Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 137 – Giugno 2010 – Anno Dodicesimo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

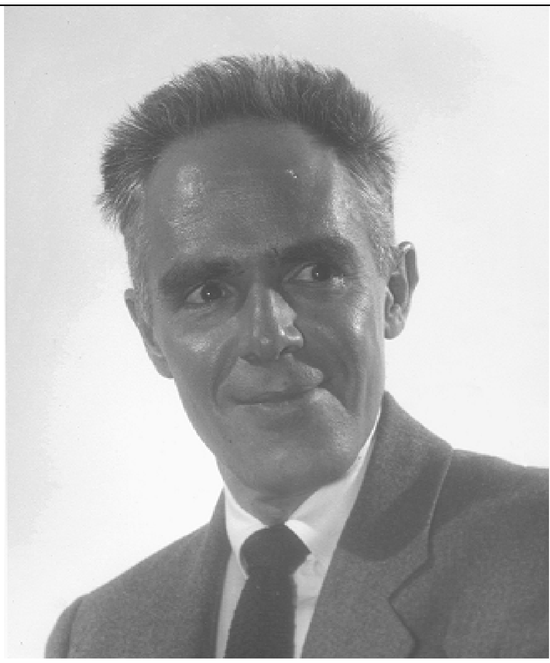
RM136 ha diffuso 2'603 copie e il 31/05/2010 per Google eravamo in 50'800 pagine.

Quando ***Issey Miyake*** (una *maison* di moda giapponese) incontra ***William Thurston*** (vincitore della Medaglia Fields nel 1982) saltano fuori cose come queste. Le "sciarpe" indossate dalle modelle sono state disegnate da ***Dai Fujiwara*** e sono basate sulla variazione a cinque cerchi degli Anelli Borromei (la testa si mette al centro).

1. Nient'altro che un giornalista

"Ho solo giocato per tutto il tempo, e sono stato abbastanza fortunato da essere pagato per farlo."
(intervista allo Skeptical Inquirer, 1998)

Questo non è un *compleanno*, anche se occupa lo spazio che Rudi Mathematici solitamente riserva ai compleanni. I compleanni di RM sono articoli scritti per celebrare matematici nati nel mese di uscita della rivista, e se somigliano un po' a delle agiografie è perché hanno tutte le intenzioni di essere agiografici: sono articoli celebrativi che partono da lontano, da argomenti solitamente distanti dalla matematica, con l'intenzione di ritardare la "rivelazione" su quale sia il matematico destinato ad essere celebrato nell'articolo. Il personaggio protagonista, e con lui la matematica inizialmente nascosta, viene infine alla luce, e nel manifestarlo l'intento è quello di mostrare quanto sia pervasiva la matematica nel mondo, e quanto siano singolari e interessanti i matematici che quella matematica creano. Sono insomma pezzi allegri, positivi, almeno nelle intenzioni degli autori; e sono dotati perfino d'una sorta di progettualità, di uno scopo più o meno palese: far apprezzare la matematica e i matematici.


1 *Martin Gardner*

È per tutte queste ragioni che questo articolo non è un *compleanno*: ha certo un protagonista, ma questo non è il suo mese di nascita; e il protagonista in questione non era neppure, a stretto rigor di termini, un matematico. "*Mi state considerando più matematico di quello che in realtà sono,*" disse durante un'intervista "*io sono essenzialmente un giornalista. Mi limito a scrivere di quanto altre persone fanno nel loro campo professionale*"[1].

L'intervistatore era Don Albers, direttore editoriale della MAA, *Mathematical Association of America*, e la lunga intervista[2] che ottenne è la fonte principale di questo pezzo; l'intervistato, che il giornalista era andato a trovare in occasione del suo novantesimo compleanno, era Martin Gardner.

Tanto era un compleanno (senza corsivo) quello, tanto non è un *compleanno* (in corsivo), questo: e ci piacerebbe poter continuare a giocare con le parole abbastanza da citare *Alice nel Paese delle Meraviglie*, che Martin

[1] "*You're giving me credit for being more of a mathematician than I really am. I'm strictly a journalist. I just write about what other people are doing in the field*". Tanto per evitare possibili inciampi nella nostra traduzione, vi lasciamo il piacere di tradurvelo da soli.

[2] L'intervista è ancora reperibile in rete, ad esempio su http://www.cambridgeblog.org/2008/09/the-martin-gardner-interview/, anche se a puntate e in formato html. Siamo i fortunati possessori di un pdf di 39 pagine di più facile lettura, e se ci fossero richieste in merito potremmo forse rischiare di essere perseguiti per violazione dei diritti d'autore e metterlo a disposizione sul nostro sito: a Martin la cosa, immaginiamo, non sarebbe dispiaciuta troppo.

adorava, lasciarvi intravvedere sullo sfondo il Bianconiglio e il Cappellaio Matto fino a giungere a dire che non si tratta di un *compleanno* perché, ovviamente, si tratta di un *non-compleanno*, con relativo party a base di tè. Ma la verità è che questo articolo non può essere un *compleanno* solo perché non è altro che un necrologio.


2 *I giovani fratelli Gardner: Martin e Jim*

Martin Gardner è morto pochi giorni fa, il 22 Maggio 2010. Non era più un giovanotto: in autunno avrebbe compiuto 96 anni, essendo lui nato a Tulsa, Oklahoma, cuore degli Stati Uniti, nel lontano 21 Ottobre 1914. Era il primogenito dei tre figli di un geologo specializzato nella caccia ai pozzi di petrolio: suo padre era il titolare di "*…una microscopica compagnia petrolifera costituita da un contabile, una segretaria e da sé stesso: quando supponeva di aver trovato un posto buono, ingaggiava una società di trivellazione. La maggior parte degli scavi rimanevano asciutti, ma una volta ogni tanto trovava il petrolio…*". Erano tempi eroici anche in quel campo, prima dell'avvento dei sismografi, prima anche della Prima Guerra Mondiale. I suoi fratelli erano Jim e Judith; Martin cresceva serenamente sotto il sole del Midwest, frequentando la scuola e i primi prestigiatori, che lo affascinavano già in giovane età.

La prestidigitazione affascinerà Gardner per tutta la vita: anche se non diventerà mai un professionista, manterrà costantemente un interesse acceso per l'arte dell'illusionismo: uno dei suoi migliori amici e maestri è stato Persi Diaconis, matematico e professore di statistica a Stanford, ma soprattutto ex-illusionista professionista[3]. Tra i molti libri scritti da Martin Gardner, due particolarmente voluminosi riguardano i trucchi dei prestigiatori. È anche possibile che sia stata proprio la prestidigitazione ad aprire a Martin Gardner le porte della matematica: la passione per i trucchi e le illusioni era infatti particolarmente accesa quando alla base dell'effetto si celava qualche principio numerico o topologico.


3 *Martin prestidigita*

È verosimile che questa sua passione ("*il mio hobby preferito*", dichiarerà ormai novantenne) porti con sé la chiave di lettura essenziale di tutta la vita e la filosofia di Martin Gardner: i trucchi dei prestigiatori stupiscono, e suscitare stupore è sempre stato indubbiamente uno degli obiettivi dei suoi libri e dei suoi articoli; ma i trucchi dei prestigiatori

[3] Un altro debito della matematica nei confronti di Martin Gardner: conobbe Persi Diaconis quando questi era ancora giovane, anche se illusionista affermato: sapendo che voleva entrare ad Harvard, Gardner lo presentò a Fred Mosteller, professore di statistica. Sembra che Diaconis incantò il prof di Harvard con qualche trucco di carte durante il colloquio, e ottenne di poter frequentare il prestigioso ateneo.

stupiscono restando razionali, riproducibili, reali: e in questa loro caratteristica veicolano tutto l'amore per la scienza, per la capacità di spiegare, e di conseguenza anche la profonda avversione verso i ciarlatani e tutti coloro che usano la meraviglia per ingannare e approfittarsi del prossimo.

La giovinezza a Tulsa trascorre placida e tranquilla, normale, certo non incentrata solo e soltanto sulla passione per i giochi di prestigio. Martin al liceo adora la matematica, il tennis, la fisica, la ginnastica; in compenso odia il latino, e non vede l'ora di iscriversi al Caltech[4]. La sua stessa iscrizione all'università di Chicago viene vissuta da Martin solo come un preludio a quello che immagina essere un viaggio verso la California; e queste premesse sembrano quelle già tante volte raccontate quando si parla della giovinezza pre-universitaria dei giovani geni della matematica. Invece, inaspettatamente, a Chicago è la filosofia a catturare gli interessi del giovane Martin: come lui stesso racconta, "*fui preso da interesse per la filosofia, soprattutto per scoprire in che cosa credessi*". Si laurea[5] nel 1936, e subito dopo comincia a fare il lavoro che farà per tutta la vita: scrivere. Fa un po' il reporter per il Tulsa Tribune, quindi di nuovo il cronista a Chicago; segue corsi di perfezionamento e aggiornamento, quindi entra stabilmente assunto all'Ufficio Relazioni Pubbliche dell'Università di Chicago; ma alla fin fine non c'è troppo tempo per organizzarsi la vita: le Seconda Guerra Mondiale è alle porte, e Martin Gardner la passerà servendo come marinaio nella U.S. Navy.

4 *Il marinaio Gardner parte per la guerra*

Martin viene imbarcato su un cacciatorpediniere, e comincia la sua avventura per l'Atlantico, a caccia si sottomarini tedeschi: al momento dell'imbarco era terrorizzato all'idea di soffrire il mal di mare, perché andava spesso soggetto ad emicranie, e temeva che queste sarebbero state insopportabili in mare, specialmente nella tensione di una battaglia. In realtà, dopo i primi tre terribili giorni non soffrì mai più il mal di mare, e le emicranie non vennero mai a disturbarlo; neanche durante le azioni di guerra in cui la sua squadra di sei cacciatorpediniere catturò due sommergibili nemici.

Finita la guerra, torna a Chicago, dove poteva, in qualità di veterano, riavere il suo posto di PR all'università, ma ci rinuncia quando riesce a vendere il suo primo racconto; era una storia abbastanza complicata che riguardava un cavallo e una scala mobile. Un racconto

[4] California Institute of Technology, Pasadena. Ne abbiamo parlato un po' in occasione del compleanno di Feynman: chissà che cosa sarebbe successo se i due giocolieri si fossero incontrati…

[5] O forse si dovrebbe dire "si *baccalaurea*". Le università americane hanno diversi gradi accademici, e quello che Martin ottiene nel 1936 è il B.A., *Bachelor of Arts*. E' importante precisarlo anche perché è comune aspettarsi che il nostro si fosse fregiato del B.S., *Bachelor of Sciences*. E invece no.

umoristico, insomma, di quelli che gli americani chiamano "shaggy dog"[6]. Dopo il primo, altri racconti vengono accettati dall'*Esquire*, un giornale di New York, e Martin comincia seriamente a pensare di riuscire a vivere come scrittore free-lance. Ma accade che, nel giro di qualche anno, l'*Esquire* cambia direttore, e con esso cambia anche gusti narrativi e strategia editoriale: e, insomma, i suoi racconti non vengono più acquistati. Gardner deve quindi inventarsi un nuovo lavoro, e fortunatamente viene assunto da una rivista per bambini, la *Humpty-Dumpty Magazine*; forse era scritto nel destino che il soccorso nei momenti scuri dovesse arrivargli, in una forma o nell'altra, dalla sua adorata Alice[7].


5 *Martin e il Cappellaio Matto*

Arriva così il 1956, con Martin che continua a lavorare come direttore editoriale di riviste per bambini. Ha ormai 42 anni, e la sua carriera sembra del tutto avviata e senza scosse prevedibili; ma la scossa ci fu, anche se certo inaspettata; anche perché, altrimenti, non staremmo qui a raccontare della sua vita. Nel dicembre 1956 Gardner riesce a vendere un articolo a *Scientific American*: è il famoso articolo sugli *esaflexagoni*, che apre anche la sua prima raccolta di giochi[8].

