Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 135 – Aprile 2010 – Anno Dodicesimo

The Best and Worst Jobs

Of 200 Jobs studied, these came out on top -- and at the bottom:

The Best	The Worst
1. Mathematician	200. Lumberjack
2. Actuary	199. Dairy Farmer
3. Statistician	198. Taxi Driver
4. Biologist	197. Seaman
5. Software Engineer	196. EMT
6. Computer Systems Analyst	195. Garbage Collector
7. Historian	194. Welder
8. Sociologist	193. Roustabout
9. Industrial Designer	192. Ironworker
10. Accountant	191. Construction Worker
11. Economist	190. Mail Carrier
12. Philosopher	189. Sheet Metal Worker
13. Physicist	188. Auto Mechanic
14. Parole Officer	187. Butcher
15. Meteorologist	186. Nuclear Decontamination Tech
16. Medical Laboratory Technician	185. Nurse (LN)
17. Paralegal Assistant	184.Painter
18. Computer Programmer	183. Child Care Worker
19. Motion Picture Editor	182. Firefighter
20. Astronomer	181. Brick Layer

More on the Methodology

- For methodology info and detailed job descriptions, go to http://careercast.com/jobs/content/JobsRated_Methodology

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM134 ha diffuso 2569 copie e il 30/03/2010 per Google eravamo in 7'340 pagine.

Giurin Giuretta, dalla classifica non abbiamo modificato niente. È comparsa poco più di un anno fa sul ***Wall Street Journal***: trovate ulteriori dati all'indirizzo http://online.wsj.com/article/SB123119236117055127.html.

1. Che ore sono?

La bistromatica è una maniera rivoluzionaria per comprendere il comportamento dei numeri. Così come Einstein osservò che lo spazio non è un assoluto, ma dipendeva dal moto nello spazio dell'osservatore, e che il tempo non è un assoluto, ma dipendeva dal moto nel tempo dell'osservatore, si è ora scoperto che i numeri non sono assoluti, ma dipendono dal moto dell'osservatore nei ristoranti.
(Douglas Adams (1952-2001), La vita, l'universo e tutto quanto)

Fu allora che vidi il Pendolo. La sfera, mobile all'estremità di un lungo filo fissato alla volta del coro, descriveva le sue ampie oscillazioni con isocrona maestà. Io sapevo - ma chiunque avrebbe dovuto avvertire nell'incanto di quel placido respiro - che il periodo era regolato dal rapporto tra la radice quadrata della lunghezza del filo e quel numero π che, irrazionale alle menti sublunari, per divina ragione lega necessariamente la circonferenza al diametro di tutti i cerchi possibili - così che il tempo di quel vagare della sfera dall'uno all'altro polo era effetto di un'arcana cospirazione tra le più intemporali delle misure, l'unità del punto di sospensione, la dualità di una astratta dimensione, la natura ternaria di π, il tetragono segreto della radice, la perfezione del cerchio.
(Umberto Eco (1932-), Il pendolo di Foucault, 1988)

Tutte le domande che oggi appaiono tanto banali hanno in realtà un doppio fondo, un significato non ovvio, nascosto proprio nel loro essere giornaliere e semplici, apparentemente innocue.

Basta prendere la domanda nel titolo. Quanti di voi hanno abbassato lo sguardo in basso a destra sullo schermo video? E chi invece ha puntato direttamente verso il polso? Chi ha alzato lo sguardo verso l'orologio a muro? Già il modo che avete utilizzato per ottenere la conoscenza dell'ora dice molto su di voi: se siete dei *nativi digitali* state probabilmente leggendo questo articolo da un qualche aggeggio elettronico multifunzione, che quando non fa il caffè vi permette di leggere le vostre mail, telefonare, mandare sms e navigare in internet, quindi avete anche un tasto apposito che fa comparire l'ora, o è già da qualche parte sullo schermo. L'invenzione del termine *digital natives*, contrapposto agli *immigranti digitali*, è relativamente nuovo: un certo educatore e scrittore americano, Marc Prensky, ne ha fatto un cavallo di battaglia dall'inizio di questo nuovo millennio, e l'immagine è veramente felice. Immaginate infatti le persone che abitano e vivono in un certo luogo e quelli che invece vi si trasferiscono da altri paesi o altre regioni: questi ultimi, gli immigranti, saranno sempre un po' "diversi", impareranno sì la lingua locale, ma la parleranno con un certo accento e con una certa difficoltà. Poi la loro cultura potrebbe essere diversa, e i significati delle parole avere altre connotazioni, gli immigranti potrebbero non arrivare mai a integrarsi completamente nel nuovo modo di vivere. I loro figli, però, crescendo con altri bambini che la lingua la parlano, saranno completamente integrati, avranno padronanza della lingua e comprenderanno il modo di vivere locale.

Il giornalista americano a questo punto prende in considerazione l'era digitale, con i suoi computer, telefonini, internet, e vuole dimostrare che i giovani d'oggi non solo hanno un nuovo slang e vestiti diversi, non solo ascoltano altra musica, ma sono proprio una generazione di persone "diverse", con una cultura e un modo di affrontare la realtà completamente alternativo rispetto agli "immigranti": sempre connessi a internet, in multi-tasking, guardano la televisione, fanno i compiti e chattano in parallelo. Si tratta di persone per le quali "navigare" è un verbo che non ha niente a che vedere con l'acqua, per cui il fax è uno strumento antidiluviano; persone che quando dicono "ti scriverò" non immaginano nessuna interazione con una penna a sfera, e per le quali "memorizzare un numero" non ha niente a che vedere con la propria, di memoria. La tesi che Prensky intende dimostrare è che la scuola – gestita e organizzata da *immigrati* – non è in grado di fornire i giusti stimoli a questa generazione: e forse lo scrittore non è tanto lontano dalla realtà, anche se non ci sentiamo di condividere una visione che non prevede tutte le sfumature di colore tra due tonalità di grigio.

I nativi digitali dovrebbero essere nati dopo gli anni Settanta: già per noi[1] è difficile accettare questa definizione, perché per chi nasceva in Italia in quegli anni avere un computer in casa durante l'età scolastica era più che un lusso; forse dovremmo pensare ai ragazzi nati oltre gli anni Ottanta, almeno per quanto riguarda la nostra nazione. Ma anche giocando un po' meno su *quanto* giovani possano essere i nostri nativi, c'è da chiedersi se possa avere senso chiamare *immigrati* proprio la generazione che quel linguaggio ha creato e definito, solo perché si ricordano di come fosse il mondo prima dell'avvento del digitale.

Il concetto in sé del *nativo* è applicabile a numerose realtà: per esempio le generazioni dei nati negli anni Sessanta o Settanta non hanno mai dubitato dell'esistenza della lavatrice, o della televisione, e questo cambia la prospettiva del rapporto che hanno con questi oggetti… ma è proprio vero che cambia anche il linguaggio e il metodo di apprendimento? La tesi di Prensky è che i giovani di oggi debbano essere stimolati in maniera diversa, la più interattiva e giocosa possibile, e soprattutto che è finita l'era dell'insegnamento delle cose in ordine sequenziale e predefinito: prima le premesse, i prerequisiti, gli esercizi a difficoltà crescente; è tempo di adottare metodi nuovi. Certo può aver senso dal punto di vista di uno che per sbarcare il lunario progetta giochi per l'apprendimento, anche se non sembra necessariamente implicare che gli studenti non debbano più imparare storia, geografia o matematica: eppure, come esemplifica l'americano, una generazione che riesce a memorizzare tutte le caratteristiche di più di cento *Pokemon* non dovrebbe aver difficoltà a imparare a conoscere il centinaio di nazioni disseminate sul globo.

Tornando al nostro titolo, ognuno di voi dovrebbe essere riuscito a trovare una risposta alla domanda proposta. Beh, dovunque l'abbiate letta, sono proprio quelle ore lì, almeno nel posto in cui vi trovate. Ma l'ora non è la stessa in tutti i posti del mondo, anche considerando che non tutti i Paesi adottano l'ora legale, il che ci ricorda anche che l'ora di una nazione è una convenzione, e ben difficilmente potrebbe essere altrimenti: si decide in che fascia oraria ci trova non in funzione del meridiano ma dell'ultimo confine attraversato e delle leggi in vigore.

Per un mondo che è ormai quasi completamente interconnesso in rete e popolato da immagini televisive in diretta, l'impressione del tempo legato allo spazio non è più una sorpresa: chi ha un abbonamento televisivo che permette di vedere la CNN o Euronews sa benissimo che ogni 31 dicembre, verso mezzogiorno, cominciano le celebrazioni di Capodanno e i rituali fuochi d'artificio partono da Sidney per ripetersi allo scoccare di ogni ora fino a finire tutto il giro del mondo. E se non si ha voglia di restare a guardarle, il giorno dopo c'è la sintesi dei migliori, da Time Square, dalla Torre Eiffel, dalla Piazza Rossa: un riassunto per confermare che un altro anno si è concluso. Tutto lo scorrere di ventiquattr'ore meravigliosamente riassunto in una decina di minuti: il nostro concetto di tempo non ha più niente a che vedere con quello dei nostri genitori.

Siamo ragionevolmente certi che la maggior parte dei lettori di una prestigiosa rivista di matematica ricreativa possa trovare una risposta: la definizione dello spazio-tempo attuale, con una certa approssimazione, è contenuta in un GPS qualsiasi. Coordinate spaziali e temporali, che ci permettono di rispondere con una certa cautela, ma anche una moderata sicurezza, che alla longitudine x, latitudine y sono le ore z. Dicevamo, anche con cautela, perché si sa, le domande fatte in uno di questi articoli hanno sempre un trucco, e

[1] Come è facile notare, questo compleanno è scritto dall'unico elemento della redazione che può impunemente usare il pronome plurale in questo contesto: gli altri due, vecchi bacucchi, negli anni Settanta erano già in grado di fare danni notevoli alla società [PRS & RdA]

il lettore esperto sa già che quello che potrebbe sembrare semplice non lo è mai, se la mente dell'osservatore è sufficientemente contorta. Invece no: la risposta è corretta. O almeno lo era, mentre controllavate il dispositivo e leggevate le coordinate, ormai sarà passato qualche secondo… ma quello che più ci interessa sapere è che cosa veramente significhi.

1 *Un GPS qualsiasi...*

Il tempo, nella forma di ore/minuti/secondi è invenzione moderatamente recente, soprattutto se lo si vuole conoscere con precisione al millesimo di secondo. Probabilmente i nostri antenati cavernicoli distinguevano il tempo in cicli semplificati, intervalli di luce e ombra – il giorno e la notte – e poi stagioni. Certo divenne presto importante sapersi regolare per piantare e raccogliere i frutti della propria fatica, e dev'essere stata questa necessità legata all'agricoltura a stimolare i primi studi sul passare del tempo. E ovviamente lo scorrere di questa misteriosa entità deve aver dato non pochi grattacapi agli studiosi dell'epoca: si trattava di capire a che altezza si trovasse il sole al suo massimo e in quale parte dell'anno; trovare la posizione e la fase della luna, e di qualche altra stella di riferimento… il tutto con pietre e bastoni piantati in terra, strumenti matematici appena abbozzati, tanta curiosità e voglia di capire i segreti dell'universo. I possessori della conoscenza delle stagioni erano i veri potenti dei regni antichi, e non stupisce che le divinità di molti popoli avessero come attore principale una qualche personificazione del sole.

2 *Clessidra*

Gli egizi guardavano Sirio, che appariva visibile dalle parti di Luglio (prima era troppo vicino al sole per essere visto): subito dopo arrivavano le inondazioni del Nilo, che segnavano anche l'inizio del loro anno. Da lì in poi si regolavano sui mesi, con un calendario di 365 giorni; anche se poi gli scienziati scoprirono che la durata dell'anno era di un quarto di giorno più lunga, non si preoccuparono troppo di aggiornare i calendari in uso, ma solo di regolare i loro conti. Già allora si sapeva che la conoscenza è potere. Comunque per misurare il tempo si usavano forme più o meno evolute di meridiane, che definivano una qualche suddivisione del tempo durante il giorno… ma la notte?

Ve lo immaginate il nostro antenato romano, che si sveglia nel cuore della notte chiedendosi che ore sono? Beh, anche per loro c'erano delle soluzioni. L'equivalente delle clessidre, con acqua o sabbia, anche candele tarate, lampade ad olio, ogni tipo di oggetto il cui stato cambiasse in modo più o meno costante.

Certo la precisione non era eccellente, ma una volta divisa la giornata e la nottata in periodi di uguale durata, definito il tempo, sistemato in un ordine di qualche tipo, distinto il "prima" dal "dopo", era naturale che l'uomo si ponesse alcune domande. Per esempio, viene da chiedersi quando è cominciato tutto quanto, se il tempo è infinito, se c'è sempre stato un "prima" per ogni "prima", e la domanda può essere estesa al futuro. E poi che cosa sarebbe il presente? Nel momento in cui è registrato è già passato, ha già cambiato categoria.

