e pesca quattro pezzi: nel caso (improbabile) in cui non ci siano due pezzi da girare, gira quello che può.
- Se finiscono i pezzi nel sacchetto, ci si scrive quanti pezzi si sono catturati e tutti i pezzi catturati finiscono nel sacchetto.
- Un giocatore non può guardare che colore ha un pezzo nella zona di gioco (se non "girandolo" durante il suo turno), ma può; in qualsiasi momento guardare il colore dei pezzi nella sua area di cattura.
- Se si arriva ad una condizione in cui l'unico gioco possibile è una ripetizione delle stesse mosse, la partita è dichiarata patta.

Bene, se volete provare, tenete conto del fatto che vince chi per primo riesce a fare dodici catture e ha quindi (a meno di "ricariche" del sacchetto) tutte le caselle della propria zona di cattura piene.

Esiste anche un sistema di handicap, posto che vogliate provare: il più basso è quello di far giocare il migliore con il rosso[17] e, all'aumentare del divario tra i due giocatori, eliminare uno o più pedine rosso/rosso (sempre lasciando il rosso al migliore, evidentemente).

...Noi non siamo convinti, ma a qualcuno piace talmente da violare i copyright e giocarlo. Se vi divertite, fatecelo sapere che vi passiamo qualche strategia.

## 7. Pagina 46

Per $p = 2$ abbiamo immediatamente $2 = 1^2 + 0^2 + 1$; per un primo $p$ dispari troveremo ora un metodo costruttivo che ci permetta di ricavare due numeri $x$ e $y$, entrambi minori di $\frac{p}{2}$, soddisfacenti le condizioni del problema.

Consideriamo i $\frac{p+1}{2}$ interi $\left\{0,1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}\right\}$; i quadrati di due qualsiasi di questi numeri, divisi per $p$, daranno diversi resti; infatti, le equazioni:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= k_1 p + r, \\ x_2^2 &= k_2 p + r \end{aligned}$$

[17] Interessante... Qualcuno conosce altri giochi, in cui giocare per primo è uno *svantaggio*?

implicherebbero che sia

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (k_1 - k_2)p$$

ossia che $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ sia divisibile per *p*, il che è impossibile in quanto sia $x_1$ che $x_2$ sono minori di $\frac{p}{2}$, e quindi (ricordando che *p* è un numero primo),

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 < p, \\ &|x_1 - x_2| < p. \end{aligned}$$

Quindi, i numeri dell'insieme $\left\{0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\}$ devono dare $\frac{p-1}{2}$ distinti resti non negativi quando vengono divisi per *p*; questo implica che i $\frac{p+1}{2}$ numeri (negativi) $\left\{-1, -1^2 - 1, -2^2 - 1, \ldots, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1\right\}$ quando vengano divisi per *p* diano anch'essi $\frac{p+1}{2}$ resti non negativi diversi tra loro[18]. Ma essendoci solo *p* resti non negativi distinti possibili dalla divisione per *p*, tra i $p+1$ numeri dell'insieme $\left\{0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2, -1, -1^2 - 1, -2^2 - 1, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1\right\}$, almeno due di loro devono dare lo stesso resto quando vengono divisi per *p*, e uno deve essere nella forma $x^2$ e l'altro nella forma $-y^2 - 1$. Ma se:

$$\begin{aligned} &x^2 = kp + r, \\ &-y^2 - 1 = lp + r \end{aligned},$$

allora deve essere :

$$x^2 + y^2 = (k - l)p - 1 = mp - 1,$$

ossia si ha che $x^2 + y^2 + 1 = mp$ è divisibile per *p*.

[18] Se $-x_1^2 - 1$ e $-x_2^2 - 1$ danno resti uguali, allora anche $x_1^2$ e $x_2^2$ devono dare resti uguali.