Se Martin Gardner è stato di fondamentale importanza per la diffusione della matematica ricreativa (e, a nostro parere, della matematica *tout court*), parte del merito va riconosciuta a Gerry Piel, l'editore di *Scientific American*. Fu lui che non solo accettò di pubblicare l'articolo di Martin, ma gli propose subito di tenere una rubrica fissa sul giornale. Col senno di poi, ci voleva un gran fiuto o un gran coraggio: Gardner non era un celebre matematico, anzi, non era affatto un matematico; non era noto nel mondo accademico, era solo un giornalista con un po' d'esperienza nell'editoria per bambini. Certo, aveva una grande passione per la matematica, per i giochi di prestigio, per tutto ciò che riusciva a produrre stupore, e in questo senso anche la sua esperienza all'*Humpty-Dumpty Magazine* risultava coerente nel suo curriculum vitae; ma Scientific American era già la rivista di divulgazione scientifica più famosa e prestigiosa degli States, e anche del mondo. Certo era una rivista appunto di divulgazione, non accademica: e come tale seguiva e perseguiva politiche editoriali ben diverse dalle pubblicazioni scientifiche

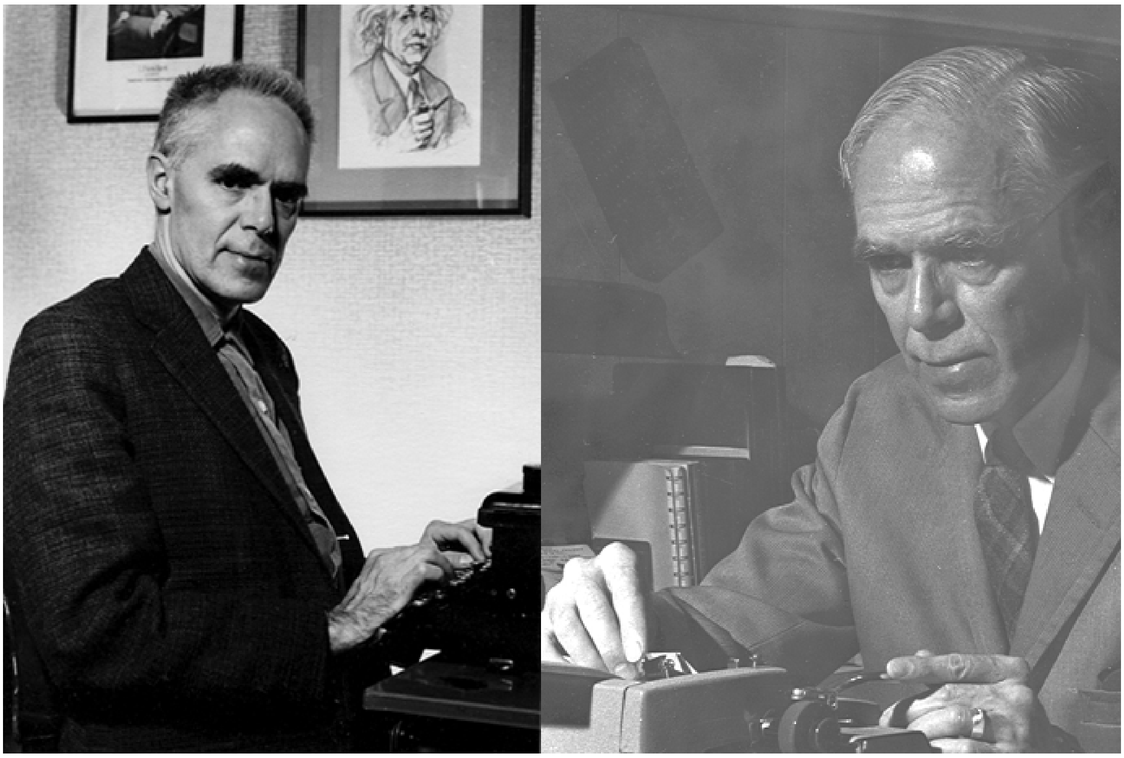
[6] Racconti di difficile traduzione che piacevano molto anche a Isaac Asimov; il più famoso di quelli scritti dal buon dottore si intitola "Shah Guido G.", e anche se parla di un tal Guido che diventa scià o re, in realtà è talmente shaggy-dog da palesarlo addirittura nel titolo.

[7] Immaginiamo che quasi tutti i lettori di queste note lo sappiamo già: Humpty-Dumpty è un personaggio che Lewis Carroll recupera da una filastrocca popolare e introduce in "*Attraverso lo specchio*".

[8] Il suo primo libro-raccolta si intitola "*Hexaflexagons and other mathematical diversions*". In italiano, l'articolo sugli esaflexagoni apre il leggendario primo volume dei cinque "*Enigmi e Giochi Matematici*", inizialmente pubblicati nelle "Enciclopedie Pratiche Sansoni".

accademiche: ma anche solo la scelta di riservare una rubrica fissa ai giochi, seppur matematici, era una scelta impegnativa. Decidere di affidarla a un tizio che in precedenza aveva scritto solo racconti umoristici e storie per bambini, giudicandolo esclusivamente dall'unico articolo che questi gli aveva presentato, rivela un coraggio editoriale insolito[9]. Per sua (e nostra) fortuna, Piel quel coraggio l'ha avuto.

Con gli esaflexagoni inizia un'avventura che durerà venticinque anni: la rubrica "*Mathematical Games*" avrà il suo posto fisso e inamovibile su *Scientific American* per venticinque anni, durante i quali cambierà la maniera di leggere la matematica per moltissime persone.



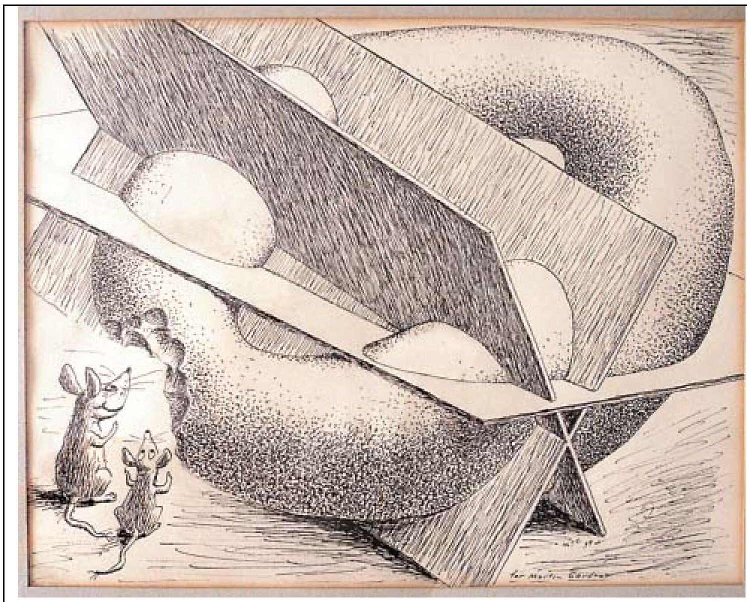
6 *Una vita alla macchina per scrivere*

È indubbiamente difficile provare a misurare quali siano gli effetti del quarto di secolo di vita della rubrica. Martin Gardner aveva un entusiasmo e una capacità di stupirsi probabilmente maggiore dei matematici professionisti, e forse queste caratteristiche si convertivano in capacità di stupire il lettore: per questo la sua rubrica riuscì ad attrarre e coagulare un numero così alto di estimatori, sia da parte della gente comune, i lettori, sia da parte dei professionisti della matematica, che intervistati da lui riuscivano a far conoscere aspetti interessanti e curiosi dei loro studi. È difficile, se non proprio impossibile, anche solo elencare la quantità di personaggi e concetti matematici che sono stati resi accessibili dalla rubrica di Martin Gardner: Maurits Cornelius Escher è tuttora uno degli artisti più presenti nelle copertine dei libri e delle riviste, e la sua fama dipende moltissimo dalla presentazione che ne fece Martin Gardner in un numero della sua rubrica; John Horton Conway ebbe momenti di assoluta celebrità quando il suo gioco "Life" venne presentato in "*Mathematical Games*"; John Forbes Nash e la sua teoria dei giochi era stato menzionato da Gardner ben prima che diventasse celeberrimo grazie al film "*A beautiful mind*" interpretato da Russell Crowe; e forse non c'è miglior esempio di

[9] Quasi uguale a quello mostrato da un incosciente direttore editoriale di "Le Scienze" un paio d'anni fa, quando ha offerto una rubrica mensile d'altissimo prestigio storico ad una squadra di tre dilettanti raccattati in rete. Peccato per lui che la statura dei tre, anche messi uno sull'altro, sia incomparabilmente più bassa di quella del signor Gardner.

Doug Hofstadter, premio Pulitzer per "Gödel Escher Bach" e figlio di premio Nobel, a mostrare l'importanza della rubrica: il suo fu il primo dei nomi chiamati a succedere a Gardner, e non a caso chiamò la sua "*Metamagical Themas*" anagrammando con precisione – e rendendo omaggio – la gardeniana "*Mathematical Games*".

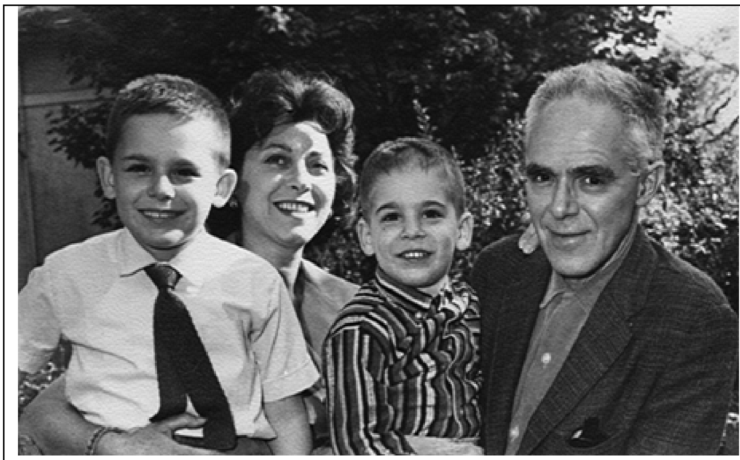
Ma davvero, non c'è elenco che tenga; Gardner ha reso famosi o restituito fama a nomi ormai celebri tra gli appassionati di tutto il mondo, i quali probabilmente non ricordano neanche più di essere stati iniziati da lui a certe frequentazioni: Sam Loyd, il grande inventore di problemi; Piet Hein, Raymond Smullyan, H.S.M. Coxeter, Henry Dudeney e decine di altri, sono stati tutti benedetti dalla fama imposta dalla rubrica di Martin. Ed è stato lui a rendere noti i polimini (e non dite che non li conoscete: nella versione a quattro elementi vi avranno fatto certamente dannare con il Tetris), il tangram, il cubo Soma, e decine di altri giochi. E sempre lui ha lasciato intravvedere ai lettori curiosi i misteri seri e potenti che si celano dietro le differenze finite, i frattali, le tassellature; i dentro problemi storici come i Quattro Colori o il paradosso dell'Impiccagione Imprevedibile; ha presentato tutte le maggiori costanti matematiche, raccontando al pubblico gli aspetti affascinanti di π, di ϕ, di e, di i.


7 *Come tagliare un toro con tre piani*

Alcuni dei problemi da lui presentati hanno avuto vita lunga, indipendente e rigogliosa: matematici importanti non disdegnavano di inviare commenti e soluzioni, e non di rado si ritrovavano citati nel reparto soluzioni insieme all'apicoltore dello Iowa e la maestra dell'Indiana, discutendo magari di quale fosse il metodo giusto per tagliare una ciambella con tre piani ottenendo il maggior numero possibile di pezzi. E per raccontare e proporre problemi Martin Gardner non disdegnava certo di ricorrere ad artifici narrativi: per quanto cercasse di avere uno stile il più semplice e comprensibile possibile[10], non disdegnava di inventare personaggi che fossero in grado di presentare al meglio i problemi e gli aneddoti. La sua creazione più celebre, da questo punto di vista, è probabilmente il Dottor Matrix, ma non è certo la sola.