È evidente che gli uomini dell'antichità avessero dei problemi a confrontarsi con l'infinito, e Zenone visualizza i suoi dubbi con i famosi paradossi: quando Achille piè veloce lascia alla tartaruga un vantaggio, ed ha una velocità dieci volte quella della tartaruga[2], per raggiungerla dovrà prima arrivare al punto dove si trovava la tartaruga nel momento della partenza, ma nel frattempo la simpatica bestiola avrà percorso un altro tratto (un decimo della loro distanza iniziale). Quindi Achille (veloce ma non molto furbo) percorre il tratto per raggiungerla, ma ancora una volta in quel tempo lei si sarà spostata di un altro decimo della distanza residua. Se oggi il problema si risolve sommando una piccola serie convergente, ai tempi di Zenone non si sapevano ancora sommare serie infinite, ed il problema rimaneva irrisolto.

Eppure il nostro antenato romano, nato senza strumenti per misurare il tempo con precisione, può darsi che nella notte volesse solo sapere se aveva dormito più o meno della metà del periodo riservato al sonno, e se il suo servo era già desto per portargli il primo pasto. Insomma, i paradossi potevano essere interessanti per lo scienziato, ma all'uomo comune interessava sapere quando era tempo di seminare e raccogliere, e non molto altro.

Mentre i filosofi e gli scienziati di tutti i tempi arzigogolavano per capire come distinguere e interpretare lo scorrere delle stagioni, gli inventori si applicavano per trovare nuovi metodi per misurarne il flusso. Ad Atene esiste ancora la Torre dei Venti, la cui meridiana era visibile anche a distanza, facendone quasi un campanile dell'era moderna, che all'interno conteneva un'enorme clessidra ad acqua.

3 *La torre dei venti ad Atene*

Questo doveva essere quello che ha dato il nome all'orologio: dal greco antico *orologion*, ῾Ωρολόγιον, composto di *ora* e *loAmegion* cioè "leggere l'ora".

Anche se in oriente ci furono molti sviluppi della tecnologia e persino la costruzione di forme complesse di orologi meccanici, in Europa le meridiane sembravano essere sufficienti alla sopravvivenza giornaliera, e poco importava se la durata delle ore mostrate cambiasse a seconda delle stagioni. I primi a dedicarsi alla costruzione di apparecchi più precisi di divisione del tempo furono monaci: era necessario dividere le giornate per celebrare i diversi momenti di preghiera e lavoro, così finalmente anche in Europa si cominciarono a costruire elaborati meccanismi.

4 *Orologio astronomico di Strasburgo*

Uno degli esempi più belli e meglio conservati è l'orologio astronomico di Strasburgo che, costruito intorno al 1350, fu quasi completamente ricostruito nel Cinquecento ed è sopravvissuto fino ad oggi grazie ad un restauro fatto nell'Ottocento che ha preservato molti dei meccanismi e degli addobbi originali.

Il tutto indica con estrema precisione il tempo apparente e quello reale – decorato con diverse figure religiose e rappresentazioni bibliche – nonché il moto delle stelle secondo un sistema ancora geocentrico: Copernico siede con in mano un ramo di mughetto per essere stato un dottore, non certo per aver immaginato un sistema eliocentrico.

[2] Certo trattasi di tartarughe moderne, anche se ipotizzate nell'antica Grecia, perché si sa con certezza che la tartaruga un tempo andava veramente veloce. Vi forniamo un link per tutti quelli nati troppo tardi o troppo presto per ricordare *La Tartaruga* di Bruno Lauzi: http://www.youtube.com/watch?v=3jOYpZchisU.

Poter misurare il tempo nel Cinquecento è dimostrazione di potere, uno status-symbol, non rappresenta vere e proprie necessità. È ancora presto, e i viaggi sono ancora lenti, lentissimi: quando Achille, seguendo la sua tartaruga, arriva in una nuova città, non sa e non ha bisogno di sapere che l'ora differisce da quella del luogo di partenza, non ci sono treni con orari che devono coincidere.

Ma un nuovo problema sembra sorgere all'orizzonte. Il sedicesimo secolo è infatti un periodo di grandi esplorazioni, di guerre e di scoperte scientifiche: all'improvviso esplode la necessità di poter definire la propria posizione ad una determinata ora del giorno con una certa accuratezza. Il problema della determinazione della longitudine[3] fu di tale importanza che vi si cimentarono tutti i più grandi scienziati dell'epoca: e tutti si rendevano conto della necessità di poter misurare l'ora con una certa precisione.

Galileo[4], dopo aver proposto un metodo di osservazione delle eclissi delle lune di Giove – sistema che non poteva essere utilizzato con successo durante la navigazione – non è in una posizione dalla quale poter dare molte dritte, se non altro per il fatto di trovarsi agli arresti domiciliari. Eppure è lui a scoprire l'isocronia del pendolo[5], anche se non la metterà in pratica per la progettazione di un orologio fino al 1640: per quanto molti provassero a realizzare un orologio a pendolo, la precisione dei primi strumenti progettati lasciava molto a desiderare.


5 *Christiaan Huygens*

A passare alla storia come l'inventore dell'orologio a pendolo fu Christiaan Huygens, scienziato ed inventore olandese, nato all'Aia il 14 aprile del 1629.

Christiaan era figlio di uno scienziato e diplomatico, Constantin, che manteneva corrispondenza ed amicizia con le migliori menti scientifiche del suo tempo, quindi non c'è da stupirsi se fin dai primi studi si interessò di matematica e geometria: Cartesio era ospite fisso in casa Huygens e osservava compiaciuto gli sviluppi del piccolo, che raggiunti i vent'anni e intrapresi gli studi in legge, scambiava lettere con Mersenne calcolando tra l'altro le caratteristiche della catenaria.

Appena ventenne si propose di viaggiare e conoscere il modo e soprattutto altri matematici, e presto il suo interesse fu rivolto verso l'astronomia, il centro dell'attenzione della maggior parte degli scienziati dell'epoca.

Cominciò – come molti scienziati in quei tempi – con il costruire il proprio telescopio e a elaborare nuove tecniche di preparazione delle lenti, finché nel 1655 riuscì a osservare la

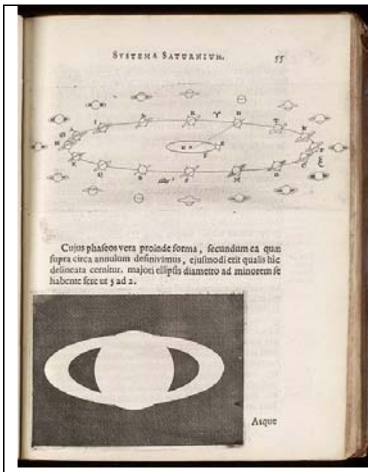
[3] Se ne è già parlato in queste pagine, nel compleanno di Poincaré "Matematica per porcini" in RM075, per cui qui non ci addentriamo nella questione.

[4] Di lui e della sua epoca si disserta in "Rigoroso esame", RM085.

[5] Ma come si fa a misurare il tempo di oscillazione di un pendolo se non esistono gli orologi? Galileo utilizzava il battito del proprio cuore. Un bell'esempio del fatto che – malgrado il tempo percepito da ogni persona sia relativo – un cuore saldo sia in grado di ottenere grandi cose.

prima luna di Saturno. Se ci possiamo permettere un commento piuttosto scontato, ci risulta difficile metterci nei panni degli scienziati della fine del Seicento: tutto quello che volevano studiare non esisteva ancora e gli strumenti per misurarlo non erano ancora stati inventati. Ogni scienziato aveva a sua disposizione una gran curiosità e tanta pazienza.

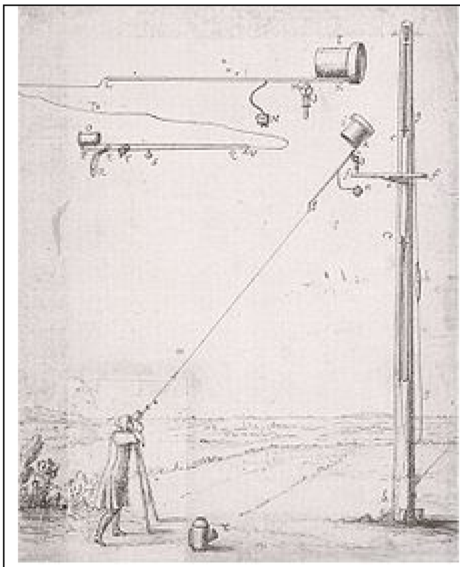
Il nostro Christiaan, per esempio, era un uomo curioso, ma amava anche mettere nero su bianco le teorie che raccoglieva nei suoi viaggi: nel suo primo soggiorno a Parigi venne a sapere della corrispondenza tra Fermat e Pascal a proposito del calcolo delle probabilità, e scrisse in proposito il trattatello *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, il primo lavoro stampato sull'argomento. Noi siamo nati con il calcolo delle probabilità dato come scontato, a quei tempi erano ancora da scrivere i teoremi di base.



6 *Spiegazione dell'orbita di Saturno.*

L'anno successivo, grazie alle sue osservazioni al telescopio, fu in grado di descrivere la forma degli anelli di Saturno. E fu l'interesse per l'astronomia che portò Christiaan verso la misurazione del tempo: avendo bisogno di misure accurate, pensò di procurarsi uno strumento opportuno. Prese in mano gli studi di Galileo, Hooke, Newton[6] e si accorse che oscillazioni ampie del pendolo non conservavano l'isocronia, che la legge valeva solo per piccole oscillazioni. È sua la legge del pendolo ideale che si studia a scuola, anche se deriva da intense discussioni sull'argomento con i suoi contemporanei. Huygens brevettò[7] il suo orologio nel 1656, e fin dall'anno successivo gli orologi a pendolo si trovavano ovunque in Europa.

Il problema della misurazione del tempo a terra era quindi risolto, anche se restava aperta la questione di mantenere stabile lo strumento durante i viaggi. Infatti, volendo ottenere una misura di longitudine (che ci riporta al problema iniziale di avere allo stesso momento una misura di tempo e di spazio) occorreva avere un orologio che continuasse a funzionare anche su una nave in preda ai flutti.



7 *Uno speciale telescopio di Huygens*

Huygens lavorò a diversi modelli di pendolo per tutta la vita. Quando Hooke elaborò la formula di funzionamento delle molle, tentò di applicarla alla costruzione di diversi tipi di orologi, sempre nel tentativo di mantenerli stabili in navigazione, ma con successi molto limitati. Non per questo abbandonò i suoi studi, e soprattutto la frequentazione dei suoi eroi: ammirava in particolare Newton, per quanto a volte non ne condividesse le teorie. Dalla seconda legge del moto formulata da Newton, per esempio, derivò le leggi della forza centrifuga.

[6] Anche loro celebrati in compleanni di RM: Hooke in RM114 e Newton in RM071, dove si parla anche di calendari e misurazioni del tempo.

[7] Hooke litigò con tutti per la precedenza di parecchie invenzioni, anche con Huygens, ma aveva troppo da fare per andare all'ufficio brevetti, e tutta l'Europa scientifica a quel punto lavorava agli stessi problemi.

Visitò spesso Londra per partecipare alle riunioni dell'appena formata Royal Society[8], e vi riconobbe un grande valore, tanto che quando nel 1670 fu costretto a tornare in Olanda per motivi di salute, temendo per la propria vita, ordinò che tutti i suoi lavori ancora non pubblicati fossero inviati alla Società.

Era un secolo importante, un momento scientifico che avrebbe segnato un cambiamento nel concetto di tempo. Le leggi di gravitazione universale formulate da Newton nei *Principia* – e tutta la scienza che ne nacque al contorno – davano al tempo una caratteristica completamente nuova: la continuità. Il fatto di poter legare ogni moto ad una legge, implicava la possibilità di derivare eventi come le eclissi, prevedere il futuro e ricostruire il passato. Insomma, mentre Zenone separando il tempo in istanti non riuscì a far avvicinare Achille e la tartaruga, grazie a Newton il presente poteva contenere in se stesso anche passato e futuro, cioè il calcolo della partenza del piè veloce e la previsione dell'incontro con la tranquilla bestiola.

Huygens doveva sentire l'importanza degli eventi se, malgrado fosse costretto a più riprese dalla salute cagionevole a tornare in patria, i suoi luoghi preferiti rimasero Parigi e Londra, dove poteva circondarsi delle menti più brillanti dell'epoca e discutere dei problemi più importanti del tempo: lo studio del moto dei corpi, la teoria della luce. Su quest'ultima scrisse un trattato fondamentale, *Traité de la lumiere*, in cui argomenta a favore della natura ondulatoria (in contrapposizione con Newton). Ma il sogno di Christiaan era di risolvere il problema della longitudine: era talmente interessato e coinvolto che poté restare a Parigi mentre la Francia e l'Olanda erano in guerra, e continuò a studiare fino alla fine dei suoi giorni diverse versioni del suo orologio che potessero affrontare la navigazione.

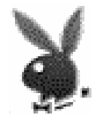
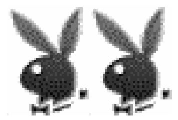
Forse siamo troppo affascinati da questa epoca storica in cui molte delle leggi fondamentali su cui si basano la nostra fisica e la nostra matematica furono immaginate o dedotte a partire da mezzi scarsi se non semplicemente insufficienti. Però, indipendentemente se nati, cresciuti o maturati nell'era digitale, ci sembra di grande ispirazione una generazione che ha spostato l'uomo dal centro dell'universo, ha cambiato il senso del tempo e non ha mai smesso di credere di poter comprendere ogni giorno un po' più della realtà che li circonda.