# 8. Paraphernalia Mathematica

## 8.1 Vado al massimo!

Una delle cose che ci piacciono meno, nella vita fuori di qui, è il termine "sfidante": a noi è sempre sembrato un modo per dire "mi hai rifilato una rogna che né tu né io sappiamo risolvere, ma visto che sei il capo devo farla lo stesso". Ci pare quindi utile cercare di capire un modo per valutare effettivamente sin dove si possa arrivare, con le proposte "sfidanti"; quello che ci ha sempre colpito è che si tratta di un metodo ragionevolmente semplice di far di conto, ma che viene spiegato (quando lo si fa) solo nei casi strettamente necessari alle facoltà di Ingegneria o di Economia e Commercio: il che è un peccato, visto che il giochino (oltre ad avere indubbie possibilità nel campo della matematica ricreativa) può venire utile in svariati momenti della vita normale (ad esempio per dimostrare al capo che sta chiedendo un'asinata).

Caso mai non lo aveste ancora capito, vogliamo parlare di ***programmazione lineare***: cominciamo con un problema[19], che forse chiarisce i concetti.

> Una compagnia mineraria produce sia lignite sia antracite e si trova nella favorevole situazione di poter vendere tutto il carbone che riesce a produrre. Attualmente il profitto per la vendita di ogni tonnellata di lignite e di antracite è, rispettivamente, di euro (in migliaia) 600 e 500. A causa di diversi tipi di restrizioni, l'impianto di estrazione, quello di cernita e quello di lavaggio possono funzionare per non più di 12, 10 e 8 ore giornaliere. Per la lavorazione di una tonnellata di lignite occorre utilizzare per 3 ore l'impianto di estrazione, per 3 ore quello di cernita e per 4 ore quello di lavaggio. Per una tonnellata di antracite i corrispondenti tempi sono di 4, 3 e 2 ore. Il problema è quello di decidere quante tonnellate di ciascun tipo di carbone devono essere prodotte giornalmente per massimizzare il profitto.

Ecco, per quelli di noi laureati in Fisica, il problema è "sfidante" (nell'accezione vista sopra)[20]; cominciamo con qualche definizione.

Per prima cosa, abbiamo una ***funzione obiettivo*** che vogliamo massimizzare (o minimizzare), che è una funzione lineare delle variabili $\{x_i\}$ esprimibile come (ci passate la notazione "da fisici"? Ci pare più comprensibile):

$$\langle c | x \rangle = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Questa funzione va giustappunto massimizzata (o minimizzata) in funzione di alcuni ***vincoli***, che sono di due tipi:

- ***lineari***, di uguaglianza o diseguaglianza, che stabiliscono delle relazioni di limite delle variabili attraverso delle funzioni lineari;
- ***di non-negatività***, che impongono di lavorare con variabili non minori di zero.

Se trovate un insieme di valori delle variabili che soddisfa i vincoli avete trovato una ***soluzione ammissibile***, e se tra le soluzioni ammissibili prendete quella che massimizza (o minimizza) la finzione obiettivo avete trovato la ***soluzione ottima***. In questo caso, il valore che ottenete per la funzione obiettivo si chiama giustappunto ***valore ottimo***. Se la richiesta più che "sfidante" è impossibile, allora il tutto si chiama ***problema impossibile***

[19] Problema, note e ispirazione per il pezzo provengono dalla versione 0.9 di ***MetM@t***, di PierLuigi Zezza, Università di Firenze.

[20] Al momento non sappiamo ancora se lo risolveremo o ci limiteremo a darvi il metodo lasciandolo come "facile ma stimolante esercizio per il lettore".

e avete un capo "vigliacchetto" (come diceva un nostro Prof in presenza di studentesse… se erano tutti maschi, si permetteva altri termini): nel caso, poi, abbiate infinite soluzioni ammissibili ma nessuna di queste sia ottima (ossia per qualsiasi soluzione potete trovare un'altra soluzione che fornisce un valore migliore della funzione obiettivo), siete in presenza di un ***problema illimitato***, e comunque vi sforziate il capo se ne uscirà con un sorrisetto di sufficienza dicendovi "bene, ma potevi fare di meglio" (e niente bonus…).

Il tutto, quindi, possiamo esprimerlo in forma compatta come:

$$\left\{\max\left(\langle c|x\rangle\right): A|x\rangle \le |b\rangle; |x\rangle \ge |0\rangle\right\}$$

Se non vi piacciono i bracket, usate pure i vettori, tenendo conto che $A$ è una matrice.

Insomma, si deve rispondere a tre domande:

1. Esiste una soluzione?
2. Se esiste, quante sono? In caso contrario, perché non esiste?
3. Quale di queste soluzioni è ottima?

Ora, ***Dantzig*** (di cui una volta o l'altra ne parleremo più verso l'inizio della rivista) ha inventato un metodo (semi)automatico per risolvere questi problemi, detto ***metodo del simplesso***: lo vediamo con un esempio facile[21]:

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 - 3x_2 + 2x_3)\\
&\begin{cases}
2x_1 + x_2 - x_3 \le 2\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5\\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6
\end{cases}\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Il primo lavoro da fare è quello di trasformare le disuguaglianze dei vincoli in eguaglianze: supponiamo di avere una soluzione ammissibile $\{x_1, x_2, x_3\}$ e riformuliamo il primo vincolo attraverso una nuova variabile $x_4 = 2 - (2x_1 + x_2 - x_3)$: abbiamo portato tutto a secondo membro e uguagliato alla nuova variabile, il che significa che $x_4$ sarà *non negativa per soluzioni ammissibili e zero quando il vincolo è soddisfatto con segno di uguaglianza*; questo significa che il primo vincolo si riduce ad un semplicissimo $x_4 \ge 0$.

Applicando la stessa procedura agli altri vincoli e ridefinendo la funzione obiettivo, otteniamo:

$$\begin{aligned}
x_4 &= 2 - 2x_1 - x_2 + x_3\\
x_5 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 + x_3\\
x_6 &= 6 - x_1 + 2x_2 - 2x_3\\
z &= 2x_1 - 3x_2 + 2x_3.
\end{aligned} \qquad [1]$$

e, nella nostra notazione compatta, il problema diventa:

$$\max(z): \{x_i\}_{i=1,6} \ge 0$$

Giusto per introdurre ancora qualche termine, le variabili iniziali si chiamano ***decisionali***, mentre quelle nuove sono dette di ***slack*** o ***ausiliarie***: queste ultime

[21] Sconvolgiamo la notazione usuale: a noi sembra più comprensibile, in questo modo.

valgono zero se il vincolo è soddisfatto con il segno di uguaglianza, e in questo caso si dice che è ***attivo***.

Ora, questo problema diventa più facile da risolvere in questo modo, pur mantenendo una strettissima relazione con il problema originale; infatti, ogni soluzione ammissibile del nuovo problema è (attraverso la riformulazione dei vincoli fatta nella `[1]`) soluzione ammissibile del problema originale, e ogni sua soluzione ottima lo è per il problema originale.

Il secondo passo consiste nel trovare una soluzione ammissibile e poi, partendo da quella, nel trovarne un'altra che aumenti il valore della funzione obiettivo: una soluzione ammissibile è facilissima da trovare, in quanto basta *imporre il valore* 0 *alle variabili decisionali;* da queste determiniamo il valore delle variabili di slack e il valore della funzione obiettivo: in pratica, abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_5 = 5 \\ x_6 = 6 \end{cases} \Rightarrow z = 0.$$

Adesso, si tratta di migliorare il valore della funzione obiettivo variando qualche variabile decisionale: il trucco brutale, qui, consiste semplicemente nell'andare a guardare l'espressione della funzione obiettivo in `[1]` e prendere una variabile che abbia un coefficiente positivo (il maggiore, se volete fare gli ingordi...); con tutti i vincoli di non negatività che abbiamo, aumentare il valore di quella variabile farà sicuramente aumentare il valore della funzione obiettivo, quindi si potrebbe procedere per tentativi e andare avanti; in realtà, se guardiamo le espressioni delle variabili di slack, sempre per le condizioni di non negatività abbiamo dei vincoli anche su questo: chiariamolo nell'esempio.

Manteniamo a zero $x_1$ e $x_2$; dalla *prima* equazione, per avere $x_4 = 2 - (2x_1 - x_2) + x_3 \geq 0$ (tra parentesi la parte insignificante, in quanto vale zero), dobbiamo avere $x_3 \geq -2$; con esattamente lo stesso metodo, otteniamo dagli altri due vincoli $x_3 \geq -5$ e $x_3 \leq 3$: notiamo che quest'ultima, dati i vincoli di non negatività, è l'unica significativa; quindi, non potremo aumentare $x_3$ al di sopra del valore 3. Nella notazione vista sopra, abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 5 \\ x_5 = 8 \\ x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 6.$$

Che, noterete, è un valore migliore del precedente.

Cerchiamo di capire cosa abbiamo fatto; nella prima soluzione, avevamo espresso le variabili di slack (che *non* avevano valore zero) e la funzione *z* tramite le variabili decisionali (che avevano valore zero); successivamente abbiamo fatto assumere un valore diverso da zero a una delle variabili decisionali ($x_3$) azzerando una variabile di slack ($x_6$); adesso, anche se la variabile decisionali $x_3$ compare in tutte le equazioni di vincolo della `[1]`, la variabile di slack $x_6$ compare solo nella terza; risolviamo quindi la terza equazione in $x_3$ e sostituiamo, otteniamo a questo punto:

$$\begin{array}{rcrrrr} x_4 & = & 5 & -\frac{5}{2}x_1 & & -\frac{1}{2}x_6 \\ x_5 & = & 8 & -\frac{5}{2}x_1 & -2x_2 & -\frac{1}{2}x_6 \\ x_3 & = & 3 & -\frac{1}{2}x_1 & +x_2 & -\frac{1}{2}x_6 \\ z & = & 6 & +x_1 & -x_2 & -x_5 \end{array}$$

Il che, come potranno notare coloro che lo conoscono[22], non è altro che una applicazione del metodo di Gauss-Jordan, utilizzando come pivot il coefficiente di $x_3$ nella terza equazione: insomma, riscriviamo il sistema **[1]** in una forma corrispondente ad un maggior valore di *z* (e quindi ad una soluzione migliore).

Da qui, la cosa diventa ripetitiva:

- Dall'ultima equazione vedo che posso aumentare ulteriormente il valore di *z* incrementando $x_1$ (che al momento è ancora a zero)
- Dalle prime tre equazioni sostituendo i valori della soluzione "migliore" (tranne che per $x_1$, evidentemente), considerando i vincoli di non negatività sulle variabili di slack e risolvendo in $x_1$ ottengo le condizioni $x_1 \leq 2$, $x_1 \leq \frac{16}{5}$, $x_1 \leq 6$; essendo la prima la più stringente, teniamo quella e ricaviamo $x_1$ dalla prima equazione, ottenendo quindi la terza espressione delle nostre formule:

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 & = & 2 & & -\frac{5}{4}x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\ x_5 & = & 3 & -x_2 & +x_4 & \\ x_3 & = & 2 & +x_2 & +\frac{1}{5}x_4 & -\frac{2}{5}x_6 \\ z & = & 8 & -x_2 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{5}{6}x_6 \end{array}$$

E poi *dovremmo* ricominciare, ma il condizionale sicuramente vi insospettirà: infatti, se guardate l'equazione di *z*, tutte le variabili hanno coefficienti negativi: insomma, non abbiamo più modi per aumentare il valore di *z*, il che significa che abbiamo *ottenuto il valore ottimo*: ricapitolando, $\{x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = 2\}$, con $z = 8$ rappresenta la soluzione ottima. Finito!

Logicamente, se volete buttare il tutto in una macchinetta, dovete utilizzare un linguaggio più formale: se la cosa vi annoia, saltate la prossima parte indentata.

La forma standard di un problema di programmazione lineare si esprime come:

$$\begin{array}{l} \max(\langle c|x\rangle) \\ A|x\rangle \leq |b\rangle \\ |x\rangle \geq |0\rangle \end{array} \qquad \textbf{[2]}$$

[22] A parziale discolpa per la nostra ignoranza, portiamo la scusante che ci è stato spiegato durante un corso di Macchine Calcolatrici attraverso un programma che *non* funzionava (input da periferica inesistente); trovato e corretto l'errore, ci è passata la voglia di capire il procedimento; abbiamo trasformato tutto in una subroutine e via andare.

con $\langle c| \in \Re^{p^*}$ (vettore riga di dimensione *p*), $|x\rangle \in \Re^p$ (vettore colonna di dimensione *p*), $A \in M_{m,p}$ (matrice rettangolare $m \times p$), $|b\rangle \in \Re_+^m$ (vettore colonna a valori positivi di dimensione *m*); il sistema ha *p* variabili decisionali e introdurremo *m* variabili di slack raggruppate in $|y\rangle \in \Re^p$; per coerenza con quanto sopra, indicheremo le componenti di $|y\rangle$ come $(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+m})$.

Introducendo le variabili di slack, il nostro problema diventa equivalente a:

$$\begin{aligned}&\max(\langle c|x\rangle)\\&A|x\rangle + |y\rangle = |b\rangle\\&|x\rangle, |y\rangle \geq |0\rangle\end{aligned}$$

Il sistema dei vincoli lineari si può riscrivere nella forma:

$$(A, I_m)\begin{pmatrix}|x\rangle\\|y\rangle\end{pmatrix} = |b\rangle$$

e una sua soluzione particolare è $|x\rangle = |0\rangle, |y\rangle = |b\rangle \geq 0$. A questo punto, le $|y\rangle$ (che per il momento sono le nostre variabili di slack) diventano ***variabili di base***, nel senso che sono una base per l'immagine (in senso algebrico) della funzione rappresentata dalla matrice $(A, I_m)$, mentre le altre (sempre per il momento, le nostre variabili decisionali) vengono dette ***variabili non di base***.

Il passaggio successivo consiste nel far uscire una variabile di base dalla base e farne entrare una non di base, ossia di trovare una ***variabile uscente*** e una ***variabile entrante***: per questo, al paragrafo precedente, abbiamo specificato "per il momento": al prossimo giro, non potremo più dirlo; e, sempre per questo motivo, anche le componenti di $|y\rangle$ vengono indicate con le stesse lettere (ma diverso indice) delle componenti di $|x\rangle$: adesso, le trattiamo tutte allo stesso modo.

Questo passaggio viene eseguito attraverso l'algoritmo di Gauss-Jordan; possiamo scrivere la matrice completa considerando anche la funzione obiettivo $z - \langle c|x\rangle$, che al primo giro ha valore zero; otteniamo allora:

$$\left(\begin{array}{cc|c}A & I_m & |b\rangle\\\hline -\langle c| & 0 & 0\end{array}\right)$$

A questo punto, la *variabile entrante* è determinata da un coefficiente negativo nell'ultima riga, che identificherà anche la colonna di pivot, mentre la variabile uscente viene determinata dal valore minimo nel rapporto tra la colonna dei termini noti e la colonna di pivot; a seguito di questa operazione, in basso a destra comparirà il valore della funzione obiettivo: si itera sin quando è possibile (ossia sin quando ho termini negativi nell'ultima riga), e il valore ottenuto è il valore ottimo.

Tutto semplice? Beh, non è detto; possono capitare dei guai ad ogni passaggio.

Nella fase di ***inizializzazione***, ad esempio, potremmo ritrovarci dei termini noti negativi o aventi vincoli di sola eguaglianza: nel primo caso non ci sono grossi problemi, inseriamo in ognuno dei vincoli una variabile ausiliaria $x_0$ che prenderemo abbastanza grande da soddisfare tutti i vincoli e procedere nel solito modo. Il problema originale ha soluzione *ammissibile* se il nuovo problema ha soluzione *ottima* con $x_0 = 0$.

Nella fase di ***iterazione***, abbiamo visto che dobbiamo definire una variabile entrante, una uscente e applicare l'algoritmo; qui, di guai possibili ne abbiamo a josa.

Nella *scelta della variabile entrante*, scegliamo una variabile non di base con coefficiente positivo nella funzione obiettivo: qui la soluzione è facile; se non ne troviamo abbiamo finito il calcolo, se ce ne sono più di una ne scegliamo una qualunque; nella peggiore delle ipotesi allungheremo il conto.

Nella *scelta della variabile uscente*, stesso tipo di guai (anche se in un caso va a finire male): dobbiamo scegliere quella che impone la limitazione più stretta alla variabile entrante. Se ne troviamo più di una vale lo stesso metodo di sceglierne una qualsiasi, mentre nel caso non ve ne siano siete nei guai: il problema è *illimitato*.

L'algoritmo (come tutte le cose che ha fatto Gauss) non dà problemi, quindi lo saltiamo.

L'ultimo (in ogni senso) guaio che può capitare è che il metodo *non si arresti*: qui la soluzione sembra un po' una fregatura, ma funziona: scegliete *sempre* la variabile con l'indice minore, prima o poi si sblocca[23].

Tutto chiaro sin qui? Bene, perché siamo arrivati a metà. Tranquilli, ci limitiamo ad accennarne.

Il metodo visto sin qui parte da una soluzione *per difetto* e sale sino alla soluzione ottima; l'idea è di trovare una soluzione *per eccesso* e scendere alla soluzione ottima. La cosa rappresenta la soluzione del problema ***duale*** rispetto a quello originale; per capire quali siano le relazioni tra i due problemi, riprendiamo la definizione formale del problema (detto, in questo caso, ***primale***):

$$\begin{aligned} &\max\left(\langle c|x\rangle\right) \\ &A|x\rangle \leq |b\rangle \\ &|x\rangle \geq |0\rangle \end{aligned} \qquad [2]$$

Il duale di questo problema risulta essere:

$$\begin{aligned} &\min\left(\langle y|b\rangle\right) \\ &\langle y|A \geq \langle c| \\ &\langle y| \geq \langle 0| \end{aligned} \qquad [3]$$

Dove qualche bra è diventato un ket e viceversa (visto che parliamo del duale[24]) ma, cosa più importante, i coefficienti della funzione obiettivo sono finiti nei vincoli e viceversa; questo ha imposto qualche cambiamento di segno (ivi incluso il massimo che diventa un minimo); per evitare confusioni e per sottolineare che durante i conti si comportano in maniera completamente diversa, abbiamo chiamato in modo diverso le variabili decisionali, ma la cosa serve solo per evitare confusioni nel teorema seguente: *se* $|x\rangle$ *e* $|y\rangle$ *sono soluzioni ammissibili per i due problemi, allora* $\langle c|x\rangle \leq \langle y|b\rangle$ *e l'uguaglianza vale per le soluzioni ottime*. Non solo, ma vale anche la relazione cosiddetta di

[23] Secondo noi, questo l'ha scoperto un ingegnere: è noto come ***Teorema di Bland***, e ci sentiamo di scommettere un caffè sulla professione del Nostro.

[24] È per questo motivo che abbiamo preferito la notazione bracket.

***complementary slackness***[25], che lega le soluzioni ottime agli altri parametri del problema, infatti le soluzioni ai due problemi sono ottime se e solo se:

$$\langle y|\big(A|x\rangle - |b\rangle\big) = 0;$$
$$\big(\langle y|A - \langle c|\big)|x\rangle = 0.$$

No, non ci siamo dimenticati i segni di bra o ket sugli zeri: sono proprio degli scalari.

Coraggio, che siamo quasi alla fine: ci resta da vedere a cosa servano queste cose nella vita reale. Facciamo riferimento, per chiarire i concetti, alla scrittura formale del problema e del duale che abbiamo dato nelle [2] e [3].

Se $|x\rangle$ ha *p* componenti, abbiamo *p* attività, e ciascuna di queste a livello unitario ci fornisce un ricavo pari alla corrispondente componente di $\langle c|$; le materie prime (in numero pari a *m*, le righe della matrice *A*) sono utilizzate in misura diversa dalle *p* attività, e questa misura viene data (per la *i*-esima materia prima nella *j*-esima attività) dall'elemento di matrice $A_{ij}$; le limitazioni di ognuna delle materie prime sono le componenti di $|b\rangle$.

E, a questo punto, dovreste essere in grado di risolvere agilmente il problema dell'antracite e della lignite.

Il problema più interessante affrontabile con questo metodo resta però secondo noi il cosiddetto ***Problema del Trasporto***, che tradizione vuole sia stato proprio quello affrontato originariamente da Dantzig: per non scontentare nessuno, questa volta usiamo la notazione a indici; secondo noi è un po' più confusionaria, ma a qualcuno forse chiarisce meglio i concetti.

Abbiamo *m* fabbriche in grado di produrre un bene, e ciascuna sul periodo considerato è in grado di produrne una quantità $q_j$. Questo bene è richiesto da *p* mercati, ciascuno dei quali ne assorbe una quantità $d_i$; spostare il bene dalla fabbrica al mercato costa, e quindi ci serve la matrice dei costi $c_{ij}$. Problema: trovare un piano di distribuzione $x_{ij}$ in grado di soddisfare le esigenze del mercato tenendo conto dei limiti di distribuzione e minimizzando i costi di trasporto.

Qui, dobbiamo considerare tre tipi di vincoli; il primo, relativo al fatto che una fabbrica produce, è evidentemente quello di non negatività; gli altri due sono invece un po' più difficili da esprimere e si riferiscono al fatto che ad un mercato serve al più una data quantità e ogni fabbrica può produrre al più una data quantità, ossia ci ritroviamo $m+p$ vincoli:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j;$$
$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} \leq q_i.$$

La funzione obiettivo ha l'aria brutta, ma solo l'aria (forse perché non ci piacciono i doppi indici):

[25] Nell'ottimo testo che abbiamo citato all'inizio e che stiamo seguendo, compare in merito la seguente frase: "...complementary slackness, che in italiano potrebbe essere tradotta come ausiliarietà complementare e che quindi non viene tradotta." Siamo d'accordo che il termine italiano è terribile, ma l'intera frase ci ricorda la nostra signature "...se non ricevete questa mail, segnalatelo a...".

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} c_{ij} x_{ij}.$$

Coraggio, non resta che capire a cosa serva il problema duale. In questo caso possiamo esprimerlo in modo formale come:

$$\max\left(\sum_{j=1}^{p} \pi'_j q_j - \sum_{i=1}^{m} \pi_i d_i\right)$$
$$\pi'_j - \pi_i \le c_{ij},$$

dove con $\pi$ (con o senza apice) abbiamo indicato le variabili ausiliarie.

Qual è l'interpretazione nel nostro problema di tutto questo? Semplice: arriva una ditta di trasporto alla fabbrica $j$-esima e propone di acquistare il bene a un prezzo $\pi'_j$ con l'intento di rivenderlo sull'$i$-esimo mercato al prezzo $\pi_j$; evidentemente, la ditta di trasporti risolverà *questo* problema, e proporrà al produttore di acquistare il bene ai prezzi calcolati[26].

Il bello del teorema della dualità è a questo punto che il produttore non risparmierà niente da questo affare: infatti, lui e il trasportatore hanno risolto i due problemi nel modo per loro più conveniente.

Ora, la prossima volta che vi chiedono di passare a prendere la suocera per la villeggiatura, dovreste avere un'ulteriore freccia al vostro arco...

*Rudy d'Alembert*
*Alice Riddle*
*Piotr R. Silverbrahms*

[26] Un'ultima nota per quelli che si sono sciroppati *Rudi Ludi*; i vari $\pi'$ in economia sono detti *valori marginali*.