Martin Gardner smise infine di tenere la rubrica su Scientific American, ma non di lavorare. I suoi libri strettamente legati alla rubrica sono quindici, ma la sua produzione globale è estremamente più vasta. Oltre alla matematica e ai giochi di prestigio era interessato alla filosofia, alla didattica, alla lotta contro la cialtroneria pseudo-scientifica, alla sua peculiare visione religiosa. Ha scritto libri inaspettati, dal punto di vista di chi lo conosce solo per il suo rapporto con la matematica: testi su Chesterton, l'autore dei romanzi di Padre Brown; libri di enigmistica, perfino sulla Bibbia. E, naturalmente, sulla sua amata Alice: "*Annotated Alice*" è forse il suo libro non strettamente matematico più famoso.

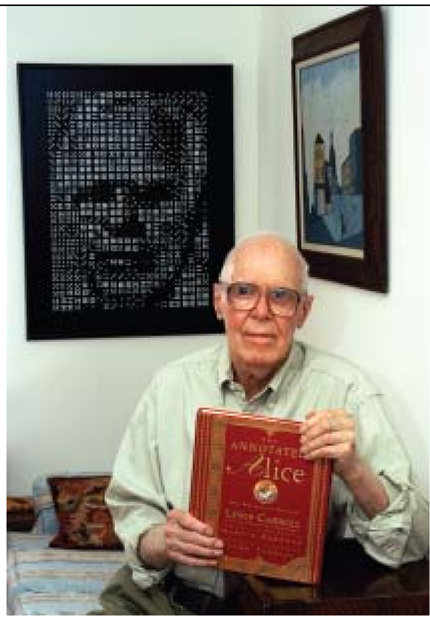
[10] "*Se due parole hanno lo stesso significato, uso quella più facile*", soleva ripetere. Più o meno la stesa cifra stilistica del suo amico Isaac Asimov.



8 *I Gardner*

Con Isaac Asimov aveva in comune la partecipazione al circolo "The Trap Doors Spiders": una sorta di club che si riuniva una volta al mese e che Asimov ha richiamato abbondantemente nei suoi racconti dei "Vedovi Neri". Non vi partecipava per trovare qualcosa da scrivere nelle sue rubriche, ma solo per diletto: era un uomo con una vita piena e densa, ma anche assolutamente normale. Sposato con Charlotte, padre di due figli, Jim e Tom, deve aver trovato certamente divertente l'idea di abitare per anni, quando risedeva a New York, in una via dedicata ad Euclide. Da uomo normale e da filosofo, aveva le sue passioni da coltivare e le sue battaglie da combattere: era stranoto come amante dei giochi di prestigio, di enigmistica e come alfiere dello scetticismo scientifico; uno dei suoi più cari amici, quello che ha annunciato la sua dipartita al mondo, è James Randi, celebre fra gli "Skeptics" di tutto il mondo[11]. Questo non gli impediva di avere la sua visione spirituale dell'universo mondo: aveva una sua religiosità, si definiva infatti "un teista filosofico", che è più o meno come dire che credeva in un Dio che sfuggiva a tutte le definizioni classiche delle grandi religioni istituzionali, nelle quali non si è mai riconosciuto.

Le sue battaglie erano dirette soprattutto contro le pseudoscienze: era terrorizzato dal diffondersi dell'omeopatia ("*il vero guaio non sta certo nel fatto che chi ci crede assuma dell'acqua distillata, che non farà certo danno, ma è che così facendo evitano di andare dal dottore…*"), e sulla necessità di migliorare l'insegnamento scientifico nelle scuole, anche proprio per evitare che la gente diventasse così facilmente preda dei ciarlatani. Alla domanda: "*In qualità di educatore, avrai individuato quali siano i problemi principali dell'insegnamento della matematica nelle scuole primarie e secondarie*", Martin rispose: "*Ritengo che la chiave sia nell'aumentare gli stipendi degli insegnanti: è necessario avere degli insegnanti che davvero conoscono e davvero amano la matematica. Questo è il grosso problema*". E Gardner stava parlando degli Stati Uniti prima della crisi: figuriamoci cosa avrebbe pensato dell'Italia del 2010.



9 *Martin e il suo "Annotated Alice"*

Martin Gardner è quasi sconosciuto alla cultura ufficiale italiana: la notizia della sua morte è arrivata prima sui blog che sui media, e anche dopo l'arrivo, la quasi totalità dei giornali ha accuratamente evitato di riportarla. La cosa, forse, non dovrebbe stupirci: anche se questo è forse uno dei periodi in cui la matematica è più popolare, si tratta pur sempre di popolarità di nicchia; e la matematica

11 Diffusi soprattutto nei paesi di lingua inglese, non mancano però in Italia. Con poche variazioni statutarie, gli Scettici sono assimilabili al nostro CICAP, Centro Italiano per il Controllo delle Affermazioni sul Paranormale, fondato da Piero Angela.

ricreativa, probabilmente, è un oggetto la cui natura sfugge alla quasi totalità dei giornalisti.

10 *Logo del Nono "Gathering for Gardner"*

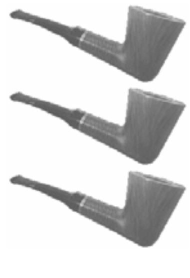
Così, nello scrivere questo affrettato e confuso ricordo di Martin Gardner non sappiamo come concludere: se con una filippica contro l'italica indifferenza, magari ricordando i sessanta libri scritti, o addirittura l'esistenza di cose come i *Gathering4Gardner*, riunioni annuali di ampio respiro internazionale dedicate agli aspetti ricreativi della matematica, e celebrate in suo onore, o piuttosto con l'ottimistica esortazione a guardarsi intorno, a provare per una volta a leggere dietro le righe delle prime pagine dei giornali e dietro i sommari dei telegiornali.

Perché, anche se è forse difficile crederlo a chi non ha occhi per vederlo, questo nostro mondo ha speranza di sopravvivere ormai solo se si riesce di nuovo a coniugare il divertimento e l'intelligenza. Solo se si rinuncia all'idea che esista solo il divertimento becero e diretto, violento, ubriacante, allucinante: quello che le televisioni intendono per intrattenimento, insomma. Anche se molti non si rassegnano all'idea, è dentro le facoltà scientifiche che si trova la speranza di migliorare il vecchio pianeta malato, ed è dentro le facoltà umanistiche che si trova la forza morale e la capacità comunicativa di raccontarlo. Quelle facoltà scientifiche – provate a fare l'esperimento, se non ci credete, metteteci alla prova – sono piene di professori che, da giovani, giocavano e si divertivano leggendo "*Enigmi e Giochi Matematici*". Molti di loro non si troverebbero dove si trovano adesso, se non ci fosse stato questo filosofo, questo "nient'altro che un giornalista", prestato ai giochi e alla matematica.

E, anche se non sarebbe stata questa gran perdita, non ci saremmo neppure noi, naturalmente. È dalla lettura della "column" di Martin Gardner che nasce in noi la voglia di giocare con la matematica, e in questo non siamo affatto originali. E se, come noi, non credete troppo al destino ma piuttosto al noioso principio di causa ed effetto, pensate alle immediate conseguenze: voi non stareste qui a leggere queste righe, in questo momento, né alcuna frase dei 136 numeri precedenti. E a leggere dovreste essere più di tremila, quindi considerate, moltiplicate, e cercate di vedere quanta matematica – anche se della specie leggera e poco seria – non ci sarebbe stata senza RM. Poi moltiplicate tutto per le migliaia di persone, città, paesi, università, studenti, siti, lettori che al pari nostro non ci sarebbero stati, senza il vecchio Martin di Tulsa. Quello che ha fatto per la ricerca scientifica del mondo, quel vecchio giornalista a cui piacevano i giochi di prestigio, è semplicemente incommensurabile. E ci sono davvero poche azioni più meritevoli e benefattrici della promozione della ricerca scientifica.

Grazie, Martin.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Piove… I			
Piove… II			

2.1 Piove… (…con quel che segue, I)

Rudy ha promesso che non toccherà più le Soluzioni e Note[12].

Neanche il tempo di finire di scrivere la frase "… *l'aleatorietà metereologica di aprile […] finalmente dietro le nostre spalle*", che è arrivata una sfilza di giornate di pioggia da raccontare. Approfittando di una pausa oggi siamo riusciti ad andare a comprare i giornali, ma un veloce sguardo alle previsioni del tempo ci ha immediatamente dissuaso dall'idea di mettere l'impermeabile in naftalina.

A questo si aggiunga che il "Quick & Dirty" di due mesi fa (quello delle bollicine nello *champagne*) sembra essere piaciuto molto.

"Rudy, vuoi dire che dalle tue parti piove *champagne*?" No, però questo problema, anche se al contrario, è abbastanza simile; e qui "al contrario" è in un mucchio di sensi: non solo si tratta di acqua nell'aria e non aria (va bene, anidride carbonica… non fate i pignoli!) nel vino, ma siamo fermamente convinti che questo non sia né quick, né dirty. Anzi, potrebbe tranquillamente entrare nell'Olimpo dei dieci problemi più difficili.

Supponiamo che le nuvole, anziché essere soffici batuffoli di bambagia, siano composte da minuscole goccioline d'acqua distribuite uniformemente e in quiete (Eh? Ah sì? Beh, non importa. Non lasciatevi influenzare dalla realtà), e facciamo cadere una goccia di pioggia attraverso la nuvola. Quando la goccia di pioggia urta una gocciolina (di quelle ferme), la assorbe e continua la caduta; la nostra gocciolona, come la mucca di un nostro amico, continua a essere perfettamente sferica per tutto il tragitto.

La domanda è: con che accelerazione cade la goccia? No, non è uguale all'accelerazione di gravità.

Due note al fondo, la prima di aiutino.

[12] *E figuriamoci… per una volta che lo fa, trova subito scuse inenarrabili per non farlo più... [AR]*

Tanto per cominciare, esiste una bellissima e semplicissima soluzione *sbagliata*: per verificare che sia sbagliata, considerate che nonostante l'acqua nelle nubi sia suppergiù sempre alla stessa temperatura (vicina allo zero), d'estate non nevica. Peccato, perché viene una soluzione decisamente carina ma con un valore che non funziona proprio.

Infine, l'avete voluto voi. Viene dallo stesso posto del momento d'inerzia del triangolo di Sierpinski.

2.2 Piove... (...con quel che segue, II)

Ve l'abbiamo già detto che qui piove un giorno sì e l'altro anche? Quindi, in questo numero piove un problema sì e l'altro anche.

Visto che il problema precedente conteneva tutta una serie di lamentele, qui andiamo più sul meditativo, per quanto riguarda i commenti a margine: quelli di voi che lo conoscono sanno che Rudy non sopporta gli ombrelli, quindi gli capita sovente di beccarsi l'acqua; quando arriva da qualche parte bagnato, c'è sempre il bello spirito che gli ricorda che ci si bagna di meno camminando che correndo, sotto la pioggia; Rudy ha imparato ad ignorarli o, al massimo a commentare usando il *metodo di Piotr* per risolvere i problemi[13], e quindi consigliare al saputello di attraversare la strada restando perfettamente immobile sotto la pioggia; in quel caso, si bagnerà pochissimo, in base al suo ragionamento.

Lo sguardo perplesso del tizio, di solito, ripaga Rudy della "lavata". E, logicamente, non ha nessuna voglia di fare di conto sull'ottimizzare la velocità di attraversamento per minimizzare la bagnata.

Comunque, non era questo il problema. Arriva adesso. Anzi, arrivano.

Cosa si fa, quando piove? Ma si trasloca[14], ci pare evidente! In particolare, si trasloca il quadro senza vetro (quello grosso, alto H e largo L, che da solo riempie il muro della sala: è "a spatola", quindi niente vetro). Siccome il bordo è impermeabile e l'acqua dal bordo non cola sulla tela, affrontate la pioggia (che cade verticalmente con velocità misurabile), ad un'inclinazione accuratamente calcolata in funzione della vostra velocità.

E sin qui, almeno in teoria, la cosa è facile. Il guaio è che pur fidando nelle vostre abilità matematiche, i vostri conviventi non sono assolutamente rassicurati dall'immagine di voi che camminate tranquillamente sotto la pioggia con il quadro inclinato; quindi, decidono di fissare una specie di "tettuccio" largo quanto il quadro e sporgente di L sulla cima del quadro; non solo, ma vi impongono di tenere il quadro dritto; brontolate un po', fate qualche conto e partite per la traversata. A che velocità, questa volta?

Coraggio, che bisogna traversare un'altra volta. Questa volta, però, le decisioni le prendete voi (gli altri stanno finendo di impermeabilizzare gli scatoloni). Tanto per cominciare, il tettuccio potete inclinarlo, nel senso che se volete lo piazzate ad un angolo diverso da novanta gradi; non solo, ma siete riusciti a fare qualche misura per avere dei dati un po' meno "a stima": la pioggia cade a 5 m/sec, il vostro quadro è alto 3 metri e il tettuccio sporge dal quadro di 80 centimetri. Il guaio è che si sta alzando il vento e il vostro anemometro da tasca (tutti hanno in tasca un anemometro!) vi dice che varia da zero a 1,5 metri al secondo, e quindi cominciate a provi una serie di domande: per prima cosa, a che velocità vi muovete? A che angolo dovete tenere la tela? E di quanto dovete inclinare il tettuccio rispetto al quadro?

Mah. Forse era meglio prendere un telone di plastica…

[13] Consiste, per coloro che non lo conoscono, nel prendere i casi estremi: utilissimo, almeno per avere un'idea di quale sia la soluzione.

[14] Sono più di due anni che non parliamo del trasloco di Rudy, quindi possiamo permetterci un vago accenno: era una bella giornata. E sì, Rudy è molto contento di abitare in una zona molto vicina ai portici.

3. Bungee Jumpers

Provate che esiste una qualche potenza di 2 le cui ultime 1000 cifre sono tutte "1" e "2".

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Grazie al cielo siamo arrivati a giugno.

La Redazione della Prestigiosa Rivista che state leggendo è per definizione sempre con l'acqua alla gola, ma a volte sembra che il livello dell'acqua possa salire sopra il livello di guardia.

Mentre il Grande Capo e il nostro Indefesso Postino facevano la guardia al classico bidone di benzina e producevano materiale, Alice è sparita. Dove sia andata non si è capito bene, ha blaterato delle frasi incomprensibili su impegni inderogabili – anche se gli altri hanno capito, che stava parlando di vacanze – e come se non bastasse ha preparato una versione ridottissima delle S&N, passando compiti a destra e a manca.


11 *È tardi?*

Quindi non vi stupite: il numero di giugno arriva con ben poche note, e qualche soluzione, che per fortuna sono scritte bene perché le fate voi. Speriamo veramente che rinsavisca il mese prossimo e si dia da fare!

E con questo passiamo alle soluzioni.

4.1 [136]

Preparatevi a parecchi pezzi in più questo mese: il Capo aveva inserito oggetti imprevisti qui e là nella rivista il mese scorso…

4.1.1 Quick & Dirty

Riceviamo da ***Millenium Bug*** due notazioni relative al nostro frizzantino (c'è la crisi, lo champagne costa troppo!): noi teniamo il ragionamento sullo spannometrico, ma se ***MB*** o qualcun altro vuole fare dei calcoli più precisi, garantita pubblicazione.

> "Mentre sale la bolla raccoglie altre bolle": la bolla aumenterebbe di volume anche se non raccogliesse altre bolle, dato che avvicinandosi alla superficie la pressione del liquido al suo esterno diminuisce; analogamente a un palloncino riempito con elio che man mano sale in cielo tende a espandersi.

"A spanne", non siamo convinti che la differenza di pressione sia così grande: trattasi di snello calice, quindi la colonna di liquido sopra la bolla è da tenere in considerazione, ma pensiamo l'aumento di volume sia da attribuire principalmente alla raccolta di altre bolle.

> "Quindi esiste una risultante che la spinge verso l'alto e, quindi, la bolla accelera": la risultante verso l'alto è presente anche se la bolla avesse volume costante, finché viene raggiunta la velocità limite in cui la forza dovuta all'attrito equilibra esattamente la spinta ascensionale.

Vero: teniamo però in considerazione il fatto che l'attrito è proporzionale alla *superficie* della bolla, mentre la spinta ascensionale è proporzionale al *volume* della bolla; essendo la bolla sferica, ossia racchiudendo il massimo volume nella minima superficie, l'incremento dato alla spinta ascensionale (che accelera la bolla) ci pare più significativo rispetto all'aumento di attrito (che la rallenta).

4.1.2 Bungee Jumpers

Cominciamo con una specie di *disclaimer*, che Rudy ha la coda di paglia: il motivo per cui questo specifico BJ è stato scelto è che a Treccia piace la trigonometria, e il BJ è, se non ricordiamo male, una delle parti della rivista nelle quali si parla meno di trigo.

Abbiamo ricevuto due stimolanti risposte, entrambe sulla stessa linea: la prima, di ***Gnugnu***, è interessante per la sua stringatezza:

> Le due funzioni sono periodiche $T = 2\pi$ e simmetriche pari, basta perciò ragionare sui primi due quadranti.
>
> Nel secondo $\sin(\cos x)$ è negativo, mentre $\cos(\sin x)$ non lo è mai.
>
> Nel primo $\cos(\sin x)$ è maggiore di $\cos x$, perché $\sin x$ è minore di x mentre, per lo stesso motivo, $\sin(\cos x)$ è minore di $\cos x$.
>
> Resta solo da vedere in 0 dove $\cos(\sin x)$ vale 1 sicuramente maggiore di $\sin(1)$ e, per eccesso di sicurezza, in $\frac{\pi}{2}$ dove $\sin(\cos x)$ vale 0 mentre $\cos(\sin x)$ è $\cos(1)$.

"Stringatezza" da intendersi nel senso che probabilmente il Nostro si è arrabbiato, ritenendo la via che abbiamo seguito noi troppo convoluta e avendo, molto probabilmente, ragione; per fortuna in nostro soccorso è arrivato ***Cesare***[15], il quale pur seguendo le stesse linee mette un po' di formalismo: ricevuto in PDF, ma copiamo volentieri (anche per far dispetto a ***Gnugnu***... il suo originale, sprezzantemente, era tutto in modo testo).

> Il metodo più semplice per constatare che la disuguaglianza
>
> $$\cos(\sin x) > \sin(\cos x) \qquad [1]$$
>
> è sempre vera fa appello alla "matematica sperimentale"; basta infatti paragonare i grafici delle due funzioni
>
> $$C(x) = \cos(\sin x) \text{ e } S(x) = \sin(\cos x),$$
>
> per rendersi conto immediatamente *de visu* che la curva $C = C(x)$ sta sempre sopra la curva $S = S(x)$, cioè che la [1] è valida ovunque.
>
> Se poi uno non è in grado o non ha voglia di fare grafici o non è soddisfatto della visualizzazione e vuole una vera "dimostrazione" della [1] senza tirare in ballo troppe formule di trigonometria, può ragionare nel seguente modo, utilizzando come unica formula il teorema di Pitagora, sintetizzato nell'identità trigonometrica fondamentale:
>
> $$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha. \qquad [2]$$
>
> Poiché nel punto $x = 0$ si ha $C(0) = \cos 0 = 1$ e $S(0) = \sin 1 = 0.841 < 1$, la [1] è soddisfatta per $x = 0$ e quindi (avendosi a che fare con funzioni continue) essa lo è anche in un opportuno intorno dello zero. Ciò premesso, se esistessero delle regioni

15 Del quale abbiamo recensito un libro (e quindi sapete chi è) e al quale da tempo ormai immemore dobbiamo una cena; Doc, ti decidi a fissare una data? Meno male che in questi casi non si contano gli interessi, altrimenti dovremmo procurare un menù con almeno $\aleph_0$ portate.

in cui fosse $C(x) < S(x)$, dovrebbero esistere dei valori di x (almeno due, trattandosi di funzioni pari) per cui risultasse[16]:

$$C(x) = S(x). \qquad \texttt{[3]}$$

ma, come è banale verificare, la `[3]` non ammette soluzioni e di conseguenza la `[1]` è sempre vera.

Per vedere facilmente che la `[3]` non può essere soddisfatta, si cominci con l'ovvia considerazione che la sua validità implica quella dell'uguaglianza $C^2(x) = S^2(x)$ che, posto $\sin x = \alpha$ e tenuto conto della `[2]`, può essere scritta come $1 - \sin^2\alpha = \sin^2\sqrt{1-\alpha^2}$ ovvero, ancora più opportunamente, come

$$1 = \sin^2\alpha + \sin^2\sqrt{1-\alpha^2}\ .$$

Ora, la funzione

$$f(\alpha) = \sin^2\alpha + \sin^2\sqrt{1-\alpha^2}$$

(che è pari e invariante rispetto allo scambio di α con $\sqrt{1-\alpha^2}$) è limitata sia inferiormente che superiormente; come si vede a colpo d'occhio, il minimo di $f(\alpha)$ si ha quando α è tale da annullare uno dei due addendi, cioè per $\alpha = 0$ e $\alpha = \pm 1$, e vale $f(0) = f(\pm 1) = \sin^2 1 = 0.708$, mentre il massimo viene raggiunto quando gli argomenti dei due seni sono uguali, cioè per $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, per cui si ha $f\left(\pm 1/\sqrt{2}\right) = 2\sin^2\left(1/\sqrt{2}\right) = 0.844$. $f(\alpha)$ si mantiene quindi sempre inferiore a 1, la `[3]` non ammette soluzione e la `[1]` è sempre vera.

Nel caso in cui uno non riesca a vedere ad occhio che i valori massimi e minimi di $f(\alpha)$ sono quelli precitati o non è soddisfatto di tale intuizione, ma vuole verificarla analiticamente, è sufficiente che si calcoli la derivata prima di $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{2\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}} 2\sin\sqrt{1-\alpha^2}\cos\sqrt{1-\alpha^2} \\ &= \sin(2\alpha) - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sin\left(2\sqrt{1-\alpha^2}\right); \end{aligned}$$

questa ha uno zero palese, per $\alpha = 0$, che individua il minimo di $f(\alpha)$ in $\alpha = 0$, mentre i due minimi corrispondenti ad $\alpha = \pm 1$ sono piazzati agli estremi del campo di variabilità di α e non sono legati all'azzerarsi di $f'(\alpha)$, ma si leggono ugualmente tenendo presente che $f(\alpha) = f\left(\pm\sqrt{1-\alpha^2}\right)$ e quindi $f(0) = f(\pm 1)$; se poi si riscrive $f'(\alpha)$ sotto la forma

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left\{\sqrt{1-\alpha^2}\sin(2\alpha) - \alpha\sin\left(2\sqrt{1-\alpha^2}\right)\right\},$$

[16] Conoscendo la professione di ***Cesare*** (e di ***Gnugnu***), a questo punto alziamo felici la mano e strilliamo :"Prof, io lo so, io lo so! Bolzano–Weierstrass!" *[Nota non redazionale ma dei soli RdA e PRS: AR sta sempre composta, in classe].*

si vede subito che essa ha due ulteriori zeri per $\alpha = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$, cioè per $\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, i valori di α che individuano i massimi di $f(\alpha)$.

Beh, lunghetta, ma ne valeva la pena.