Il problema della valutazione del tempo in navigazione fu poi risolto dall'orologiaio John Harrison, celebrato in vari film e fornitore degli strumenti di John Cook. L'ultimo lavoro di Christiaan, prima di cedere alla malattia, fu un trattato che esaminava la possibilità di vita extraterrestre sui pianeti che lui stesso poteva osservare con il suo telescopio: Giove e Marte. Tante delle teorie secentesche non si sono avverate, ma è grazie a questi grandi eroi se adesso noi possiamo dimenticarci del problema, abbassare lo sguardo in basso a destra, e scoprire che ora sia. Anche se, come diceva un millennio e mezzo fa Sant'Agostino: "*Che cos'è dunque il tempo? Se nessuno me lo chiede, lo so; se voglio spiegarlo a chi me lo chiede, non lo so più*".

La percezione del tempo e il suo studio continuano ad appassionare gli studiosi moderni: il fluire del tempo è ancora un tema di discussione filosofico e scientifico, anche se le problematiche pratiche al contorno sono cambiate. Huygens tentava di misurare un tempo assoluto, aprioristico, e noi ne misuriamo tanti e relativi, ma la sostanza non è cambiata: l'uomo è ancora alla ricerca della conoscenza, dopo più di trecento anni ancora con idee più grandi dei propri mezzi, e con la consapevolezza di quante cose ci siano ancora da scoprire.

[8] Anche questa trattata ampliamente in "Una Reale Cooperazione", compleanno di Wallis, RM070.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Non mi piace, non mi piace e non mi piace!			
Il viaggio di Alberto			

2.1 Non mi piace, non mi piace e non mi piace!

Tranquilli, questa volta non si parla di Master-Mind. È che dopo un po' di anni passati a costruire problemi, si diventa di gusti difficili, per quanto riguarda le soluzioni; questo anche perché si affineranno i gusti, ma le nostre abilità risolutive restano sempre a basso livello. Resta, comunque, sempre la speranza che voi riusciate a risolverlo attraverso vie migliori.

Abbiamo un quadrato, disegnato su un quaderno a quadretti di lato n e, per passare il tempo, abbiamo scritto in sequenza i numeri da 1 a n^2 (nel senso che la prima riga finisce con n, la seconda con $2n$, eccetera); scegliamo, a questo punto, n numeri in modo tale che non ce ne siano due sulla stessa riga o sulla stessa colonna; siccome il viaggio è lungo (vedi secondo problema), sommiamo gli n numeri e ci accorgiamo che la somma vale 5335 (la ripetiamo un po' di volte, per essere sicuri: siccome gli errori di calcolo li abbiamo corretti tutti, la somma è esatta).

A questo punto, persi nella marea dei calcoli, ci siamo dimenticati quanto valga n: avete delle ipotesi?

Bene, visto che questo non ci piaceva moltissimo, abbiamo cominciato a giocare con queste strane scacchiere (non necessariamente con lo stesso lato), solo che questa volta, oltre alla biro per scrivere i numeri secondo la stessa regola di cui sopra, abbiamo anche uno di quei matitoni con una punta rossa e una blu[9], e cominciamo a colorare quadretti in modo tale che quando abbiamo finito e tutti i quadretti sono colorati su ogni riga e su ogni colonna i quadretti rossi siano lo stesso numero dei quadretti blu (e viceversa, spiritosi! Evidentemente, il lato qui è pari).

…Secondo voi, a che condizioni uno dei due colori avrà "sotto" una somma maggiore dell'altro colore?

2.2 Il viaggio di Alberto

Rispetto alla data di stesura di queste note, tra una settimana Alberto "dovrebbe" essere in gita.

[9] …Terrore di quelli più anziani di noi… Erano quelli che i prof usavano per correggere i compiti. E forse li usano ancora, visto che Rudy ne ha trovato uno in cartoleria. Una meraviglia, per sottolineare separando un concetto dall'altro.

Il motivo del condizionale della frase precedente è dovuto al fatto che, come sapete, il suo pagellino del quadrimestre non era propriamente entusiasmante, e la frase della sua Augusta Genitrice è stata: “O rimedi, o col cavolo che vai in gita!”.

Siamo felici di annunciarvi che Alberto ha fatto grossi passi avanti e quindi le probabilità di fare la gita aumentano (Rudy aveva proposto una regola del tipo “Se rimedi metà delle materie, ti pago il viaggio di andata e per il ritorno ti arrangi…”, ma non è stata accettata), e quindi sta cercando dei giochi da proporre in pullman: uno secondo lui “carino” consiste nel prendere un dado onesto con le facce numerate in sequenza da 1 a *molte* (per non perdere in generalità): si gioca in due, tirando il dado a turno e perde il primo giocatore che non riesce a fare un punteggio maggiore del tiratore precedente.

Quello che insospettisce i compagni di viaggio di Alberto, però, è che il gioco non sembra molto equo; quindi, adesso, più che a giocare sono impegnati a studiare quale debba essere la proporzione tra le puntate dei due giocatori per renderlo “onesto”. Poco chiaro? Vi faccio un esempio. Supponendo che il secondo sia avvantaggiato, se il primo punta un euro e il vincitore prende tutto, quanto dovrebbe puntare il secondo per rendere il gioco onesto?

Conoscendo i compagni di viaggio di Alberto, fanno a tempo ad arrivare in Australia a cavallo di una lumaca artritica, prima di risolverlo.

3. Bungee Jumpers

Nello sviluppo di

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{1000})^2,$$

alcuni dei doppi prodotti risultanti sono positivi, mentre altri sono negativi.

È possibile che il numero dei doppi prodotti positivi sia pari a quello dei doppi prodotti negativi?

Esaminate il medesimo problema per lo sviluppo di:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10000})^2.$$

La soluzione, a “Pagina 46”

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Le notizie di questo mese, relativamente a questa rubrica imprevista e imprevedibile, sono ben due.

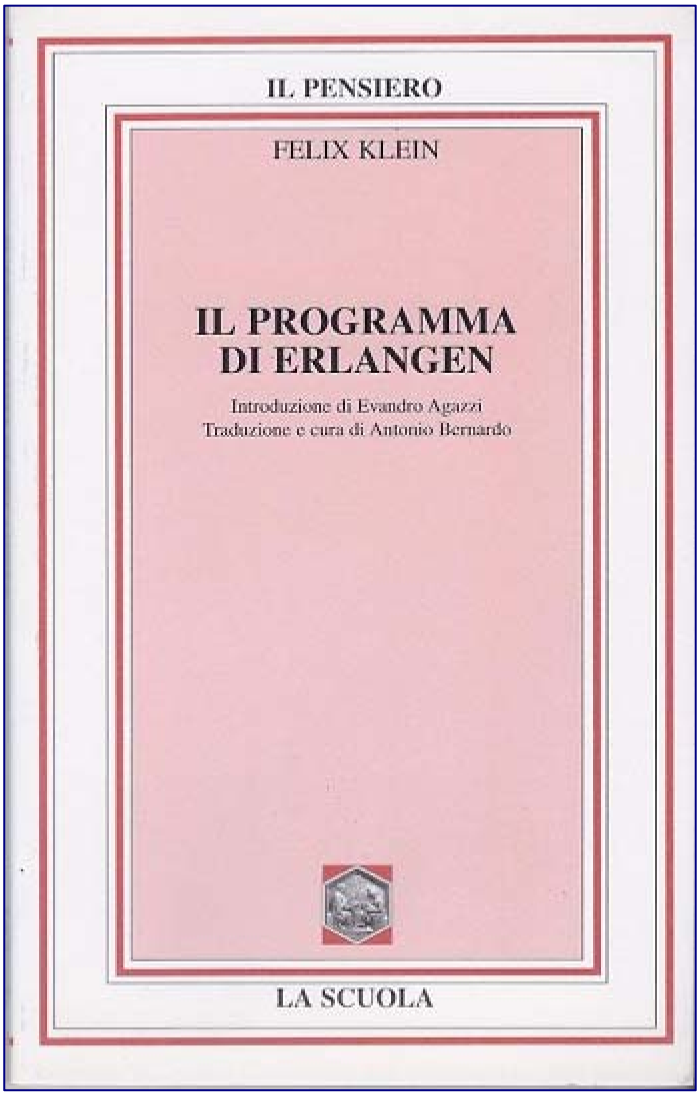
La prima, diretta e brutale, è che dopo la divagazione letteraria stiamo tornando alla matematica più dura possibile: tedesca, ottocentesca e rivoluzionaria. Se valessero le stesse definizioni della fantascienza, questa sarebbe vera matematica hard, oltre che pura Storia della Matematica.

L’altra notizia, non meno diretta e brutale, è che dopo sei mesi di fila di persistenza della rubrica sulle pagine di RM abbiamo esaurito i titoli da recensire. Quindi tocca di nuovo a voi: ci leggete, quindi avete già la metà dei requisiti necessari per essere recensiti in questa rubrica. L’altra metà dei titoli è ancora più facile: avete scritto, tradotto, illustrato, curato, prefato, introdotto un libro, preferibilmente di matematica? Beh, fatecelo sapere (e avere, anche, possibilmente…) e questa rubrica continuerà ad esistere.

4.1 Il programma di Erlangen

«*Il concetto più importante tra quelli necessari per le considerazioni che seguono è quello di* gruppo *di trasformazioni dello spazio.*»

Questo mese riusciamo a parlare di uno dei testi più famosi della storia della matematica. Diciamo "testi" e non propriamente "libri" perché quella che va sotto il nome di "programma di Erlangen" è di fatto un'orazione, una conferenza di presentazione che il grande Felix Klein tenne proprio in occasione del suo ingresso alla facoltà di Filosofia all'università tedesca di Erlangen. E se riusciamo a parlare di un tale classico, il merito è di Antonio Bernardo.



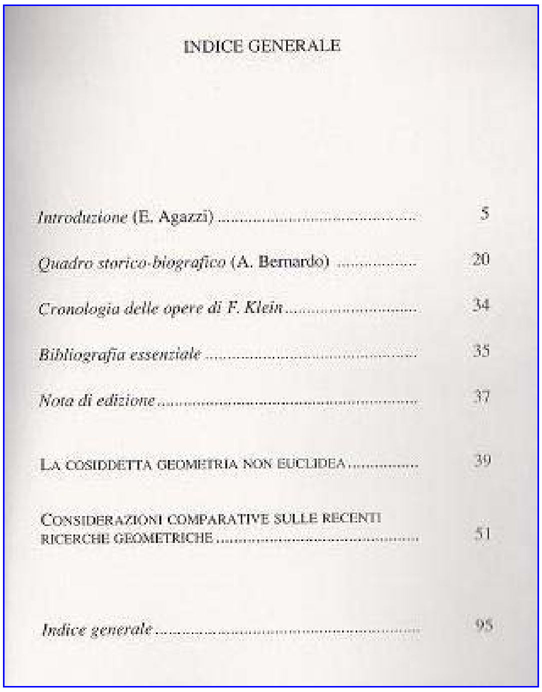
In tutta onestà, è un po' riduttivo definire Antonio un RMer, perché, per quanto possa essere cordialmente affezionato a Rudi Mathematici, non vi è dubbio che apprezzi di più un altro sito di matematica e perfino un'altra web-rivista di matematica: è infatti uno dei fondatori e una delle anime animatrici di *Matematicamente* (www.matematicamente.it) e della sua diretta filiazione, la *Matematicamente Magazine*. Nonostante la spietata concorrenza che ci facciamo (tutti i cultori di matematica sono notoriamente assimilabili ad animali dominanti alfa tesi alla difesa del territorio), capita talvolta che ognuno di noi dia uno sguardo nell'orticello altrui, senza intenzioni troppo palesi di attuare devastazioni e vandalismi. Ad esempio, Antonio ci ha mandato copie di questo bellissimo libretto edito dalla casa editrice "La Scuola" nel 1998, che oltre alle parole di Klein contiene anche un'introduzione di Evandro Agazzi. Il nostro Antonio si è invece fatto carico dei lavori più ardui: la cura del libro e la traduzione dal tedesco. Se il concetto di traduzione dovrebbe essere chiaro a tutti (anche se, verosimilmente, non a tutti sarà evidente la quantità e qualità di lavoro necessaria per condurre in porto una buona versione in lingua d'un testo), quello di "cura" di solito non lo è, anche perché è spesso diverso da caso a caso. In generale, comunque essere il curatore d'un libro, specie quando l'autore è un personaggio famoso del passato ormai transitato nel mondo dei più, significa in pratica essere l'autore di un libro già scritto da altri. Serve uno sforzo e un impegno poco diverso da quello che farebbe l'autore stesso, ma in compenso gli eventuali frutti ed onori di un lavoro di successo saranno inevitabilmente assai inferiori a quelli che godrebbe il vero autore dell'opera; insomma, è quasi sempre un'impresa a perdere, e la si affronta quasi esclusivamente per passione.

E deve essere stata senza dubbio la passione a convincere Antonio in questo progetto: oltre alla traduzione e alla cura, nel centinaio scarso di pagine che compongono il libro si trova anche un suo articolo "*Quadro storico-biografico*", che consente di introdurre il lettore nell'ambiente e nel periodo in cui Klein si trovò a pronunciare la famosa presentazione del suo programma geometrico.

8 *Felix Christian Klein*

Era il 1872, e la geometria era in piena rivoluzione. La rivoluzione indotta dall'insorgere delle geometrie non-euclidee è quasi sempre narrata a partire dal Quinto Postulato di Euclide, quello delle parallele, mettendo in risalto come per quasi duemila anni si sia provato a dimostrare quello che sembrava essere piuttosto un teorema che un postulato. Così, da Saccheri e passando per Gauss si arriva a Lobachevsky, Bolyai e Riemann; è davvero una delle storie più raccontate della matematica. Quello che però non è altrettanto spesso narrato è come questa devastante rivoluzione della geometria sia stata poi sanata, o quantomeno assimilata. Per capire le tensioni di questo periodo storico, è illuminante il saggio introduttivo di Evandro Agazzi: in poco più d'una dozzina di pagine si riesce a intravedere quanto doveva essere necessario un programma di sistemazione, quasi di *riorganizzazione* della geometria: il superamento del Quinto Postulato Euclideo rendeva improvvisamente plurale il sostantivo geometria, da sempre coniugato al singolare dai matematici, fin dalla notte dei tempi: nascevano – e andavano classificate – la geometria sferica e l'iperbolica, che richiedevano anche una ridefinizione dell'infinito geometrico. Ma non solo: anche senza passare attraverso le forche caudine del postulato delle parallele, nuovi approcci come la geometria proiettiva e la topologia mettevano in discussione su quali fossero gli oggetti della geometria, era necessario isolare le invarianti (le forme? la metrica?) e in base alla scelta effettuare una ridefinizione di tutta la materia.

Il programma che Felix Klein legge al momento del suo ingresso all'università di Erlangen è rivoluzionario proprio perché dichiara, con spirito appunto programmatico, l'intenzione di voler regolamentare la geometria, o meglio le geometrie, che nella seconda metà dell'Ottocento sembravano libere e selvagge come animali esotici appena liberati dalle gabbie della non-esistenza. Non a caso il titolo effettivo della prolusione è "*Considerazioni Comparative sulle Recenti Ricerche Geometriche*" ("Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen"): non si parla esplicitamente solo delle geometrie non euclidee, ma in generale delle nuove ricerche geometriche. Per meglio capire, più esplicitamente, quale fosse la posizione di Klein, nel libretto è infatti inserita anche un'altra breve memoria del matematica tedesco, "*La Cosiddetta Geometria Non-Euclidea*" ("Uber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie"), di poco precedente al più famoso programma di Erlangen.


INDICE GENERALE

9 *Indice de "Il Programma di Erlangen"*

Il cuore del libro, il *Programma* vero e proprio, è un pezzo di storia della matematica. Questo non lo rende comunque di facile lettura: in genere si usa il numero di formule presenti come metro per valutare quanto sia leggibile un testo di matematica, ma questa metrica non funziona con Klein: il testo è infatti assolutamente privo di formule, ma non per questo semplice. È invece piuttosto tecnico, quasi specialistico, come del resto ci si può aspettare da quello che, a tutti gli effetti, era il programma di lavoro che un professore di geometria presentava al Senato Accademico della Reale Università Federico-Alessandro, suo novello datore di lavoro: è *alta divulgazione*, per usare le parole di Agazzi. Così alta che è davvero indispensabile leggere i saggi introduttivi storici di Bernardo e dello stesso Agazzi, se si vuole tentare di cogliere il vero aspetto rivoluzionario del programma. Quando poi questo aspetto si coglie, quando si capisce che dal meraviglioso marasma delle geometrie figliastre di Euclide si riesce a veder prendere forma, come protagonista inattesa e imprevista, la Teoria dei Gruppi, si rimane ampiamente soddisfatti di aver intrapreso l'avventura della lettura delle parole di Klein.

Titolo	Il programma di Erlangen
Autore	Felix Klein
Editore	La Scuola
Collana	Il Pensiero Scientifico
Data di Pubblicazione	1998
Prezzo	8,47 Euro
ISBN	9788835094821
Pagine	95

5. Soluzioni e Note

Se queste note le scrivesse Alice, allora queste note comincerebbero con la frase "Se queste note le scrivesse…"; ma queste note non le scrive Alice (cosa strana, peraltro: è quasi sempre lei a scrivere queste note), quindi non sappiamo come cominceranno queste note: certo non con la frase "Se queste note le scrivesse…", ovviamente. Logico, no?

10 *Buon compleanno, Alice.*

Alice non scrive queste note perché è in tutte altre faccende affaccendata. Probabilmente sapete anche perché: se siete soliti leggere questo giornale seguendo l'ordine pedissequo della numerazione delle pagine, vi sarete già goduti il compleanno di Huygens, che porta la sua firma; inoltre – e questo è ancora più significativo – se questo numero riuscirà ad uscire in tempo (cosa tutt'altro che garantita, visto che chi scrive queste note le sta scrivendo in un giorno impossibile ad un'ora indecente) riusciremo a farle gli auguri di buon compleanno. Ora, come insegna Lewis Carroll, se c'è una persona più abituata a festeggiare i non-compleanni che i compleanni quella è proprio Alice, ma perché porsi delle limitazioni? Non se le è poste Tim Burton, raccontando proprio di questi tempi al cinema le avventure di una Alice ventenne, e dovremmo porcele noi, che abbiamo un'Alice assai più simpatica, più matematica e puranco più avventurosa? Tzè! Quindi, lasciatelo declamare ad alta voce: Buon Compleanno, Alice!

Senza neanche accorgercene, abbiamo già parlato di cinema, manco fossimo una rivista specializzata nel settore: sarà colpa degli Oscar, che non sono stati assegnati da troppo tempo. O forse invece è perché ci ronza per la testa una notizia, che almeno un paio di RMer ci hanno prontamente segnalato (tanto per non fare nomi: ***Franco57*** e ***RMSquare***): vi ricordate il compleanno di RM130? La protagonista era Ipazia, e nell'articolo raccontavamo che in Spagna era stato girato un film ad alto costo dedicato proprio alla figura della matematica alessandrina vissuta a cavallo del quarto e quinto secolo dopo Cristo: **Agorà**, di *Alejandro Amenabar*. La distribuzione in Italia sembrava essere a rischio: si pensava che il film potesse essere avversato dalla Chiesa Cattolica, o forse anche solo considerato poco appetibile per il pubblico italiano. Abbiamo pubblicizzato anche una petizione online che mirava proprio a richiedere la distribuzione della pellicola. Ebbene, non sappiamo proprio quale possa essere stato il peso di quell'appello e di quella petizione: probabilmente nullo, o quasi; ma la buona notizia è che Agorà sta comunque per arrivare nelle sale italiane. È atteso per il 23 o 30 Aprile (abbiamo trovato due fonti discordanti in merito alla data di uscita), e ovviamente non abbiamo idea se il film sia un capolavoro o meno, non avendolo ancora visto. Certo è che i film dedicati ai matematici sono davvero pochi: quelli dedicati a donne matematiche pochissimi, e quelli dedicati a donne matematiche dell'antichità probabilmente inesistenti; e ciò potrebbe bastare a far meritare agli autori del film il prezzo del biglietto.

Visto che, come è tradizione, nelle "Soluzioni e Note" a partire per prime sono le Note, continuiamo che le notizie prima di dare la stura alle soluzioni del mese. Citavamo, qualche tempo fa, il fatto che in questo 2010 si terrà un nuovo Congresso dei Matematici, a Hyderabad, in India, e quindi saranno presumibilmente assegnate delle nuove Medaglie Fields. Nell'ultima celebrazione del genere, quella madrilena del 2006, uno dei "medagliati" era stato Grigoriy Perelman, l'anticonformista matematico russo che ha dimostrato la Congettura di Poincarè; ma proprio il suo anticonformismo lo ha portato a rifiutare il premio. Più che di un rifiuto istituzionale e motivato, quello di Grigory è sembrata essere una sorta di mancanza di interesse, come se una Medaglia Fields non fosse importante abbastanza da meritare un viaggio dalla Russia alla Spagna. Ebbene, proprio lo scorso 18 Marzo il Clay Institute (http://www.claymath.org/millennium/), quello dei famosi Sette Problemi del Millennio, ha dichiarato di giudicare "risolto" uno dei sette problemi da un milione di dollari, e che Perelman è ufficialmente il primo vincitore destinatario dell'assegno. Resta adesso solo da vedere se Grigoriy, che non si è mosso per la Fields, decida o meno di muoversi per il milione.

Se questi premi e questi problemi vi sembrano troppo lontani, è bene tornare più vicini a casa nostra, con eventi forse meno planetari ma certo non meno significativi. Ad esempio, l'Istituto Tecnico Industriale "V.E. Marzotto" di Valdagno, in provincia di Vicenza, nella persona della preside Alessandra Campesan, ci segnala l'allestimento della mostra "***Tre e quattordici π - Opere di Tobia Ravà***", a cura di Maria Luisa Trevisan. Visto l'oggetto, la mostra è stata aperta naturalmente in occasione del "Pi Day", ma dura fino al 25 Aprile, c'è ancora tempo per visitarla.

Restringendo ancora di più l'orizzonte, dobbiamo cominciare a parlare proprio del nostro giornalino, o perlomeno della sua più stretta dependance, il sito storico di Rudi Mathematici (www.rudimathematici.com): come tutti i lettori sanno, a meno che non siano arrivati su queste pagine proprio negli ultimi giorni, il sito suddetto, oltre a contenere l'archivio completo della rivista, contiene anche altre pagine, tra cui il Bookshelf. In questo "*scaffale*" trovano posto innumerevoli opere d'alto ingegno matematico, che per ragioni varie e variate non sono apparse in rivista. Le ragioni "varie e variate" sono in realtà quasi sempre mere ragioni di spazio, nel senso che i contenuti del Bookshelf sono quasi sempre troppo voluminosi per essere inclusi nell'e-zine; non si tratta, insomma, di diversa qualità del lavoro, anzi. Ebbene, abbiamo in caldo diverse nuove elaborazioni che, da qui a qualche mese, dovrebbero essere pubblicate nell'apposito spazio sul sito: questo è un generico invito a tener d'occhio questa specifica zona della rete. Ma, oltre all'invito generico, è per darvene uno assai specifico che scriviamo queste righe: le fibrillanti meningi d'un ingegnere alessandrino hanno infatti partorito un esperimento matematico-letterario che potrebbe lasciare di stucco anche gli italici seguaci dell'Oulipo[10]. L'ingegnere in questione è ***Martino Benzi***, che si è imbarcato per un'avventura decisamente originale: detta in poche parole, il nostro eroe è serissimamente intenzionato a scrivere una sorta di *romanzo itinerante* basato su elementi (nessuno sa a priori quali) trovati nelle pagine di RM. Per fare un esempio immediato e diretto, qualcuno di voi ha probabilmente letto il racconto "*Legge e Ordine*" pubblicato il mese scorso sul nostro sito: si trattava di un racconto ispirato dai "computer quantistici" citati nel precedente numero di RM. Ebbene, quel racconto era – senza che nessuno di noi potesse immaginarlo, autore compreso – una sorta di prova generale per questo ulteriore esperimento. Martino ha infatti già scritto i primi capitoli della saga intitolata *"Questa Storia Potrebbe Chiamarsi "Galassia che Vai"?"*, con palese esercizio di autoreferenza e meno palese omaggio alla coppia Bonvi-Guccini: all'interno trovate una nuova storia ispirata ad uno dei problemi dello scorso numero di RM, con tanto di possibile soluzione (ma soluzione più narrativa che formalistica) e apertura verso gli ulteriori sviluppi, visto che l'intenzione è quella di portare avanti la storia parallelamente

[10] Se non conoscete *l'Oulipo*, potreste rimanere stupiti dalle imprevedibili connessioni esistenti tra letteratura e matematica. Comunque, se non siete francesi, potreste trovare più agevole la via alla perdizione passando per l'italico *Oplepo*, che *dell'Oulipo* è parente strettissimo (http://www.oplepo.it/index.html).

alle uscite di RM. Insomma, questo mese trovate la fantascientifica rappresentazione che ***Martino Benzi*** ha partorito a questo indirizzo:

http://rudimathematici.com/Bookshelf/qspcgcv_201004.pdf,

ma il bello è che il mese prossimo, nello stesso luogo, dovreste trovare il suo romanzo itinerante ulteriormente arricchito d'un nuovo episodio-capitolo, ispirato in qualche modo dal numero di RM qui presente. Riuscirà il nostro eroe in cotanto impegno, in così subitanea e difficilissima sfida? Siamo davvero curiosi di scoprirlo, noi. Per intanto, tenete presente che noi fra un po' – anzi, proprio adesso, fra un paio di righe – cominceremo finalmente a parlare di soluzioni ai problemi del mese, ma una di queste sta nascosta nel pdf sopra citato, nascosta in mezzo ad un'avventura che prevede pianeti da bonificare e sottovesti trasparenti.

E adesso, cosa rimane? Diamine, l'avevo appena annunciato: le soluzioni, no?

5.1 [132]

5.1.1 Il BJ su Eulero-Fermat

Ci vuole un breve riepilogo. Sul Bungee Jumping di RM132, Rudy ha parlato di un teorema di Eulero (per la precisione, Eulero-Fermat, ma non è detto che il doppio nome basti ad identificarlo) soprattutto per poter citare una delle sue ossessioni preferite, la funzione Toziente. Nel farlo, noi della redazione abbiamo seminato qualche typo ed errore, cosa che è stata notata e corretta dai lettori. A parte ciò, uno dei nostri lettori, ***Alberto R.***, chiedeva lumi su affermazioni apparentemente non dimostrate presenti in quel BJ. Il nostro prode GC provvedeva a dar risposta diretta, invocando il celebre Principio della Piccionaia.

Ora si inserisce nel discorso un nuovo lettore, ***Nicola***, che asserisce di essere un po' arrugginito, ma nel contempo propone una sua possibile dimostrazione del passaggio incriminato. Sentite cosa dice:

> Mi sono imbattuto nel teorema di Eulero-Fermat (RM 132) e nell'obiezione posta da un lettore nel numero successivo: se n è un naturale e $\{k\_1, k\_2, ..., k\_r\}$ sono naturali primi con n e minori di n, allora $Ka=\{k\_1a, k\_2a, ...,k\_ra\}$, con a ancora primo con n, è un insieme di naturali che, divisi per n, danno tutti resto diverso.

Nicola propone allora questa breve dimostrazione:

> Se, per assurdo, due elementi di Ka, divisi per n, dessero lo stesso resto, diciamolo R, avrei:
>
> $$k_ia=q_in+R,$$
>
> $$k_ja=q_jn+R,$$
>
> da cui, sottraendo membro a membro,
>
> $$(k_i-k_j)a=(q_i-q_j)n,$$
>
> cioè a non è primo rispetto a n, contro l'ipotesi.
>
> Siccome sono un po' arrugginito con le dimostrazioni, non sono sicuro che quella trovata funzioni. È brevissima (e quindi sospetta); la domanda è: ho cannato qualcosa?

Figuriamoci se il redattore di queste note è in grado di rispondere a cotanta domanda. Forte della propria ignoranza, si limita a girare il quesito agli acuti lettori di RM.

5.2 [134]

5.2.1 Siamo di nuovo "nell'organico"

Ricordate il quesito? Si trattava solo di capire quanto avesse preso Alberto partendo dai risultati di tre suoi compagni, come riepilogato dalla tabella seguente:

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	Voto
Christian	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	7
Flip	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	7
Barbara	F	F	F	V	V	F	V	F	V	F	6
Alberto	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F	

L'originale e scatologico titolo del quesito non ha certo spaventato i solutori, che si sono riversati senza tema nel non difficile compito di risollevare le infingarde e pregiudiziali cattive opinioni che l'Augusto Genitore riservava al giovane Alberto. Il decano dei Validi Assistenti di Laboratorio di RM, in effetti, per una volta aveva invece ottimamente sfangato il test Vero/Falso che la scuola gli aveva sottoposto.

Quanti si sono accorti della cosa? Beh, davvero in tanti; proviamo un elenco: ***.mau., Millennium Bug, FrancoZ, Stefano, Alberto, Cid, Ant, Luigi, Trekker, G1, Silvano Mo., gnugnu, Andrea da Siena, Silvano Ma.***[11] e ***Nicola***. E le probabilità che ce ne siamo persi qualcuno per strada sono altissime. Qualcuno si è stupito per la facilità del problema, e ancor di più per le "due pipe" attribuite al quesito dal GC: beh, ci sono almeno un paio di spiegazioni possibili. La prima è che anche Achille aveva un tallone: in altri termini, il GC è pervaso da profonda idiosincrasia verso tutto ciò che assomiglia al Master Mind, e tende a giudicare complesso anche il più semplice dei quesiti che in qualche modo lo ricordano. La seconda, più sottile, è che classificare come "*mediamente difficile*" un problema facile può istillare il dubbio nei solutori, rendendo effettivamente più difficile un problema che tale non è. Roba da Primo Aprile, insomma, se non fosse che il problema è uscito a Marzo… però, diamine, che giorno è, oggi?

Vista la semplicità del quesito e il numero elevato di soluzioni, è inevitabile che molte si somiglino molto nella metodologia. Uno dei percorsi logici più battuti è quello esemplificato dalla soluzione di ***Ant***:

> Secondo me Alberto è stato bravino, ha preso 8. Le risposte sono:
>
> 1 V, 2 F, 3 F, 4 F, 5 V, 6 V, 7 V, 8 F, 9 F, 10 F
>
> Il ragionamento che ho fatto è stato il seguente: visto che Christian e Flip hanno entrambi 7 risposte giuste su 10, devono averne date almeno 4 uguali e siccome ne hanno date proprio 4 uguali... idem per il confronto fra Barbara e ciascuno degli altri 2, in questo caso le rispose uguali devono essere almeno 3. Quindi poi prendendo le uguali fra C e F + fra C e B ho trovato le risposte giuste di C e via così...

Altri, come ***Luigi***, hanno rappresentato il tutto elaborando la tabella proposta:

[11] Di solito, mettiamo gli allonimi, per indicare i solutori. In assenza di allonimi, mettiamo i nomi; in caso di omonimia, aggiungiamo l'iniziale del cognome. Questa dovrebbe essere la prima volta nella storia di RM che due solutori risultano omonimi anche così (***Silvano M.***), costringendoci ad affinare la distinzione fino alla seconda lettera del cognome (***Silvano Mo***. e ***Silvano Ma***.)

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	Voto
Christian	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	7
Flip	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	7
Barbara	F	F	F	V	V	F	V	F	V	F	6
Alberto	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F	8

…ma il senso è ben evidente, e del tutto simile alla sequenza logica esposta sopra.

Il premio mensile per la risposta più arditamente formale spetta ad ***Andrea***: ci sono persone che si taglierebbero le vene piuttosto che scrivere un solo elemento di matrice, neanche se fosse il fantasma di Heisenberg a pregarli di farlo. Il nostro, invece, risolve l'amena questiona albertiana così:

Sia

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&1&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

dove

$$P_{ij}=\begin{cases}1 & se \quad V\\0 & se \quad F\end{cases}\qquad \forall i=1,\ldots 4\ e\quad \forall j=1,\ldots 10$$

rappresenta la risposta data dall'i-esimo alunno al j-esimo quesito. Estraiamo la sottomatrice P_1 ottenuta togliendo l'ultima riga dalla matrice P:

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

Definiamo il vettore riga P_1' delle risposte corrette

$$P_1'=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

dove

$$\forall j,\quad P'_{1_j}=P_{ij}\ se\ \exists i\ t.c.\ P_{ij}=P_{i+1,j}$$

Quest'ultimo risulterà essere il vettore delle risposte esatte attraverso il quale definire la matrice delle risposte corrette, dove con carattere di dimensione maggiore ho riportato le risposte corrette di Alberto

$$P''=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&1&0&1&1&0\\1&0&1&1&0&1&1&0&1&1\\0&1&1&0&1&0&1&1&0&1\\ \Large 1&\Large 0&\Large 1&\Large 1&\Large 1&\Large 0&\Large 1&\Large 1&\Large 1&\Large 1\end{bmatrix}$$

dove

$$P''_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad P'_{1_j} = P_{ij} \qquad risposte \;\; giuste \\ 0 & altrimenti \qquad risposte \;\; sbagliate \end{cases}$$

Tale matrice risulta essere composta da 10 vettori colonna corrispondenti alle risposte corrette per ciascuna domanda. Se facciamo la somma di tali vettori, otteniamo il punteggio finale al test per ciascun alunno, e quindi, in carattere di dimensione maggiore, quello di Alberto:

$$P_T = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \\ \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

Non so voi, ma qui in redazione c'è gente ancora con la bocca aperta. Come sempre, comunque, ci sono delle vie leggermente diverse, un po' sfasate, talvolta quasi misteriose, pur senza intricarsi nel calcolo matriciale. Ad esempio il decano di tutti noi, ***PuntoMauPunto***, rispolvera la sua proverbiale laconicità con queste poche righe di soluzione:

> Questo lo riciclerò nell'ancora inesistente secondo volume di "Matematica con l'aiutino", visto che è un ottimo modo per usare il principio dei cassetti. In ciascuna delle dieci domande il gruppetto formato da Christian, Flip e Barbara ha dato due risposte di un tipo e una dell'altro. Visto che la somma dei loro punteggi è 20, occorre necessariamente che la risposta corretta a ciascuna domanda sia quella azzeccata da due persone. Insomma, Alberto ha solo sbagliato seconda e sesta domanda, per una volta l'ha sgamata.

La cosa migliore delle risposte di ***.mau.*** sono quelle solo accennate. Sta a voi adesso cercare di capire cosa sia il "*principio dei cassetti*", e soprattutto cosa intenda con "*Matematica con l'aiutino*". Noi abbiamo tutte le intenzioni di riparlarne, a tempo debito: solo che, dannazione, il tempo non è ancora debito. Non che sia credito, comunque…

Interessante anche la criptica risposta di ***Alberto***:

> Bravo il mio omonimo! Ha preso 8. Infatti la sequenza corretta delle 10 risposte è: VFFFVVVFFF. Come si ottiene questo risultato? Semplice, basta considerare che una sequenza di "vero" e "falso" non è altro che un numero scritto in base 2 e che il computer è bravissimo a maneggiare i numeri.

Ecco qua. Deve aver trovato qualche scorciatoia in base 2, l'omonimo del nostro VAdLdRM. La vedete anche voi?

Chiudiamo questa sezione con ***Gnugnu***, che anziché risolvere (o meglio, oltre a risolvere) propone delle estensioni. In forma dialogica, perfino:

> Dialogo fra R e D, due illustri matematici dalla logica inossidabile.
>
> > R – Eh! La scuola non è più quella dei nostri tempi. Adesso somministrano 10 test con risposta vero/falso ed assegnano un punto per ogni risposta esatta. Il voto è la somma dei punti; fan finta di non sapere che conoscendo solo due delle risposte e segnando le restanti a caso si arriva, mediamente, alla sufficienza (con crescente agitazione, rovista fra le scartoffie ammonticchiate sulla scrivania). Queste sono le risposte date da mio figlio e da altri tre nell'ultima prova, ma non trovo più i voti assegnati ai compagni, da cui avevo dedotto quali fossero le risposte esatte.

D – (senza manco guardare il foglio) Uhm! Erano voti sufficienti?

R – Sì! Questo me lo ricordo, tutti sufficienti.

D – Beh cerca di calmarti! C'erano risultati ottimi?

R – No. Nessuno superava l'otto.

D – Tombola! Per sapere quali erano le risposte esatte basta che…

Se R ha sempre affermato il vero, in quale modo può ricavare le risposte esatte?

Avete notato? Se appena appena proponiamo un problema un po' più facile del solito, ci arrivano, più che soluzioni, dei contro-problemi. Ah, è proprio dura la vita dei redattori di RM… e dire che abbiamo fondato questa rivista proprio per poter evitare di risolvere problemi.

5.2.2 Uno dei soliti tormentoni

Il tormentone in questione si riferiva, in realtà, al fatto che la fisica, che dovrebbe studiare il mondo reale, è solita approssimarlo con enti assai poco realistici. Il perfido Stilettatore di Problemi ne approfitta per proporre un problema che è semplicissimo riepilogare: *qual è il momento d'inerzia di un Triangolo di Sierpinski?*

Questo problema era decisamente meno facile del confratello, ma è piaciuto molto. La lista dei solutori è infatti del tutto notevole: ***Alberto M., Alberto R., g1, Millennium Bug, Cid, Adriano2007, Flokky, Nicola***. Anche in questo caso siamo certissimi d'aver dimenticato qualcuno, al quale dirigiamo pertanto le nostre scuse preventive; ma di certo, oltre a quest'elenco, bisogna considerare almeno due altre soluzioni, così particolari da aver tracimato fuori del naturale territorio delle *S&N*: si tratta di ***Martino***, che come annunciato ha incastrato la sua soluzione nel suo romanzo itinerante pubblicato nel *Bookshelf*, e di ***Franco57***, il cui lavoro è scappato da questo capitolo per finire dritto dritto nel Paraphernalia. Ah, non c'è proprio di che lamentarsi, questo mese…

Vamos a comenzar: il punto cruciale del problema, quello che poteva verosimilmente differenziare i percorsi risolutivi, era lo sfruttamento della "*natura frattale*" del triangolo, laddove il principio informativo essenziale sta proprio nel fatto che un frattale ripete in ogni sua parte la forma frattale completa. In genere, questa considerazione è sempre stata colta dai solutori, che però l'hanno sfruttata in maniera diversa. Il nostro ***Cid***, ad esempio, non manca di notarlo. Dice infatti ad un certo punto della sua soluzione:

> Ora, prima di calcolare il valore di I_S, noto che questo triangolo è formato da tre triangoli simili al triangolo grande (ma con lato uguale a $l/2$ e massa uguale a $m/3$)…

ma poi, sorprendente come sempre, risolve il problema (naturalmente giungendo al risultato corretto), tirando fuori dal cappello il *Teorema degli Assi Paralleli*:

> <u>Teorema degli assi paralleli</u>: Il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo ad un asse che passi per il centro di massa è uguale al momento di inerzia rispetto a quello che passa per il centro di massa sommato al prodotto della massa di questo corpo e la distanza d tra i due assi elevata al quadrato. $I_x = I_{centro\_di\_massa} + Md^2$.

Ciò non di meno, approcci più diretti sono stati messi in atto. Un esempio è quello di ***Alberto M.***:

> In realtà, esiste un modo semplicissimo per calcolarlo ed è quello di costruire un modellino del triangolo, attaccarlo a un asse rotante e procedere sperimentalmente. Ne ho creato uno in due minuti partendo da un triangolino di legno, con il consueto metodo iterativo per la costruzione del frattale: è bastato compiere il primo passo in un minuto, il secondo in mezzo minuto, il terzo in un quarto eccetera... da qui ho

ottenuto la risposta, che mi è servita per verificare il risultato che ho ricavato con la vecchia e noiosa via algebrica.

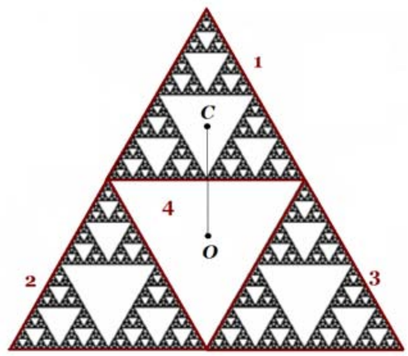
Come dite? Voi volevate proprio la risposta algebrica. E sia!

Cercare di districarsi in un problema da tre pipe & tre coniglietti senza l'aiuto non dico di Mathematica, ma almeno di un editor di equazioni decente sembrerebbe una missione impossibile, ma, è noto che, avendo a disposizione i giusti mezzi, anche le imprese più ardue possono essere risolte in quattro passaggi (ad esempio, si veda questo link: http://nonciclopedia.wikia.com/wiki/Manuali:Conquistare_l%27Inghilterra_in_4_semplici_passi; ok, il livello non è esattamente lo stesso dei vostri articoli, ma rende l'idea).

Nel nostro caso, a venire a taglio è il teorema di Huygens-Steiner, che nel caso bidimensionale recita: "Se M_O è il momento di un corpo attorno al suo baricentro, il momento attorno a un arbitrario punto P vale $M_P = M_O + mx^2$, dove m è la massa del corpo e $x = |OP|$". Non sembra, ma ora abbiamo tutto il necessario per arrivare alla meta. Cominciamo!

Passo 1

Diamo un'occhiata al triangolo, che ho bassamente copia-e-incollato dal testo del problema e suddiviso nei quattro sottotriangoli bordati di rosso, a cui con molta originalità ho affibbiato i numeri 1, 2, 3 e 4. Il punto O è il baricentro del triangolo intero, mentre C è il baricentro del triangolino 1.



11 *Il Triangolo di Sierpinski.*

Si vede subito che M, il momento del triangolo grande attorno ad O, è pari alla somma dei momenti dei triangoli 1, 2 e 3, sempre attorno ad O. Si vede altrettanto subito che questi tre momenti sono uguali fra loro ("per evidenti ragioni di simmetria", come recita una frase che appare comunemente su una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa di mia conoscenza). Perciò

(1) $$M = 3M_{1O} ,$$

dove M_{1O} è il momento del triangolo 1 attorno ad O.

Passo 2

Applichiamo il teorema di Huygens - Steiner:

(2a) $$M_{1O} = M_{1C} + m_1 \ |CO|^2 .$$

Ma m_1, cioè la massa di 1, è un terzo di quella complessiva. La lunghezza $|CO|$ vale invece $l/(2\ \sqrt{3})$, come si ricava – scusate, taglio qualche passaggio – ricordandosi che il baricentro di un triangolo sta a un terzo della strada fra il punto medio della base ed il vertice opposto, e che l'altezza di un triangolo equilatero è lunga $\sqrt{3}/2$ volte il lato. L'equazione precedente diventa quindi

(2b) $$M_{1O} = M_{1C} + ml^2 / 36 .$$

Passo 3

Ora troviamo M_{1C}, il momento di 1 attorno al suo baricentro. Ma qui la natura frattale della figura, questa atroce insidia lanciata da voi Perfidi Redattori di RM, vi si ritorce contro! Infatti risulta che il triangolino 1 è simile (in senso geometrico) al triangolo intero, e nel caso di figure simili il momento di inerzia scala proporzionalmente alla massa e al quadrato del lato. Quindi

(3) $$M_{1C} = M\,(m_1/m)\,(l_1/l)^2 = M / 12 .$$

Passo 4

Non resta che assemblare le equazioni (1), (2b) e (3) per ottenere

$M = 3\,(M/12 + ml^2/36) = M/4 + ml^2 / 12$.

da cui, elaborando un poco i simboli, ricaviamo finalmente

$M = ml^2/9$

Voilà, finito! Alla prossima, attendo con trepidazione gli altri problemi sullo stesso stile che avete promesso!

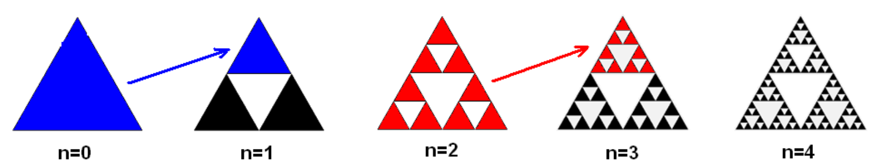
In maniera ancora più diretta, ecco come gestisce il tutto ***g1***:

Certo che parlare di momento di inerzia di una "cosa" che ha lunghezza infinita e superficie nulla sa di metafisica... il prossimo problema riguarderà il momento di dipolo degli angeli? :-). Comunque, ecco la mia soluzione. Ricordiamo che:

- il momento di inerzia di un solido di massa M rispetto a un asse situato a distanza D dal suo baricentro è dato da $P + M\,D^2$, dove P è il momento di inerzia rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il baricentro del solido;
- il momento di inerzia di un solido composto è la somma dei momenti di inerzia delle singole parti rispetto allo stesso asse.

Ora, supponiamo di aver calcolato il momento di inerzia X del triangolo di Sierpinski di lato L e massa M. Questo triangolo è composto da tre triangolini di Sierpinski più piccoli, di lato $L/2$ e massa $M/3$, che hanno quindi momento di inerzia $X/12$. La distanza tra il (bari)centro di un triangolo equilatero di lato L e uno dei vertici è L/sqrt(3), quindi la distanza tra il centro di uno dei triangolini e il centro del triangolo grande è $(L - L/2)$/sqrt(3) = L/sqrt(12). In definitiva, il momento di inerzia deve soddisfare l'equazione $X = 3\,(X/12 + M/3\; L^2/12)$, e si ricava $X = M\,L^2/9$.

Lo stesso metodo è quello usato in pratica da ***Millennium Bug***. Non lo ripetiamo, ma merita riportare almeno un suo disegno e una sua frase:



12 *Disegno di Millenium Bug.*

In pratica tutto il trucco sta nel fatto che ad ogni passo ottengo sempre tre copie in scala della figura di partenza, della quale è noto il momento di inerzia perché l'abbiamo appena determinato al passo precedente.

E con questo, la chiudiamo qui. Anche perché, perdinci… si continua a parlare di Sierpinski e soci anche nel resto della rivista…

Godetevi la primavera, la Pasqua e l'ora legale.

6. Quick & Dirty

In occasione del recupero scolastico di un VAdLdRM e del compleanno di un PR (Prestigioso Redattore), Rudy ha deciso di aprire una bottiglia di *champagne* (anche perché quella tenuta dal gennaio 2009 e aperta a capodanno era "ottima con la rucola", per restare positivi… Aceto, se non l'avete capito. Quindi, stiamo cercando di assottigliare le scorte).

Rimirando pensoso la snella flûte, a Rudy è sembrato che, mentre si avvicinavano al pelo del liquido, le bollicine si muovessero più veloci… Secondo voi, ha bevuto troppo?

7. Pagina 46

Supponiamo vi siano n numeri positivi, e quindi $1000-n$ numeri negativi, tra i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$.

In questo caso, sviluppando il quadrato, i prodotti $a_i a_j$ (qui e nel seguito considereremo, evidentemente, $i \neq j$) tra gli n numeri positivi e i prodotti tra i $1000-n$ numeri negativi saranno tutti positivi; i primi saranno $\frac{n(n-1)}{2}$, e i secondi saranno $\frac{(1000-n)(1000-n-1)}{2}$.

Tutti gli altri termini genereranno valori negativi, e saranno $n(1000-n)$.

Le condizioni del problema richiedono che:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(1000-n)(1000-n-1)}{2} = n(1000-n)$$

ossia

$$\frac{n^2 - n + (1000-n)^2 - (1000-n)}{2} = 1000n - n^2;$$

$$2n^2 - 2000n + \frac{999000}{2} = 0;$$

$$n = \frac{1000 \pm \sqrt{1000000 - 999000}}{2} = \frac{1000 \pm \sqrt{1000}}{2},$$

che non ammette soluzioni intere.

Per quanto riguarda l'estensione, esattamente con lo stesso ragionamento si ottiene:

$$n = \frac{10000 \pm \sqrt{10000}}{2} = \frac{10000 \pm 100}{2}.$$

Ossia le richieste del problema sono soddisfatte se abbiamo 5050 valori positivi e 4950 valori negativi, o viceversa.

8. Paraphernalia Mathematica

Che un problema dia origine a ulteriori sviluppi che impegnano la parte "Soluzioni e Note" per qualche mese dopo la pubblicazione è una cosa che ci rende decisamente felici.

Che un problema dia poi adito a un gruppo su GoogleGroups per l'analisi di espansioni, ci fa pensare di essere finiti nell'universo sbagliato.

Ma se, partendo da un problema, qualcuno riesce addirittura a scrivere un pezzo considerato degno da Rudy di apparire nella rubrica meno letta di tutta la rivista[12], allora è il momento di aprire la vecchia bottiglia.

*Cediamo la parola a **Franco57**, e limitiamo i nostri interventi alla parte in corsivo.*

8.1 Momenti frattali

Il momento di inerzia misura la resistenza del corpo a mutare la sua velocità di rotazione e si definisce come $\int r^2 dm$ dove r è la distanza dall'asse rispetto a cui si calcola.

Alcune proprietà del momento di inerzia che discendono direttamente dalla formula sono:

1. è additivo essendo un integrale, cioè possiamo calcolarlo come somma dei momenti inerzia di sue parti
2. è proporzionale alla massa, si intende fissata la forma del corpo;
3. è proporzionale al quadrato della lunghezza, si intende dilatando il corpo uniformemente in tutte le direzioni e mantenendo la massa.

Inoltre, meno evidente, c'è questa bella e utile proprietà che consente di calcolare il momento di inerzia I_t di un corpo C rispetto ad un asse t, come somma del momento di inerzia I_b dello stesso rispetto ad un asse b parallelo a t e passante per il baricentro e del momento di inerzia rispetto a t di un immaginario corpo C_b di uguale massa m e tutto concentrato nel baricentro:

4. $I_t(C) = I_b(C) + I_t(C_b)$

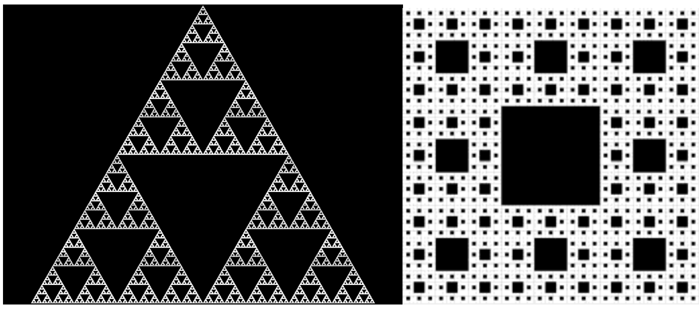
dove possiamo anche esplicitare $I_t(C_b) = d(t,b)^2 \cdot m$

Ecco come può essere provata. Si pone $\vec{r}$ il vettore dall'asse t a un generico punto materiale del corpo di massa dm, $\vec{r}_b$ il vettore dall'asse b al punto materiale, $\vec{d} = \vec{r} - \vec{r}_b$ il vettore costante tra i due assi paralleli. Poiché $\vec{r}_b$ è anche il vettore che va dalla proiezione del baricentro alla proiezione del punto materiale su un piano perpendicolare a b, abbiamo che $\int \vec{r}_b dm = 0$, il baricentro mantenendosi per proiezioni. Allora possiamo fare questo calcolo:

[12] *Se state leggendo questa nota, appartenete a una ristretta élite di masochisti.*

$$
\begin{aligned}
I_t(C) &= \int \|\vec{r}\|^2 dm = \int \langle \vec{r},\vec{r}\rangle dm = \int \left\langle \vec{r}_b + \vec{d}, \vec{r}_b + \vec{d} \right\rangle dm \\
&= \int \left(\langle \vec{r}_b, \vec{r}_b \rangle + 2 \cdot \left\langle \vec{d}, \vec{r}_b \right\rangle + \left\langle \vec{d}, \vec{d} \right\rangle \right) dm \\
&= \int \langle \vec{r}_b, \vec{r}_b \rangle dm + 2 \cdot \left\langle \vec{d}, \int \vec{r}_b dm \right\rangle + \left\langle \vec{d}, \vec{d} \right\rangle \cdot \int dm \\
&= \int \|\vec{r}_b\|^2 dm + \left\|\vec{d}\right\|^2 \cdot m \\
&= I_b(C) + I_t(C_b)
\end{aligned}
$$

Vediamo come questa proprietà può essere usata per il calcolo del momento di inerzia di alcuni frattali.



13 *Triangolo e tappeto di Sierpinski*

Alcuni dei frattali più semplici, chiamati auto-simili, sono costituiti da perfette[13] copie di se stessi in versione ridotta. È questo il caso della polvere di Cantor, della curva di Koch e del Drago, del triangolo di Sierpinski e del tetraedro sua versione tridimensionale, del tappeto di Sierpinski e della spugna di Menger.

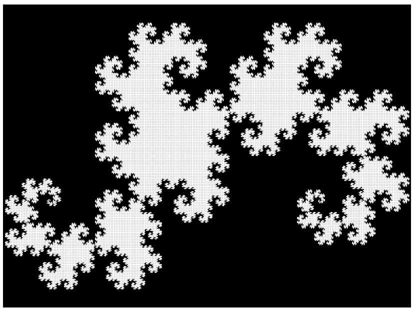
La loro dimensione di Hausdorff si può calcolare a partire dal rapporto k tra la lunghezza dell'originale ed una sua copia ridotta e il numero n di copie contenute (più avanti c'è un definizione sintetica degli oggetti frattali, i valori sono in tabella).

Per questi frattali, l'auto-similarità può essere elegantemente usata per calcolare alcune caratteristiche dell'oggetto come il baricentro (quando non è già evidente) o il momento di inerzia rispetto ad un asse, evitando completamente lo sviluppo dell'integrale.

Tipo di frattale	***k***	***n***	***Dimensione di Hausdorff***
Polvere di Cantor	3	2	$\log_3 2$
Curva di Koch	3	4	$\log_3 4$
Curva del drago	$\sqrt{2}$	2	$\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$
Triangolo di Sierpinski	2	3	$\log_2 3$
Tetraedro di Sierpinski	2	4	$\log_2 4 = 2$
Tappeto di Sierpinski	3	8	$\log_3 8$
Spugna di Menger	3	20	$\log_3 20$
Ipercubo di dimensione d	k	k^d	$\log_k k^d = d$

[13] *La parola chiave, qui, è "perfette": non ci risulta si sia mai provato a fare calcoli del genere sui frattali di Mandelbrot o Lyapunov. Per ulteriori informazioni sui frattali (soprattutto quelli non semplici) e sul concetto di dimensione, si vedano i PM "Roba da Islandesi", pubblicati in RM 058, 059 e 077 (novembre e dicembre 2003 e giugno 2005).*

In molti casi il fattore di riduzione è costante $\omega = {}^{1}\!/_{k}$ per tutti gli *n* pezzi di cui è composto il frattale e tutti i pezzi sono paralleli all'asse di calcolo[14].



14 *Curva del drago*

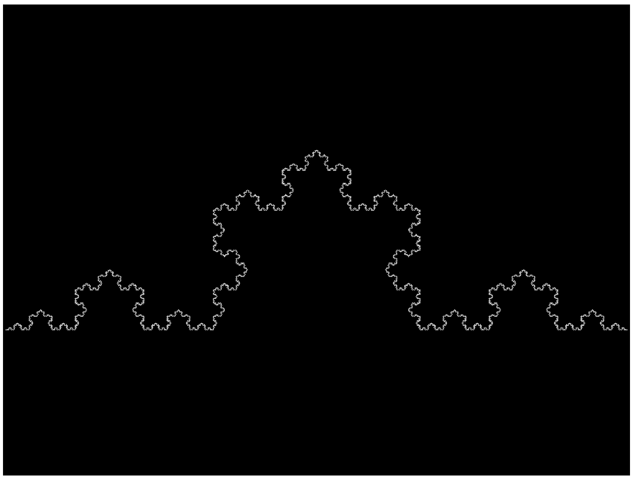
Per le proprietà (1) e (4) allora possiamo calcolare il momento di inerzia come la somma dei contributi dei momenti di inerzia della i-esima copia rispetto ad un asse parallelo e passante per il baricentro, che per la (2) e per la (3) vale per la singola copia $\frac{1}{n} \cdot \omega^2 \cdot I$, e i contributi delle loro masse concentrate nei propri baricentri, che vale $\sum_i \frac{m}{n} \cdot {d_i}^2$ posta d_i la distanza tra il baricentro della *i*-esima copia e l'asse di calcolo. Il momento di inerzia I deve quindi soddisfare l'equazione:

$$I = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \omega^2 \cdot I + \frac{m}{n} \cdot \sum_i {d_i}^2$$

da cui:

$$I = \frac{v}{1-\omega^2} \cdot l^2 \cdot m$$

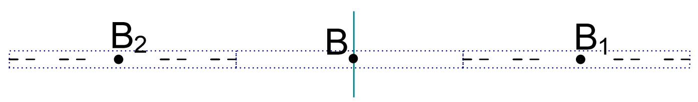
dove $v \cdot l^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i {d_i}^2$ è la varianza delle distanze dei baricentri (il baricentro dell'oggetto è anche il baricentro dei baricentri degli oggetti componenti). In altri termini v è la varianza posta la lunghezza a 1.



15 *Curva di Kock*

Adesso possiamo calcolare velocemente alcuni momenti di inerzia.

Polvere di Cantor rispetto all'asse centrale



16 *Polvere di Cantor*

Si divide un segmento di lunghezza *l* e massa *m* in tre parti: quella centrale è vuota le altre due sono simili all'originale. B_1 e B_2 sono i baricentri delle due sottoparti, B il baricentro totale, quindi, per una lunghezza unitaria, $\overline{BB_1} = \overline{BB_2} = \frac{1}{3}$:

$$\omega = \frac{1}{3} \ ; \ v = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

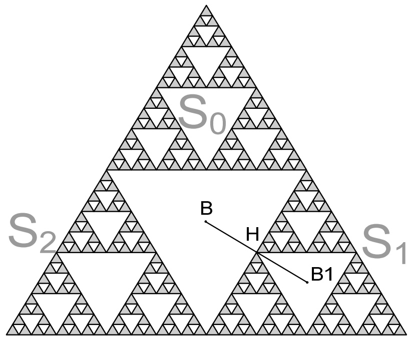
[14] Come lo sono ad esempio due statuine identiche o in scala del Grande Puffo sul tavolo rispetto alla direzione verticale, anche ruotate, purché poggiate sui piedi

da cui

$$I = \frac{1}{8} \cdot l^2 \cdot m$$

Triangolo di Sierpinski rispetto a un asse per il baricentro e ortogonale al piano

Si divide un triangolo equilatero di lato *l* e massa *m* in 4 parti usando i punti di mezzo dei lati. Il triangolo centrale rovesciato rimane vuoto, gli altri tre sono simili all'originale:



17 *Triangolo di Sierpinski*

La distanza tra il baricentro B_1 di uno questi e il baricentro totale *B* è un terzo dell'altezza del triangolo, quindi per una lunghezza unitaria,

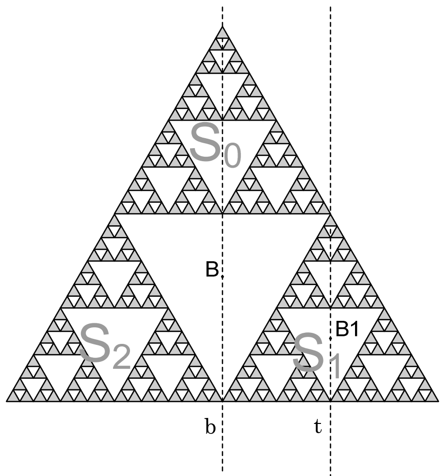
$$\overline{BB_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \omega = \frac{1}{2} \; ; \; v = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}$$

da cui

$$I = \frac{1}{9} \cdot l^2 \cdot m$$

Triangolo di Sierpinski rispetto a un'altezza

Per una lunghezza unitaria, la distanza tra il baricentro di due dei tre triangoli componenti (uno è B_1 nella figura) è $\frac{1}{4}$ del lato, per il terzo è zero, quindi:



18 *…rispetto ad una altezza*

$$\omega = \frac{1}{2} \; ; \; v = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{24}$$

da cui

$$I = \frac{1}{18} \cdot l^2 \cdot m$$

Tetraedro di Sierpinski rispetto a un asse per un vertice e baricentro

È la versione tridimensionale del triangolo, al centro rimane un ottaedro vuoto, mentre per ogni vertice c'è una figura simile di metà lato. Lo spigolo misura *l* e la massa *m*. Vale ancora la figura del triangolo di Sierpinski rispetto ad un asse per il baricentro e ortogonale al piano, con la differenza che uno dei 4 baricentri è sull'asse, quindi:

$$\omega = \frac{1}{2} \; ; \; v = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{16}$$

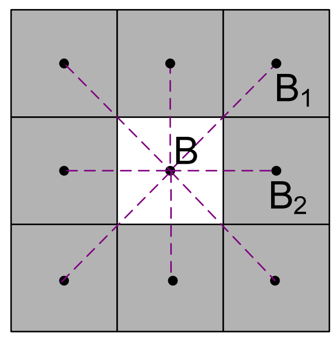
da cui

$$I = \frac{1}{12} \cdot l^2 \cdot m$$

Tappeto di Sierpinski rispetto a un asse per il baricentro e ortogonale al piano

Da un quadrato di lato l e massa m si toglie il quadratino centrale di lato un terzo e si ripete ricorsivamente il procedimento per ognuno dei rimanenti 8 quadrati.

Per una lunghezza unitaria, per 4 dei quadratini compenti la distanza del proprio baricentro dall'asse di calcolo vale $\frac{1}{3}$ per gli altri 4 vale $\frac{\sqrt{2}}{3}$, quindi:



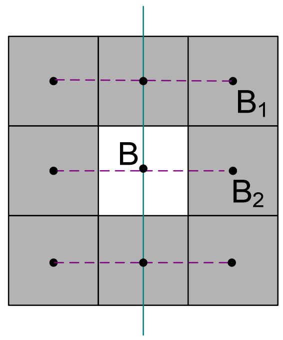
19 *Tappeto di Sierpinsky*

$$\omega = \frac{1}{3} \; ; \; \nu = \frac{1}{8} \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot 4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 \cdot 4 \right) = \frac{1}{6}$$

da cui

$$I = \frac{3}{16} \cdot l^2 \cdot m$$

Tappeto di Sierpinski rispetto a un asse complanare passante per il baricentro e parallelo ad una coppia di lati



20 *...asse complanare.*

Assumendo una lunghezza unitaria, per 6 dei quadratini compenti la distanza del proprio baricentro dall'asse di calcolo vale $\frac{1}{3}$ per gli altri 2 è nulla, quindi:

$$\omega = \frac{1}{3} \; ; \; \nu = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{12}$$

da cui

$$I = \frac{3}{32} \cdot l^2 \cdot m$$

Spugna di Menger rispetto a un asse per il baricentro e parallelo ad una quaterna di lati

La spugna è una specie di versione tridimensionale del tappeto: si affetta un cubo di spigolo l e la massa m come Rubik e si toglie il cubetto centrale nel mezzo e i 6 cubetti centrali sulle facce. Si ripete ricorsivamente il procedimento sui 20 cubetti superstiti. Può essere creato anche incidendo con un laser un tappeto di Sierpinki in ognuna delle tre coppie di facce.

Vale ancora la figura per tappeto di Sierpinski rispetto ad un asse per il baricentro e ortogonale al piano, con la differenza che 8 dei baricentri dei cubetti sono a distanza $\frac{1}{3}$ e gli altri 12 a distanza $\frac{\sqrt{2}}{3}$, quindi:

$$\omega=\frac{1}{3}\ ;\ v=\frac{1}{20}\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 8+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot 12\right)=\frac{8}{45}$$

da cui

$$I=\frac{1}{5}\cdot l^2\cdot m$$

Cubo rispetto a una diagonale

Il meccanismo può essere applicato anche ad altre figure non strettamente frattali purché auto-similari. Ad esempio il momento di inerzia di un cubo lungo una sua diagonale, che non sarebbe tanto agevole altrimenti.

Il cubo è infatti una figura auto-similare basta dividerlo in 8 cubetti di metà lato. I loro baricentri sono ai vertici di un cubo anch'esso di metà lato e la diagonale del cubo originario è diagonale anche per esso. In un cubo una diagonale è equidistante dagli altri 6 vertici che non connette e la distanza vale $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Quindi per 6 dei cubetti il baricentro dista la metà di questo valore mentre per gli altri 2 è 0.

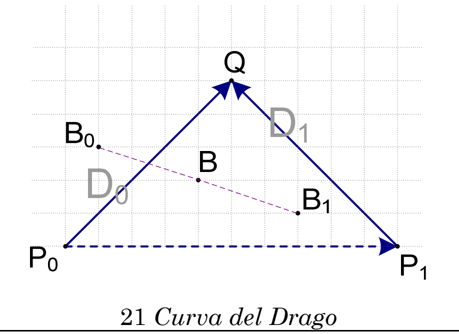
$$\omega=\frac{1}{2}\ ;\ v=\frac{1}{8}\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{8}$$

da cui

$$I=\frac{1}{6}\cdot l^2\cdot m$$

Curva del Drago: calcolo del baricentro

La curva del Drago D che va dal punto P_0 al punto P_1 è composta dalle due curve del drago D_0 che va da P_0 al punto Q e D_1 dal punto P_1 al punto Q, dove Q è il vertice che si ottiene percorrendo metà lato da P_0 a P_1 e risalendo a sinistra per la stessa lunghezza, quindi posto $P_0=(0,0)$ e $P_1=(1,0)$ abbiamo $Q=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.



21 *Curva del Drago*

Per prima cosa conviene calcolare la posizione del baricentro, sempre sfruttando l'auto-similarità.

Dato che D_0 e D_1 sono congruenti per costruzione, il baricentro di D deve essere il punto medio dei loro baricentri. Le funzioni che mappano D rispettivamente in D_0 e D_1 (e ovviamente anche i loro baricentri) sono

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \text{e}\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Quindi il baricentro deve soddisfare l'equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $B = (x, y) = \left(\frac{4}{10}, \frac{2}{10} \right)$; $B_0 = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10} \right)$; $B_1 = \left(\frac{7}{10}, \frac{1}{10} \right)$.

Sul foglio di carta quadrettata del quaderno, scegliendo un lato iniziale di 10 quadretti, viene tutto molto bene.

Curva del Drago rispetto all'asse per il baricentro e perpendicolare al piano

La lunghezza iniziale vale l e la massa m.

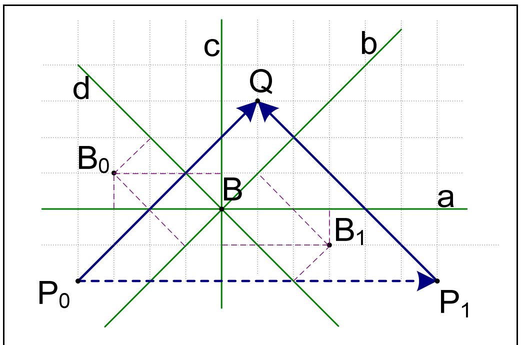
Per una lunghezza unitaria, abbiamo $\overline{BB_0}^2 = \overline{BB_1}^2 = \left(\frac{1}{10} \right)^2 + \left(\frac{3}{10} \right)^2 = \frac{1}{10}$, quindi

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ v = \frac{1}{10}$$

da cui

$$I = \frac{1}{5} \cdot l^2 \cdot m$$

Curva del Drago rispetto all'asse verticale per il baricentro



22 *Curva del Drago*

Qui bisogna cambiare un poco la strategia perché l'asse non è più verticale rispetto alle sottoparti, ma angolato a destra o a sinistra di $\frac{\pi}{4}$, quindi rimanda alla conoscenza del momento di inerzia della figura intera sotto queste angolazioni. A sua volta queste ultime possono diventare orizzontali nelle sottoparti, ma qui il cerchio si chiude, grazie al fatto che le angolazioni di definizione delle sottoparti sono commensurabili rispetto all'angolo giro. Insomma si calcolano contemporaneamente i momenti di inerzia I_a, I_b, I_c, I_d rispetto ai 4 assi a, b, c, d rappresentati in figura, inclinati di multipli interi di $\frac{\pi}{4}$.

Sempre rispetto a una lunghezza iniziale unitaria, mettiamo in una tabella i quadrati delle distanze dai baricentri delle sottoparti agli assi di calcolo *[la trovate qui di fianco]*:

Distanza al quadrato	a	b	c	d
B_0	$\frac{1}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{2}{100}$
B_1	$\frac{1}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{2}{100}$

Tenendo conto del rapporto tra le sottoparti e la figura intera che è di $\frac{1}{2}$ per la massa e di $\frac{\sqrt{2}}{2}$ per la lunghezza, abbiamo ad esempio che il momento I_{a_0} di D_0 rispetto ad un asse a_o parallelo alla propria base $\overline{P_0Q}$ è pari a $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot I_a=\frac{1}{4}\cdot I_a$ e così via. Tenendo conto anche delle angolazioni degli assi abbiamo ad esempio

$$\begin{aligned}
&I_a(D)=I_a(D_0)+I_a(D_1)\\
&=I_{d_0}(D_0)+d(B_0,a)^2\cdot\frac{m}{2}+I_{b_1}(D_1)+d(B_1,a)^2\cdot\frac{m}{2}\\
&=\frac{1}{4}I_d+\frac{1}{4}I_b+\frac{1}{100}\cdot l^2\cdot m
\end{aligned}$$

e in definitiva un sistema lineare di 4 equazioni nelle 4 incognite:

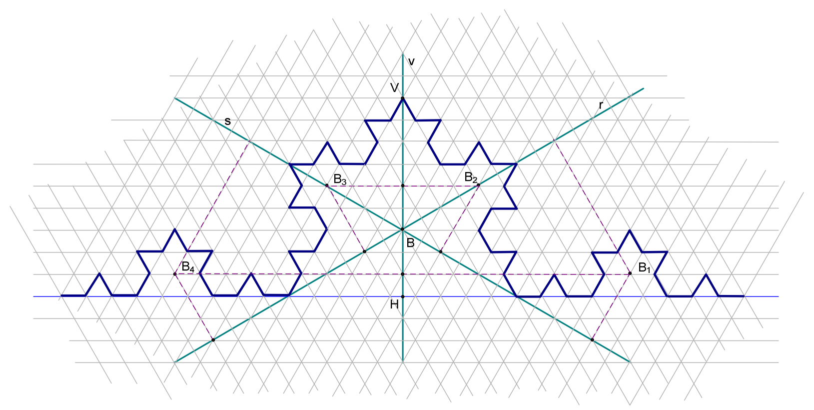
$$\begin{cases}
I_a=\frac{1}{4}I_d+\frac{1}{4}I_b+\frac{1}{100}\cdot l^2\cdot m\\
I_b=\frac{1}{4}I_a+\frac{1}{4}I_c+\frac{8}{100}\cdot l^2\cdot m\\
I_c=\frac{1}{4}I_b+\frac{1}{4}I_d+\frac{9}{100}\cdot l^2\cdot m\\
I_d=\frac{1}{4}I_c+\frac{1}{4}I_a+\frac{2}{100}\cdot l^2\cdot m
\end{cases}$$

Che, risolto, dà

$$\begin{aligned}
I_a&=\frac{6}{100}\cdot l^2\cdot m & I_b&=\frac{13}{100}\cdot l^2\cdot m\\
I_c&=\frac{14}{100}\cdot l^2\cdot m & I_d&=\frac{7}{100}\cdot l^2\cdot m
\end{aligned}$$

Il fatto che $I_a+I_c=I_b+I_d=\frac{1}{5}\cdot l^2\cdot m$, come il momento di inerzia già calcolato rispetto ad un asse per il baricentro e perpendicolare al piano, non è un caso, ma una simpatica proprietà, che è valida per la somma dei momenti di inerzia di assi ortogonali in una figura piana, basta applicare il più famoso dei teoremi alla formula di definizione del momento di inerzia.

Curva di Koch



23 *Curva di Koch*

Si prende un segmento di lunghezza *l*, lo si divide in tre parti uguali e si costruisce un triangolo equilatero sul segmento centrale. Sui due nuovi lati e sulle due parti estreme del segmento iniziale si costruisce una curva di Koch.

Usando l'auto-similarità si costruisce l'equazione che determina la collocazione verticale del baricentro. Risulta essere a un terzo dell'altezza, come in un triangolo. Si rappresenta il tutto molto bene, questa volta su una carta a triangoli equilateri (più difficile da reperire).

Per determinare il momento di inerzia rispetto all'asse di simmetria v, analogamente alla curva del drago, possiamo tracciare altri due assi r ed s angolati di $\frac{\pi}{3}$ rispettivamente a destra e a sinistra di v. Le distanze dei baricentri delle 4 sottoparti dagli assi risultano essere tutti multipli interi di $\frac{l}{9}$. Vista la simmetria della figura, $I_r = I_s$ per cui alla fine si può risparmiare sull'equazione e il sistema lineare viene a due equazioni e due incognite … nel caso qualcuno voglia cimentarsi.

…e qui finirebbe la trattazione, non fosse che il Nostro ***Franco57*** *ha sentito necessità di un approfondimento. Infatti, per una diversa (lui dice cattiva, noi siamo di altra opinione, dato il risultato…) interpretazione del secondo quesito di RM134, ha scoperto casualmente anche una "notevole proprietà" sui momenti di inerzia, che separiamo come nuovo capitolo.*

8.2 Una condizione di invarianza del momento di inerzia.

Se un corpo ritorna in sé stesso ruotandolo attorno ad un asse di una frazione intera maggiore di 2 di angolo giro, allora il suo momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il baricentro e perpendicolare a quell'asse è costante. È curioso che la proprietà sia falsa in generale per corpi che tornano in sé stessi con una rotazione di metà di un angolo giro, ad esempio un bastone che torna nella stessa posizione dopo mezzo angolo giro.

In particolare per le figure piane che ritornano in sé stesse se ruotate di frazioni intere maggiori di 2 di angolo giro, come il triangolo di Sierpinski, il momento di inerzia per un asse complanare e passante per il baricentro è costante.

Per dimostrarlo è sufficiente provare che su un piano la somma dei quadrati delle distanze dai vertici di un poligono regolare a una retta *b* passante per il suo baricentro è costante.

Infatti possiamo vedere il corpo come l'unione di masse infinitesime disposte sui vertici di un poligono regolare per un piano perpendicolare all'asse di rotazione. Proiettiamole sul piano parallelo e passante per il baricentro del corpo. Il quadrato della loro distanza dall'asse di calcolo si può separare, per il teorema di Pitagora, in una componente lungo l'asse di rotazione, uguale per tutte, ed una perpendicolare ad esso che riguarda quindi solo il quadrato della distanza delle loro proiezioni.

Ecco la dimostrazione. Rappresentiamo gli $n>2$ vertici come numeri complessi, prendendo *b* come asse delle ascisse e il baricentro come origine degli assi. Se il primo punto che si incontra ruotando *b* in senso antiorario si trova sotto un angolo α e i punti sono ad una distanza *r* dal baricentro, allora la somma dei quadrati delle distanze da *b* vale

$$r \cdot \sum_{0 \le k < n} \sin^2 \alpha_k \quad \text{dove } \alpha_k = \frac{2\pi}{n} \cdot k + \alpha \text{ per ogni } k,\ 0 \le k < n$$

Posto $z_k = \cos\alpha_k + i \cdot \sin\alpha_k = e^{i\alpha k} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}k}$, abbiamo $z_k{}^n = e^{i\cdot\alpha n} \cdot e^{i\cdot 2\pi k} = e^{i\cdot\alpha n}$. Le z_k sono quindi le *n* soluzioni dell'equazione $z^n - e^{in\alpha} = 0$. Considerando che $n>2$ possiamo scrivere:

$$z^n - e^{in\alpha} = \prod_{0 \le k < n} (z - z_k) = z^n + \left(\sum_{0 \le k < n} z_k \right) \cdot z^{n-1} + 2 \cdot \left(\sum_{0 \le h < k < n} z_h z_k \right) \cdot z^{n-2} + \dots - e^{in\alpha}$$

e quindi

$$\sum_{0 \le k < n} z_k = \sum_{0 \le h < k < n} z_h z_k = 0 ,$$

da cui

$$\sum_{0 \le k < n} {z_k}^2 = \left(\sum_{0 \le k < n} z_k \right)^2 - 2 \cdot \left(\sum_{0 \le h < k < n} z_h z_k \right) = 0 \ .$$

Poiché $\sum_{0 \le k < n} {z_k}^2 = \sum_{0 \le k < n} e^{2\alpha_k}$ la parte reale, che deve essere nulla, vale:

$$\sum_{0 \le k < n} \cos(2 \cdot \alpha_k) = \sum_{0 \le k < n} \left(1 - 2 \cdot \sin^2 \alpha_k\right) = n - 2 \cdot \sum_{0 \le k < n} \sin^2 \alpha_k$$

da cui $\sum_{0 \le k < n} \sin^2 \alpha_k = \frac{n}{2}$ e quindi la somma dei quadrati delle distanze vale $r \cdot \frac{n}{2}$ indipendentemente da α .

…bene, ora tutto è molto più chiaro. Come abbiamo avuto modo di dire, se vi piacciono questi problemi ne abbiamo altri provenienti dallo stesso girone infernale. E se siete arrivati sin qui possiamo dirvelo: tenete d'occhio quelli del mese prossimo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms