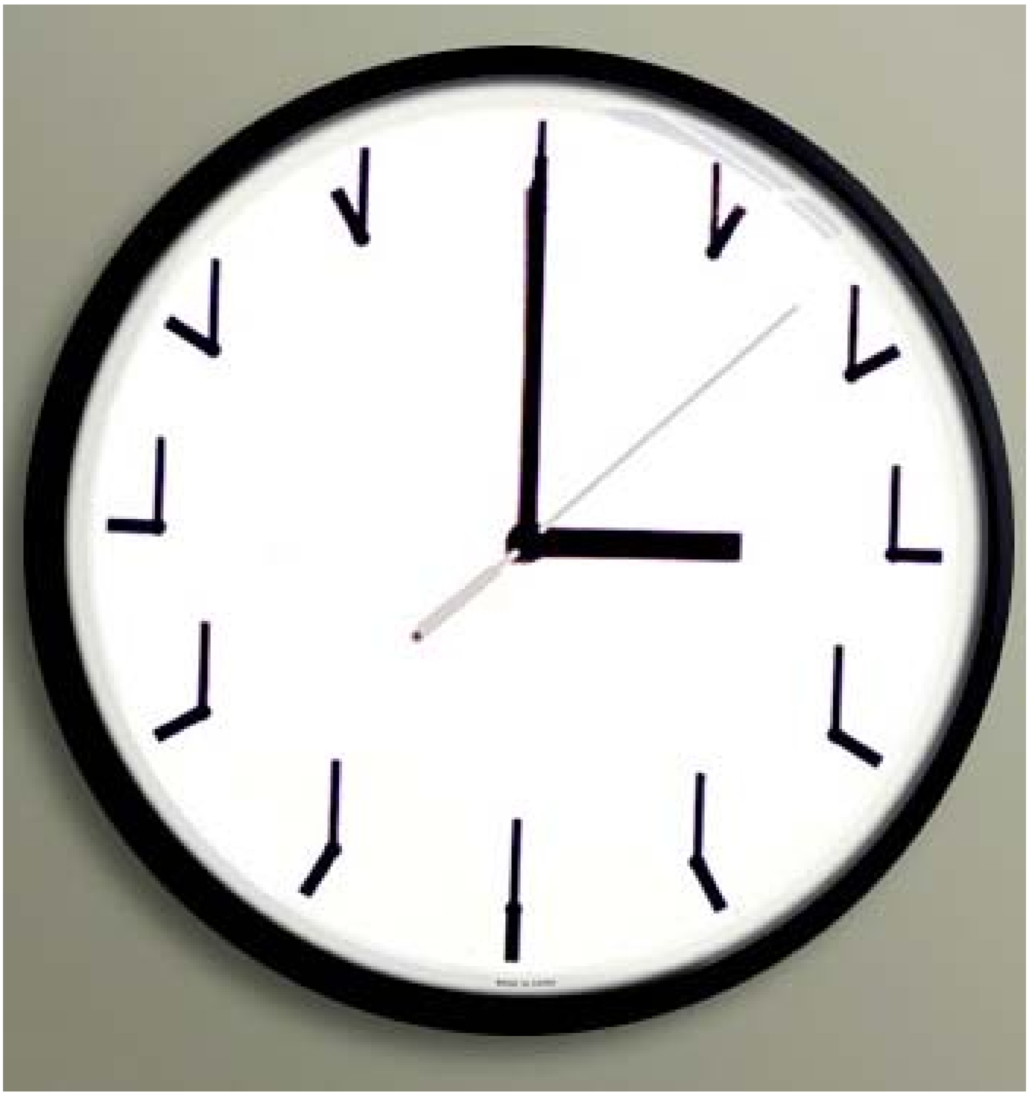
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 138 – Luglio 2010 – Anno Dodicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM137 ha diffuso 2616 copie e il 29/06/2010 per Google eravamo in 21'200 pagine.

Ci è ben chiara la domanda che si è posto ***John Zeray***: "Ma un orologio, per essere bello, deve essere essenziale o ridondante?". Quello che non ci è chiaro è che risposta si sia dato.

1. Tre matematici alla corte del re

"L'armonia del mondo è resa manifesta in Forma e in Numero, e il cuore e l'anima e tutta la poesia della Filosofia Naturale prendono corpo nel concetto di bellezza matematica."

(D'Arcy Wentworth Thompson)

Le parole, lo abbiamo detto spesso, sembrano avere una vita propria. Anzi: le parole, e non siamo certo noi i primi a dirlo, sembrano avere proprio una loro *evoluzione*, che è termine che trascende e supera quello di *vita*, perché è proprio attraverso le singole vite che l'evoluzione prende forma. Ognuno di noi usa le parole e ritiene di conoscerle, almeno nel senso in cui le intende nel momento in cui queste vengono scritte o pronunciate: ma basta un dizionario etimologico a scatenare improvvise scoperte inattese, rivelazioni esplosive, a volte chiarificatrici, a volte fuorvianti. Sulla splendida parola "infinito", ad esempio, è facile far risalire l'indagine fino al termine "fine", negato dal prefisso iniziale: ma già più insolito è scoprire nella radice latina di "fine" quella stessa di "fenditura", e cioè "divisione", cosicché l'etimologia dal latino apparenta l'*infinito* all'*intero*, che è una relazione forse non sorprendente per i linguisti, ma di certo non banale in ambito matematico. Cambiando lingua e andando a disturbare l'idioma dei padri fondatori del metodo dimostrativo, troviamo che anche il greco definisce l'infinito come negazione, stante l'alfa privativo giustapposto di fronte alla radice "*péiras*", "limite". Ovvero, di nuovo un "senza limite" abbastanza scontato e immediato, se non fosse che, secondo alcuni[1], l'etimologia vera sia da ricercare non nel greco, ma nel semitico "*apar*", che invece indicherebbe la "terra", o meglio ancora la "polvere". Certo non sarebbe poi troppo strano che le apparentemente infinite particelle di polvere potessero richiamare alla mente anche l'infinito teorico, se non altro come dichiarazione d'impossibilità di numerarle; ma se fosse vero ecco che "infinito", in ultima analisi, significherebbe "polveroso", cosa che ne intaccherebbe almeno un po' il prestigio evocativo.

Ma per un'etimologia che stupisce volgarizzando, eccone subito un'altra che entusiasma e innalza mente e cuore verso l'ineffabile poetico: e la scelta del verbo non è stata casuale. È proprio di "entusiasmo" che vogliamo indagare le radici: perché di entusiasmarsi c'è bisogno, specie in tempi difficili che rendono complicato dedicarsi con ottimismo a qualsivoglia attività. Ebbene, di un entusiasta si dice spesso che abbia il sacro fuoco dentro, ed è proprio quest'immagine che riporta fedelmente l'etimologia della parola: secondo la più probabile delle origini, infatti, "entusiasmo" viene da "*en-thousia-z-sein*", che sta a significare, letteralmente, avere un dio dentro. Quasi che non fosse possibile, lecito, legittimo per i mortali avere entusiasmo per alcunché, senza l'intervento divino.

Ma anche senza andare alla ricerca di parole dalle nobili origini, anche nel linguaggio di tutti i giorni si trovano parole che mutano significato, tradiscono le origini, ed evolvono in direzioni distanti, diverse da quelle da cui hanno preso significato. L'esempio più rimarchevole di corruzione, nell'italiano moderno, è forse quello causato dalla parola "automobile". Non è difficile immaginare che, a cavallo tra Ottocento e Novecento, i linguisti e gli uomini comuni si trovassero di fronte alle prime macchine in grado di muoversi senza essere trainate da animali o sospinte dal vento: insomma, di fronte alle prime macchine in grado di muoversi "da sé stesse". Definirle pertanto "macchine automobili" non deve essere stato troppo difficile, per i nostri antenati che non si

[1] Nella fattispecie, l'ipotesi è avanzata dal filologo Giovanni Semerano, che ci ha scritto sopra un intero libro, "*L'infinito: un equivoco millenario*".

lasciavano certo spaventare dalla necessità di creare qualche neologismo. In verità, la cosa potrebbe anche non essere andata poi liscia come verrebbe da credere, se c'è voluto l'intervento autorevole di Gabriele D'Annunzio per stabilire una volta per tutte il "genere" della nuova parola: forse c'erano i partigiani del termine "congegno automobile", o meglio ancora del "bolide automobile", che avrebbe richiesto che l'aggettivo, una volta sostantivato, mantenesse il genere maschile. Fatto sta che il Vate, che a quei tempi era considerato dai più un vero oracolo, l'ebbe vinta, femminilizzando il veicolo, sul tentativo di mascolinizzazione operato da Filippo Tommaso Marinetti nel suo Manifesto del Futurismo.

1 *Autolavaggio o autolavaggio? Autoautolavaggio!*

Il punto linguistico non è però tanto sul genere della parola, ormai, quanto sulla cannibalizzazione del prefisso. Il greco "*autòs*" che costituisce la prima parte del termine mantiene ancora intatto il suo significato in moltissime parole, non necessariamente tutte colte: anche gli analfabeti conoscono la differenza tra un *gol* e un *autogol*, ad esempio, anche se potrebbero fare confusione tra un *autista* e un *autistico*; ma di certo il prefisso di automobile ha fagocitato la parola intera, e, ponendosi a sua volta come prefisso, ha deviato il significato di molte nuove parole.

Così l'autostrada, l'autoradio e l'autolavaggio non sono strade, radio e lavaggi in grado di cavarsela da soli, ma tutte entità destinate, in un modo o nell'altro, proprio alle automobili. La stessa situazione, in altre lingue, è verosimilmente meno patologica: l'inglese ha forte e dominante il prefisso "*self*", che ha lo stesso significato del greco "autòs", e può quindi beatamente, al pari del tedesco, riservare il termine "auto" alle sole macchine motrici; ma noi italiani dobbiamo fare qualche fatica in più.

Se "automobile" è il termine che meglio ha cannibalizzato una parte di sé stesso, non è comunque l'unico elemento del suo insieme. Chiunque abbia frequentato un Politecnico, o abbia anche solo un Politecnico nella città di residenza, è certamente abituato a sentire l'augusta istituzione accademica ridotta al nomignolo di "Poli". Il prefisso "poli", col suo eclettico significato di "tanti, molti", è virtualmente di uso e impatto ancora maggiore di "auto", ma ciò non basta ad impedire la decisa messa in atto dell'abbreviazione da parte degli ingegneri passati, presenti e futuri. A differenza di quanto accade nel caso dell'automobile, però, sono assai meno frequenti i casi di parole generate con il prefisso "poli" direttamente riferibili ai politecnici, così come invece accade per le frequenti parole con prefisso "auto" riferite alle automobili. C'è però certo qualche nobilissima eccezione, e curiosamente anche di origine extra-italica: tanto per dire, il prestigiosissimo Politecnico di Zurigo, quell'ETH[2] che tante volte è stato citato in questa rubrica, si erge nella parte alta della città, su un colle che domina piacevolmente il lago[3], il fiume[4] e la metropoli. Questa sua ardita dislocazione, per quanto ottima dal punto di vista paesaggistico e per la qualità dell'aria, rimane un po' scomoda per coloro (e si presuppone che siano giovani

[2] ETH che, ci piace ricordare, significa *Eidgenössische Technische Hochschule,* e che letteralmente dovrebbe significare "Istituto Federale Superiore di Tecnologia", senza troppi "*Poli*" nella nomenclatura ufficiale. Ma un "poli" è pur sempre un "poli", come sanno bene anche gli svizzeri.

[3] Lo *Zürichsee*, come è facile indovinare anche dal nome.

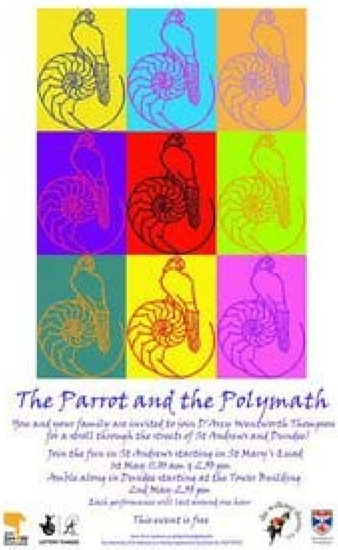
[4] La bella e placida *Limmat*, femmina al pari dell'*automobile*.

studenti ragionevolmente squattrinati, anche se di belle speranze e ancor migliori muscolature) che devono quotidianamente raggiungere la nobile scuola.

Ebbene, per coloro che, sopraffatti dalle fatiche dello studio, non riescono o non vogliono avventurarsi nell'ardita salita, la municipalità zurighese ha messo a disposizione, fin dai tempi più antichi, una rossa ed efficiente ferrovia a cremagliera. Ebbene, come poteva chiamarsi tanta ingegneristica meraviglia? Ma *Polybahn*, naturalmente: stante il molteplice utilizzo della parola "bahn", la "via del politecnico" non poteva certo avere definizione e mezzo di locomozione migliore.

2 *La "Polybahn"di Zurigo*

Tornando all'interno dei patri confini, e anzi all'interno degli angusti confini cittadini e tematici di RM, è indubbio che i redattori del giornalino che state sfogliando in questo istante sono familiari con il termine *Polymath*. Una veloce ricerca in rete lanciata con questo nome come esca vi condurrà infatti rapidamente sulle pagine del Progetto Polymath[5], sito d'ispirazione matematica assai ricco e denso del Politecnico di Torino. C'era forse un nome più bello e immediato? Basta unire il "Poly" del Politecnico con il "Math" della matematica, e si ha un nome di sito perfettamente aderente e virtualmente indimenticabile. E alcuni di noi, particolarmente poveri di confidenza con l'elegante lingua d'Albione, infatti non vi coglievano altro.



3 *The Parrot and the Polymath*

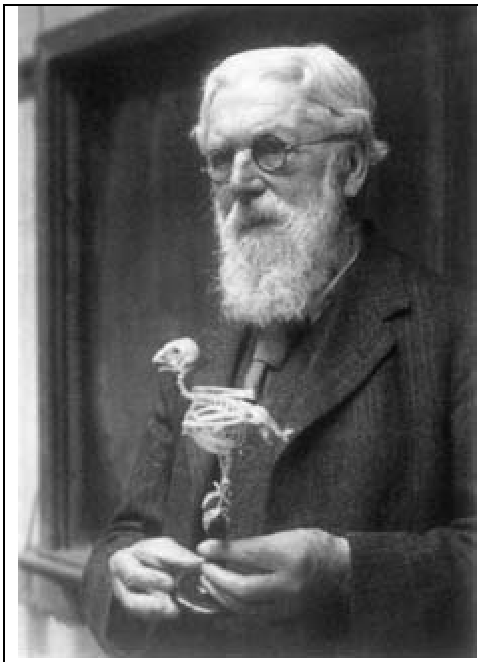
C'è voluto l'incontro – sempre casuale, sempre nel virtualissimo insieme dei luoghi della Rete – con il titolo di una insolita *pièce* teatrale per scoprire che c'erano altri significati da scavare. La *pièce* in questione si intitola "*The parrot and the polymath*[6]", e definirla "insolita" è il minimo che possiamo fare, visto che la definizione che gli organizzatori stessi danno è "*street theatre event*", cosa che non fa pensare esattamente a poltrone, velluti e sipari. In ogni caso, la rivelazione sconvolgente (sempre per quelli di noi totalmente incapaci di orecchiare l'inglese ad un livello appena superiore a "*the cat is on the table*") è che *polymath*, verosimilmente, non significa solo e soltanto "sito di matematica del Poli di Torino"; e il bello è che bastava leggere appena un po' più a fondo proprio in quel sito, dove si trova subito, in bella vista, la citazione di Thomas Stearns Eliot che recita: "*The masters of the subtle schools are controversial,* ***polymath***"[7]. Col senno di poi, possiamo proprio dire

[5] Se volete risparmiare il lavoro a Google, potete cliccare direttamente qui: http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/.

[6] http://www-ah.st-andrews.ac.uk/mgstud/parrotandpolymath/; sì, il sito è proprio quello della leggendaria (dal punto di vista della storia della matematica in rete) università di St.Andrews.

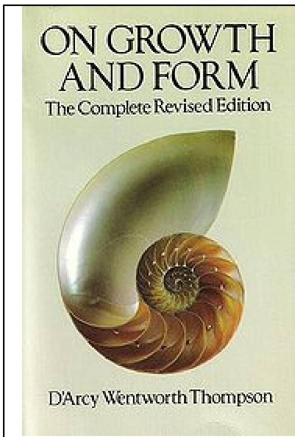
[7] Qui ci vorrebbe un traduttore serio, certo non uno di quelli che non conoscono neppure le parole in questione: si potrebbe provare a tradurre con "*I maestri delle scuole eccellenti sono controversi, universali*"; ma tutto il senso della frase si basa sui tre aggettivi sfumati "*subtle*", "*controversial*" e "*polymath*", e tra una sfumatura e l'altra cambia il senso della frase (e cambia l'abilità del traduttore: quindi forse è meglio se traducete da soli…).

che è una gran bella frase, che sottoscriviamo volentieri anche se né il Progetto Polymath né tantomeno Eliot hanno bisogno della nostra approvazione. La parola, comunque, resta di difficile traduzione: il polymath è l'uomo di vasta e profonda cultura, il dotto, l'erudito. I redattori dell'italica Wikipedia traducono la voce inglese con il titolo "Uomo Universale", e lasciano in bella vista – proprio come fa la consorella maggiore – l'autoritratto di Leonardo da Vinci a chiarire chi sia il *polymath*, l'uomo universale per antonomasia. Per una traduzione ancora più acconcia, a noi piacerebbe rubare a Pindemonte (e a Omero) il verso "*quell'uom dal multiforme ingegno*", se non fosse che in questo caso forse più che d'ingegno proprio di cultura, di erudizione si tratta. Insomma, è *polymath* quell'uomo che conosce le arti e le scienze, le lingue e i classici, la matematica e la filosofia. Nel caso della pièce teatrale scozzese, il *polymath* che veniva celebrato in modo tanto eclatante era D'Arcy Wentworth Thompson.



4 *D'Arcy Thompson*

D'Arcy Thompson nacque il 2 Maggio[8] 1860 a Edimburgo, scozzese quanto solo il whisky può esserlo. Si tratta probabilmente del professore che ogni studente desidererebbe avere, almeno a giudicare dalle testimonianze dei suoi allievi. "*Quando parla lui, io* voglio *restare in silenzio*" diceva W.K.Parker, uno degli accademici più famosi del Regno Unito, che ebbe la fortuna di averlo come maestro. "*In estate e in inverno, il mio maestro non si vedeva mai in giro senza il suo pesante cappotto. Originariamente nero, era diventato verde con l'età, con striature multicolori sulla spalla destra, dove il suo pappagallo aveva lasciato la firma*", diceva un altro discepolo. Il pappagallo sulla spalla, un cappotto vecchio di lustri, la capacità di affascinare gli studenti nelle lunghe lezioni all'aperto, caratteristica dei *college* inglesi, almeno fino a qualche tempo fa, D'Arcy Thompson era davvero un personaggio insolito: figlio d'un professore universitario di greco e nipote di uno scienziato veterinario di alta fama, non risolse mai definitivamente la sua duplice passione per i classici e per le scienze, diventando un luminare in ogni campo. Leggeva greco e latino senza alcuna difficoltà, oltre che svariate lingue moderne. Durante una lezione all'aperto, mentre leggeva un libro alla classe, si mostrò un po' esitante, e uno studente gli chiese se si sentisse male. "*No,*" fu la sua risposta "*è solo che sto traducendo all'impronta dall'italiano medievale, e trovo qualche difficoltà; è per questo che esito…*".

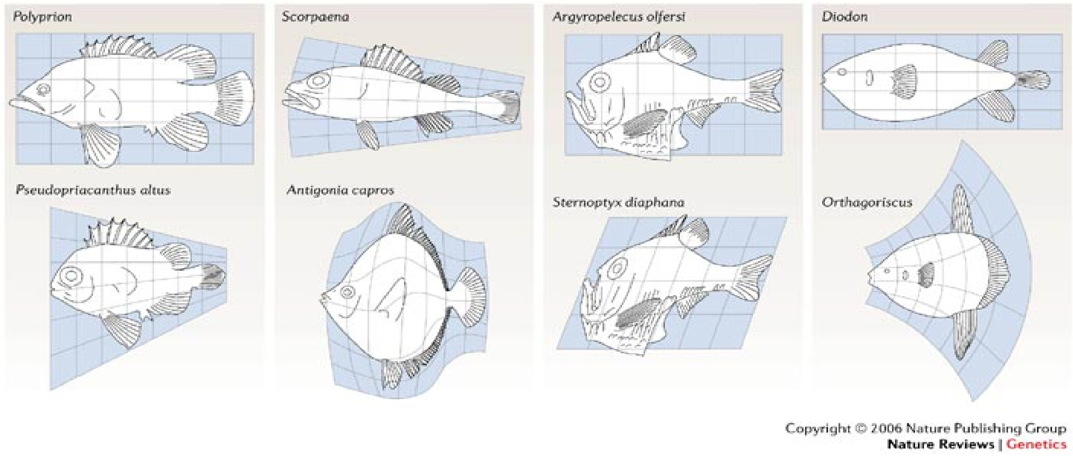


5 *"Crescita e Forma"*

Avrebbe potuto tenere cattedre di Matematica, Greco, Latino, Filosofia: si ritrovò invece, a soli 24 anni, professore di Biologia all'università di Dundee. L'ateneo fu poi incorporato in quello di St.Andrews, e la sua cattedra divenne una più generale "Storia Naturale". Fondò un museo naturalistico, fece una gran quantità di esplorazioni scientifiche (famose le sue missioni allo Stretto di Bering), scrisse libri sulla fauna greca (nel senso che tradusse dall'originale greco il testo sulla "storia degli animali" di Aristotele, con il titolo "*A glossary of Greek birds*"). Dal punto di vista matematico, notò che le celle esagonali degli alveari

[8] E questo basta a stabilire che no, non è lui il protagonista di questo compleanno. Almeno dal punto di vista formale.

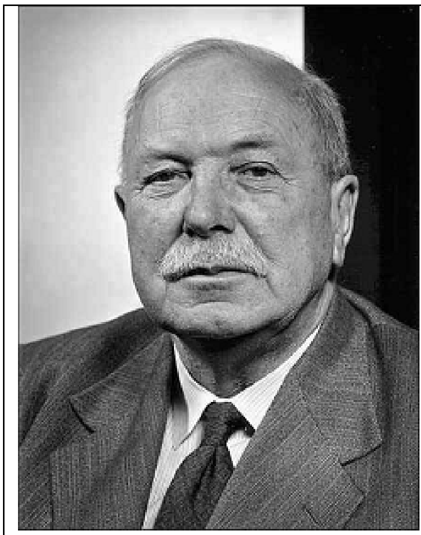
rispondevano a problemi di ottimizzazione, e che la conchiglia del Nautilus seguiva una spirale logaritmica; studiò per queste applicazioni a fondo gli *Elementi* di Euclide, e la strada percorsa dai matematici greci verso la conoscenza di π e della radice di 2: esortava tutti gli zoologi a non trascurare gli aspetti "matematici" della zoologia. La sua opera più famosa, "*On Growth and Form*[9]", presenta infatti approcci matematici sorprendenti: gli scheletri, le forme di alcuni animali, se deformati con continuità secondo le normali regole matematiche che governano questo tipo di trasformazioni, riproducevano perfettamente altre specie animali, rivelandone così l'inaspettata parentela.



6 *"Le deformazioni" di D'Arcy Thompson*

Il testo ha tuttora un grande valore scientifico, anche se molte delle convinzioni di D'Arcy Thompson in merito alle relazioni tra specie deducibili dalle sue "trasformazioni" non hanno poi retto alla prova dei fatti: del resto, come spesso capita a coloro che sono davvero dei pozzi di scienza, il nostro era anche spudoratamente modesto: "*Ho un piccolo dono che coltivo, esercito ed uso: il saper un po' scrivere in lingua inglese. Parlando onestamente e seriamente, è l'unica cosa di cui sono un po' orgoglioso e perfino vanitoso: la sola e unica.*" Noi pensiamo che avrebbe potuto permettersi il lusso, nei suoi 88 anni di vita e nei 64 anni d'insegnamento accademico, di essere fiero anche di molte altre cose.

Nella nostra corte, D'Arcy Thompson è il Gran Ciambellano, quello che meglio rende conto della grandezza del regno, pur senza necessariamente condividere appieno la fama e le convinzioni del Re. Ma una corte è grande, e contiene altri personaggi: soprattutto, contiene i parenti stretti del monarca.



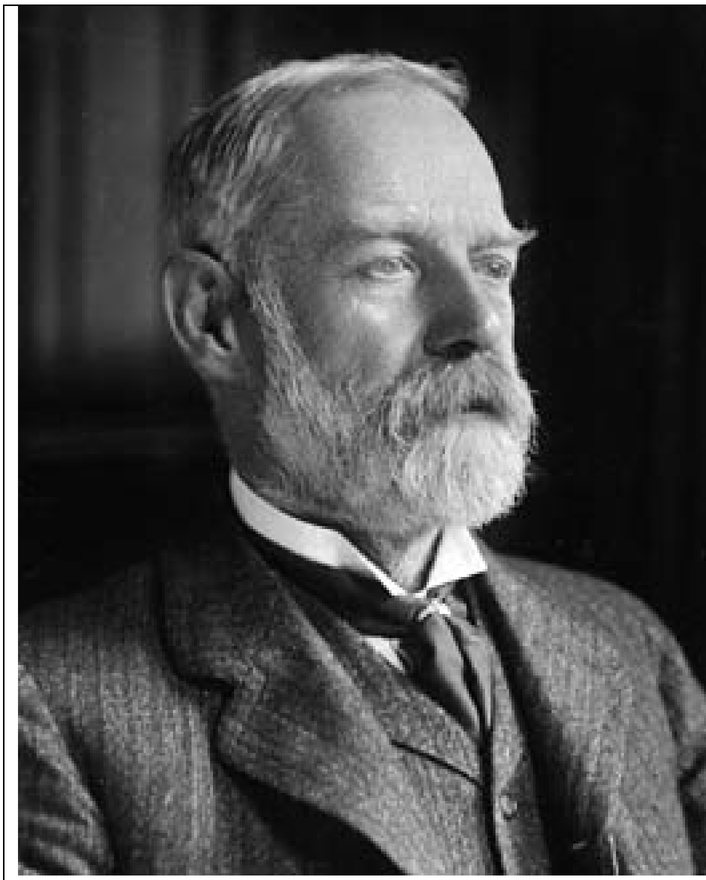
7 *Charles, nipote del re*

Charles, o meglio Charles Galton, se si vogliono elencare entrambi i suoi nomi di battesimo, è figlio del figlio del re, e quindi ne condivide anche il cognome. Nato il 19 Dicembre[10] 1887 a Cambridge, forte di cotanta parentela, avrebbe potuto vivere la vita serenamente, senza troppi impegni, e vivere di gloria riflessa. Invece a diciannove anni entra nel leggendario Trinity College di Cambridge, uscendone cinque anni dopo come quarto Wrangler ai *Mathematical Tripos* del 1909; senza entrare troppo nei dettagli accademici delle classifiche di merito dei college inglesi, significa essere uno dei migliori

[9] Edizione italiana "Crescita e Forma", per Bollati Boringhieri, 1992.

[10] Sì, certo: non è neanche lui, il matematico protagonista del compleanno.

matematici della propria classe[11]. Lettore di Matematica e Fisica all'età di 23 anni presso l'università di Manchester, Charles diventa poi professore di Matematica al Christ's College di Cambridge, non prima di aver servito nel Reale Genio Britannico durante la Prima Guerra Mondiale. Nel 1924, per non smentire la sua appartenenza a questa corte ibrida e poliedrica di cui abbiamo eletto D'Arcy Thompson Gran Ciambellano, diventa professore di Scienza Naturale a Edimburgo. A dimostrazione che non fosse giunto per caso o per piaggeria a certe posizioni, venne eletto per i suoi meriti (anche lui, come già D'Arcy Thompson), alla Società Matematica di Edimburgo, alla Royal Society di Londra e anche a quella di Edimburgo. Nel 1936 venne assunse la carica di direttore del Laboratorio Nazionale di Fisica. Non una carriera al pari di un Abel o di un Gauss, ma niente male, per un regale nipotino; soprattutto, la sua versatilità mostrava i geni di famiglia.



8 *George, figlio del re*

Charles, nipote del re, era ovviamente figlio del principe. E suo padre, infatti, si chiamava George (George Howard, visto che gli inglesi non si fanno mancare mai almeno un secondo nome di battesimo), ed era nato a Down, nel Kent, il 9 Luglio[12] 1845. Secondo figlio del suo celeberrimo padre, aveva nel sangue anche geni artistici, o quantomeno artigianali, visto che sua madre Emma Wedgwood era la bisnipote del fondatore di una delle più famose aziende di porcellana tutt'ora esistenti.

Per non smentire il suo sangue, George vince una borsa di studio (questi principi… mai che lascino un po' di spazio alla plebe) che gli aprì le porte del Trinity College. Non sappiamo come prese, quarant'anni dopo, la notizia che suo figlio Charles si era classificato "Quarto Wrangler" ai Tripos di matematica: ma probabilmente non ritenne la cosa eccezionale, visto che lui, nel 1868, si piazzò non Quarto, ma Secondo. Quel che stupisce è che George, pur così brillantemente avviato ad una carriera matematica, decide invece di fare quel che faceva la maggioranza degli studenti di Cambridge ai suoi tempi: ovvero, darsi alla professione legale.

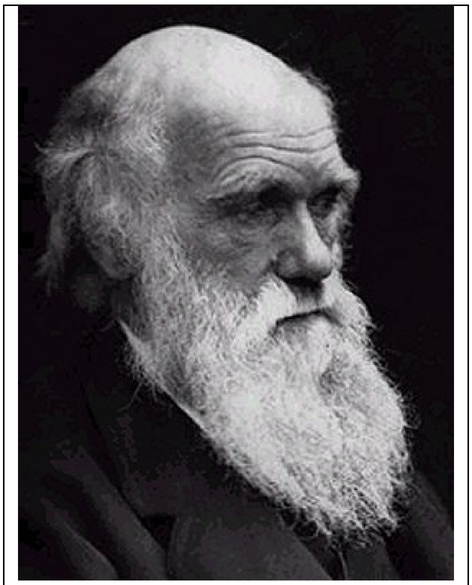
Avvocato, insomma: ma sempre legato a doppio filo con Cambridge, se si è "fellow" di un College, si tende a rimanerlo, specie se quel College è il Trinity. Nel 1878 la sua "fellowship" con il College sarebbe dovuta terminare, ma George, nonostante gli impegni professionali, aveva sempre continuato a mantenere i contatti, al punto che ricevette una proroga nel 1884. E, in effetti, non era atto che si potesse evitare: l'anno prima la sua

[11] Classe nel senso di "anno di nascita", non "classe scolastica".

[12] Oh, finalmente.

collaborazione era diventata così intensa dallo sfociare nella nomina a professore; cattedra: Astronomia e Filosofia Sperimentale[13]. Astronomo, insomma; e di razza: fu il presidente della Royal Astronomical Society, e prima della presidenza fu insignito dalla Medaglia d'Oro che la Società destinava agli studiosi più meritevoli nel campo.

Tanto suo padre, il Re, aveva cambiato il mondo di guardare alla Terra, tanto più il principe alzava lo sguardo verso altri fronti: studia, sull'onda di Laplace e Thomson, le maree e il sistema Sole-Terra.Luna; indaga le origini della Luna, per farlo indaga la meccanica dei fluidi, partendo dall'ipotesi che la Luna fosse sfuggita, a suo tempo, dalla fluida attrazione della madre Terra: nel fare questo, curiosamente, George fu il primo ad usare metodi matematici per provare a studiare non solo la natura delle interazioni tra Sole, Terra e Luna, ma anche e soprattutto la loro dinamica di formazione, insomma, la loro *evoluzione*.



9 *Il Re*

E se questa parola, evoluzione, torna al fondo di quest'articolo dopo aver fatto la sua comparsa già nelle primissime righe, è perché è la parola che meglio ricorda il monarca di questa corte improbabile. La matematica entra nella biologia a grandi passi, e ormai i biologi ne fanno un uso molto elevato: il monito di D'Arcy Thompson è stato ormai raccolto da tutti gli studiosi seri delle scienze della vita. Ed è forse significativo che sia il nipote Charles sia il figlio George, discendenti diretti del sommo Charles Darwin, fossero entrambi matematici.

[13] Ci sfugge un po' il senso di "Filosofia Sperimentale", e non è impossibile che noi si sia caduti per l'ennesima volta in un problema di traduzione: ma è comunque bene ricordare che, ancora nell'Ottocento e in certi ambienti, la "Filosofia" era la "Filosofia Naturale", cioè le scienze matematiche, fisiche, chimiche.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Revisionismo storico, anzi due.			
Valor medio			

2.1 Revisionismo storico, anzi due.

Nel senso che abbiamo trovato un problema (anzi, due) che ci pare simpatico, ma al suo interno secondo Rudy ci sono due operazioni di revisionismo storico abbastanza insignificanti; della prima vorrebbe verifica, della seconda è sicuro e quest'ultima lo ha fatto abbastanza arrabbiare. Non modifichiamo praticamente nulla, a parte alcune note all'interno.

Il fisico George Gamow è vissuto per molti anni in una casa di sette piani, occupando un appartamento al terzo piano; tutte le mattine, essendo di fretta e distratto, arrivato davanti all'ascensore premeva sia il pulsante di salita sia quello di discesa; a quel punto l'ascensore arrivava o partendo dai piani alti, abitati da persone aduse all'acqua di colonia e a raffinati profumi, o dai piani bassi, abitati da puzzolenti fumatori sin da prima dell'alba. E qui cascano i due asini.

Tanto per cominciare, almeno a Torino, il primo piano è il cosiddetto "Piano Nobile", mentre agli ultimi piani di solito si trovano gli alloggi popolari (esiste una bellissima leggenda metropolitana sugli abbaini della *ca' dal rôndonin*, la casa della rondinella, in Via Alfieri, ma ve la raccontiamo un'altra volta); la cosa si vede abbastanza bene anche da fuori dalle case, notando che il primo piano ha i soffitti molto più alti. Come dicevamo, però, di questo vi chiediamo verifica in quanto non sappiamo se sia un'usanza solo torinese o diffusa[14].

Secondariamente (e qui Rudy si è arrabbiato), come sa chiunque di voi abbia letto un ben preciso capitolo[15] di *"Trent'anni che sconvolsero la fisica"*, il buon George era un accanito fumatore: siamo d'accordo che questo problema nella sua versione originale sarebbe finito

[14] *Non è certamente una caratteristica solo torinese: praticamente tutte le città italiane rispettano la regola, e non solo le italiane. Però è caratteristica che arriva dai palazzi rinascimentali, quando i nobili avevano piani riservati alle scuderie e alla servitù. Il primo piano aveva viste migliori ed era più lontano dalle puzze della strada (senza arrivare alla scomodità del sottotetto). Comunque, è talmente noto e diffuso, dal Rinascimento all'Ottocento, che "Piano Nobile", in italiano, è espressione diffusa anche tra gli anglofoni [PRS].*

[15] Non vi diciamo quale, così ve lo rileggete tutto: vale sempre la pena, con quel libro.

nelle mani di giovani virgulti americani che vorremmo tenere lontani dal vizio del fumo, ma almeno potevano scegliersi un altro personaggio? Di fisici salutisti se ne contano a bizzeffe...

Va bene, riprendiamo il problema. Il nostro George-Non-Gamow è in presenza di un ascensore che va su e giù raccogliendo la gente ai vari piani; la sua destinazione quindi è sempre casuale e, quando è fermo, può essere a qualsiasi piano; inoltre, la sua velocità è costante e quando nessuno lo chiama sta lì dov'era; non solo ma quando un ascensore arriva ad un piano, le persone che devono prenderlo saltano dentro e non possono alterare il percorso impostato dalle chiamate precedenti.

Prima domanda: supponendo i piani scarsamente abitati (qui il problema dice testualmente "prima dell'esplosione demografica"), quali sono le probabilità che George al mattino (quando tutti chiamano l'ascensore per andare al lavoro) si trovi un ascensore puzzolente, ossia che "sta salendo"?

Ora, a quanto pare, col passare degli anni (e quindi successivamente all'esplosione demografica) George si accorge che questa probabilità è variata: riuscite a calcolare quale sia quella nuova?

Espansione? Espansione. Supponiamo la casa di George sia una casa (pessimo gioco di parole) *reale*, ossia i piani siano distribuiti tra 0 e 1 in modo continuo; se George abita al piano p, quali sono le probabilità che si ritrovi l'ascensore puzzolente se schiaccia i bottoni mentre l'ascensore è fermo? E quali se li schiaccia con l'ascensore in moto?

Caso mai vi interessasse, Rudy non prende (quasi) mai l'ascensore: anche perché abita al Piano Nobile, e se la fa a piedi...

2.2 Valor medio

Non nel senso che dovete calcolare un valor medio, ma nel senso che Rudy per stabilire il valore in pipe ha fatto il valor medio tra le pipe della prima domanda e della seconda: uno più tre fa quattro e diviso due, due. Anche se la seconda domanda in realtà sono due, ma sette terzi di pipa sono difficilissimi da disegnare. Quindi, due pipe.

State partecipando a un gioco a premi dedicato ai campioni di calcolo mentale; siccome l'italica popolazione a vedervi con l'aria perplessa mentre impiegate trenta secondi a calcolare a mente una radice quadrata con dieci cifre dopo la virgola difficilmente si appassiona, il conduttore ha deciso di inserire un po' di azzardo (che, in una popolazione che continua a giocare a superenalotti e grattaevinci, ha evidentemente un grosso successo).

Il nostro conduttore ha un sacchetto tipo tombola con dentro i numeri da 1 a 100; ne estrae dieci, e il vostro compito è, partendo da quei numeri, di trovare due insiemi disgiunti (l'unione dei quali non sia necessariamente *tutto* l'insieme iniziale: potete usarne meno) aventi la stessa somma. Avete un minuto di tempo.

Ora, uno dei tormentoni su un ben preciso gioco a premi che per evitare denunce non nomineremo è che la "(s)fortuna" sia in un certo qual modo "aiutata" dal conduttore; supponendovi "meglio dei mugiki di maggio" (sì, la copertina di RM_136) a far di conto, quali sono le probabilità che avete di vincere? E se il conduttore potesse scegliere qualche numero in funzione di quelli già estratti?

E questo è il primo. Quello che non sapevate ancora è che la trasmissione ha avuto un incredibile successo, e vorrebbero farne una versione (testuali parole del conduttore) "per persone normali": l'idea è quella di estrarre *meno* numeri, rendendo la cosa più facile.

Cosa succede se ne vengono estratti *nove*? E con *otto*?

Ecco, questa era la domanda difficile. Logicamente, se qualcuno vuole espandere ad altri valori, liberissimo di farlo...

3. Bungee Jumpers

Sia p un numero primo che dà resto 1 se diviso per 4. Dimostrare che esiste un intero x tale che $x^2 + 1$ è divisibile per p.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Summer Contest

Visto? VISTO?!?! È bastato che Rudy si lamentasse del tempo che è saltata fuori una temperatura da fare le uova fritte sul marciapiede[16]. Fa un caldo tale che non se lo sogna neanche, di uscire, e se ne resta a casa a compulsare vecchi appunti nell'aria condizionata.

"Rudy, facci capire. Quando piove non esci perché odi l'ombrello, quando fa caldo non esci perché preferisci il fresco... Ma a casa tua, come la prendono?" Malissimo. E ogni tanto mi buttano fuori con l'ordine di tornare non prima di un'ora (e io vado a chiudermi in un museo: la "Carta Musei", con me, è in decisa perdita).

Comunque, non è questo il problema, anzi, scavando tra vecchia roba abbiamo trovato materiale per un altro Summer Contest: questa volta, vi raccontiamo una fiaba.

Un sultano, dopo anni passati a mettere e togliere turbanti e a incollare francobolli colorati sulla testa dei suoi saggi *visir*, cominciava a stufarsi di restare sempre fregato.

Un bel giorno, prese i due più saggi, requisì i loro turbanti e disse loro queste parole: "Qui davanti avete una normale scacchiera, sulla quale io metterò un certo numero di pedine, non più di una per casella, e lascerò qualche casella vuota. Poi, chiamerò dentro uno di voi e gli indicherò una casella: questi avrà la possibilità, a sua scelta, di mettere una pedina in una casella vuota o di eliminare una pedina da una casella occupata. Quindi, toccherà al secondo di voi entrare, guardare la scacchiera e dirmi che casella avevo scelto. Avete dieci minuti per mettervi d'accordo sulla strategia, poi si gioca. Se la risolvete sarete come al solito ricoperti di monete d'oro (e qui i più saggi potranno capire perché scelgo sempre dei nanerottoli, come *visir*), se invece non ce la fate, mi tengo i turbanti".

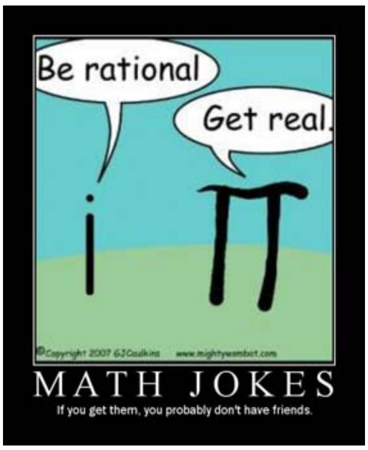
Ora, come molti di voi sapranno, presso moltissime civiltà il presentarsi a capo scoperto è all'incirca come il presentarsi in bermuda e infradito al ricevimento del Presidente della Repubblica[17], quindi i due *visir* rivolevano assolutamente indietro i turbanti; riuscite ad immaginare quale strategia adottarono?

Come per tutti i Summer Contest, avete tempo tutta l'estate: si parlerà di soluzioni a partire dal numero di ottobre.

E se ci pensate all'aperto, mettevi il cappello!

5. Soluzioni e Note

Luglio, col bene che ti voglio,... va bene, la smetto. Sono mesi che comincio questa rubrica con il mese in corso, e questa era quasi obbligata. Però, visto che è estate, una vignetta matematica ve la metto, di quelle che capiscono solo gli addetti ai lavori.



10 *Scherziamoci su, va.*

Questo mese voglio rompere con la tradizione ed usare la prima persona singolare. In realtà si tratta di un esercizio letterario, le prossime note le scriverò in una

[16] Leggenda metropolitana, per quanto ne sappiamo. Chiedete a Lord Stokastyk per maggiori informazioni.

[17] Sì, stiamo scrivendo questo il 2 giugno. E ieri sera quello in bermuda l'hanno picchiato i Corazzieri.

persona diversa, finché non le esaurisco tutte... però mi sono chiesta, ma se Rudy parla sempre di sé in terza persona, perché lo devo fare pure io? Va beh, lui è il Grande Capo, come non detto.

Ora, sappiate che è successa una cosa piuttosto divertente: siamo stati intervistati. Divertente è la parola giusta, mi riesce sempre inconcepibile il fatto che qualcuno abbia qualcosa da chiedere a tre fuori di testa come noi, ma succede ancora, questa volta sono quelli di Maddmaths, il link è http://maddmaths.simai.eu/vita-da-matematico/a-spasso-coi-rudi, ma fatevi un giro sul loro sito e abbonatevi alla newsletter, che è fenomenale. Tra le cose che non vi dico c'è il modo in cui l'intervista ha avuto luogo... praticamente nel salotto virtuale siamo riusciti a prenderci a botte e fare una cattiva impressione (questa frase sta qui solo perché vi venga voglia di cliccare, mi dicono che la violenza vende...).

Mentre sono qui che vi passo link, vi ricordo che ci sono nuovi documenti nel nostro Bookshelf (http://www.rudimathematici.com/bookshelf.htm) e nella sezione speciale del Block Notes Matematico (http://www.rudimathematici.com/blocknotes.htm), andate a guardare! Continua anche la leggenda di Beau Geste, da seguire sempre in Bookshelf.

In realtà, la cosa più importante da ricordarvi è che i primi di luglio si svolge a Torino l'Euroscience Open Forum (http://www.esof2010.org/), spero proprio che per tutti voi ci sia ancora tempo per prenotarsi e partecipare... e se ci andate, poi di tempo ce n'è di sicuro per mandare reportage e racconti di quello che avete visto!

Ce l'ho fatta, spero che a questo punto vi sentiate pronti ad affrontare le soluzioni dei problemi del mese scorso.

5.1 [137]

5.1.1 Piove... (...con quel che segue, I)

I titoli dei problemi del Capo si sono rivelati profetici, almeno per me: a giugno ha piovuto. E non poco. Probabilmente non altrettanto dalle vostre parti, perché di soluzioni me ne sono arrivate ben poche... ma andiamo per ordine, cominciamo con il testo del problema:

> *Supponiamo che le nuvole, anziché essere soffici batuffoli di bambagia, siano composte da minuscole goccioline d'acqua distribuite uniformemente e in quiete (non lasciatevi influenzare dalla realtà), e facciamo cadere una goccia di pioggia attraverso la nuvola. Quando la goccia di pioggia urta una gocciolina (di quelle ferme), la assorbe e continua la caduta; la nostra gocciolona continua a essere perfettamente sferica per tutto il tragitto.*
>
> *La domanda è: con che accelerazione cade la goccia?*

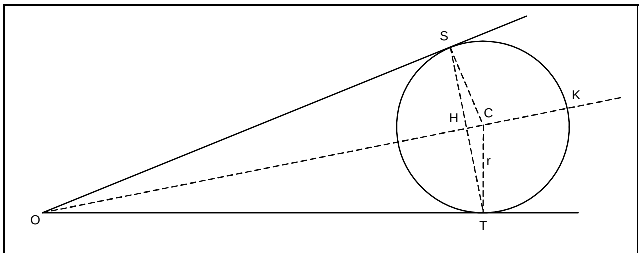
Ecco. Soluzioni ne sono arrivate alcune, anche se tutti hanno ammesso di aver trovato il problema piuttosto ostico. Comincio da ***Franco57***:

> È chiaro che il volume della goccia sferica aumenta solo in funzione distanza percorsa, indipendentemente dalla sua velocità. Possiamo inizialmente studiare la relazione tra volume e distanza percorsa.
>
> Non so se si tratta della soluzione bellissima, semplicissima e sbagliatissima, ma ho preso inizialmente questo abbaglio: se la goccia sferica percorre una distanza infinitesima *ds*, il volume di nuvola che attraversa è pari a un cilindretto di base cerchio massimo e spessore *ds*. L'incremento di massa sarebbe quindi $dm = \rho \cdot \pi r^2 \cdot ds$, essendo ρ la densità della nuvola. Ma da $m = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ (per l'acqua massa e volume coincidono), abbiamo anche $dm = 4\pi r^2 \cdot dr$, da cui $\frac{dr}{ds} = \frac{\rho}{4}$, che

diventa $r = \frac{\rho}{4} s$, scegliendo una opportuna origine per *s*. Peccato che per $\rho = 1$, caso limite della goccia immersa nell'acqua stessa, quadruplicando la distanza la goccia nuova sarebbe una sfera completamente disgiunta e durante il suo passaggio avrebbe accumulato in più tutta la massa di sé stessa più altra massa! L'errore denuncia la scarsa sensibilità nell'uso degli infinitesimi, tipico di un matematico dilettante che gioca al "piccolo fisico".

L'idea che il raggio *r* sia proporzionale alla distanza percorsa *s* si rileva però vincente, ma il rapporto deve essere diverso da quello trovato, supponiamo sia $k = \frac{\Delta r}{\Delta s}$ dipendente solo da ρ e vediamo che il sistema è coerente.

Allora la goccia sferica si muove inviluppata in un cono infinito, che ha come asse la direzione del movimento ed al quale rimane sempre tangente, infatti *k* è evidentemente il seno della metà dell'angolo al vertice del cono, quindi $0 < k < 1$.



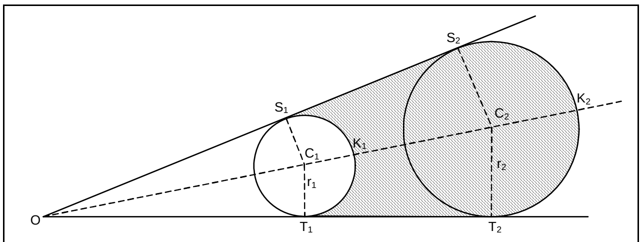
11 *Situazione in sezione.*

La figura a fianco rappresenta la situazione in sezione: bisogna ruotare attorno alla direzione $\overline{OK}$ di movimento della sfera per ottenere la tridimensionalità.

La goccia-sfera è rappresentata dal cerchio di centro *C* e il cono dall'angolo $S\hat{O}T$, dove *S* e *T* sono i punti di tangenza della sezione, *O* il vertice. *H* è il piede della perpendicolare all'asse di rotazione, *K* l'intersezione tra la sfera e la direzione di movimento nel punto più avanzato.

Poniamo $s = \overline{OC}$ la distanza del centro *C* della sfera dal vertice *O* del cono ed $r = \overline{TC} = ks$ il raggio, dalla similitudine dei triangoli rettangoli (CTO) e (CHT) ricaviamo $\overline{HC} = kr$ e poi $\overline{TH}^2 = r^2 - (kr)^2 = (1-k)^2 r^2$ ed anche

$$\overline{OH} = \overline{OC} - \overline{HC} = \frac{r}{k} - kr = \frac{1-k^2}{k} r \quad \text{e} \quad \overline{HK} = \overline{HC} - \overline{CK} = kr + r = (1+k) \cdot r$$



12 *Attraversamenti di nuvole.*

Il volume di nuvola attraversata dall'inizio (da $s = 0$) è il *cono gelato* costituito dal cono per SOT e dalla calotta sferica per TSK (la formula per il volume della calotta la prendiamo per scontata, si trova anche nell'ultima pagina di molti quaderni scolastici).

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{TH}^2 \cdot \overline{OH} = \frac{1}{3}\pi \cdot (1-k)^2 r^2 \cdot \frac{1-k^2}{k} r = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(1-k^2)^2}{k} r^3$$

$$V_{calotta} = \pi \cdot \overline{HK}^2 \cdot \left(r - \frac{\overline{HK}}{3} \right) = \pi \cdot (1+k)^2 r^2 \cdot \left(r - \frac{(1+k)r}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \cdot (1+k)^2 (2-k) r^3$$

$$V_{conogelato}=V_{cono}+V_{calotta}=\frac{\pi}{3}\frac{\left(1-k^2\right)^2}{k}r^3+\frac{\pi}{3}(1+k)^2(2-k)r^3=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\left(1-k^2\right)^2}{k}+(1+k)^2(2-k)\right)r^3=$$

$$=\frac{\pi}{3}\frac{1-2k^2+k^4+k\left(2+4k+2k^2-k-2k^2-k^3\right)}{k}r^3=\frac{\pi}{3}\frac{1+2k+k^2}{k}r^3=\frac{\pi}{3}\frac{(1+k)^2}{k}r^3$$

Quando la goccia passa da un raggio r_1 ad un raggio r_2, la massa di acqua acquisita è ρ volte il volume di nuvola che attraversa la sua superficie (tratteggiato in figura), che è pari alla differenza dei due *coni gelati*, e deve corrispondere alla differenza di massa delle sfere, quindi

$\rho\frac{\pi}{3}\frac{(1+k)^2}{k}\left(r_2-r_1\right)^3=\frac{4}{3}\pi\left(r_2-r_1\right)^3$, cioè basta scegliere k tale che $\rho=\frac{4k}{(1+k)^2}$. La relazione tra ρ e k è una funzione biunivoca in [0,1], infatti per $k=0$ e per $k=1$ riotteniamo rispettivamente $\rho=0$ e per $\rho=1$ e $\frac{d\rho}{dk}=4\cdot\frac{1\cdot(1+k)^2-k\cdot 2(1+k)}{(1+k)^4}=\frac{4\left(1-k^2\right)}{(1+k)^4}$ che è positivo in (0,1), dove quindi la funzione ρ_k è crescente. La sua inversa si ottiene risolvendo l'equazione di 2° grado in k che dà $k=\frac{2}{\rho}-1\pm\frac{2}{\rho}\sqrt{1-\rho}$. E poiché $\frac{2}{\rho}>2$ solo la soluzione col meno è valida e dunque $k=\frac{2}{\rho}\left(1-\sqrt{1-\rho}\right)-1$.

La massa m in funzione dello spostamento s vale $m=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot k^3s^3$.

Il 2° principio della dinamica, nella sua forma più generale, si esprime con la relazione $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$, cioè la forza impressa a un corpo è pari alla variazione istantanea della quantità di moto. Nel nostro caso $F=mg$ dove g è l'accelerazione di gravità e consideriamo i valori positivi verso il suolo. Abbiamo:

$F=mg=\frac{d(mv)}{dt}=\frac{dm}{dt}v+m\frac{dv}{dt}$ e, osservando che $dm=\frac{4}{3}\pi\cdot k^3d\left(s^3\right)=4\pi\cdot k^3s^2ds$,

$$g=\frac{dm}{dt}\frac{v}{m}+\frac{dv}{dt}=4\pi\cdot k^3s^2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{v}{\frac{4}{3}\pi\cdot k^3s^3}+\frac{dv}{dt}.$$

Chiamando a l'accelerazione istantanea della goccia, abbiamo $\boxed{a=g-\frac{3v^2}{s}}$ con le condizioni iniziali

$s_0=\frac{1}{k}\sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi}}$, dalla relazione tra m ed s già trovata, e $v_0=s_0'$, essendo s_0, m_0 e v_0 spazio, massa e velocità iniziali.

Non sono stato in grado di risolvere l'equazione differenziale, a parte il caso di assenza di gravità che dà $s=\left(\frac{3m_0v_0}{\pi\cdot k^3}t+s_0{}^4\right)^{1/4}$, ma ho trovato un valore limite per l'accelerazione, infatti, considerando che v è positivo e che l'equazione può essere riscritta come $\frac{v^2}{s} = \frac{g}{3} - \frac{a}{3}$, abbiamo:

$$a' = -3\frac{2vv's - v^2 s'}{s^2} = -\frac{v}{s^2}\left(2as - v^2\right) > 0 \Leftrightarrow 2as - v^2 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}\frac{v^2}{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{g}{6} - \frac{a}{6} \Leftrightarrow a < \frac{g}{7}$$

L'accelerazione cresce ($a' > 0$) se e solo se è inferiore alla soglia $\frac{g}{7}$, ma se è uguale non può né crescere né decrescere perciò è costante.

Se accelerazione è in un dato momento inferiore alla soglia, non la può superare per il principio di continuità, perché, una volta raggiunta, diventerebbe costante, quindi essa tende ad un valore limite. Analogamente se è inizialmente superiore alla soglia, non va mai sotto di essa e quindi continua a decrescere e tende ancora una volta ad un valore limite. Sia a_f (accelerazione finale) questo limite. Per calcolarlo (non sarà una sorpresa a questo punto!) ci possiamo servire del teorema di de l'Hôpital: poiché $\frac{\left(v^2\right)'}{s'} = \frac{2v'v}{v} = 2a \to 2a_f$, pure $\frac{v^2}{s} \to 2a_f$.

Riprendendo l'equazione differenziale del moto e passando al limite otteniamo $a_f = g - 3 \cdot 2a_f$ da cui $\boxed{a_f = \frac{g}{7}}$.

Prima di procedere, per sdrammatizzare un attimo, cito ***Silvano***, che dopo tre pagine di calcoli e considerazioni ha trovato delle soluzioni approssimate (che tengo per me) ed infine formulato delle conclusioni:

A questo punto occorrerebbe considerare il calore e l'evaporazione legato agli urti (c'è energia cinetica che sparisce) ed agli attriti, nonché le tensioni superficiali della nostra supergoggiolona che tende a frammentarsi urtando contro le molecole d'aria e d'acqua, ma mi fermo qui per 2 motivi:

1. Perché per calcolare l'evaporazione dovrei cimentarmi con quella cosaccia che è l'entalpia, il calore specifico, il calore di evaporazione, ecc. ecc. che per uno che come il sottoscritto ha SEMPRE detestato la termodinamica a partire da quel po' che se ne faceva alle superiori. (P.S. È nota la battuta che ancora oggi nessuno ha mai visto l'entropia ne sa bene che significa ;D)
2. Perché qualcosa deve essere lasciato ai posteri :D
3. Perché sono sicuro di aver fatto errori di calcolo e non mi va di rifarli?

Ho cambiato a, b e c in numeri, per contarli meglio, ma direi che sono tre... va bene lo stesso. Vediamo invece ora la soluzione di ***Fabrizio***:

Consideriamo la nube alta D e composta al suo interno da N gocce in sospensione spaziate uniformemente. La distanza tra le gocce è dunque pari a: $h = \frac{D}{N}$.

Durante la discesa (nel periodo che intercorre tra un urto ed il successivo) la goccia subirà un'accelerazione dovuta alla sola forza gravità; la sua velocità varierà pertanto in accordo con il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}m(k)\cdot v_2^2(k) - \frac{1}{2}m(k)\cdot v_1^2(k) = m(k)\cdot g\cdot h \qquad [1]$$

Dove $m(k)$ è la massa della goccia nel punto k.

Quando la goccia urta una gocciolina in sospensione la velocità $v_1(k+1)$, misurata nell'istante immediatamente successivo all'urto, può essere calcolata a partire dalla velocità $v_2(k)$, misurata nell'istante immediatamente precedente l'urto sfruttando invece il teorema di conservazione della quantità di moto:

$$m(k+1)v_1(k+1) = m(k)v_2(k) \qquad \texttt{[2]}$$

Esplicitando nella `[2]` e sostituendola nella `[1]` si ottiene la successione:

$$v_1^2(k+1) = \frac{m^2(k)}{m^2(k+1)}\left(v_1^2(k) + 2\cdot h\cdot g\right) \qquad \texttt{[3]}$$

Se assumiamo che la prima goccia parta con una velocità iniziale pari a zero la velocità assunta dalla goccia nella posizione (k+1) sarà pari a:

$$v_1^2(k+1) = \frac{\sum_{i=0}^{k} m^2(i)}{m^2(k+1)}(2\cdot h\cdot g) \qquad \texttt{[4]}$$

Poco prima di uscire dalla nube, dopo aver inglobato N gocce in sospensione, la velocità finale sarà pertanto pari a:

$$v_1^2(N) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} m^2(i)}{m^2(N)}(2\cdot h\cdot g)$$

D'altro canto se la goccia scendesse con un'accelerazione costante a, la sua velocità nel punto terminale sarebbe pari a:

$$v_1^2(N) = 2\cdot a\cdot N\cdot h$$

Confrontandola con la `[4]` si ottiene per a il valore:

$$a = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} m^2(i)}{N\cdot m^2(N)}\cdot g$$

Possiamo passare dal caso discreto al caso continuo facendo tendere N all'infinito. In questo caso l'accelerazione a diviene:

$$a = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{N-1} m^2(i)}{N\cdot m^2(N)}\cdot g \qquad \texttt{[5]}$$

Vediamo in particolare due casi:

1. *Gocce in sospensione di massa pari a m*: La `[5]` diviene:

$$a = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{N-1} i^2}{N^3}\cdot g$$

Poiché:

$$\sum_{i=0}^{N-1} i^2 = \frac{(N-1)^3}{3} + \frac{(N-1)^2}{2} + \frac{(N-1)}{6}$$

si ha: $a = \dfrac{g}{3}$

2. *Gocce in sospensione distribuite uniformemente con densità* ρ_c *all'interno della nube*. Vale allora la seguente relazione:

$$m(k) = \int_0^k r^2(x) \cdot \pi \cdot \rho_c \cdot dx = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3(k) \cdot \rho_d \qquad \texttt{[6]}$$

Dove ρ_d è la densità della goccia. Differenziando rispetto a *k* si ha:

$$r^2(k) \cdot \pi \cdot \rho_c = 4 \cdot \pi \cdot r^2(k) \cdot \rho_d \frac{dr(k)}{dk}$$

da cui:

$$r(k) = \frac{\rho_c}{4 \cdot \rho_d} \cdot k$$

ed infine sostituendo la relazione precedente nella `[6]`:

$$m(k) = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\rho_c}{4 \cdot \rho_d} \cdot k \right)^3 \cdot \rho_d = \frac{\pi}{48} \cdot \frac{\rho_c^3}{\rho_d^2} \cdot k^3$$

Noto *m*(*k*) possiamo calcolare la `[5]`:

$$a = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} i^6}{N^7} \cdot g$$

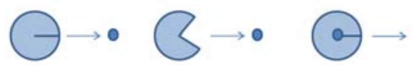
Poiché:

$$\sum_{i=0}^{N-1} i^6 = \frac{(N-1)^7}{7} + \frac{(N-1)^6}{2} + \frac{(N-1)^5}{2} - \frac{(N-1)^3}{6} + \frac{(N-1)}{42}$$

si ha: $a = \dfrac{g}{3}$.

Prima di passare al prossimo problema, vi riporto ancora le considerazioni iniziali di ***Adriano***, che giunge alla stessa conclusione:

> Un po' impaurito dalla valutazione di difficoltà del problema, presentato con toni così roboanti come destinato a diventare uno dei più difficili della storia di RM, mi sono limitato ad aderire al programma epistemologico del Doc affrontando il problema nei suoi aspetti limiti. E tra i due estremi ho scelto senza dubbio quello della semplificazione. In pratica ho studiato un modello che, per ragioni che appariranno chiare a breve, ho denominato 1-PACMAN (mi è rimasta ancora in memoria la home page di Google...). Un modellino di *house keeping* semplice semplice tanto per vedere che aria tira (in tutti i sensi).



13 *I Pacman di* ***Adriano***.

> Mi sono immaginato innanzitutto che la nostra nuvola sia costituita da un filare mono-dimensionale di gocce di vapore acqueo in equilibrio, equidistanti tra loro e tutte di egual massa, diciamo *m*. Una goccia di massa *am* si avvicina in caduta libera alla nuvola

> e impatta la prima goccia a velocità *V*. Ipotizzo che nell'urto da una parte si conservi la quantità di moto e dall'altra che la goccia di nuvola impattata sia fagocitata letteralmente dalla goccia in caduta. Non c'è accrescimento ma un incremento di densità. (...)

Modello interessante, vero?

5.1.2 Piove... (...con quel che segue, II)

Povera me, il Capo ha messo la pioggia in tutti i problemi. Prima di parlare di quest'altro vi passo il testo, che è lungo e ricco di quesiti:

> *Piove e si trasloca un quadro senza vetro, alto H e largo L. Siccome il bordo è impermeabile e l'acqua dal bordo non cola sulla tela, affrontate la pioggia (che cade verticalmente con velocità misurabile), ad un'inclinazione accuratamente calcolata in funzione della vostra velocità.*
>
> *Nel secondo scenario, viene fissato una specie di "tettuccio" largo quanto il quadro e sporgente di L sulla cima del quadro e occorre tenere il quadro dritto. A che velocità andate, questa volta?*
>
> *Terzo scenario: il tettuccio potete inclinarlo, nel senso che se volete lo piazzate ad un angolo diverso da novanta gradi; non solo, ma avete dei dati: la pioggia cade a 5 m/sec, il vostro quadro è alto 3 metri e il tettuccio sporge dal quadro di 80 centimetri. Il guaio è che si sta alzando il vento e il vostro anemometro da tasca vi dice che varia da zero a 1,5 metri al secondo. A che velocità vi muovete? A che angolo dovete tenere la tela? E di quanto dovete inclinare il tettuccio rispetto al quadro?*

A parte le risate pensando a Rudy fradicio sotto la pioggia con il quadro completamente asciutto in mano, il problema non ha avuto grandi riscontri. L'unico che ci ha scritto in proposito è stato ***Cid***, a cui lasciamo la parola.

> 1) Chiamando α l'angolo d'inclinazione del quadro rispetto alla verticale, abbiamo che la proiezione del quadro sul piano orizzontale è uguale a $H \cdot sen(\alpha)$, mentre la sua proiezione sul piano verticale è pari a $H \cdot \cos(\alpha)$. Per cui, chiamando v_p la velocità della pioggia, dobbiamo fare in modo che il tempo che impiega una goccia d'acqua a percorrere una distanza pari alla proiezione del quadro sul piano verticale sia uguale al tempo che impiega Rudy a spostarsi di una distanza pari alla proiezione del quadro sul piano orizzontale, quindi, se *x* è la velocità di Rudy, dovrà essere:
>
> $$\frac{H \cdot \cos(\alpha)}{v_p} = \frac{H \cdot sen(\alpha)}{x}$$
>
> Otteniamo: $x = v_p \cdot tg(\alpha)$.
>
> 2) Avendo a disposizione un "tettuccio" che sporge di *L*, ma dovendo tenere il quadro in posizione verticale, dobbiamo fare in modo che il tempo che impiega una goccia d'acqua a percorrere una distanza pari a *H* sia minore o uguale al tempo che impiega Rudy a spostarsi di una distanza pari a *L*.
>
> Quindi: $\frac{H}{v_p} \leq \frac{L}{x}$. Otteniamo: $x \leq v_p \cdot \frac{L}{H}$.
>
> 3) Ed ora si giunge al caso più difficile: dobbiamo considerare la presenza di vento, la cui velocità oscilla tra 0 e 1,5 m/s.
>
> Il primo problema è: qual è la direzione del vento?

Se la direzione del vento è perpendicolare al quadro, siamo salvi perché il bordo del quadro è impermeabile. Dalla soluzione del primo caso sappiamo che, se α è l'angolo d'inclinazione del quadro rispetto alla verticale, la velocità di Rudy è $x = v_p \cdot tg(\alpha) = 5 \cdot tg(\alpha)$.

Se, invece, la direzione del vento è la stessa direzione di marcia di Rudy si può trovare una soluzione inclinando in modo adeguato il quadro e il suo "tettuccio".

Chiamo α l'angolo d'inclinazione del quadro rispetto alla verticale e β l'angolo d'inclinazione del "tettuccio" rispetto alla verticale (l'angolo tra "tettuccio" e quadro è pari a $\alpha+\beta$). Per cui, essendo 5 m/s la velocità della pioggia, dobbiamo fare in modo che il tempo impiega una goccia d'acqua a percorrere una distanza pari alla proiezione del quadro sul piano verticale meno la proiezione del "tettuccio" sul piano verticale sia minore del tempo che impiega una goccia d'acqua a spostarsi di una distanza pari alla proiezione del quadro sul piano orizzontale più la proiezione del "tettuccio" sul piano orizzontale (grazie all'azione combinata di Rudy e del vento).

Per quanto visto al punto (1) e tenuto conto che la velocità massima del vento è pari a 1,5 m/s, si deduce che la velocità di Rudy deve essere uguale a $v_p tg(\alpha) = 5tg(\alpha)$ con vento contrario e uguale a $v_p tg(\alpha) + 1{,}5 = 5tg(\alpha) + 1{,}5$ con vento a favore.

Otteniamo:

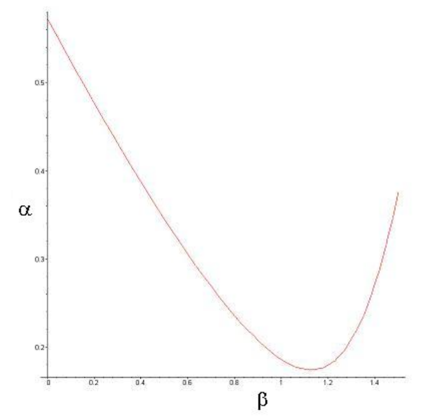
$$\frac{3\cos(\alpha) - 0{,}8\cos(\beta)}{5} \le \frac{3sen(\alpha) + 0{,}8sen(\beta)}{5tg(\alpha) + 1{,}5}$$

Da cui si ricava l'equazione:

$$45\cos(\alpha) - 40tg(\alpha)\cos(\beta) - 12\cos(\beta) - 40sen(\beta) \le 0$$

Questa equazione trigonometrica è sicuramente difficile da risolvere, per cui giustamente Alice ha attribuito 3 birre a questo problema; ma nel testo del problema non è chiesto di trovare la soluzione ottimale, ma soltanto una soluzione valida (...e suppongo che sia questa la ragione per cui Rudy e Piotr hanno stimato questo problema ad un livello 2 di difficoltà).

Chiaramente una soluzione valida deve tener conto del fatto che Rudy non può muoversi con il quadro sulle spalle alla velocità di un maratoneta, quindi occorre cercare un valore della velocità sufficientemente basso.



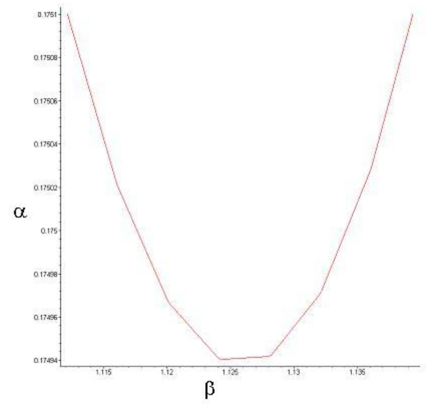
14 *Grafico di* ***Cid***.

Disegno il grafico dell'equazione: $45\cos(\alpha) - 40tg(\alpha)\cos(\beta) - 12\cos(\beta) - 40sen(\beta) \le 0$.

Ingrandisco il punto di minimo per una stima migliore.

Per cui una soluzione potrebbe essere quella di inclinare la tela di 0,17494 radianti ed inclinare il "tettuccio" rispetto alla verticale di 1,125 radianti.

Verifico la validità di tale soluzione:



15 *Zoom di **Cid***.

$$45\cos(0{,}17494) - 40tg(0{,}17494)\cos(1{,}125) - 12\cos(1{,}125) - 40sen(1{,}125) = \text{-}0.00001948 \leq 0$$

L'angolo di inclinazione della tela è: $\alpha = 0{,}17494$ radianti, l'angolo d'inclinazione tra "tettuccio" e quadro è uguale a: $\alpha + \beta = 0{,}17494 + 1{,}125 = 1.29994$ radianti. La velocità di Rudy nel caso di vento contrario è pari a $5tg(\alpha) = 5tg(0{,}17494) = 0.8837$ m/s, mentre nel caso di vento a favore, si ha $5tg(\alpha) + 1{,}5 = 0.8837 + 1{,}5 = 2{,}3837$ m/s.

L'unico problema è marciare alla velocità di 2,3837 m/s (cioè 8,58 km/h): fortuna che Rudy lo deve fare solo quando ha il vento a favore...

<u>Conclusione</u>:

Quindi Rudy ha la possibilità di non bagnare il quadro, dividendo il suo percorso in due tratti: uno perpendicolare alla direzione del vento e uno nella stessa direzione del vento.

Meno male che c'è il nostro ***Cid***. E con questo è tutto. Godetevi le vacanze e divertitevi con i problemi estivi del Capo. A rileggerci il mese prossimo!

6. Quick & Dirty

Ci sono circa 2244,5 miglia nautiche tra Los Angeles e Honolulu. Un piroscafo parte a mezzanotte da Los Angeles e procede a un nodo all'ora verso Honolulu: dopo quanto tempo arriva?

Qui bisognava ricordarsi che un nodo è un miglio nautico **all'ora**. *Quindi il piroscafo non procede a velocità costante, ma con un'accelerazione di un miglio nautico all'ora. Quindi,* $2244{,}5 = \frac{at^2}{2}$ *e t=67 ore. Se poi volete tener conto dei fusi orari…*

7. Pagina 46

Sia $p = 4n + 1$ un primo. Dal *Teorema di Wilson* sappiamo che $(p-1)! + 1 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 4n) + 1$ è divisibile per *p*.

In $(4n)!$ possiamo sostituire ogni fattore maggiore di $2n$ con lo stesso numero espresso in funzione di *p* e *n*; ad esempio, essendo $p = 4n + 1$, possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
2n+1 &= p-2n,\\
2n+2 &= p-(2n-1),\\
&\dots\\
4n &= p-1.
\end{aligned}
$$

Da questo, possiamo scrivere:

$$(p-1)! = (4n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)2n[p-(2n-1)]\cdot\ldots\cdot(p-1).$$

Si vede facilmente che se espandiamo il lato destro di questa espressione, ogni termine avrà un fattore *p*, tranne il termine finale che sarà pari a $[(2n)!]^2$.

Quindi possiamo scrivere $(p-1)!+1 = Ap + [(2n)!]^2 + 1$, dove il fattore *A* rappresenta un'espressione che possiamo ignorare.

Il primo membro dell'espressione è divisibile per *p* (Teorema di Wilson), così come il primo termine del secondo membro; quindi, deve essere divisibile per *p* anche il termine restante $[(2n)!]^2+1$, e quindi il numero $x=(2n)! = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ soddisfa le condizioni del problema.

Nota: si noti che se l'intero *x* ha resto x_1 quando viene diviso per *p*, allora essendo:

$$x^2+1 = (kp+x_1)^2+1 = (k^2p+2kx_1)p + x_1^2+1,$$

segue che (x_1^2+1) è divisibile per *p*. Questo significa che avremmo potuto porre come condizione accessoria del problema che fosse $x<p$, in quanto la condizione è soddisfatta da x_1.

8. Paraphernalia Mathematica

Non guardate sotto.

Ho detto non guardate sotto! Altrimenti mi rovinate l'introduzione.

Nel senso che anche questa volta qualcuno ha tolto un lavoro a Rudy, il quale sentitamente ringrazia e non si sogna neanche di fare un'altra parte della rivista; comunque, con ordine.

Ad aprile, il nostro Doc ha ricevuto di prima mattina una telefonata dal grande ***.mau.***, del quale non staremo a citare la sequela di blog matematici di cui è tenutario perché vorremmo tenere la rivista sotto le cinquanta pagine; dopo lo scambio rituale di cortesie, ***.mau.*** ha pronunciato una frase che Doc ha immediatamente inviato a tutta la banda: segue il *testo testuale*:

> Rudy, .mau. ti chiede se hai intenzione di scrivere un PM sulle successioni di Betti: lui ne sta preparando uno, che puoi usare come base o pubblicare così com'è; e dice anche di non dimenticarti di citare Wythoff. Di cosa state parlando?

Fine citazione. Ora dovete sapere che a noi piace da matti, citare quel simpaticone di Wythoff, per due motivi, anzi uno: ci piace vedere gli esperti con l'aria perplessa. Infatti:

1. Pochi matematici lo conoscono, e la loro aria perplessa quando lo si cita ci consola molto della nostra ignoranza nel ramo.
2. Pochi inglesi riescono a dirvi al volo come si legge il nome (bella forza, è olandese...). Rudy l'ha verificato sperimentalmente durante una cena a Oxford (non nell'Aula Magna, dove cenavano i suoi capi-del-lavoro-serio, nella birreria del club studentesco: quello vestito più normale sembrava scappato da un concerto heavy metal).

Dicevamo che ci è simpatico, tant'è che compare in entrambi i nostri libri: esplicitamente, con biografia in ***Rudi Ludi***, implicitamente, solo per il "Simbolo di Wythoff" (chiamato in altro modo) in ***Rudi Simmetrie***.

Dicevamo, le successioni di Betti. L'unica cosa che Rudy ricordava relativamente a Betti (a parte come si legge il nome) era il cosiddetto *Numero di Betti*, ossia il contare quanti colori sono necessari per colorare una mappa su un qualcosa: ad esempio, se prendete un piano e ci disegnate sopra una mappa, quando Rudy e Doc erano giovani hanno dimostrato che vi servono quattro colori, quindi il Numero di Betti è quattro; se prendete un toro (la ciambella, spiritosoni!) potete disegnare mappe che richiedono sette colori.

Ora, una cosa del genere sembra avere scarsa relazione con il Simbolo di Wythoff, che permette di descrivere poliedri n-dimensionali: l'idea potrebbe essere che un qualche matto fosse riuscito a disegnare mappe su iper-solidi e ad attribuire un NdB a ciascuna...

Ora, dobbiamo rivelarvi un fatto incredibile: Rudy, prima di scrivere un PM, *cerca di capirlo*. Magari salta qualche dimostrazione per fiducia nel matematico di turno, sicuramente il mese dopo si è già dimenticato tutto (sta pensando a quello nuovo), ma almeno le linee generali gli devono essere chiare, per scriverne.

E l'idea di capire cosa c'entrassero le mappe colorate con i poliedri n-dimensionali lo terrorizzava: da cui, l'idea "...aspettiamo che scriva .mau., lui è sempre chiarissimo...".

Bene, scopo di questa introduzione era giustappunto di fare da introduzione e riempire una pagina, in modo da far venire il titolo (quello che non dovevate guardare) nella prossima pagina.

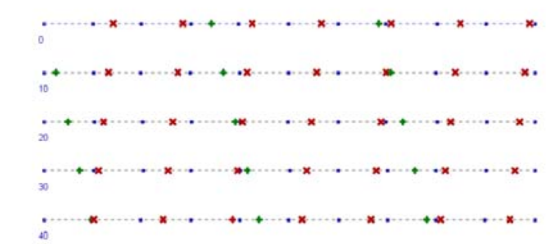
Cediamo dunque volentieri lo spazio restante del PM a ***.mau***, che come suo solito è stato chiarissimo (e ci ha fatto fare la *figura dei pirla*, come dicono da quelle che adesso sono le sue parti: siamo riusciti a parlare di una cosa di cui non dovevamo parlare).

8.1 Le successioni di Beatty

Avete mai sentito parlare di Dirk Gently? È il protagonista di due libri scritti dal buonanima di Douglas Adams, quello della "*Hitch-Hiker's Guide to the Galaxy*"; se non avete sentito nominare nemmeno la Guida, mi sa che la vostra cultura abbia qualche lacuna. Per quanto riguarda Dirk Gently, invece, siete scusati: il primo dei libri è stato tradotto in italiano due volte ma sempre da cani, e il secondo è ancora inedito. Ad ogni buon conto, lui è un investigatore privato il cui approccio è olistico, in cui cioè sostiene la fondamentale interconnessione di tutte le cose: in questo modo può per esempio inserire un viaggio nei Caraibi nella nota spese per la ricerca di un cagnolino che si è perso a Islington, Londra. Occhei, forse potreste pensare che l'interconnessione in quel caso sia molto impalpabile. Però...

Prendiamo per esempio un numero irrazionale positivo r maggiore di 1; tanto per fissarci le idee, partiamo con la radice quadrata di due, $\sqrt{2}$. Calcoliamo ora tutti i suoi multipli: come ben sapete, visto che $\sqrt{2}$ è irrazionale nessuno di questi sarà mai intero. Interi e irrazionali in effetti non hanno nulla a che fare tra loro... a meno che non forziamo in qualche modo un'associazione; possiamo per esempio approssimare per difetto tutti i multipli di r applicando loro la funzione "parte intera", quella cioè che butta via tutta la parte frazionaria di un numero x e si indica con $\lfloor x \rfloor$. Otterremo quindi un insieme di interi, i cui primi elementi sono 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, ... Chiamiamo questo insieme $B_{\sqrt{2}}$; più in generale, possiamo definire $B_r = \{\lfloor nr \rfloor_{n\geq 1}\}$. Chiaramente questo insieme contiene per costruzione solo numeri interi positivi, e non li contiene tutti; per quanto piccolo sia il numero di partenza, è sempre maggiore di 1, e a furia di sommare i resti prima o poi si avrà un riporto. Prendiamo ora il numero irrazionale positivo s definito dalla relazione $1/r + 1/s = 1$. Ricavandolo rispetto a r, abbiamo che $s = r/(r–1)$; nel nostro esempio quindi si ha $s = 2+\sqrt{2}$.

Essendo r un numero irrazionale, anche s lo è; inoltre è sicuramente maggiore di 1. Per completezza, se $r < 2$ allora $s > 2$ e viceversa. Possiamo allora costruirci un insieme B_s esattamente come prima, cioè $B_s = \{\lfloor ns \rfloor_{n\geq 1}\}$; i primi elementi di questo insieme sono 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40, 44, 47...



16 *Inizio delle successioni di Beatty relative a* $\sqrt{2}$.

Notato nulla di strano? I numeri che si trovano in B_r e quelli che stanno in B_s sono tutti diversi! Cosa ancora più incredibile, mettendo assieme i due insiemi sembrerebbe che si riescano a ottenere tutti gli interi. Potrebbe essere solo un caso: in fin dei conti abbiamo solo guardato i primi valori della successione, e forse $\sqrt{2}$ è un numero sospetto, visto che la differenza con il suo associato è un numero intero. Se guardiamo i primi valori delle successioni, come mostrato nella figura 16, ci accorgiamo in effetti che a volte sono vicinissimi, e solo per caso stanno ai lati opposti di un intero; per esempio 16,971 contro 17,071 e addirittura 41,012 contro 40,971. Andando abbastanza avanti, insomma, a un certo punto magari troveremo un controesempio... No. Capita sempre così. Gli insiemi B_r e B_s sono detti ***successioni di Beatty***, dal nome di un certo Samuel Beatty[18] che nel 1926 propose come problema sull'*American Mathematical*

[18] *Come sarebbe a dire, Samuel? Betti mi ricordo benissimo che si chiama Enrico, chi ha scritto "Samuel", qui, eh? E c'è pure una "a" di troppo, non vedete? Devo fare tutto io, qui? E pure la ipsilon! Mainsomma! Macheccavolo! Ma che… che? Come? Ma dai… ah. Va bene, va bene, ho capito. Almeno credo… [PRS]*

Monthly di dimostrare quanto affermato sopra, anche se – come spesso accade in matematica – c'era stata una breve menzione di queste successioni in un testo di fine XIX secolo sulla teoria dei suoni. Perché queste due successioni si incastrano così bene tra di loro? Domanda interessante. Per il momento, accontentatevi della dimostrazione; anzi di ***due*** dimostrazioni, visto che "two proofs is megl che one".

La prima dimostrazione prende il via dalla definizione di parte intera di un numero, ed è tranquillamente alla portata delle conoscenze di uno studente delle superiori. Osserviamo innanzitutto che nessun multiplo di r oppure di s può essere un numero intero, perché altrimenti i numeri di partenza non sarebbero irrazionali. Ammettiamo ora per assurdo che ci sia una collisione: che cioè ci sia un certo N tale che esistano degli interi j e k per cui

$$N < jr < N+1 \qquad \texttt{[1]}$$

$$N < ks < N+1 \qquad \texttt{[1']}$$

Dividendo la prima doppia disuguaglianza per r e la seconda per s otteniamo

$$N/r < j < (N+1)/r \qquad \texttt{[2]}$$

$$N/s < k < (N+1)/s \qquad \texttt{[2']}$$

Sommiamo ora la `[2]` e la `[2']`, ottenendo

$$N(1/r + 1/s) < j+k < (N+1)(1/r + 1/s) \qquad \texttt{[3]}$$

Ma visto che $1/r + 1/s = 1$, la `[3]` si riduce a

$$N < j+k < N+1 \qquad \texttt{[4]}$$

il che è impossibile, visto che nessun numero intero può essere strettamente compreso tra due interi consecutivi.

Immagino abbiate già capito come va a finire la storia: l'altra metà della dimostrazione suppone per assurdo che ci sia un buco: che ci sia cioè un certo N tale che esistano degli interi j e k per cui

$$jr < N \qquad \texttt{[5]}$$

$$(j+1)r > N+1 \qquad \texttt{[5']}$$

$$ks < N \qquad \texttt{[5'']}$$

$$(k+1)s > N+1 \qquad \texttt{[5''']}$$

Anche in questo caso dividiamo la prima e la seconda disuguaglianza per r e le altre due per s, e poi sommiamo la prima con la terza e la seconda con la quarta, ricavando

$$j+k < N(1/r + 1/s) \qquad \texttt{[6]}$$

$$j+k+2 > (N+1)(1/r + 1/s) \qquad \texttt{[6']}$$

Ricordandoci anche stavolta che $1/r + 1/s = 1$, e togliendo 2 da ambo i membri della `[6']`, ricaviamo

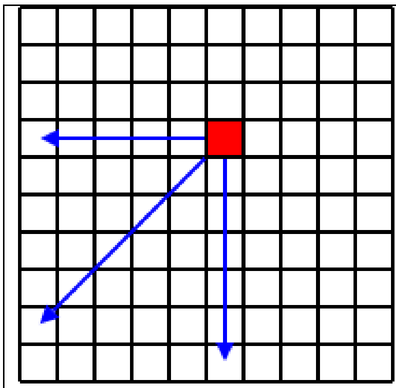
$$N-1 < j+k < N \qquad \texttt{[7]}$$

il che è parimenti impossibile: QED.

La seconda dimostrazione è di tutt'altro tipo: la si può definire enumerativa, nel senso che mette in ordine le due successioni per poi trovare la posizione degli elementi. Si parte considerando tutti i numeri (reali) negli insiemi $\{jr\}$ e $\{ks\}$, dove j e k sono interi positivi. Innanzitutto non è possibile che due di questi numeri coincidano. Se infatti $jr = ks$, allora si ha anche $k/j = r/s$; ma k/j è un numero razionale, mentre r/s è uguale a $r-1$ e pertanto è irrazionale. Essendo questi numeri tutti distinti, li possiamo allora mettere in una lista in ordine crescente. Dopo averlo fatto, prendiamo un qualunque numero jr e vediamo in che posizione si trova nella lista. Evidentemente ci sono j numeri nell'insieme $\{h\colon hr \leq jr\}$; per contare quanti ce ne sono nell'insieme $\{h\colon hs < jr\}$ basta calcolare il maggiore di loro, vale a dire $\lfloor jr/s \rfloor$. Ma abbiamo visto prima che $r/s = r-1$, e quindi il secondo insieme ha $\lfloor j(r-1) \rfloor$ elementi. In definitiva, il numero jr sarà in posizione $j + \lfloor j(r-1) \rfloor$, cioè $\lfloor jr \rfloor$. Similmente un qualunque numero ks sarà in posizione $\lfloor ks \rfloor$. Visto che abbiamo costruito la lista in modo ordinato e quindi non ha buchi al suo interno, otteniamo immediatamente che ogni numero intero, cioè ogni posizione nella lista, corrisponde a uno e uno solo tra i jr e i ks: QED.

Due dimostrazioni completamente diverse, come avete visto: la prima è prettamente "locale", nel senso che non guarda tutte le successioni ma solamente come si comportano a un certo valore, la seconda di respiro più globale; la prima assolutamente non costruttiva, la seconda generalmente costruttiva; se non ho capito male è questa quella presentata originariamente da Beatty. Qual è la migliore? In realtà questa è una domanda mal posta; oggettivamente le trovo entrambe belle, e in fin dei conti la dimostrazione migliore è quella che uno trova per conto suo. Per la cronaca, anche se generalmente sono tacciato di prediligere i metodi costruttivi, io ho trovato la prima dimostrazione e non la seconda, che non era proprio nelle mie corde. (Detto tra noi, la dimostrazione "globale" presente su Wikipedia mi è sembrata inutilmente involuta, visto che invece che i numeri jr e ks usa le frazioni j/s e i k/r; ci ho perso un po' di tempo per comprendere la logica dietro, e non ho capito perché abbiano scelto quella strada). Quello che conta è naturalmente risolvere il problema, e nel nostro caso vedere l'interconnessione di due modi ben diversi di vedere le cose.

Bene, è l'ora di passare a un altro esempio. I matematici conoscono bene il gioco di Wythoff, che naturalmente non è stato inventato dall'olandese Wythoff che ne parlò nel 1907; Martin Gardner afferma che era un gioco diffuso da secoli in Cina. Per chi non conoscesse il gioco, le regole sono molto semplici. Ci sono due mucchietti di elementi – gettoni, monete, bastoncini, fagioli o quello che preferite – e due giocatori che si alternano nelle mosse; una mossa consiste nel togliere un numero qualunque di elementi da un singolo mucchio, oppure lo *stesso numero* di elementi da entrambi i mucchi. Vince chi riesce a prendere l'ultimo elemento.



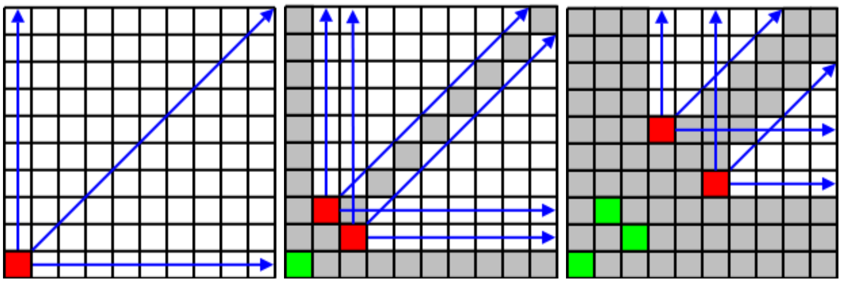
17 *Mosse in Corner the Queen.*

Il gioco ricorda sospettosamente il Nim, ma la strategia è completamente diversa, perché la possibilità di prendere contemporaneamente roba da entrambi i mucchi spariglia il tutto. Per riuscire a trovare una strategia vincente, il sistema più semplice è lavorare ricorsivamente, magari partendo da una versione equivalente studiata indipendentemente intorno al 1960 da Rufus P. Isaacs, che la chiamò "*Corner the Queen*". In questa versione, si gioca su una scacchiera di dimensioni qualunque; le caselle sono numerate rispetto ai due assi cartesiani, con quella in basso a sinistra definita come "casa" ed etichettata (0,0). Una regina degli scacchi viene posta in una casella qualunque della scacchiera, e due giocatori si alternano a muoverla, con il limite che non possono spostarsi né a destra né verso l'alto e quindi con soli tre tipi di mosse permesse, come indicato nella figura 17. Vince chi riesce a portare la regina a "casa".

Non ci vuole molto a vedere come i tre tipi di mosse corrispondano a quelli possibili nel gioco di Wythoff; in questo modo è però più facile visualizzare la strategia vincente. Iniziamo col definire ricorsivamente due classi di posizioni; quelle OK e quelle KO. Le prime sono quelle che porteranno alla vittoria, mentre le seconde permetteranno all'avversario di vincere, e quindi sono da evitare a tutti i costi; entrambi i contendenti cercheranno pertanto di fare una mossa verso una posizione OK. Le regole per calcolare le posizioni OK e le KO sono le seguenti:

1. (0,0) è una posizione OK
2. Una posizione è KO se da essa esiste almeno una mossa che porta a una posizione OK
3. Una posizione è OK se tutte le mosse da essa portano a posizioni KO

Ci si potrebbe chiedere la ragione di questa asimmetria, ma pensandoci su è logica. L'avversario ha il diritto di scegliere la sua mossa, e quindi basta ce ne sia una di buona per essere fregati, ammesso che lui giochi al meglio; perché a noi vada male è necessario che ciascuna possibilità alla nostra portata immediata sia una fregatura.


18 *I primi passi per l'eliminazione delle caselle KO*

Le varie parti della figura 18 mostrano come si possono indicare graficamente le posizioni. Si inizia con il segnare (0,0) come OK, e poi si cancellano come KO tutte le posizioni da cui si può raggiungere (0,0). La più piccola posizione libera, quella cioè di coordinate minori, è (1,2) con la sua simmetrica (2,1); le si segna come OK e si provvede a cancellare come KO le ulteriori posizioni da cui raggiungere queste ultime; si indica la successiva (3,5) come OK, e così via.

Un'operazione del genere è però dispendiosa: sarebbe meglio trovare una soluzione che non sia iterativa come quella appena mostrata. Nella tabella qui sotto ho indicato le varie coppie (x,y) dell'ottante basso, quello cioè con $x < y$, insieme al loro numero d'ordine progressivo. Da qui si può innanzitutto ricavare la regola per scrivere man mano le varie colonne; arrivati alla colonna k si scrive nella casella x_k il numero minore non ancora apparso – i numeri precedenti sono tabù perché ci sarebbe una mossa in verticale che ci fregherebbe – e come y_k la somma di k e x_k. Non possiamo infatti mettere nessun numero inferiore, perché ci sarebbe una mossa diagonale che porterebbe l'altro in una posizione OK, visto che tutte le differenze fino a k–1 sono già state sfruttate in precedenza.

Colonna (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_k	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
y_k	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

19 *Le prime posizioni OK*

Oops... Nessuna sensazione di déjà vu? Abbiamo due successioni di interi, costruite in maniera tale che ciascun numero appartiene a una e una sola successione. Ebbene sì: le x_k e le y_k sono due successioni di Beatty! Ve l'avevo detto, io, della generale interconnessione di tutte le cose! Visto, gente di poca fede?

8.2 Wythoff e Beatty: la vendetta

Se poi siete ancora degli increduli, potete mettervi a calcolare quale numero irrazionale genera tali successioni. Scoprirete così che le successioni di Beatty per il gioco di Wythoff corrispondono al rapporto aureo φ, tutto tranne che un numero casuale, insomma. Sarebbe simpatico aggiungere che Wythoff stesso si era accorto che il rapporto tra le coordinate delle posizioni OK era sempre un'approssimazione di φ; la cosa è vera, ma stavolta non c'è interconnessione ma solamente frutto del caso. Infatti nel caso di φ il suo associato è $φ^2$, ma questo è un caso particolare.

Nella matematica cose del genere capitano fin troppo spesso. Strutture che sembrano essere completamente autonome mostrano una somiglianza profonda, il che rivela la profonda unità della matematica; sono convinto che questo sia uno dei motivi che faccia piacere la materia a noi pazzi, e mi chiedo se chi afferma di non capirla e non sopportarla lo faccia perché non si sia accorto di questa unità... o magari proprio perché non sopporta una cosa del genere!

Il lettore più attento si è sicuramente accorto che nella trattazione sulle successioni di Beatty e sul gioco di Whytoff non ho dimostrato che le successioni relative a quest'ultimo sono quelle basate su φ. Non so se il lettore ha avuto voglia di cercarsi la dimostrazione per conto proprio: io posso dirvi che – spinto gentilmente da alcuni loschi figuri, mi ero anche messo a scriverla. Purtroppo la dimostrazione che avevo trovato non è assolutamente adatta a una Prestigiosa Rivista Matematica quale questa; l'allego solo perché sono stato caldamente invitato a scoprire le mie carte, e in fin dei conti potrebbe essere interessante far vedere *il modo* con cui sono arrivato alla dimostrazione, perché la gioventù possa avere un'idea dei processi mentali di un matematico quando va all'attacco di un problema. Occhei, non quelli di un matematico ma di un matematto quale io sono; accontentatevi. Il grande vantaggio di questa dimostrazione – almeno un vantaggio c'è – è che è sì brutta e lunga, ma dovrebbe essere facile da capire; chi vuole qualcosa di più bello salti pure la sezione.

8.2.1 La dimostrazione brutta

Guardando la tabella 19, salta all'occhio che ci sono alcune coppie (x_k, y_k) corrispondenti a due numeri di Fibonacci consecutivi; abbiamo (1,2), (3,5), (8,13), (21,34). Questo è bello, perché se funzionasse sempre così avremo che il rapporto tra i termini corrispondenti delle successioni tenderebbe a φ. Visto che il numero complementare a φ nelle successioni di Beatty è φ/(φ-1) = φ/(φ-1) = φ/φ^{-1} = φ^2 e quindi il rapporto è proprio φ, se riuscissimo a dimostrare che in effetti è sempre così saremmo a posto. Guardando le colonne corrispondenti, ci accorgiamo (ma questo è ovvio) che le posizioni corrispondono ad alcuni numeri di Fibonacci; viene subito in mente di costruire una tabella solo con quelle colonne, tabella che vedete qui a fianco. I numeri sottolineati sono interessanti, perché sono un'unità in meno di numeri di Fibonacci: notate che ho rinominato 1 e 2 in "predecessore di 2" e "predecessore di 3" per mantenere l'uniformità. Perfetto. Con la convenzione che la successione di Fibonacci inizi con $F_0=F_1=1$, il nostro lavoro si riduce a dimostrare che i valori (x_k, y_k) corrispondenti a F_{2n} sono F_{2n+1} e F_{2n+2}, mentre quelli corrispondenti a F_{2n-1} sono $F_{2n}–1$ e $F_{2n+1}–1$. Il tutto, visto che sappiamo già dove vogliamo arrivare, per ricorsione; così ad occhio con due passi induttivi, vista la differenza tra termini di ordine pari e termini di ordine dispari.

Colonna (k)	1	2	3	5	8	13
x_k	$\underline{1}$	3	$\underline{4}$	8	$\underline{12}$	21
y_k	$\underline{2}$	5	$\underline{7}$	13	$\underline{20}$	34

20 *Le posizioni OK nelle colonne fibonacciane*

I casi iniziali li abbiamo già belli spiattellati qui sulla tabella. Il resto? Io ci sono rimasto fermo per tutta una pausa pranzo e mezza serata, prima di trovare il bandolo della matassa. Prima di scrivere la dimostrazione formale, metto l'esempio numerico: in fin dei conti io ho fatto così. Partiamo dalla colonna 5, con i valori corrispondenti 8 e 13, e vediamo a quale delle due successioni apparterrà 13–1=12. Primo lampo di genio: visto che y_k parte con 2, il numero che genera la seconda successione è compreso tra 2 e 3 e quindi è impossibile che ci siano mai due valori consecutivi; i successivi elementi disteranno sempre 2 oppure 3 a seconda che ci sia o no un riporto nelle varie somme. Quindi 12 appartiene alla prima successione. Ma in che colonna? Secondo lampo di genio: i numeri che non possiamo mettere nella prima successione sono quelli che abbiamo già messo nella seconda; e quelli li abbiamo messi tra la colonna 5 e la 3 escluse. Quindi sono 2–1=1. Quindi tra 12 e 8 ne salteremo 1, e ne avremo 4–1=3: la colonna dove appare il 12 sarà la 5+3=8, e l'elemento y_8 sarà 12+8=20 per costruzione. E fu sera e fu mattina: secondo passo. Per la stessa ragione di cui sopra, visto che 21 differisce di una sola unità da 20 deve appartenere alla prima successione. Questa volta, però, i numeri già presenti nella seconda successione sono quelli tra la 8 e la 5 *comprese*, cioè 3+1=4; ci saranno 9–4=5 elementi nuovi, e arriveremo alla colonna 13. Di nuovo, l'elemento y_{13} sarà 21+13=34 per costruzione. Traduciamo ora questo esempio numerico particolare in uno algebrico generale.

- Lemma: poiché la seconda successione ha come primo termine 2, il numero che la genera è compreso tra 2 e 3 e quindi è impossibile che al suo interno ci siano mai due valori consecutivi.
- Caso $2n$: per ipotesi induttiva, nella colonna F_{2n} le due successioni assumono rispettivamente i valori F_{2n+1} e F_{2n+2}. Per il lemma, il numero $F_{2n+2}-1$ deve necessariamente appartenere alla prima successione. Poiché le due successioni sono crescenti, alla prima apparterranno anche i numeri tra F_{2n+1} e $F_{2n+2}-1$ che non erano già presenti nella seconda; le uniche posizioni dove questi possono trovarsi sono quelle tra F_{2n-1} e F_{2n} escluse, cioè $F_{2n-2}-1$; i numeri presenti, compreso $F_{2n+2}-1$, saranno pertanto $(F_{2n+2}-1) - F_{2n+1} - (F_{2n-2}-1) = F_{2n} - F_{2n-2} = F_{2n-1}$, e quindi $F_{2n+2}-1$ si troverà nella colonna F_{2n+1}; il termine corrispondente della seconda successione sarà $(F_{2n+2}-1) + F_{2n+1} = F_{2n+3}-1$.
- Caso $2n-1$: per ipotesi induttiva, nella colonna F_{2n} le due successioni assumono rispettivamente i valori $F_{2n}-1$ e $F_{2n+1}-1$. Per il lemma, il numero F_{2n+1} deve necessariamente appartenere alla prima successione. Poiché le due successioni sono crescenti, alla prima apparterranno anche i numeri tra F_{2n} e $F_{2n+1}-1$ che non erano già presenti nella seconda; le uniche posizioni dove questi possono trovarsi sono quelle tra F_{2n-2} e F_{2n-1} comprese, cioè $F_{2n-3}+1$; i numeri presenti, compreso F_{2n+1}, saranno pertanto $F_{2n+1} - (F_{2n}-1) - (F_{2n-3}+1) = F_{2n-1} - F_{2n-3} = F_{2n-2}$, e quindi F_{2n+1} si troverà nella colonna F_{2n}; il termine corrispondente della seconda successione sarà $F_{2n+1} + F_{2n} = F_{2n+1}$. QED.

8.2.2 La dimostrazione bella

Mentre discutevamo animatamente sulla necessità o meno di inserire qualcosa del genere nella trattazione, ho inviato il problema a ***Gnugnu*** che mi ha subito risposto "Massì, è facile!" e mi ha detto che a suo tempo lui aveva dimostrato la cosa con un approccio completamente diverso, anche perché non aveva mai sentito parlare delle successioni di Beatty. Punto sul vivo, mi sono rimesso all'opera, e ho trovato questa dimostrazione, indubbiamente molto più bella della mia.

Teorema: le coppie di numeri con lo stesso indice nelle successioni di Beatty per φ sono tutte e sole le posizioni OK, cioè quelle vincenti, nel gioco di Whythoff, come indicato in precedenza.

Dimostrazione: Innanzitutto, per simmetria parlerò solamente delle coppie (x_k,y_k) con $x_k<y_k$; rimarrà chiaro dal contesto quando i due valori dovranno essere scambiati tra loro durante un'istanza del gioco.

È immediato vedere che (1,2) è una posizione OK; prendiamo ora una generica coppia (x_k,y_k) in posizione OK e mostriamo che per ogni mossa dell'avversario possiamo portarci a un'altra coppia $(x_{k'},y_{k'})$, con $k'<k$. La nostra coppia può anche essere scritta

$$(\lfloor k\varphi\rfloor,\lfloor k\varphi^2\rfloor) = (\lfloor k\varphi\rfloor,\lfloor k(\varphi+1)\rfloor) = (\lfloor k\varphi\rfloor,k+\lfloor k\varphi\rfloor) \qquad [1]$$

Se la mossa dell'avversario lascia una pila con un numero di elementi $h < \lfloor k\varphi\rfloor$ elementi, per ipotesi ci deve essere un'altra coppia in cui uno degli elementi è h; la nostra mossa consisterà nel raggiungere quella coppia. In caso contrario, la differenza tra le due pile sarà $d<k$; noi toglieremo allora da entrambe le pile un numero di elementi tale da portarci alla posizione OK (x_d,y_d).

Dimostrare che quelle sono le uniche posizioni OK è ancora più facile; visto che nelle successioni di Beatty sono presenti tutti i numeri interi, a una qualunque coppia OK (a,b)

che non fosse nel formato sopraindicato corrisponderà una coppia (a,b') in quel formato. Se $b<b'$ allora dalla posizione OK (a,b') si potrebbe arrivare a un'altra posizione OK (a,b); se invece $b>b'$ allora dalla posizione OK (a,b) si potrebbe arrivare a un'altra posizione OK (a,b'). In entrambi i casi abbiamo una contraddizione. QED.

8.2.3 Ma è un barbatrucco!

La "dimostrazione bella", come avete visto, è indubbiamente semplice ed elegante; ma sono certo che lascerà parecchi di voi di pessimo umore. Come facevo all'inizio della dimostrazione a sapere che i valori OK erano effettivamente quelli indicati? C'è forse stata una dea che ce l'ha rivelato nel sogno, come a Ramanujan? Beh, molto spesso la matematica funziona proprio così. Qualcuno si danna l'anima per trovare una soluzione, facendo tante prove e usando un po' intuito e tecniche valide ma brutte a vedersi. Una volta trovato il risultato, ci si può mettere a fare le cose per bene, lucidare il tutto e mostrare un risultato esteticamente affascinante ma che sembra librarsi nel cielo senza alcun sostegno. Sfido io che poi gli studenti inizino a odiare la matematica.

D'accordo, non mi sarebbe mai venuto in mente un approccio simile senza la spintarella di Gnugnu; ma a posteriori la logica è esattamente la stessa di quella nelle dimostrazioni per induzione, dove tu sai già il risultato a cui vuoi arrivare e devi solo metterti a fare un po' di conti per verificarlo. In questi casi bisogna sempre ricordarsi che quella che stai facendo è una giustificazione a posteriori di qualcosa che hai intuito in modo completamente diverso; non c'è nulla di male a fare così, né devi credere di avere avuto l'illuminazione (che poi c'è stata anche, ma è stata accuratamente rimossa perché altrimenti qualcuno potrebbe iniziare a credere che la matematica sia una scienza con le basi empiriche proprio come tutte le altre, e magari comincerebbe ad apprezzarla di più)

Un'ultima considerazione. C'è un solo punto in cui abbiamo usato le proprietà miracolose di φ, ed è stato quando abbiamo scritto che $\varphi^2 = \varphi+1$. Questa è però la chiave che porta ad avere il gioco di Whytoff, cioè la possibilità di togliere lo stesso numero di oggetti dalle due pile. Ma questo significa anche che usando numeri chiave diversi, come ad esempio $\sqrt{2}$ il cui associato nelle successioni di Beatty è $\sqrt{2}+2$, potremmo arrivare ad avere giochi simili a Whytoff ma con regole leggermente diverse, e la dimostrazione finale sarà sostanzialmente la stessa. Chiedete a ***Gnugnu*** per informazioni!

Ah, nel caso vi chiedeste se Samuel Beatty abbia un qualche rapporto di parentela con l'attore Warren Beatty, la risposta è "boh". Ma in fin dei conti, perché non potrebbero essere parenti? Tutte le cose sono fondamentalmente interconnesse...

Bibliografia[19]:

- La voce *Beatty sequence* su Wikipedia:

  http://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence

- Il gioco di Wythoff su Cut-the-knot di Alexander Bogomolny:

  http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/withoff.shtml

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[19] Palesemente incompleta. Manca:

Rodolfo Clerico, Piero Fabbri, Francesca Ortenzio:

Rudi Ludi

Edizioni CS_Libri, novembre 2008

Dove il Gioco di Wythoff è smontato grazie a olive, pesce alla griglia, sassolini, patatine fritte, birra, carta dei dolci e Teoria dei Giochi.