4.1.3 La copertina

Ebbene sì, ci hanno scritto anche per risolvere il conto della copertina. Precisamente scritto ***Cid*** e ***Silvano***, quest'ultimo per passarci i suoi trucchi per fare i conti a mente:

> Io ho usavo a scuola (ah bei tempi) 2 tecniche, una per i quadrati, una per le somme insegnatemi da una trasmissione televisiva sugli "uomini prodigio in matematica" o similare alla "scommettiamo che…". Per la divisione la tecnica NON ce l'ho.
>
> I quadrati: $a^2=(a+k)\cdot(a-k)+k^2$ (sviluppate per credere).
>
> In pratica se vuoi un quadrato di un numero ci aggiungi qualcosa, ce lo togli e lo aggiungi al quadrato (es. $98^2 = 96 \cdot 100 + 4 = 9604$).
>
> Le somme: $A + B = a + k + b - k$.
>
> In pratica se devi fare $196 + 127 = 200 + 127 - 4 = 327 - 4 = 323$.

Consigli che si sono sembrati utili, grazie ***Silvano***. ***Cid*** invece risolve il conto $\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$ e ci dice come ha fatto:

> L'operazione è del tipo: $\frac{(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2}{b}$, con a=12 e b=365, e si semplifica a mente, così: $\frac{(a^2+4)+(a^2+1)+a^2+(a^2+1)+(a^2+4)}{b}$ in quanto il primo e l'ultimo termine hanno due termini di segno opposto che si elidono a vicenda $(4a-4a)=0$ e allo stesso modo vale per il secondo e il penultimo termine: $(2a-2a)=0$.
>
> A questo punto risulta immediato notare che $\frac{(a^2+4)+(a^2+1)+a^2+(a^2+1)+(a^2+4)}{b}=\frac{5a^2+10}{b}$.
>
> E per completare il calcolo basta ricordare che per moltiplicare un numero per 5 a mente basta moltiplicare questo numero per $\frac{10}{2}$ (lo si moltiplica per 10 e poi lo si divide per 2). Ora inserendo i valori della figura in copertina, abbiamo:
>
> $$\frac{5\cdot 12^2+10}{365}=\frac{5\cdot 144+10}{365}=\frac{\frac{1440}{2}+10}{365}=\frac{720+10}{365}=\frac{730}{365}=2.$$
>
> <u>Conclusione</u>:
>
> Tutti questi passaggi si fanno abbastanza rapidamente a mente, questo metodo risulta conveniente ogni volta che si ha un numero dispari di somma di quadrati di numeri interi consecutivi al numeratore della frazione.

Bello, vero? Forse adesso finalmente arrivano i problemi…

4.1.4 NASA on a budget

L'idea di mandare in orbita Rudy è piaciuta tantissimo, chissà perché... Vediamo di raccontarvi il problema brevemente:

> *Supponiamo di avere un ragionevole numero di palle di gomma perfettamente elastiche di masse decrescenti (nel progetto originale sono una la metà dell'altra, ma se trovate di meglio fatecelo sapere), con la più grande e pesante in basso: queste palle sono tutte forate, e scorrono lungo un cavo. Vengono lasciate cadere da un'altezza di una decina di metri e rimbalzano su un disco metallico. Sull'ultima palla appoggerà Rudy, che per semplicità va considerato sferico e perfettamente elastico.*
>
> *Ora, la domanda è: volendo raggiungere la velocità di fuga, quante palle vi saranno necessarie?*

Le soluzioni sono tutte belle, anche quelle che – forse per un affetto latente per il nostro Torturatore Massimo e Generatore di Problemi – non hanno creduto che fosse possibile mandare in orbita il nostro Rudy. Quella di ***Alberto R.*** Si intitola "*Rudy d'Alembert barone di Munchausen*":

> L'esperimento è interessante. Si dovrebbe assistere al fenomeno curioso di vedere una pallina che rimbalza ad un'altezza maggiore di quella da cui è caduta. Però l'uso che intendete farne è riprovevole: povero Rudy, sparato nelle profondità dello spazio cosmico a 11200 m/s (velocità di fuga dal pianeta terra), moderno incauto emulo del barone di Munchausen che volò via a cavallo di una palla di cannone!
>
> Ma lasciamo perdere i baroni e veniamo ai conti.
>
> Sia $C = 2gh = 14$ m/s la velocità Comune di tutte le palle dopo la loro Caduta dall'altezza $h = 10$m.
>
> La prima palla (prima a partire dal basso) colpisce il fondo del dispositivo e rimbalza verso l'alto (elasticità perfetta, niente attriti) con velocità V1 = C.
>
> La seconda palla, mentre scende con velocità C, urta la prima che sta risalendo con velocità V1 e rimbalza verso l'alto con velocità V2.
>
> La terza palla, mentre scende con velocità C, urta la seconda che sta risalendo con velocità V2 e rimbalza verso l'alto con velocità V3. Ecc, ecc...
>
> Dobbiamo scrivere Vn+1 in funzione di Vn tenendo conto che la massa della palla n-esima è il doppio di quella della palla (n+1)-esima
>
> Consideriamo positive le velocità rivolte verso l'alto.
>
> Dalla legge di conservazione della quantità di moto abbiamo:
>
> $2m\cdot Vn - m\cdot C = 2m\cdot Rn + m\cdot Vn+1$
>
> Dove Rn è la velocità residua dell'n-esima palla dopo l'urto con la (n+1)-esima.
>
> Dalla legge di conservazione dell'energia (trattandosi di urto elastico) abbiamo:
>
> $(1/2)2m\cdot Vn2 + (1/2)m\ C2 = (1/2)2m\cdot Rn2 + (1/2)m\cdot Vn+12.$
>
> Il sistema delle due equazioni determina le due incognite
>
> $Rn = (Vn - 2C)/3$
>
> $Vn+1 = (C + 4\ Vn)/3$
>
> La conoscenza di Vn+1 in funzione di Vn, insieme alla condizione iniziale V1 = C definisce ricorsivamente la successione delle V.
>
> Il primo termine della successione che supera la velocità di fuga è V22 = 11759 m/s.

> Non credo, quindi, che riuscirete a liberarvi di Rudy tanto facilmente. Occorre una collana di 22 sfere e se la palla destinata al balzo finale, quella che dovrebbe contenere lo sfortunato astronauta, pesasse 100 kg, la prima palla dovrebbe pesare 100·221 kg e tutto l'ambaradam 100·(222-1) kg, quasi 420 mila tonnellate.

Peccato. A dire il vero, quello che più ci è piaciuto è l'aggiunta di un'appendice:

> Scrivete: "*.....masse decrescenti (nel progetto originale sono una la metà dell'altra, ma se trovate di meglio fatecelo sapere)"*. Credo che si possa fare di meglio. Infatti, dopo l'urto tra due palle quella sottostante ha la velocità $R_n = (V_n - 2C)/3$, a volte negativa, a volte positiva, ma comunque diversa da zero. Ciò significa che non tutta l'energia cinetica si è trasferita alla palla superiore, come invece sarebbe auspicabile per la massima efficienza del sistema.
>
> Se nelle due equazioni innanzi scritte, relative alla conservazione della quantità di moto e dell'energia, sostituiamo il coefficiente 2 (rapporto di massa tra palle adiacenti) con un generico k e imponiamo $R_n = 0$, otteniamo:
>
> $k = 1 + 2C/V_n$
>
> $V_{n+1} = V_n + C$
>
> A titolo d'esempio, la seguente successione di masse rispetta le condizioni suddette: 55/55, 55/45, 55/36, 55/28, 55/21, 55/15, 55/10, 55/6, 55/3, 55/1 [anziché numeri decimali ho usato frazioni con lo stesso numeratore per mettere in evidenza la successione dei denominatori formata dai numeri "triangolari" $n(n+1)/2$]. Si tratta di 10 palle di massa crescente (dall'alto in basso) da 1 kg a 55 kg, per un totale di 100 kg.
>
> Con caduta da 10 m, la palla da 1 kg, posta in cima alla pila, verrebbe espulsa alla velocità di 140 m/s. Per ottenere circa lo stesso risultato (143 m/s) occorrerebbero, con il metodo delle masse raddoppiate, 7 palle di massa crescente da 1 kg a 64 kg per un peso totale di 127 kg. In questo caso il vantaggio è piccolo (100 kg contro 127), ma diventa rilevante per sistemi a molte palle poiché, con il nuovo metodo, la successione delle masse cresce lentamente, mentre esplode in modo esponenziale con il sistema del raddoppio. Ad esempio per lanciare Rudy occorrerebbe un sistema di "sole" 125 mila tonnellate contro le 420 mila del metodo originario.
>
> Un altro vantaggio è di tipo "estetico". Con una pila di masse ognuna doppia della sovrastante, nessuna palla dopo l'urto resta ferma e si osserverebbero caotici e ripetuti rimbalzi.
>
> Con il nuovo metodo, invece, la palla in cima alla pila schizza via, ma tutte le altre sono immediatamente immobilizzate come se si fossero incollate fra di loro ed al fondo. Un effetto visivo sorprendente.

Silvano, dopo aver fatto parecchi conti, ci comunica:

> (...) Quindi l'ultima palla, anche fosse uranio impoverito (ma io ho usato materiale NASA segretissimo proveniente da una "nana bianca" con densità 10^9 Kg/metro cubo invece dell'uranio 19050Kg/m cubo…), 6605 metri cubi, ossia una sfera di circa 11.7 metri di raggio… continuo a pensare che facesse prima con sfere di plutonio…
>
> Inoltre l'accelerazione quasi istantanea da 0 a 11.7Km/s ritengo che il nostro Rudy renda dopo il lancio l'idea di come è fatta una sogliola. Perché preoccuparsi del rientro.

Mah, del rientro ha parlato solo lui, non siamo sicurissimi che ci sia una frazione rilevante della popolazione che lo rivoglia indietro…

Prima di lasciare questo problema, pubblichiamo ancora la soluzione di ***Franco57***, che avendo scoperto di essere coscritto di Rudy cerca di evitare la messa in orbita del Torturatore Massimo:

Innanzitutto calcoliamo le nuove velocità x_1 e x_2 che acquistano due corpi C_1 e C_2 di massa rispettivamente m_1 e m_2 e di velocità v_1 e v_2 in seguito ad un urto elastico nella stessa direzione (cioè senza rotazioni). Ci servirà anche per il calcolo di una distribuzione ottimale di masse nel senso del risparmio energetico, che risponde spero all'invito "*se trovate di meglio*".

Si mantengono energia cinetica e quantità di moto, quindi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_2x_2^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 = m_1x_1 + m_2x_2 \end{cases}$$

che, espressa in funzione dei rapporti di massa $p_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ e $p_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$,

diventa $\begin{cases} p_1\left(x_1^2 - v_1^2\right) + p_2\left(x_2^2 - v_2^2\right) = 0 & (1) \\ p_1(x_1 - v_1) + p_2(x_2 - v_2) = 0 & (2) \end{cases}$

Riscrivendo le equazioni in questa forma

$$\begin{cases} p_1(x_1 - v_1)(x_1 + v_1) + p_2(x_2 - v_2)(x_2 + v_2) = 0 & (1) \\ p_1(x_1 - v_1) = -p_2(x_2 - v_2) = 0 & (2) \end{cases}$$

e sostituendo nella (1) il primo membro della (2) otteniamo $p_2(x_2 - v_2)(x_2 + v_2 - x_1 - v_1) = 0$.

Trascuriamo la soluzione banale $x_2 = v_2$, che per la (2) implica anche $x_1 = v_1$, cioè conservazione di quantità di moto ed energia cinetica in assenza di urto, abbiamo

$$x_2 + v_2 = x_1 + v_1 \quad (3)$$

vale a dire la somma tra la nuova e la vecchia velocità è la stessa per i due corpi. Infine, sostituiamo nella (2) il valore di x_2 in funzione di x_1 e viceversa come sono ricavati dalla (3). Considerando che $p_1 + p_2 = 1$ si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = (1 - 2p_2)\cdot v_1 + 2p_2 \cdot v_2 & (4) \\ x_2 = (1 - 2p_1)\cdot v_2 + 2p_1 \cdot v_1 & (5) \end{cases}$$

Supponendo le palle a distanza infinitesima una dall'altra e gli urti istantanei (mi chiedo però se ciò sia lecito), lo scenario è questo: la prima palla tocca il suolo con velocità $v = \sqrt{2gh}$, dove $h = 10$ metri è altezza del gruppo propulsore e g l'accelerazione di gravità, rimbalza in alto con la stessa velocità ed urta la seconda palla che sta cadendo anch'essa a velocità v , come ci ha insegnato Galileo. Quest'ultima, avendo metà della massa della prima, torna in alto con una velocità maggiore di v . Poi essa stessa spinge in alto la terza a velocità ancora maggiore, perché i rapporti di massa sono gli stessi ma la sua velocità di ritorno è maggiore di v e così via.

Chiamando y_i la velocità di ritorno della i-esima palla, cioè dopo lo scontro con la $(i-1)$-esima, o col suolo per la prima, applichiamo le nostre equazioni per le nuove velocità per ottenere la relazione ricorsiva:

$$y_1 = v$$

$$y_i = \left(1 - 2\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot(-v) + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot y_{i-1} = \frac{1}{3}v + \frac{4}{3}y_{i-1}$$

dove si è applicata la (5) per il calcolo di x_2 identificando la palla sottostante col corpo C_1 e quella soprastante con il corpo C_2.

La formula $y_i = \left(2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} - 1\right)\cdot v$ è facilmente verificabile per induzione:

per $i = 1$ è vera: $\left(2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{0} - 1\right)\cdot v = v = y_1$;

se vera per y_{i-1} è vera anche per y_i:

$$y_i = \frac{1}{3}v + \frac{4}{3}y_{i-1} = \frac{1}{3}v + \frac{4}{3}\cdot\left(2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{i-2} - 1\right)\cdot v = \frac{1}{3}v + 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{i-1}\cdot v - \frac{4}{3}\cdot v = 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{i-1}\cdot v - v = \left(2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{i-1} - 1\right)\cdot v$$

Allora, per spedire senza ricevuta di ritorno l'ultima palla-Rudy, cioè alla velocità di fuga $V_f = 11200 m/s$ dobbiamo avere k palle tali che $\left(2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} - 1\right)\cdot\sqrt{2gh} \geq V_f$

cioè $k \geq 1 + \log_{4/3}\frac{1}{2}\left(1 + 2\cdot\frac{V_f}{\sqrt{2gh}}\right) = 21{,}83\ldots$

Insomma almeno 22 palle (palla-Rudy compresa). Ma solo la prima, la più pesante, peserebbe $m\cdot 2^{21}$ chili, con $m = 60$ kg, cioè più di 125 mila tonnellate!

Il metodo spreca un bel po' di energia potenziale, basti pensare che applicando la formula generale al primo urto la palla sotto viene rispedita indietro verso il suolo con velocità $v/3$ (anche se essendo già al suolo viene subito di nuovo rispedita in alto) e questa energia cinetica non viene più utilizzata per il lancio finale.

In particolare l'energia potenziale vale $E_p = \left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{21}\right)\cdot mgh = \left(2^{22} - 1\right)\cdot mgh \cong 24.612.950.144$ joule, mentre per l'energia cinetica della palla-Rudy è circa un sesto: $E_c = \frac{1}{2}m\left(2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{21} - 1\right)^2\cdot 2gh \cong 4.139.589.296$ joule.

Ma i rapporti tra le masse possono essere aggiustati per tramutare tutta l'energia potenziale solamente nell'energia cinetica dell'ultima palla, realizzando l'effetto veramente sorprendente di stoppare tutte le palle al suolo senza rimbalzi secondari eccetto l'ultima che viene spedita in alto usando tutta l'energia del sistema.

Come esempio consideriamo le prime due palle che si vengono incontro a velocità v: se la prima è abbastanza pesante, la seconda può solo rallentarla, se invece e sufficientemente leggera è in grado di rispedirla verso il suolo: deve quindi esistere un rapporto di pesi tale che la prima palla viene semplicemente fermata. Applicando la (4) si ha $0 = (1 - 2p_2)\cdot v + 2p_2\cdot(-v)$, cioè $p_2 = \frac{1}{4}$, insomma la sottostante deve pesare il triplo della sovrastante. Mentre per gli altri urti i rapporti di massa saranno differenti, il principio rimane.

In generale, dovendo essere nulla la velocità risultante dallo scontro della (i-1)-esima palla con la i-esima, applicando la (3), troviamo subito per la nuova velocità y_i della i-esima (prima del successivo scontro con la (i+1)-esima):

$$y_{i-1} + 0 = y_i + (-v), \text{ cioè } y_i = y_{i-1} + v \text{ , quindi } y_i = i \cdot v .$$

Per fortuna (di Rudy) servono troppe palle per spararlo alla velocità di fuga col risparmio energetico, almeno 801, poiché $\frac{V_f}{v} = 800{,}80\ldots$

Applicando la (5) ricaviamo anche i rapporti tra le masse: $y_i = (1 - 2 \cdot p_1) \cdot (-v) + 2 \cdot p_1 \cdot y_{i-1}$ che diventa $i \cdot v = (1 - 2 \cdot p_1) \cdot (-v) + 2 \cdot p_1 \cdot (i-1) \cdot v$ e fornisce $p_1 = \frac{m_{i-1}}{m_{i-1} + m_i} = \frac{i+1}{2i}$ e si può anche scrivere $\frac{m_{i-1}}{m_i} = \frac{i+1}{i-1}$. Da questa si ricava $m_i = \frac{2}{i(i+1)} m_1$, quindi dal basso in alto i pesi sono in rapporto $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots$

Va beh, per il momento il progetto è rimandato. Ma forse il Capo trova un altro sistema…

4.1.5 Quelli del '29

Prima di raccontarvi le soluzioni, anche in questo caso, il sommario del problema:

Un gruppo di N commensali (Rudy compreso) è seduto intorno al tavolo. Viene portato in tavola il vassoio e i commensali se lo passano, dopo aver scaricato la propria razione; siccome però sono tutti impegnati in discussioni e rimembranze, non è detto che il vassoio segua sempre la stessa strada: ogni tanto, ad esempio, qualcuno riceve il vassoio dalla propria destra, si serve e lo ripassa indietro alla propria destra (il vicino di sinistra sta parlando, e non si è accorto di nulla); chi riceve il vassoio, fortunatamente per gli altri commensali, controlla se ha il piatto già occupato e, nel caso affermativo, passa senza prendere; anche lui sceglie casualmente da che parte passare, è chiaro; per cominciare a mangiare, si aspetta che tutti siano serviti.

Siete in grado di calcolare quali sono, in funzione della distanza di Rudy dal primo che si serve, le probabilità che ha di servirsi per ultimo? In media quanti passaggi farà il piatto?

Abbiamo raccolto le soluzioni di ***Millenium Bug***, ***Cid***, e ***Franco57***. Andiamo per ordine e vediamo la versione di ***Millenium Bug***:

La probabilità di essere l'ultimo ad essere servito è sempre la stessa, qualunque sia la posizione rispetto a chi riceve il vassoio. La soluzione io l'ho dedotta come segue.

Chiamo P_k la probabilità di essere servito per ultimo se mi siedo a k posti di distanza da chi riceve il vassoio.

Calcoliamo P_1; al primo passaggio ho probabilità 50% che il vassoio arrivi subito a me oppure 50% che venga passato dall'altra parte. È più comodo ragionare in termini di $1–P_k$, ovvero la probabilità di NON essere l'ultimo e risulta:

$1–P_1 = 0.5 + 0.5\ (1–P_2)$.

nel secondo 50% dei casi infatti ricado nel caso in cui mi fossi inizialmente seduto a 2 posti di distanza dal primo. Trovo così $P_2 = P_1$.

Ripetendo analogo ragionamento per k=2:

$1-P_2 = 0.5\ (1-P_1) + 0.5\ (1-P_3)$

che tenendo conto del risultato precedente dà $P_3 = P_2 = P_1$.

Lo stesso vale per tutti i valori di k da 1 a N–1, per cui la probabilità di essere l'ultimo è indipendente dalla posizione e pari a $1/(N-1)$ … pur di non piazzarsi in posizione k=0, ovvero vicino alla porta della cucina e ricevere così il vassoio direttamente dal cameriere.

D'accordo si trova anche ***Cid***:

Con N persone a tavola, la probabilità di essere servito per ultimo (se non sono il primo ad essere servito) è indipendente dalla distanza dal primo che è stato servito, ed è quindi uguale a: $\frac{1}{N-1}$. Il numero medio di passaggi che farà il vassoio è uguale a: $\frac{N^2-N}{2}$.

Dimostrazione

Se sono servito per ultimo significa che sia il mio vicino destro che quello sinistro sono stati serviti prima di me; quindi la probabilità che ho di essere servito per ultimo coincide con la probabilità che a un dato momento il vassoio lo abbia uno dei miei due vicini (destro o sinistro) e che poi il vassoio mi giunga dall'altro vicino.

Pertanto, essendo la probabilità che uno dei miei due vicini riceva il vassoio prima di me un evento certo per tutti (escluso il primo), la probabilità di essere serviti per ultimo risulta la stessa per gli $(N-1)$ commensali successivi al primo. Ed è quindi uguale a: $\frac{1}{N-1}$ (se la distanza dal primo è maggiore di zero).

Per trovare il numero medio di passaggi basta considerare che:

- Con $N=1$ bastano 0 passaggi.
- Con $N=2$ mi basta 1 passaggio.
- Con $N=3$, dopo il primo passaggio ho probabilità uguale a $\frac{1}{2}$ di concludere il giro, e se il vassoio dovesse invece ritornare indietro, la probabilità di completare il giro al passaggio successivo si mantiene sempre uguale a $\frac{1}{2}$ (e ciò vale anche per tutti i passaggi successivi che dovessero servire per completare il giro). Quindi il valore atteso con $N=3$ è: $\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}\right)=1+2=3$.
- Per $N>3$ il risultato si trova per induzione, avendo visto che per $N=2$ serve 1 passaggio e per $N=3$ servono (1 + 2) passaggi, ipotizzo che per N commensali servano $\sum_{i=1}^{N}(i-1)$ passaggi.

Lemma

Se mi trovo all'estremo di un intervallo di $(N-1)$ commensali, il numero medio di passaggi per uscire da questo intervallo è uguale a $(N-1)$.

Dimostrazione del lemma

Risulta immediato da quanto visto prima verificare che è vero sia per $N=2$ che per $N=3$. Avendo verificato che è valida per $N=2$ e per $N=3$ mi basta dimostrare che se è valida per $(N-2)$ e per $(N-1)$ allora è valida anche per N e la dimostrazione per induzione è completata.

Se è vera per $(N-1)$ commensali, significa che il numero medio di passaggi per uscire da un intervallo grande $(N-1)$ è uguale a $(N-1)$. A questo punto, essendo uscito dall'intervallo lungo $(N-1)$, mi trovo all'estremo di un intervallo grande N ed ho probabilità uguale a $\frac{1}{2}$ di uscirne e probabilità uguale a $\frac{1}{2}$ di ritornare nell'intervallo grande $(N-1)$. Se rientro nell'intervallo grande $(N-1)$ posso considerarmi all'estremo di un intervallo di $(N-2)$ commensali[17], da cui se esco finisco in uno dei due estremi dell'intervallo grande N.

Tenendo conto che uscire da un intervallo grande $(N-2)$ha un valore atteso uguale a $(N-2)$ e che ogni volta che entro in questo intervallo grande $(N-2)$ utilizzo un passaggio del vassoio e che quando infine uscirò dall'intervallo grande N si realizzerà un ulteriore passaggio del vassoio, il numero atteso dei passaggi vale: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{i+1}}*(i*(1+(N-2))+1)\right)=N$.

Ed il lemma è dimostrato.

Dalla dimostrazione del lemma, posso calcolare il numero medio di passaggi come la somma delle probabilità di uscire da intervalli via via crescenti, fino all'intervallo grande $(N-1)$, uscendo dal quale ci si trova ad aver servito tutti i commensali.

Infatti, se finora ho servito k commensali mi trovo in un intervallo grande k; quando ne uscirò mi troverò ad averne serviti $(k+1)$ e i commensali serviti si troveranno in un intervallo grande $(k+1)$.

Quindi il numero medio dei passaggi risulta essere: $\sum_{k=1}^{N}(k-1)=\frac{N^2-N}{2}$, ed il problema risulta così risolto per induzione.

Non c'è più molto da dire, veramente. A rileggerci il mese prossimo!

5. Quick & Dirty

Ci sono circa 2244,5 miglia nautiche tra Los Angeles e Honolulu. Un piroscafo parte a mezzanotte da Los Angeles e procede a un nodo all'ora verso Honolulu: dopo quanto tempo arriva?

[17] Questo intervallo di (N-2) commensali è l'insieme dei commensali che hanno sia a destra sia a sinistra un commensale che è già stato servito.

6. Pagina 46

Risolveremo il problema nella forma più generale *per qualsiasi intero positivo N, esiste una potenza di 2 tale che le sue ultime N cifre siano tutte "1" e "2"*.

È evidente che, essendo $2^5 = 32$ e $2^9 = 512$, il problema è risolto per i casi $N = 1$ e $N = 2$; risolveremo quindi il caso generale per induzione.

Supponiamo che per un certo naturale N le ultime N cifre di 2^n siano "1" e "2"; mostreremo quindi che esiste una potenza di 2 tale che le ultime $N+1$ cifre siano tutte "1" e "2".

Dalla nostra ipotesi, $2^n = a \cdot 10^N + b$, dove b è un numero di N cifre composto unicamente di "1" e "2"; sia ora

$$r = 5^N - 5^{N-1} = 4 \cdot 5^{N-1}.$$

Dal Teorema di Eulero[18] sappiamo che la differenza $2^r - 1$ sarà divisibile per 5^N, ossia se l'intero k è divisibile per 2^{N+1}, allora la differenza $2^r k - k = k(2^r - 1)$ sarà divisibile per $2 \cdot 10^N$. Questo significa che le N cifre finali di $2^r k$ e di k coincideranno e che le $(N+1)$-esime cifra dalla fine saranno o entrambe pari o entrambe dispari.

Consideriamo ora le seguenti potenze di 2:

$$\begin{aligned}
&2^n,\\
&2^{n+r} = 2^r \cdot 2^n,\\
&2^{n+2r} = 2^r \cdot 2^{n+r},\\
&2^{n+3r} = 2^r \cdot 2^{n+2r},\\
&2^{n+4r} = 2^r \cdot 2^{n+3r}.
\end{aligned}$$

Per quanto abbiamo mostrato sopra, le N cifre finali di questi numeri saranno uguali in quanto saranno le cifre di b, composto unicamente di "1" e "2", ma le cifre nella posizione $N+1$ devono essere o tutte pari o tutte dispari.

Proveremo ora che la cifra nella posizione $N+1$ non può essere uguale per tutti i numeri. La differenza tra due qualsiasi numeri può essere espressa come $2^{n+m_1 r}\left(2^{m_2 r} - 1\right)$, ove $m_1 = 0,1,2,3$ ma $m_2 = 1,2,3,4$: se questa differenza fosse divisibile per 10^{N+1}, allora $2^{m_2 r} - 1$ dovrebbe essere divisibile per 5^{N+1}, ma siccome:

$$m_2 r = m_2\left(5^N - 5^{N-1}\right) < 5 \cdot \left(5^N - 5^{N-1}\right) = 5^{N+1} - 5^N,$$

saremmo ad una contraddizione[19].

Quindi, le cifre che si trovano nella posizione $N+1$ dalla fine possono essere 1, 3, 5, 7 o 9 (e devono comparire tutti) oppure 0, 2, 4, 6, o 8, anche se non sappiamo in che ordine; in ogni caso, in uno di questi interi deve comparire nella posizione $N+1$ o il termine "1" o il termine "2"; il che dimostra la nostra tesi, visto che le restanti N cifre sono quelle di b e quindi sono tutte "1" o "2".

[18] Lo abbiamo dimostrato nel Bungee Jumpers di RM_132, gennaio 2010.

[19] Si veda il Bungee Jumpers di RM_134, marzo 2010.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Grande argomento per un *cocktail-party*

Ogni giorno, in Africa, una gazzella si sveglia: sa che se non correrà più veloce del leone, verrà mangiata.
Ogni giorno, in Africa, un leone si sveglia: sa che se non correrà più veloce della gazzella, resterà senza cibo.
La morale di questo aneddoto è: non importa se ti senti leone o gazzella: quando ti svegli, ***comincia a correre!***
(Probabilmente falso) Proverbio africano.

Il motivo per cui secondo noi questo proverbio è falso nasce dal vago ricordo che i leoni delegano la ricerca del cibo alle femmine: ricordiamo comunque che la prima copia pessimamente riprodotta di questo aneddoto proveniva dagli uffici di un'importante industria automobilistica, quindi l'ignoranza sul comportamento dei grandi felini può essere scusata.

Quello di cui intendiamo parlare stavolta è esattamente questo; l'argomento, soprattutto per i suoi addentellati, ha sempre un discreto successo: nostro scopo è di cercare di affrontarlo semplificando i concetti.

Indichiamo con $y(t)$ il numero di predatori in un dato momento e con $x(t)$ il numero delle prede; le prede[20] si riproducono a un certo rateo A e vengono mangiate ad un rateo B: ossia, usando una notazione leggermente più complessa, avremo due termini che influenzano il numero delle gazzelle: il primo dovuto alla loro riproduzione, esprimibile come $dx = Axdt$ e il secondo dovuto all'azione dei predatori, e quindi esprimibile come $dx = -Bxydt$; notate che in quest'ultimo, oltre al numero x delle prede dobbiamo anche tenere conto del numero y dei predatori, il che complica abbastanza la cosa.

Stesso discorso si può fare per i predatori: questi avranno un loro rateo di morte per vecchiaia (o per fame, se non trovano abbastanza prede) C ma riusciranno a riprodursi con un rateo D solo se mangiano (prede): quindi si ricavano altre due equazioni decisamente simili alle prime: $dy = -Cydt$ e $dy = Dxydt$.

Filosoficamente ma non troppo, notiamo che "l'equazione di vita" delle prede ha la stessa forma dell'"equazione di morte" dei predatori, e viceversa: questa frase sembra molto profonda, ma non è altro che la versione matematica del famoso detto "mors tua, vita mea".

In pratica, arriviamo alle ***Equazioni di Lotka e Volterra***, che descrivono il comportamento delle due popolazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax - Bxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -Cy + Dxy. \end{cases} \qquad [1]$$

Che, se non conoscessimo tutto il dramma dei retroscena, potremmo arrivare a definire *carine*.

Tutto chiaro, sin qui? Speriamo di sì, anche perché sia Lotka sia Volterra l'hanno fatta semplice, sino a questo punto. Tanto per cominciare, hanno supposto dei predatori con

[20] Se vi sentite particolarmente "gazzella" e il discorso vi mette a disagio, sostituite al termine "preda" quello di "risorsa": difficilmente un cavolfiore vi guarda con occhioni talmente dolci da farvi passare la fame.

una dieta decisamente monotona, ossia *esiste un unico tipo di preda*; non solo, ma *la preda ha a disposizione risorse infinite*, per quanto riguarda la sua nutrizione. E se il primo punto possiamo considerarlo una ragionevole semplificazione, il secondo rischia di causare dei guai: guardiamoci un attimo dentro, ossia cambiamo discorso.

Lasciamo perdere il concetto di prede e predatori e occupiamoci di una pacifica popolazione di vegetariani dalle carni disgustose per ogni predatore (non vorremmo ricordare male, ma ci pare questa la principale arma di difesa del bradipo) con età fertile da zero a infinito, e studiamo la ***crescita della popolazione*** N: l'aumento, qui, è funzione unicamente del numero di animali che si riproducono e non abbiamo processi di morte: quindi, la nostra equazione diventa:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Che si integra facilmente (vi facciamo il conto) e porta ad un risultato piuttosto preoccupante:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \int_0^t r dt$$
$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = rt$$
$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

…non ci ricordiamo chi l'ha detto, ma "chiunque spera che un esponenziale sia per sempre, o è un pazzo o è un economista": comunque, dal punto di vista matematico dobbiamo considerare questa soluzione e trovargli un nome. È nota di solito come ***Processo Malthusiano*** e *r* prende il nome di parametro malthusiano.

Cerchiamo un metodo un po' più serio. Imponiamo, ad esempio, che la riproduzione sia molto più lenta: dovremo, da qualche parte, "dividere per il tempo" e otterremo un'equazione del tipo

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{rt-1}{t}\right)N .$$

Che, anche se ha l'aria balorda, si risolve nello stesso modo della precedente:

$$\frac{dN}{N} = \left(r - \frac{1}{t}\right)dt$$
$$\ln N = rt - \ln t + C$$
$$N(t) = \frac{Ce^{rt}}{t}$$

Piccolo problema: quanto vale *C*? Ignorando il fatto che un sistema di questo genere esplode nell'origine (provate a mettere $t = 0$ nel risultato, e allontanatevi alla svelta), imponiamo che per $t = 1$ la nostra popolazione valga N_0; questo ci porta al valore $C = N_0$ che risolve il problema.

Bene, la cattiva notizia è che quella che funziona meglio è più complicata; la buona notizia è che un po' ne abbiamo già parlato[21]. Si tratta dell'***equazione logistica***:

[21] PM di RM077 (giugno 2005): "Roba da islandesi", terza parte; le due parti precedenti (pubblicate nei numeri 058 e 059, novembre e dicembre 2003) parlano d'altro.

$$\frac{dN}{dt}=\frac{rN(K-N)}{K}$$

che ha soluzione:

$$N(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K}{N_0}-1\right)e^{-rt}}$$

Bene, torniamo alle ***equazioni di Lotka-Volterra***. Le ripetiamo un attimo (siccome ripetiamo, lasciamo lo stesso numero):

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=Ax-Bxy,\\ \frac{dy}{dt}=-Cy+Dxy.\end{cases} \qquad [1]$$

Ora, forti della discussione sulle equazioni di crescita delle popolazioni, potete rendervi conto del fatto che il considerare un processo di crescita malthusiano (come hanno fatto i nostri due eroi nella prima formulazione) è piuttosto pericoloso: dovremmo sostituire il tutto con un processo logistico, per ottenere qualcosa di sensato: questo complica la forma dell'equazione, ma per confronto con quella qui sopra dovreste poter seguire il ragionamento:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=r\left(1-\frac{x}{K}\right)x-pxy,\\ \frac{dy}{dt}=-\mu y+epxy.\end{cases} \qquad [2]$$

Abbiamo cambiato un po' di simboli, ma solo per esprimerli con caratteristiche più "reali": diamo un po' di nomi.

r: *tasso intrinseco di crescita*, ossia a che velocità si riproduce.

K: *capacità portante* della preda.

p: *capacità di predazione* o, in scenari meno sanguinari, di pascolamento o assorbimento.

μ: *mortalità* del predatore (è un tasso, evidentemente).

e: *efficienza* del predatore, ossia quanto riesce a far rendere come riproduzione il pasto.

Ora, partiamo dal fondo: il fatto che ci siano ancora in giro sia prede che predatori implica che queste equazioni abbiano raggiunto una qualche ***condizione di equilibrio***, ossia nessuna delle due specie si è estinta[22].

Il fatto che qui si stia giocherellando con equazioni differenziali potrebbe sembrar un modo particolarmente masochistico per complicarsi la vita, ma in realtà, considerato che le derivate misurano sostanzialmente delle *variazioni*, la semplificano: infatti, si definisce ***equilibrio*** di un sistema dinamico una soluzione che ***non cambia nel tempo***; da un punto di vista geometrico, l'equilibrio è un punto nello *spazio delle fasi*, ma non abbiamo intenzione di andare a scavare in questo campo. Cambiamo discorso un'altra volta.

[22] Anche se, a ben vedere, anche questa è una condizione di equilibrio: si estinguono le prede, i predatori muoiono di fame e da allora in poi abbiamo esattamente lo stesso numero di prede e predatori per il resto dell'eternità: non dovrebbe essere difficile capire come mai soluzioni di questo genere siano dette "banali" o "scarsamente interessanti" (soprattutto per prede e predatori).

Se una funzione che sia soluzione della nostra equazione differenziale non cambia nel tempo, significa che *la sua derivata rispetto al tempo vale zero*; quindi, prendete i secondi membri della [2], uguagliateli a zero e state a guardare cosa succede:

$$\frac{dx}{dt}=0\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{r}{p}\left(1-\frac{x}{K}\right)\\x=0\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt}=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\mu}{ep}\\y=0\end{cases}$$

giusto per dare dei nomi, le prime si chiamano ***isocline della preda***, le seconde ***isocline del predatore***: se queste bestie vi spaventano, andate a riprendervi la formulazione secondo il Processo Malthusiano, che le cose diventano più semplici: in questo caso, ottenete semplicemente i due punti $(0,0)$ e $\left(\frac{C}{D},\frac{A}{B}\right)$: il primo caso è quello che non piace a nessuno (estinzione mutua), mentre il secondo è quello in cui viene mangiato un numero di prede pari a quelle che nascono: non solo, ma questo numero è uguale a quello che serve a mantenere costante il numero dei predatori (abbastanza in salute da riprodursi, ma senza esagerare).

Se il concetto di equilibrio fosse tutto qui avremmo finito e ci vedremmo il mese prossimo; come sa però chiunque abbia provato a tenere una matita in equilibrio sulla punta del naso, esistono degli equilibri che sono ***instabili***: trovarsi in questi punti è, di solito, estremamente scomodo sia per la preda che per il predatore, quindi vorremmo trovare un modo per stabilire quanto sia mantenibile una soluzione di equilibrio: il tutto, possibilmente, nell'ambito delle equazioni differenziali, visto che abbiamo solo quelle per descrivere il nostro ecosistema.

Si definisce ***Jacobiano*** di un sistema di equazioni differenziali la matrice delle derivate parziali dei secondi membri del nostro sistema rispetto alle variabili di stato, ossia, a voler fare i pignoli (tranquilli, dopo c'è un esempio facile):

$$J=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\qquad [3]$$

…che sarà lungo, da calcolare, ma è facile: riprendiamo l'espressione malthusiana delle equazioni di Lotka-Volterra, modificata di pochissimo (così è più facile fare le derivate)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(A-By),\\ \frac{dy}{dt}=y(Dx-C).\end{cases}\qquad [1]$$

Ora, vogliamo sperare non abbiate problemi a calcolare le derivate del secondo membro di ciascuno di queste due funzioni *rispetto a x e rispetto a y*: sono esattamente gli aggeggi che servono a riempire la matrice

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} A - By & -Bx \\ Dy & Dx - C \end{pmatrix}$$

Facile vero? Bene, perché qui si complica: ***gli autovalori dello Jacobiano definiscono la stabilità delle soluzioni***.

Riprendiamo il concetto di autovalore/autovettore? Molto tagliato per i campi, si chiama *autovettore* di una funzione *f* qualsiasi $\vec{x} \neq 0$ per cui $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, e λ si dice autovalore di *f*. Siccome lavoriamo con le matrici, la cosa si semplifica (un po'): calcoliamo gli autovalori dello Jacobiano risolvendo in λ l'equazione (attenti che è un determinante, non una matrice!):

$$\begin{vmatrix} (A - By) - \lambda & -Bx \\ Dy & (Dx - C) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

inserendo per* x *e* y *i valori dei punti di equilibrio trovati: in pratica, per il nostro primo punto (l'origine),

$$(0,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} A - \lambda & 0 \\ 0 & -C - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = A \\ \lambda_2 = -C \end{cases}$$

e, per il secondo punto, nello stesso modo,

$$\left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{BC}{D} \\ \frac{AC}{B} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i\sqrt{AC} \\ \lambda_2 = -i\sqrt{AD} \end{cases}$$

(sì, l'abbiamo tenuto staccato perché non vi spaventiate).

Da questi aggeggi, riusciamo a capire come si comportano i nostri punti di equilibrio: volendo però restare sulle generali (e non stancarvi troppo), affrontiamo la cosa in modo molto pragmatico.

Tanto per cominciare, un equilibrio si dice ***asintoticamente stabile*** se tutti gli autovalori hanno parti reali negative; è invece ***instabile*** se almeno un autovalore ha parte reale positiva. Non solo, ma se tutti gli autovalori hanno parte reale diversa da zero, l'equilibrio si dice ***iperbolico*** (sono interessanti perché sono particolarmente robusti).

Bene, abbiamo messo insieme una quantità incredibile di concetti, adesso cerchiamo, in un modo un po' intuitivo, di capire quale sia la relazione tra di loro.

All'inizio avevamo due derivate (rispetto al tempo) uguali ciascuna a una funzione.

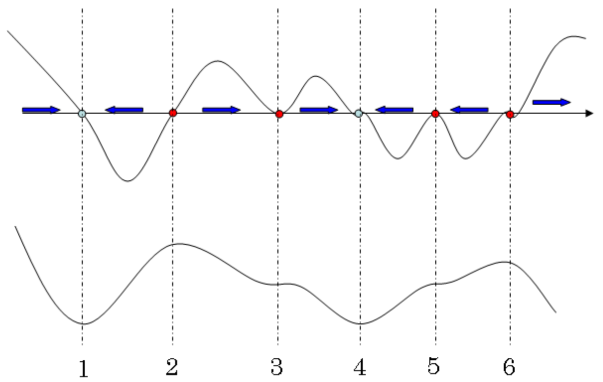
Poi, abbiamo calcolato le derivate delle due funzioni rispetto alle loro variabili e le abbiamo organizzate in una matrice.

Poi abbiamo calcolato gli autovalori della matrice.

Questo significa che dalle parti dei punti di equilibrio *stiamo approssimando la funzione con una retta avente coefficiente angolare pari all'autovalore*, e siamo autorizzati a farlo; insomma, le nostre funzioni, in quella zona, sono *linearizzabili*.

Adesso che avete ben chiaro il concetto di equilibrio, cerchiamo di capire di che tipo possano essere: ci limitiamo a pochi tipi di spazio, tranquilli.

Partiamo dagli spazi delle fasi ***unidimensionali***: ossia, abbiamo una sola equazione nello spazio delle fasi data da $x' = f(x)$; tenete d'occhio la figura di fianco, e facciamo il caso semplice.



12 *Equilibri di un sistema monodimensionale*

Il grafico in alto rappresenta la nostra funzione, ossia la derivata prima del nostro sistema: i punti sono le intersezioni con l'asse, ossia dove la derivata prima vale zero, ossia i *punti di equilibrio*; adesso, supponiamo questa derivata prima non sia altro che la rappresentazione del vettore accelerazione di una pallina che si muove su una rotaia; trovate una rappresentazione piuttosto rozza[23] di come potrebbe essere fatto il binario nel disegno in basso: adesso prendete la pallina e mettetela sul binario sotto in corrispondenza dei punti indicati dalle linee tratteggiate; se la spostate "di un pochino" da quel punto, le frecce nel primo grafico (che non sono altro che il segno dell'accelerazione, ossia della nostra funzione) vi dicono da che parte va la pallina.

Bene, ora derivate "a occhio" la nostra funzione o, meglio ancora, prendete la tangente alla funzione nel punto di equilibrio e calcolate il coefficiente angolare della retta: bravi, avete trovato l'autovalore dello Jacobiano in quel punto.

Non pretendiamo un calcolo preciso, comunque un equilibrio è ***asintoticamente stabile*** quando l'autovalore è *minore di zero* (punti **1** e **4**, ad esempio); è ***instabile*** se l'autovalore è *maggiore di zero* (punti **2** e **6**, nel disegno). Nei punti restanti (**3** e **6**), abbiamo che l'autovalore è *pari a zero*, ossia l'equilibrio è ***non–iperbolico*** (gli altri lo sono, essendo diversi da zero): infatti, ha l'aria deboluccia.

Se andiamo in uno spazio bidimensionale, il nostro Jacobiano sarà una matrice 2×2, e quindi l'equazione agli autovalori sarà di secondo grado; esistono due parametri piuttosto interessanti, nell'equazione, riconducibili alla matrice: la ***traccia*** e il ***determinante***:

$$\tau = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2};$$

$$\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Infatti, se provate a risolvere l'apparentemente balordissima equazione di secondo grado che vi permette di ottenere gli autovalori (è la formula **[3]**, con solo due righe e due colonne), vi accorgete che tutto dipende da questi due. Per capire quali siano i tipi di equilibrio in uno spazio bidimensionale, è meglio cavarcela con un grafico: lo ritrovate nella prossima figura, dove rappresentiamo i due parametri sulle ordinate e sulle ascisse. All'interno della parabola i valori saranno complessi, mentre nel resto del piano saranno reali.

Esaminiamo adesso le diverse zone: due hanno lo stesso numero, ma non preoccupatevi, vuol dire che le cose funzionano nello stesso modo.

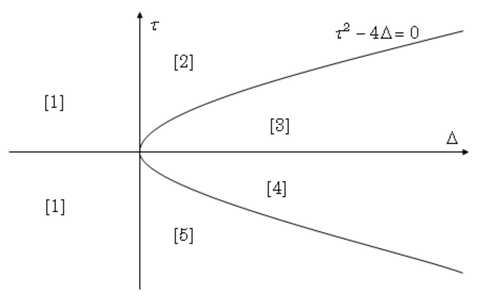
In quelle indicate con [1], abbiamo autovalori ***reali*** con ***segni diversi*** (quindi uno è negativo): si chiama ***punto di sella***; se volete fare il solito esempio della pallina, capite immediatamente il motivo del nome e capite anche il fatto che se aveste il solo autovalore

[23] …provate voi, a calcolare gli integrali in PowerPoint…

negativo (la “sezione” con un piano verticale della sella per la quale il punto di sella rappresenta il minimo) sarebbe stabile, ma l’autovalore positivo (associato alla “sezione” della sella per cui il punto di sella rappresenta il massimo) rende la vita scomoda.

Nella zona [2], abbiamo autovalori ***reali positivi***: si chiama ***nodo instabile*** ed è, giustappunto, instabilissimo (la cima di una montagna potrebbe essere un buon esempio).

Saltiamo alla zona [5], che è facile, visto che si tratta dell’inverso di quella appena vista: autovalori ***reali negativi***; questo è un ***nodo stabile*** e rappresenta un notevole immobilismo (ci verrebbe da dire che siamo caduti in un buco).



13 *Tipi di equilibrio in due dimensioni*

La zona [3] ha autovalori ***complessi coniugati***, ***parte reale positiva***: si chiama ***fuoco instabile*** e, purtroppo, qui non abbiamo un esempio… a occhio siamo su un altopiano, ma non ne siamo sicuri.

Storia simile in zona [4]: anche qui ***complessi coniugati***, ma questa volta ***parte reale negativa***, è un ***fuoco stabile***, e anche qui scarseggiamo ad esempi.

Per gli spazi tridimensionali, visto che si tratta di equazioni di terzo grado, ci limitiamo a dire che vengono fuori un altro paio di aggeggi: il ***fuoco-nodo*** (un autovalore reale, due complessi coniugati, parti reali tutte con lo stesso segno) che ogni tanto è stabile (se la parte reale è negativa) e ogni tanto no, e il ***sella-fuoco*** (l’autovalore reale ha segno opposto alla parte reale degli altri due, che sono complessi coniugati) e questo è sempre instabile.

Ecco, adesso avete tutto: qualcuno calcola gli equilibri dell’equazione di Lotka-Volterra nella versione a crescita logistica? Sapete, abbiamo finito il margine…

Rudy d’Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms