Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 133 – Febbraio 2010 – Anno Dodicesimo

I $\left(x^2+\frac{9}{4}y^2+z^2-1\right)^3-x^2z^3-\frac{9}{80}y^2z^3=0, \quad x,y,z\in\left[-3;+3\right]$

Math!

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM132 ha diffuso 2538 copie e il 31/01/2010 per Google eravamo in 10'100 pagine.

Buon San Valentino!

1. Carte Quarantotto

«Tutti gli esseri umani nascono liberi
ed eguali in dignità e diritti.
Essi sono dotati di ragione e di coscienza
e devono agire gli uni verso gli altri
in spirito di fratellanza.»

(Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo,
Articolo Uno)

La camicia non è insolita, tutt'altro. Celeste pallido, e il colore tenue non è dato tanto dal colore poco carico quanto dall'alternarsi ordinato dei quadratini bianchi e colorati, come in quadro di Seurat o dei divisionisti italiani. Camicia che appartiene all'insieme delle camicie classiche e poco pretenziose, da supermercato o mercato rionale, sempre rimaste uguali dagli anni Sessanta fino ad oggi. O almeno fino al Luglio del 1996, che è quando quell'azzurro pallido è rimasto impressionato sul film della telecamera. Più del pallido *pied-de-poule*, comunque, rimane impresso l'ultimo bottone di quella camicia: è ordinatamente chiuso, al pari di tutti gli altri, cosa insolita quando la camicia è orfana della giacca e soprattutto della cravatta. Quel bottone, quando è ben chiuso, rimane di solito nascosto dal nodo, al sicuro nell'asola: viceversa si palesa slacciato, aperto, con un'aria un po' smargiassa e un po' libertaria quando la cravatta non c'è. Vederlo invece così, naturalmente chiuso senza l'alibi del colorato pezzo di stoffa che chiude i colli maschili, è appunto insolito, quasi un po' fuori tempo, ormai.

Del resto, sembra fuori tempo anche il volto che parla: non sorride spesso, almeno all'inizio dell'intervista, ma quando lo fa è un sorriso davvero bonario, quasi complice, quello che rivolge all'obiettivo. Lo si vede sorridere e si sospetta che il vecchio proprietario di quel sorriso sia, in fondo, un gran timido; però è un piacere sentirlo parlare, anzi sentirlo raccontare, e osservarlo nei pochi gesti che fa, muovendo di tanto in tanto i pochi oggetti che tiene sul suo tavolo pisano. Soprattutto quel sottile plico marrone chiaro, ancora chiuso nel cellophane, che ogni tanto agita e muove sulla scrivania, quasi fosse lì che si annida il filo del discorso: o forse solo perché sente la mancanza del gesso. Non dev'essere facile parlare ad una telecamera invece che ad una classe di studenti; non dev'essere facile restarsene seduto, a mani vuote di gesso, quando si parla a lungo di matematica.

Se a vederlo colpiscono il bottone e il sorriso, a sentirlo colpisce lo spessore della sua zeta. È una zeta sempre maiuscola, possente, dura. Anche sbagliata in molti fonemi, a dar retta alla fonologia italiana, che vuole le zeta ora dolci ora aspre, ora sorde ora sonore. Anche se l'ortografia non distingue tra la zeta di *razza* (umana) e la zeta di *razza* (pesce), le due *razze* sono diverse, perché diversi sono i suoni della duplice consonante. Un vanaglorioso ma innocente orgoglio fonetico serpeggia nelle scuole di dizione del centro Italia, che sostengono che solo in quelle regioni la zeta sia correttamente pronunciata, a meno di specifica correzione delle parlate locali: il Settentrione rende la zeta già dolce di "calza" troppo morbida, pronta a decadere in una specie di esse, quasi degradando la *calza* a *calsa*; dall'altro fronte, la zeta meridionale indurisce troppo l'indumento, vestendolo con la consonante aspra e sorda, e rendendolo così figurativamente inamidato alla pronuncia. E allora le zeta che il vecchio professore pronuncia sorridendo dallo schermo lo collocano subito molto a sud nello stivale, pur senza fargli attraversare lo stretto di Messina. Un sud profondo e, nonostante l'apparente contraddizione, molto orientale.

Quanto sono distanti politica e matematica?

Tantissimo, verrebbe da rispondere di getto, senza pensarci: poche cose sembrano più irrazionali della politica, e per contro non c'è forse nulla, al mondo, di più razionale della matematica. Ma a un'analisi più approfondita le certezze sembrano subito un po' meno granitiche: in fondo, il pitagorismo è stato una scuola filosofica importante, e ha avuto anche qualche riflesso nella gestione degli stati dell'antichità. Platone era certo un politico, oltre che filosofo, e certo applicava metodi in un certo senso "matematici" nel disegno della sua repubblica ideale. E poi, in generale, dietro e dentro la parola "politica" si cela un significato più nobile e profondo di quello che è veicolato dai giornali e telegiornali dei nostri tempi: politica è organizzazione e regolamentazione dei rapporti sociali, e quindi, in prima battuta, una disciplina umana di fondamentale importanza. È *politica* scegliere se vivere in una monarchia o repubblica, è *politica* preferire uno stato democratico ad uno assolutista; è *politica* immaginare un'organizzazione sociale che tenda a salvaguardare il reciproco rispetto piuttosto che stratificare la popolazione per classi, dai paria alla nobiltà. È *politica* decidere chi deve aver diritto alla vita, all'istruzione, alla salute, al lavoro, alla dignità; e se la risposta che riteniamo naturale all'ultimo quesito è uno scontato "tutti", significa solo che la *politica* che risiede nelle nostre teste non è più quella di qualche tempo fa: in altri tempi e in altri luoghi, neanche troppo lontana, quella risposta non era affatto scontata. Anzi.

Piuttosto curiosamente, c'è una teoria che lega in maniera sorprendente la matematica alla politica: è una teoria affascinante, e tutt'altro che assurda, non ci ricordiamo chi l'abbia avanzata per primo[1], ed è un peccato, perché è certamente meritevole di nota. Il punto essenziale della teoria è che la primitiva matematica occidentale, quella greca per intenderci, ha una caratteristica abbastanza peculiare rispetto alle altre "matematiche antiche", che pure hanno in qualche caso raggiunto risultati significativi: questa peculiarità è il concetto di *dimostrazione*. In genere, quando le altre culture scoprivano qualche proprietà interessante in aritmetica o in geometria la registravano, dopo averla verificata in più casi, ma senza preoccuparsi più di tanto di ottenere una dimostrazione rigorosa. Agli occhi di un matematico (ma a dire il vero non solo ai veri matematici moderni, ma anche ai comuni mortali frequentatori di scuole o lettori di prestigiose riviste di matematica giocosa), l'idea di sottoscrivere un risultato matematico solo perché "vero in molti casi" suscita orripilazione e raccapriccio; ma questo è frutto proprio della nostra formazione alla greca. Del resto, qual è il vero ruolo della dimostrazione? Perché associamo così strettamente i concetti di verità e di dimostrazione? Soprattutto, perché questo principio non era altrettanto diffuso presso le altre culture antiche? Una possibile risposta è che la maggior parte delle società antiche si basava sul *principio di autorità*: quel che diceva il sovrano non si discuteva, e il principio informatore si propagava felicemente intatto lungo tutta la piramide gerarchica sociale. Il popolo non discuteva quel che dicevano i nobili, gli schiavi non mettevano in discussione quel che dicevano i padroni, e nessuno osava mettere in dubbio l'interpretazione che i sacerdoti davano del volere degli dei. In una tale situazione, è del tutto naturale delegare agli "esperti", di qualunque tipo essi fossero, il concetto di verità, senza bisogno di altri tipi di convincimento. Così, se il numerologo di corte sostiene che una circonferenza vale esattamente tre volte il diametro del cerchio, a che vale metter in dubbio l'affermazione?

Nell'antica Grecia, però, i rapporti sociali non sono sempre così gerarchici e autoritari: in molte città, Atene su tutte, il governo dello stato è affidato all'assemblea dei cittadini liberi, e le cariche amministrative sono regolamentate da elezioni. Questa situazione

[1] Noi l'abbiamo sentita citare da Lucio Russo, matematico, filosofo e storico della matematica, durante un ciclo di trasmissioni radiofoniche (*Alle Otto della Sera*, ciclo "Le Radici della Scienza", andata in onda su RadioDue. La trasmissione "*Alle Otto della Sera*" da pochi mesi non esiste più, e per quel poco che conta il nostro parere, siamo furibondi con la Rai per questo). Russo con ogni probabilità ha citato l'autore della teoria, ma a noi è sfuggito, o ce lo siamo colpevolmente dimenticato: sono comunque assai interessanti, anche se talvolta controverse, le stesse teorie di Russo, ben riportate nella sua opera principale, "*La rivoluzione dimenticata*", in cui parla dei sorprendenti livelli raggiunti dalla scienza nel periodo ellenistico. (Feltrinelli 1996, ISBN 9788807816444).

particolare azzera il principio di autorità, ed esalta la dialettica: i candidati che si propongono all'assemblea si confrontano e contrappongono portando argomenti, ed esponendoli a tutti i loro pari: questi non sono tenuti a dar credito ai candidati – e di conseguenza non sono tenuti a dar loro il voto – a meno che non siano davvero convinti della sincerità e validità delle loro affermazioni. È la nascita della dialettica, dell'esposizione retorica, della logica espositiva: le argomentazioni devono essere convincenti, condivise, comprensibili a chiunque possegga orecchie e intelletto sufficienti ad intendere il greco e le regole del discorso. In quest'ambiente, non c'è dichiarazione che possa essere accettata gratuitamente: è la necessità logica che rende l'orazione convincente, e su questa falsariga potrebbe nascere il concetto di dimostrazione matematica. Non è sufficiente vedere che esistono moltissimi numeri primi, non basta che, avendo la giusta pazienza, se ne possano scoprire sempre di nuovi, per poter affermare che sono infiniti: ci vuole un'argomentazione di natura diversa, inattaccabile e logica, che mostri *l'inevitabilità* della loro infinità, altrimenti il cittadino greco, restio all'autorità, tenderà a non credere. Per questo Euclide non si limita ad enumerare una pletora di primi, ma inventa la sua splendida dimostrazione per assurdo. Vera o meno che sia, la teoria affascina, perché lega a doppio filo matematica e democrazia, in maniera del tutto inaspettata: anzi, di solito si fa presente proprio il contrario, ovvero che la verità matematica non può certo essere stabilita per acclamazione o a maggioranza: se anche tutti gli uomini votassero a favore dell'esattezza di 1+1=3, quest'unanimità non renderebbe l'espressione meno sbagliata[2]. Sembra invece che la matrice democratica della matematica, se davvero esiste, sia ben più profonda e meno ovvia: non si potrà decidere a maggioranza sulla verità di un'equazione, ma la forza della matematica di mostrarsi come portatrice di verità potrebbe provenire proprio dalla necessità di considerare gli uomini tutti uguali, tutti con pari dignità giudicante.

Guarda caso, dietro il colletto chiuso della camicia, dietro le dure zeta salentine e dietro il sorriso affabile da sessantottenne, sembrano proprio i fondamenti della matematica, la dignità umana e la ricerca della sapienza i punti centrali dell'interesse dell'uomo che parla dallo schermo televisivo. È stato Michele Emmer a portare la telecamera in quello studio della Scuola Normale di Pisa: grazie alla sua delicatezza di matematico e alla sua abilità di regista, Michele riesce a far scomparire dal campo visivo tutti gli strumenti dell'intervista: non si vedono luci né cavi, non si immagina la creazione d'un set né alcuna azione preparatoria, logistica. Ci si figura quasi solo la deposizione della camera sulla scrivania, a fare da testimone muto, e l'invito parimenti non detto a raccontare. Certo non sarà andata così: ci vuole molta abilità per far scomparire tutto ciò che deve scomparire, per mettere in risalto ciò deve rimanere, solo, al centro della scena. Con riservatezza quasi eccessiva, Emmer decide non solo di non mostrare altro che l'intervistato, ma perfino di far sparire anche la voce dell'intervistatore. Non si sentono pronunciare domande, prima delle risposte; nella sublimazione dell'invisibilità, spariscono perfino i punti interrogativi, da sempre protagonisti assoluti di ogni normale inchiesta. Ma questa non è un'inchiesta e non è in fondo neanche un'intervista: brevi fotogrammi introdurranno sullo schermo i temi affrontati: matematica e realtà, matematica e creatività, e didattica, e computer, e linguaggio, intuizione, ambiente; il tutto senza rubare spazio e suoni al grande vecchio seduto di fronte all'obiettivo. Lui, camicia allacciata fino all'ultimo bottone, sorriso timido e scrivania sgombra, parla di sé e di matematica.

Ennio De Giorgi nacque a Lecce l'8 Febbraio 1928: fosse ancora vivo, celebrerebbe a giorni il suo ottantaduesimo compleanno, il che ce lo rende davvero vicino e contemporaneo. Il padre, insegnante di lettere, morì che Ennio aveva appena due anni. Frequentò il liceo classico a Lecce, poi si iscrisse ad Ingegneria a Roma: dopo il primo

[2] Sbagliata, naturalmente, se si mantengono validi gli usuali assiomi fondativi dell'aritmetica tradizionale. Non è certo impossibile immaginare sistemi, matematici o meno, in cui 1+1=3 abbia una sua propria autentica validità, senza dover chiamare necessariamente in causa il simultaneo impazzire di tutta la razza umana (e anche senza dover citare il solito malizioso esempio della riproduzione sessuata).

anno passò a Matematica, e si laureò con quel gran nume della matematica italiana che era in quegli anni Mauro Picone; a partire dal 1951, a ventitré anni, iniziò la sua carriera accademica come suo assistente. Alla corte di Picone stavano quasi tutti i maggiori analisti italiani dell'epoca; tra questi brillava la stella di Caccioppoli, che proprio in quei tempi sviluppava e teneva seminari sulla sua teoria della misura. De Giorgi, influenzato da questi studi, ottenne i primi risultati di rilievo nella teoria dei perimetri: da qui riuscì a dimostrare, nel 1958, che tra tutti gli insiemi di perimetro assegnato l'ipersfera ha il massimo volume n-dimensionale. Ma già tre anni prima aveva portato un controesempio all'unicità di soluzioni regolari del problema di Cauchy dell'equazione differenziale alle derivate parziali con coefficienti regolari[3], pubblicazione che lo aveva reso noto a livello internazionale.

1 *Ennio De Giorgi*

Tra il 1955 e il 1957, Ennio De Giorgi dimostra la continuità hölderliana delle soluzioni delle equazioni ellittiche con coefficienti misurabili e limitati anche in presenza di discontinuità dei coefficienti[4]. In buona sostanza, questo significa risolvere definitivamente il XIX Problema di Hilbert, quello che si può riassumere nella domanda "*le soluzioni delle lagrangiane sono sempre analitiche?*", che era in agenda alla comunità matematica mondiale dal 1900, e la cui soluzione era stata solo parziale.

Risultati di valore assoluto, definitivo, ottenuti ben prima dei trent'anni di età: basterebbero da soli a consegnarlo alla storia della matematica. Ma dal punto di vista della produzione scientifica, Ennio De Giorgi ha ancora molto da dire, e il suo valore non si limita alla produzione davvero eccezionale degli anni Cinquanta: studia le isosuperfici di area minima, deduce un'estensione alla dimensione tre del teorema di Bernstein: a partire da questo risultato James Simons estende le conclusioni alle dimensioni sette ed otto: di nuovo De Giorgi, insieme a Bombieri, mostrerà poi che la soluzione di Simons è anche minima[5]. Negli anni Settanta, poi, Ennio De Giorgi è tra i fondatori della G-Convergenza[6].

Per capire l'importanza del lavoro di De Giorgi, forse è più semplice riassumere i premi e le onorificenze che ha ricevuto, e quelle che lo hanno sfiorato. Sfiorato davvero: il suo teorema più importante è identico, o quasi, a quello che ha reso famoso John Nash, l'eroe di "*A Beautiful Mind*", premiato con il Nobel; Enrico Bombieri, che in molti lavori ha collaborato con De Giorgi, è tuttora l'unico italiano ad essere stato premiato con la Medaglia Fields. Ma non sono da meno i premi che De Giorgi ha vinto in prima persona: innanzitutto il prestigiosissimo Premio Wolf, nel 1990; nessun altro matematico italiano è nell'albo d'oro. Poi, il Premio Caccioppoli dell'Unione Matematica Italiana, nel 1960; o il premio del Presidente della Repubblica dell'Accademia dei Lincei; o la Laurea Honoris Causa in Matematica della Sorbona di Parigi, l'iscrizione alle Accademie delle Scienze di Francia, degli Stati Uniti e dell'Accademia Pontificia. O la Laurea Honoris Causa in Filosofia che gli tributò la sua Lecce, che lo rendeva particolarmente orgoglioso.

[3] Vedi nota successiva.

[4] Per questa, per la nota precedente e anche per la successiva, ci auguriamo vivamente che siate in grado di immaginare da soli il significato delle espressioni. Chi redige queste note è lontanissimo dal farlo.

[5] Vedi nota precedente.

[6] Vedi note 3, 4 e 5. E adesso la smettiamo, promesso: resta comunque ben evidente come sia ormai difficile, in questo XXI secolo, anche solo provare a parlare – per titoli! – del progresso della matematica moderna.

Di tutto questo, seduto alla scrivania del suo studio alla Normale di Pisa, dove per quarant'anni ha tenuto la cattedra di Analisi Matematica, Algebrica e Infinitesimale, Ennio De Giorgi non parla. Inquadrato dalla telecamera di Emmer[7] parla pochissimo di sé, e molto di matematica. E anche di altro.

"*È un peccato che matematici, fisici e ingegneri siano adesso divisi, fin dal primo anno d'università*"[8] – dice il vecchio professore. Forse pensa a quando iniziò lui, al suo passaggio da ingegneria a matematica, o più probabilmente, alla necessità di avere amicizie da frequentare e coltivare tra persone che hanno interessi simili anche se non perfettamente coincidenti. C'è sempre tempo per prendere specializzazioni diverse, più tardi. La necessità di condividere interessi e amicizia torna spesso, nelle sue parole: arriva perfino a dire che "*risolvere un problema matematico senza avere un amico con cui discuterne significa perderne gran parte del valore*". Le prime osservazioni dovrebbero essere in merito al rapporto tra matematica e realtà, ma il professore leccese, curiosamente, racconta di questa relazione in maniera quanto mai originale, trasversale. È quasi scontato aspettarsi il solito panegirico sulla natura descrivibile in termini matematici, o sulle mille applicazioni della matematica alle scienze fisiche, invece Ennio vola molto più in alto. Cita il biblico Libro dei Proverbi, dicendo che "*la Sapienza ama farsi trovare dagli uomini che la amano*", e non c'è dubbio che per lui la ricerca matematica è anche, costantemente, parte della ricerca più ampia della sapienza. E sottolinea come sia in realtà proprio l'immaginazione l'arma essenziale per scoprire i segreti della natura, e in questo la matematica è favorita rispetto alle altre discipline perché consente, a differenza delle altre, di esercitare l'immaginazione sia nelle cose visibili sia in quelle invisibili. Questo non toglie che la stupefacente capacità della matematica di descrivere la natura sia, appunto, molto sorprendente: ma forse è ancora più stupefacente che "*il teorema di Pitagora resti valido anche negli spazi ad infinite dimensioni di Hilbert*".

Parlando di "realtà" De Giorgi mostra che pochi termini sono più soggettivi, nonostante l'apparente iper-oggettività della parola. L'immagine più colorita che riesce a dare di "matematica e realtà" è una fotografia, quasi un'idea platonica di convivialità: tutti insieme, l'intera comunità accademica o più generalmente matematica, seduti virtualmente allo stesso tavolo (scrivania o tavola imbandita?) "*con la libertà di potere immaginare e lavorare autonomamente sulle idee che ognuno preferisce*". Lega le immagini della realtà a quelle dell'ambiente matematico, e il tema non cambia: si dichiara grato a Picone che, anche se professore d'altri tempi, con tutta la carica accademica che allora era richiesta ad un barone universitario, si mostrava assai liberale in ambito scientifico, e riconosceva la piena uguaglianza di opinioni di fronte alla scienza, dal più famoso degli studiosi all'ultimo degli studenti. Di nuovo un principio etico, sociale, politico, che entra nel discorso che dovrebbe essere solo di matematica: discorso che, se si accettano le dovute premesse sul ruolo della matematica come parte della Sapienza[9], diventa effettivamente un discorso davvero di pura matematica. Anche quando il tema di sposta sulla creatività matematica, il leit-motiv continua a tornare: è necessaria la predisposizione al sogno: "*pensate con grande libertà, poi sforzatevi di comunicare nella*

[7] Come si è certamente già capito, la fonte principale di quest'articolo è l'intervista che Michele Emmer fece a Ennio De Giorgi nel Luglio 1996. Il DVD, della durata di 68 minuti, coperto dal copyright dello stesso Michele Emmer e dell'UMI, Unione Matematica Italiana, è probabilmente ancora in commercio.

[8] Da qui in avanti, si intende che le frasi riportate tra virgolette sono pronunciate effettivamente da Ennio De Giorgi durante la registrazione del filmato. Ciò non di meno, quello che si riporta è il senso della frase, e non la riproduzione esatta delle parole, per il semplice fatto che l'autore dell'articolo si è limitato a prendere appunti a mano durante la visione del film; non abbiamo (e non abbiamo riprodotto) lo script esatto delle affermazioni del grande matematico. Il virgolettato va quindi inteso in questo senso lato, e non nel senso canonico di riproduzione esatta e meccanica delle frasi. Naturalmente, tutti gli eventuali errori nel riportare i concetti sono da attribuire a noi, e certo non a Michele Emmer o addirittura a De Giorgi.

[9] In qualche modo, ogni volta che De Giorgi pronuncia la parola "sapienza" sembra di sentire l'iniziale maiuscola.

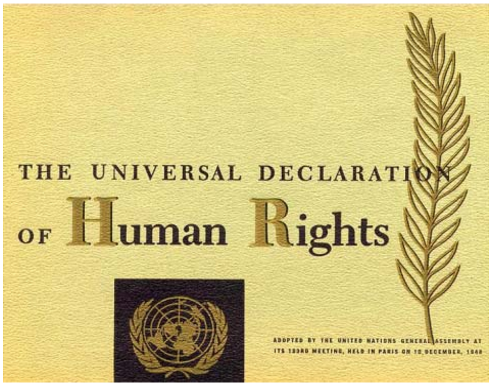
forma giusta". Come dire che la libertà di pensiero è indispensabile alla creazione, e che la libertà e l'efficienza della comunicazione sono essenziali alla diffusione della conoscenza.

Per De Giorgi, uno dei ruoli della matematica è quello di "*ordinatrice delle altre scienze*". Il metodo assiomatico è una conquista universale, che dovrebbe essere estesa anche alle altre discipline, non solo a quelle scientifiche. La ricerca degli assiomi è una componente fondamentale per ogni scienza, per ogni materia e organizzazione. Dagli assiomi, poi, sarà facile far discendere il resto, ma a quel punto la natura della disciplina sarà già identificata, compresa, circoscritta, senza rischio di sbandamenti. Non solo, ma l'assiomatizzazione renderà possibile anche una migliore comunicazione: l'eccesso di specializzazione è dannoso, le conquiste essenziali di ogni tipo di conoscenza dovrebbero essere messe a disposizione di ogni uomo intellettualmente curioso dotato di normali capacità intellettive. I teoremi di Gödel, ad esempio, hanno un'importanza culturale generale che non deve rimanere ristretta alla sola matematica; e se sembra troppo difficile veicolarne il contenuto a causa dell'eccesso di tecnicismi, è importante sforzarsi per fare in modo che il nocciolo della scoperta sia trasmissibile anche fuori dall'ambiente specialistico. Dire che "*non possiamo descrivere tutte le caratteristiche dei numeri naturali*" non ha certo la pretesa di spiegare pienamente il contenuto dei Teoremi di Incompletezza, ma è un'informazione importante, significativa, e che può comunque essere (anzi, che *deve* essere) comunicata anche al di fuori dell'ambito matematico.

E le parole scorrono, nell'ora abbondante del DVD. Il plico marrone sigillato, che probabilmente contiene una rivista accademica ancora da leggere, si sposta e si muove in continuazione sulla scrivania, mentre Ennio parla del ruolo di matematica e computer ("*Ah, è certo utile per chi lo sa usare con sicurezza e libertà, o perlomeno per chi ha amici che lo sanno usare con sicurezza e libertà,*" – e qui un sorriso che degenera quasi in una piccola risata – "*diventa dannoso solo se diventa un sostituto della fantasia. Ma è anche fonte di nuove idee, di nuovi problemi, nel senso buono del termine*"), di matematica e linguaggio ("*Le note matematiche dovrebbero essere scritte in buon italiano, se non vogliamo che l'italiano si atrofizzi come lingua scientifica. Sarebbe bene conservare la letteratura scientifica come letteratura linguisticamente bella: e questo farebbe bene anche all'inglese, perché quella lingua rischia l'impoverimento, se tutto viene scritto solo in inglese da persone che lo conoscono male*"), di matematica e divulgazione scientifica ("*Bisognerebbe alternare agli studi su problemi particolari anche presentazioni di problemi generali, come le riflessioni dal particolare al generale, dallo storico al moderno*"), e poi di storia, di storicismo, di metastoria. La sua timidezza si legge benissimo dietro il sorriso quando deve suggerire qualche sua idea personale, qualche suo convincimento non dimostrabile, ma fortemente sentito. Nel discettare sull'eterno quesito se la matematica sia più un'invenzione o una scoperta, il vecchio professore ha una strana posizione intermedia: non idealista come Hardy, non operazionista come Bridgman, Ennio intravede uno strano compromesso. Un teorema, il suo enunciato, è un oggetto che si scopre, dice De Giorgi: "*sta lì, in attesa d'essere scoperto*"; la sua dimostrazione, invece, è pura costruzione, pura invenzione. Per questo esistono dimostrazioni diversissime dello stesso enunciato, raggiungibile talvolta anche per strade concettuali apparentemente del tutto disgiunte. E sorridendo cita i percorsi paralleli e diversi che lui e Nash hanno fatto per giungere alla stessa conclusione, e anche il fatto che, di solito, le prime dimostrazioni di un teorema sono complesse e farraginose, e subito dopo la pubblicazione si riescono a trovare altri metodi dimostrativi più facili e lineari. La verità deve essere raggiunta, ma per arrivarci si possono usare diversissimi mezzi di trasporto[10].

[10] L'avessimo saputo per tempo, avremmo usato De Giorgi come nume tutelare ogni volta che manifestavamo la nostra delizia nel ricevere soluzioni diverse (in metodo) allo stesso problema. Nella stessa intervista, Ennio racconta che da giovane si dilettava molto a cercare dimostrazioni diverse dei teoremi da quelle che gli presentavano i libri di testo.

Quando si passa a parlare d'insegnamento della matematica, il vecchio professore della Normale non cessa di sorprendere. Comincia con una battuta "*André Weil sosteneva che occorresse insegnare poca matematica e molto sanscrito…*", ma poi articola meglio la sua idea, che in fondo è un ulteriore sviluppo della sua affezione verso la convivialità[11]. "*Nello studio universitario ci dovrebbe essere un spazio non trascurabile, dell'ordine del dieci o venti per cento del tempo globale, destinato allo studio degli argomenti che attraggono lo studente in modo del tutto disinteressato. Non solo argomenti attinenti al corso di laurea, anche del tutto generali o diversi. Sennò lo studente finisce col pensare solo alle cose obbligatorie, non a quelle che piacciono per puro amore della Sapienza*"; è un'idea forte e rivoluzionaria, del tutto orientata verso un'immagine della cultura lontanissima dall'eccesso di specializzazione che è invece fortemente presente anche e soprattutto al giorno d'oggi. Ennio De Giorgi ne era verosimilmente ben conscio, perché l'argomento lo interessa, e ci torna sopra: *"Perfino in Normale quest'offerta è limitata; e lo studente stesso di solito preferisce un binario ben prestabilito, rassicurante. Bene, l'80% del tempo è giusto che sia organizzato così, ma per il restante 20%... ci vorrebbe una sorta di "corso-avventura", dove persino il docente non sappia dove si andrà a parare".* Ed è nel parlare di corsi-avventura, di interessi non prestabiliti e pilotati, di cultura nel senso più ampio del termine, che emerge il De Giorgi che resta maestro, anche quando non insegna matematica: "*Ci vorrebbe poi un corso che si preoccupasse di insegnare i Diritti Umani. Anzi, più ancora che un corso servirebbe che la Dichiarazione dei Diritti dell'Uomo fosse distribuita a tutti, docenti e studenti dal primo all'ultimo anno, e che periodicamente ci fossero incontri, seminari, assemblee in cui questi principi vengano studiati, analizzati, discussi.*"



2 *La Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo*

Tutti gli esseri umani nascono liberi ed eguali in dignità e diritti. Comincia così la Dichiarazione Universale dei Diritti dell'Uomo[12]: e così prosegue per trenta articoli che stabiliscono, fissano, in un certo senso assiomatizzano quelli che dovrebbero essere i principi fondanti dei rapporti sociali. Era il dieci dicembre 1948 quando l'Assemblea Generale delle Nazioni Unite, riunita a Parigi, adottò la Dichiarazione. Era un'Assemblea ancora mutilata e scossa dalla guerra, e come tale capace di distinguere con nettezza le urgenze della storia dalle richieste transitorie del contingente; in grado di separare le cose importanti da quelle accessorie. E in quel millenovecentoquarantotto stabilire che nessun uomo aveva diritto di perseguire, prevaricare, sfruttare, violare, schiavizzare altri uomini era considerata cosa necessaria e urgente. Ennio de Giorgi coltivava un'attenzione sviscerata verso i diritti umani, e non perdeva occasione per pubblicizzare la diffusione della carta del dieci dicembre. Non era però solo una pubblicità passiva e comoda, quella che faceva: era membro attivo di Amnesty International, e nel 1973 si era impegnato a lungo, insieme a Lipman Bers e a Laurent Schwartz, per la liberazione del dissidente ucraino Leonid Plioutsch, finché questi tornò in libertà nel 1976. Quando racconta alla videocamera di Emmer della sua idea di diffondere presso gli studenti la Dichiarazione Universale, De Giorgi sembra spostare lo sguardo fuori dalla finestra, quasi ad ampliare la visuale l'orizzonte. Poco prima ha raccontato quanto gli fosse piaciuto dedicare un po' della sua attività di

[11] I suoi studenti raccontano che le sue lezioni erano spesso informali, al punto che talvolta professore e classe si trasferivano in blocco al vicino caffè, continuando a parlare di matematica seduti ai tavolini.

[12] Si trova facilmente in rete: http://www.ohchr.org/EN/UDHR/Pages/Language.aspx?LangID=itn

insegnamento in Africa[13], e adesso sembra quasi intimidito ad illustrare quale fosse il suo sogno più grande. Forse ripensa a quando, poco prima, parlava della necessità dell'amicizia ("*la tolleranza è fondamentale, ma non basta: è indispensabile che ci sia anche amicizia e comprensione, oltre alla tolleranza*"). Torna a guardare l'obiettivo, e quasi scusandosi per l'evidente enormità della cosa, lo illustra chiaramente e brevemente: "*Mi piacerebbe che la Costituzione della Repubblica Italiana facesse propria la Dichiarazione dei Diritti Umani. Invece di scrivere autonomamente alcuni articoli che parlano di diritti umani, non sarebbe meglio riportare integralmente la Dichiarazione Universale nella legge fondante dello stato? Sarebbe la prima nazione a farlo, e sarebbe un segnale importante, forte per tutto il mondo…*". È buffo: anche la Costituzione Italiana vede la luce nel 1948, al pari della Dichiarazione Universale. Uno strano modo di dire usa l'espressione "carte quarantotto", per illustrare il caso in cui qualcosa va a scatafascio, finisce in totale confusione e disordine; ma fuori dal luogo comune, tutte e due le "Carte Quarantotto" che abbiamo ricordato sono documenti fondamentali per il nostro vivere civile. Ennio doveva amare profondamente entrambe, per desiderare di vederle così strettamente legate.

Era un uomo religioso. Credeva in Dio e nella resurrezione ("*Posso dire di accettare tutte le proposizioni del Credo, soprattutto la resurrezione*"), perché pensava che la ricerca della Sapienza, alla quale si compiaceva di concorrere con le sue ricerche matematiche, avesse senso in quanto connessa alla grandezza divina ("*la sete di conoscenza è segno di un desiderio segreto di vedere qualche raggio della gloria di Dio*"), e gli sembrava che tutto questo non avrebbe avuto senso se non ci fosse una vita eterna ultraterrena.

Il film finisce, e lascia De Giorgi nel suo ufficio illuminato dal caldo sole del Luglio del 1996. Non sappiamo se i suoi interrogativi sulla vita eterna fossero sollecitati anche da una sua specifica e drammatica esigenza interna, ma resta il fatto che, crudelmente,il destino ha chiamato Ennio alla verifica delle sue convinzioni pochissimo tempo dopo quella giornata passata a parlare di matematica con Michele Emmer. Appena due mesi dopo, nel mese di Settembre, De Giorgi viene ricoverato all'ospedale di Pisa. Subisce diversi interventi chirurgici, che si rivelano comunque inutili. Muore in quell'ospedale il 25 Ottobre.

Cosa abbia scoperto, in quel suo ultimo giorno, non possiamo certo saperlo, e non abbiamo neanche intenzione di chiedercelo; possiamo solo augurargli di avere i suoi desideri pienamente soddisfatti. Quel che è sicuro è che, almeno per quel che riguarda questa vita breve e terragna, è consolatorio scoprire e conoscere, anche solo attraverso un film, una mente così brillante e curiosa, un genio così originale e modesto e, soprattutto, un uomo così attento alla salvaguardia e al rispetto della dignità dei propri simili.

[13] Su invito di Giovanni Prodi, per un mese all'anno dal 1966 al 1973, Ennio de Giorgi insegnava gratuitamente per una piccola università di Asmara, in Eritrea. Nel 1969 insegnò anche, per un certo periodo, in una scuola serale per adulti che intendevano prendere la licenza media.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Il cugino di Fibonacci			
Complicazione di un vecchio problema			

2.1 Il cugino di Fibonacci

Meno di pochissimi (anzi, meno di uno) testi di storia della matematica ricordano Liutprando Fibonacci, preferendo a lui il più famoso cugino (figlio di un fratello del padre, quindi il cognome è uguale); un aneddoto poco noto identifica Liutprando come il miglior matematico di famiglia, sostenendo che la serie di (Leonardo) Fibonacci non sia altro che una semplificazione della ben più complessa serie di (Liutprando) Fibonacci; con metodi che hanno sovente sfiorato il sottile confine della legalità, siamo riusciti ad impossessarci della copia di un manoscritto originale di (Liutprando) Fibonacci, e qui di seguito ve lo riassumiamo; prima, comunque, vi ricordiamo che la serie di (Leonardo) Fibonacci è definita come avente i primi due termini pari a uno, e ogni termine successivo ai primi due è definito come la somma dei due termini precedenti.

La serie di (Liutprando) Fibonacci parte genericamente da due termini a e b, ma definisce il valore assoluto di ogni termine come la somma del *precedente* e del *successivo* al termine che vogliamo calcolare; insomma, il terzo termine, sommato ad a, deve dare b (o meglio, il suo valore assoluto); non solo, ma (Liutprando) Fibonacci generalizza il concetto dai numeri interi ai reali, permettendo quindi un'ampia "serie di serie" (nel senso che ne fate quante volete).

Bene, l'anno scorso (per chi ci legge: mentre scriviamo, l'anno è agli sgoccioli) è stato dimostrato un interessantissimo teorema relativo alla serie di (Liutprando) Fibonacci, e ve lo poniamo come domanda: in funzione di a e b, quanto vale il termine di ordine 2009 della serie? E gli altri?

Se vi piacciono le espansioni, potreste provare a cercare qualche altra informazione su questo misconosciuto grande matematico…

2.2 Complicazione di un vecchio problema

…talmente vecchio, che risale al numero sei di questa rivista (ovverossia, all'altro millennio). Di recente, abbiamo trovato un'interessante complicazione; per gli archeologi, comunque, vi diamo la versione ridotta del vecchio problema: indentiamo e mettiamo in corsivo.

> *Alberto ha scommesso che, giocando tre partite alternativamente contro Rudy e Fred, ne vincerà almeno due di seguito; con che ordine deve giocare contro i due, sapendo che Rudy gioca meglio di Fred?*

Facile, vero?

Bene, ringalluzzito da questa facile vittoria, Alberto si è lanciato in un'epica sfida contro Rudy, sfidandolo a $2n$ partite, sostenendo che nell'epico torneo avrebbe vinto almeno $n+1$ partite.

Ora, in famiglia tutti sanno che le probabilità che Alberto ha di vincere contro Rudy (sia con i bianchi che con i neri) sono del 45%, quindi Rudy si sentiva un po' in colpa… Quindi, per favorire Alberto, gli ha permesso di "scegliere lui il valore di n".

Ora, quello che Alberto vorrebbe sapere, è quale valore di n massimizza le sue (misere) probabilità di vittoria…

Solo un *caveat*: nella nostra soluzione, verso la fine bisogna lavorare con Excel (o equivalenti… insomma, serve un attacco "forza bruta"), quindi, se ad un certo punto non ce la fate più, provate con qualcosa del genere.

3. Bungee Jumpers

1. Consideriamo tutti gli insiemi di n numeri positivi la cui somma è pari a un numero dato k. Provare che il prodotto dei numeri appartenenti a un insieme raggiunge il massimo quando i numeri sono uguali tra loro.

2. Dati n numeri positivi a_1, a_2, ..., a_n, provate che:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\geq n\,.$$

La soluzione, a "Pagina 46"

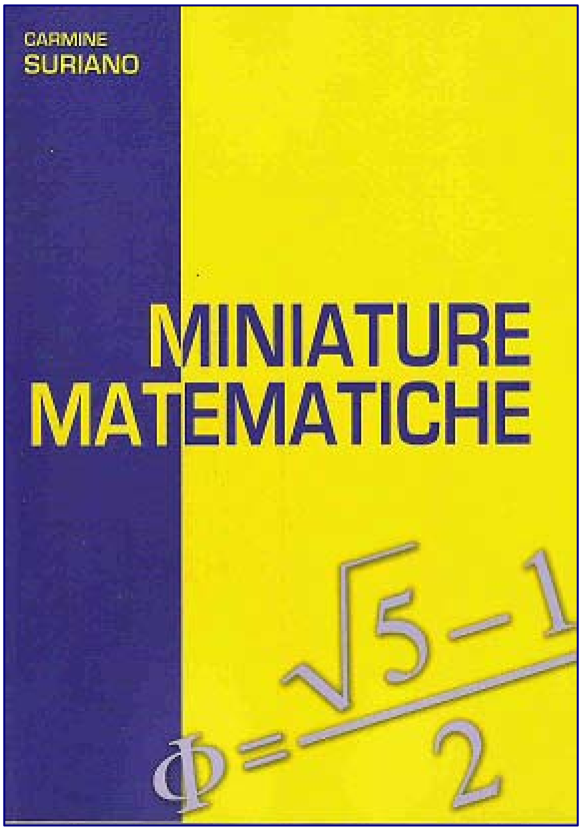
4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Forse è tempo di fare un po' di bilanci, per questa rubrica perché, scherzando e ridendo, già otto titoli sono passati attraverso queste pagine. A voler fare un minimo di classificazione, troviamo due titoli simili, di argomento simile e parallelo (*Flatlandia* e *Flatterlandia*), un libro di fisica (*Rudimenti di Meccanica Quantistica*), un fumetto (*Ultima lezione a Gottinga*), un testo di filosofia cognitiva (*Anelli nell'Io*), un paio più schiettamente di matematica ricreativa (anche se diversissimi tra loro: *I rompicapi del Doktor Morb* e *Rudi Ludi*), e infine un libro di biologia (*OGM tra leggende e realtà*).

Sappiamo cosa state pensando: che la matematica, pur entrandoci sempre, non c'entra pienamente quasi mai, in questa lista. Beh, a noi non sembra che sia vero, lo abbiamo già detto la volta scorsa: tanto più che stavamo seriamente considerando la possibilità di recensire a breve anche un romanzo. Comunque, tanto per fugare ogni dubbio, questo mese abbiamo deciso di presentarvi un libro che è inequivocabilmente e unicamente di matematica.

4.1 Miniature Matematiche

«…concretizza una trasformazione di energia, quella che mi pervade quando sono in compagnia dei numeri e che spero di riuscire, mediante una ulteriore metamorfosi, a trasmettere a voi creando un circolo virtuoso apparentemente in barba al secondo principio della dinamica…»



Carmine Suriano vive quasi in un punto triplo. Non proprio esattamente in un punto triplo, perché le regole amministrative non consentono di eleggere domicilio laddove confluiscono tre regioni geografiche, e anche perché in realtà il punto in questione dista ancora qualche decina di chilometri dalla sua residenza; ma se cercate sull'atlante il punto dove Puglia, Campania e Basilicata convergono, avrete una buona approssimazione dei luoghi che a Suriano sono familiari.

A Carmine piace la matematica. Lo sappiamo perché è un lettore di RM, perché ha un grande sponsor in un altro appassionato RMer[14], e anche perché la quarta di copertina di questo suo "Miniature Matematiche", oltre a raccontare della sua residenza, lo descrive laureato in Ingegneria Nucleare in quel di Torino. Certo non basterebbe questo a dar conto della passione della matematica di questo ingegnere foggiano non ancora cinquantenne, ma per fortuna è il libro stesso a farlo. Anche se si apre proprio con l'invito a "*non chiamarlo proprio libro*", il libro è tale, ne ha certo la piena dignità. Certo, non si tratta di un'opera organica, dello sviluppo unitario ed esaustivo di un tema, ma è indubbiamente un libro: libro di matematica, appunto.

Trenta capitoli, alcuni molto diversi tra loro, altri naturalmente collegati, altri ancora che sono collegati in modo tutto sommato inaspettato: a sentire l'autore, sono solo "*un pensare ad alta voce*", ma se ci si predispone a seguire il suo pensare si ritrovano, accanto a cose che probabilmente sono passate nella mente di tutti coloro che hanno studiato matematica (e che fa perciò particolare piacere ritrovare scritte), anche pensieri del tutto originali, o quantomeno insoliti, vie d'avvicinamento e approcci non banali. Il titolo dichiara apertamente che di collezione libera da vincoli strutturali si tratta, però che ci sia un ordine nascosto nella trama è rivelato in parte dalla copertina, per quanto semplice e diretta nella grafica, l'unica formula che vi campeggia non ha solo un compito accessorio e decorativo: quel "radice-di-cinque-meno-uno-mezzi" urla senza paura fin dall'inizio che Carmine Suriano è totalmente catturato dalla magia delle creature di Fibonacci e dal loro strettissimo parente, il rapporto aureo. A scorrere il sommario si

[14] Giorgio Kaniadakis, affezionato lettore di RM stanziato al Politecnico di Torino, si è preoccupato perché venissimo a conoscenza di quest'opera e del suo autore: nonostante la nostra buona volontà, non conosciamo per nome tutti coloro che hanno la bontà di leggere Rudi Mathematici.

vedono almeno sei titoli che richiamano esplicitamente i numeri di Leonardo da Pisa, ma quelli in cui entrano in un modo o nell'altro nel discorso, a prescindere dal titolo, sono molti di più. E, visto che si è parlato di sommario, forse la maniera migliore per inquadrare il libro è proprio mostrarlo direttamente, in modo che ognuno possa provare a riconoscere gli argomenti che più stuzzicano la fantasia:

SOMMARIO

Se c'è un appunto da fare al libro, è forse nascosto nella convinzione dell'autore che "…non richiede il possesso di abilità matematiche particolari: il bagaglio di conoscenze che si acquisisce nei corsi delle scuole medie superiori è senz'altro sufficiente"; forse la convinzione è un po' ottimistica, o al limite potrebbe essere meglio specificare "alcune" scuole superiori. Si citano limiti, serie, autovalori, Zeta di Riemann e polinomi di Tchebichev; c'è quindi la possibilità che Suriano, distratto dalla sua consolidata familiarità con l'argomento, non ricordi più quali sono i programmi ministeriali per le scuole superiori.

Ma è davvero un appunto d'ordine minore, e a ben vedere forse non è davvero un difetto. Se uno studente delle superiori leggesse un'ipotetica introduzione in cui fossero citati tutti gli aspetti matematici che sfiorano il libro, potrebbe spaventarsi all'idea di dover affrontare nomi e termini ostici e sconosciuti (del resto, "Tchebichev" è un nome davvero maledettamente difficile anche solo da pronunciare) e finire col rinunciare alla lettura.

Ma così facendo farebbe davvero un cattivo affare, e quindi è meglio che affronti la lettura, e affronti le poche difficoltà extra-liceali solo quando queste davvero entrano in gioco: il rischia sarà allora solo quello di esserne ulteriormente affascinati.

Titolo	Miniature Matematiche
Autore	Carmine Suriano
Editore	Edizioni del Rosone
Collana	Discipline Scientifiche
Data di Pubblicazione	Settembre 2009
Prezzo	15,00 Euro
ISBN	9-788887-514766
Pagine	215

5. Soluzioni e Note

Febbraio è un mese importante per RM, perché è proprio il mese in cui siamo nati.

Se queste poche righe introduttive fossero scritte dal Doc, ci sarebbero almeno due pagine di parole e circonvoluzioni per non dire esplicitamente ma tra le righe arrivare ad intendere che in qualche modo siamo giunti ad un numero storico. Forse toccherebbe argomenti complessi, come il genere di studi che un undicenne intraprende ed il passaggio tra le elementari e le medie, o le difficoltà di discernimento tra i salti di secoli, millenni, decenni, o ancora complicati conti che implicano multipli di dodici.

3 *Buon compleanno, RM.*

Se invece fosse il Capo a scrivere le note che state leggendo, vi avrebbe già dato dei caproni nelle prime due parole, per non aver capito da soli quello che non ha ancora detto, e avrebbe concluso – utilizzando qualche dotta ed oscura citazione di Lewis Carroll – che dopo undici anni di RM in ogni caso quello che ha da dire è decisamente al di là della vostra comprensione comunque.

Invece chi vi intrattiene è la povera Alice, che ha liquidato tutto in una riga sola, e l'avete già letta all'inizio... quindi chiudiamo questa minimale sezione celebrativa e vi ricordiamo che nei mesi che seguono ci saranno i compleanni di tutti i Redattori in sequenza, uno al mese: non dimenticate di farci gli auguri!

Ma bando alle ciance auto-incensanti, gennaio è stato mese cortissimo per quanto ci riguarda, perché RM132 è uscito molto tardi. Eppure c'è qualche nota da riportare. La prima è un'errata-corrige da parte del Capo, visto che ***Alberto R.*** ci ha scritto a proposito del BJ del mese scorso:

> Su Bungee Jumpers di RM 132, si propone il teorema di Fermat-Eulero. Mi ha colpito la semplicità e sinteticità della relativa dimostrazione esposta alla "pagina 46". Ho voluto approfondire e sono rimasto perplesso: leggo che "gli r numeri k_1a, $k_2a....k_ra$ quando vengono divisi per N danno un resto diverso". L'affermazione

sottolineata è cruciale, ma non è evidente e andrebbe dimostrata. Cosa certamente possibile, ma allora addio semplicità e sinteticità! O mi sbaglio?

Infine segnalo una piccola svista: il toziente di *N* non è *il numero dei naturali minori di N che non dividono N*, ma *il numero dei naturali minori di N primi con N*.

Ed ecco direttamente dalla tastiera del GC la risposta, nel suo classico stile accomodante:

Ne abbiamo combinata una (non due).

Tanto per cominciare, abbiamo ciccato la definizione di *Toziente*: non si tratta del numero dei numeri che non dividono il numero dato, ma del numero dei numeri *primi* rispetto al numero dato (minori del numero dato, questo speriamo ci arriviate da soli).

Quella che non abbiamo combinato è il non dimostrare la non ovvia relazione (se due negazioni affermano, tre negazioni negano?):

Consideriamo gli r numeri $k_1a, k_2a, \ldots, k_ra$*: questi numeri sono anch'essi primi rispetto a N, in quanto anche a, per ipotesi, è primo rispetto a N e tutti loro, quando vengono divisi per N, dànno un resto diverso.*

Ammettiamo che non è ovvia, ma l'abbiamo dimostrata; anche se la dimostrazione è decisamente carina, non la riportiamo qui e vi rimandiamo al BJ&P46 di RM101: è un'applicazione del Principio della Piccionaia!

Il Capo cade sempre in piedi, come direbbe la mamma di Alice.

Per rinfrancar lo spirito, come si diceva in una delle nostre riviste preferite, vi passiamo il contributo linguistico di ***Martino***.

Credo di poter dare il mio contributo alla traduzione di "Betweenness Centrality", come da voi richiesto a pagina 27 del finalmente arrivato, dopo lunga e preoccupata attesa, N. 132.

L'espressione nasce in un pub di Dublino nei primi anni '80 del diciottesimo secolo, sebbene il fenomeno fisico che vi sottostà sia stato segnalato in letteratura sin da epoche molto antecedenti.

Un giovane gentiluomo londinese – George P.(ortarlington) Trinkson Esq. – si era recato per affari nel capoluogo della vicina – e da lui ritenuta semiselvaggia – isola d'Irlanda; gli affari erano andati bene, al di là di ogni ragionevole aspettativa, e gli indigeni si erano mostrati socievoli e di carattere allegro, consentendogli di investire al meglio le cinquanta ghinee avute in eredità da un vecchio zio, che costituivano tutta la sua fortuna.

I suoi nuovi amici e soci Paddy e Sean, per festeggiare il profittevole esito del loro incontro, lo portarono a gavazzare in una delle più rinomate bettole nei pressi del porto e soddisfecero la sua sete con numerosi boccali di un liquido scuro, la cui produzione era stata avviata in città da pochi decenni.

Il giovane si accorse presto che quel fluido aveva delle miracolose, ancorché sconcertanti proprietà: i boccali postigli davanti si sdoppiavano davanti ai suoi occhi – e qui stava il miracolo – ma erano difficilissimi da afferrare – e qui lo sconcerto. Se provava con la mano sinistra a prendere il corrispondente boccale brancicava nel vuoto e altrettanto avveniva per i suoi parimenti infruttuosi e affannosi tentativi con la destra. Istruito dagli indigeni, apprese rapidamente ad usare simultaneamente entrambe le mani per afferrare quell'inconcepibile, virtuale e prima inesistente, boccale posto "centralmente". Oggi sappiamo che si tratta dell'improvviso collasso di una funzione d'onda, ma allora era ritenuto qualcosa di magico se non di demoniaco, che gli adepti tenevano accuratamente segreto.

Il terribile mal di testa ed il forte mal di mare che lo risvegliarono alcune mattine dopo – la via della conoscenza richiede sovente un duro pedaggio – non gli consentirono di ricordare il nome del miracoloso prodotto; sapeva solo che faceva rima con "…nnes" e stava in centro between his hands, pertanto nelle sue memorie descrisse il fenomeno come "Betweenness Centrality".

Queste memorie sono state pubblicate nel 1804 a Londra da "Tyburn Hill Press", con il titolo, che posso provvisoriamente tradurre come: "Da mozzo di seconda volontario(???) a terzo ufficiale non abilitato, in soli cinque anni di navigazione fra le isole dei cannibali". Ho iniziato recentemente la traduzione dell'opera a causa del suo notevole interesse per la storia della fisica: oltre al fenomeno già citato, vi si descrive infatti l'improvviso collasso della funzione d'onda di un brigantino carico di una brigata di briganti, che indubbiamente era solo virtuale quella sera al pub, mentre risultava nauseantemente reale alcuni giorni dopo, in rotta verso Sud nel bel mezzo dell'Atlantico in tempesta.

E con questo pezzo meraviglioso, passiamo alle soluzioni.

5.1 [131]

5.1.1 La costanza dà i suoi frutti

Il mese scorso questo problema aveva contato parecchie soluzioni: da ***Ilaria***, ***Tiggi***, ***Cid***, ***Alberto R.***, ***Gnugnu***, ***Franco57***, ***Stefano D'I***, ***Andrea***, ***Rethi***. Rivediamo il testo:

Rudy ha nel salvadanaio monete per la ragguardevole cifra di 102 *Euro e* 40 *centesimi, ed incarica Alberto e Fred di cambiare la paccata di soldi. I due decidono di giocarsi il lavoro a testa e croce; ogni volta che viene testa segna un punto Alberto, ogni volta che viene croce segna un punto Fred; vince chi per primo arriva al valore… (e qui non si è capito, stavano parlando piano). Chi vince porta le monete.*

I nostri avevano appena avuto il tempo di fare sedici tiri che la partita deve essere sospesa. Volendo seguire le loro regole sino in fondo, e considerato che Fred ha fatto due punti più di Alberto, si accordano in modo tale che Fred porta 72,65 *Euro, mentre Alberto porta il resto.*

Ora siete perfettamente in grado di capire non solo il loro ragionamento per quanto riguarda la divisione ma anche quale fosse il valore al quale avevano deciso di fermarsi.

Avevamo già proposto le soluzioni di ***Ilaria***, ***Gnugnu*** e ***Franco57***, ma lo stesso ***Gnugnu*** ci ha mandato un approfondimento, che noi riportiamo volentieri:

Ad Alberto mancano $n + 1 > 1$ punti per giungere alla vittoria, mentre a Fred ne bastano $n - 1$. La probabilità di vittoria per Alberto è:

$$p_n = \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{2(n-1)}\binom{i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=2n-1}^{2n}\binom{i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

Posto $d_n = \frac{1}{2} - p_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$, si può osservare che anche le per le d_n valgono semplici relazioni ricorsive che ne facilitano il calcolo manuale:

$$d_1 = \frac{1}{2},\quad d_j = \frac{2j-1}{2j}d_{j-1} \quad \forall j > 1.$$

Da cui derivano diverse espressioni equivalenti:

$$d_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2i}\right) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}.$$

Notata la somiglianza con le ridotte w_n della formula di Wallis per il calcolo di π:

$$w_n = \prod_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{4i^2-1} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)} \qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} w_n\,;$$

dal confronto si ricava $d_n^2 \cdot w_n = \dfrac{1}{2n+1} \;\rightarrow\; 2n+1 = \dfrac{1}{d_n^2 \cdot w_n} \;\rightarrow\; n+\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{d_n^2 \cdot 2w_n}$.

Sostituendo, con sommo sprezzo del pericolo, alle w_n il loro valore limite, si trova l'approssimazione: $n+\dfrac{1}{2} \approx \dfrac{1}{\pi \cdot d_n^2}$.

La successione $b_n = \dfrac{1}{\pi\cdot d_n^2} - n = \dfrac{4}{\pi\cdot(1-2p_n)^2} - n$ è decrescente, a termini positivi (tende a ¼ per n tendente all'infinito) ed essendo, inoltre, $b_2 = \dfrac{64}{9\pi} - 2 < 1$, per determinare n conoscendo p_n si potrà utilizzare efficacemente l'uguaglianza

$$n = \left\lfloor \frac{4}{\pi\cdot(1-2p_n)^2} \right\rfloor.$$

Ancora una volta π conferma la sua ansia di protagonismo, emergendo a forza in problemi distanti, almeno a prima vista, da circonferenze e cerchi.

La formula trovata è semplice, ma per grandi valori di n, poco adatta al calcolo manuale, anche perché sensibile agli errori di arrotondamento. Supponendo di disporre del valore esatto di p_n è possibile un diverso approccio.

Essendo $p_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$; se p_n è espressa come frazione ridotta ai minimi termini il suo denominare sarà una potenza di 2 con esponente $m < 2n$ (il coefficiente binomiale è sicuramente un numero pari) e la sua scrittura decimale avrà una mantissa di esattamente m cifre (escludendo gli zeri finali opzionali).

Il numero di fattori 2 presenti in *(2n)!* è uguale a m e la differenza $2n - m$ coincide con il numero di 1 presenti nella scrittura binaria di n. La dimostrazione di questa proprietà è troppo divertente per privarvi del piacere di trovarla.

Se l'unica difficoltà per ricavare m da n consiste, dunque, nell'esprimere quest'ultimo in base 2, un po' più complicato è il passaggio inverso.

La successione degli m_n è strettamente crescente, e partendo dalla scrittura binaria di m si può utilizzare il seguente algoritmo:

1. si pone la variabile S (somma) uguale ad m e si azzera il contatore C;
2. se S è dispari si incrementano di 1 S e C;

3. se il numero $q1$ di 1 presenti nella somma è maggiore del contatore si aggiunge 10_2 alla somma e si incrementa di 2 il contatore.

Il passo 3 viene iterato fino a quando la condizione diventa falsa (accadrà sicuramente ed al più in $log_4\ m$ iterazioni). A quel punto due sono le possibilità:

a) il numero di 1 nella somma è uguale al contatore; n sarà uguale a metà della somma S;

b) $q1$ è minore del contatore; in questo caso non esiste alcuna p_n avente una mantissa di m cifre.

Esempio1: $m = 11 = 1011_2$ (il valore fornito dal problema)

$S = 1011_2$	$C = 0$	S è dispari S e C vengono incrementati di 1
$S = 1100_2$	$q1 = 2 > C = 1$	S e C vengono incrementati di 2
$S = 1110_2$	$q1 = 3 = C = 3$	si verifica l'uguaglianza ed è $n = S/2 = 7$.

Esempio2: $m = 58 = 111010_2$

$S = 111010_2$	$q1 = 4 > C = 0$	S e C vengono incrementati di 2
$S = 111100_2$	$q1 = 4 > C = 2$	S e C vengono incrementati di 2
$S = 111110_2$	$q1 = 5 > C = 4$	S e C vengono incrementati di 2
$S = 1000000_2$	$q1 = 1 < C = 6$	$m = 58$ è un valore impossibile.

Cosa cambia se lo svantaggio iniziale h (handicap) è diverso da 2?

Per $h = 0$ (condizione di parità) la probabilità di vittoria dei contendenti è indipendente da n.

Per $h = 1$ le probabilità di vittoria per Alberto sono maggiori di quelle viste e le d_n diventano esattamente metà di quelle esaminate. In questo caso avremo $n = \left\lfloor \frac{1}{\pi \cdot (1-2p_n)^2} \right\rfloor$ ed anche l'ultimo algoritmo si adatta facilmente: basta iniziare con $S = m - 1$.

Con $h > 2$ le probabilità di vittoria per Alberto diminuiscono, le formule diventano più complesse e alcune semplificazioni non sono più possibili. Nonostante queste complicazioni dovrebbe essere:

$$n = \left\lfloor \frac{h^2}{\pi \cdot (1-2p_n)^2} - \frac{(2h-3)^2+5}{24} \right\rfloor .$$

Questa formula, che non ho dimostrato, coincide per $h = 1$ e $h = 2$ con quelle trovate, fornisce risultati sempre esatti per $h < 5$; con $h = 5$ risulta errato il solo caso $n = 5$, mentre con $h > 5$ ha un ottimo comportamento asintotico, ma deve essere aggiustata per piccoli valori di n, introducendo addendi dipendenti da potenze positive di d_n.

INCONTRI CASUALI

La frazione generatrice delle d_n, nel caso proposto ($h = 2$), è molto semplice:

$$G(d_n, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \; .$$

Da cui si ottiene facilmente quella delle p_n:

$$G(p_n; x) = G\left(\frac{1}{2} - d_n; x\right) = G\left(\frac{1}{2}; x\right) - G(d_n; x) = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1-2\sqrt{1-x}}{2(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

Non ho la minima idea di come servirmene, ma sono simpatiche.

Non possiamo che essere d'accordo.

5.2 [132]

5.2.1 Perché la gallina ha attraversato la strada?

Vi dobbiamo un certo numero di spiegazioni. Il Capo, che vi le voleste o no, le ha preparate già il mese scorso, quindi ve le passiamo subito.

Prima il pollo al *babi*.

In piemontese il *babi* è il rospo, animale falcidiato nelle sue migrazioni stagionali durante gli attraversamenti di strada. Il pollo aperto e schiacciato sulla griglia, per la disgustosa similitudine con il peggior risultato possibile della migrazione (dal punto di vista del rospo) viene detto *al babi*.

Poi, i CD.

La conoscete, vero, la leggenda metropolitana che mettendo un CD in verticale sulla cappelliera della macchina si riesce a mandare in palla gli autovelox? La cosa è stata *sbufalata* ampiamente anni fa da Paolo Attivissimo (sì, lo conoscete: è quello al quale abbiamo rubato il copyright, il che continua a sembrarci piuttosto divertente); bene, confessiamo che questa è stata l'unica volta nella quale la sua meritoria opera di cacciatore antibufala ci sia spiaciuta.

Perché noi vorremmo che più gente possibile avesse i CD sulla cappelliera. Tutti dovrebbero avere i CD sulla cappelliera. Perché Rudy è felicissimo di averli, e più gente li ha più una ben precisa categoria di stupidotti[15] è triste. Perché Rudy in inverno va al lavoro in macchina col buio e torna col buio. Di solito, il Nostro spiega la cosa in modo particolarmente contorto.

"I CD devono aver scritto sopra un ben preciso messaggio, scritto in tutti i formati possibili: DOC, HTML, TXT, WAV, MP3, JPEG… Chi più ne ha più ne metta: Il messaggio viene diffuso nell'etere nel momento stesso in cui una radiazione elettromagnetica della corretta lunghezza d'onda incidendo all'angolo opportuno manda in risonanza il CD; il testo, solitamente, è una cosa di questo genere: '*Spett.le guidatore del veicolo che mi sta succhiando la marmitta, pur nel complimentarci con Lei nell'indubbia efficacia e potenza del Suo impianto di illuminazione, non possiamo far altro che condolerci per la vistosa forma di strabismo verticale che a quanto pare ha colpito il di Lei elettrauto; consci che recepirà immediatamente questa nostra dolente partecipazione, la invitiamo ad allontanare ogni ricordo di questo triste evento dalla nostra visuale; in caso contrario, voglia considerarci pronti ad una immediata e decisa collaborazione per l'esecuzione nei Suoi confronti di una sigmoidoscopia utilizzando l'intero Suo veicolo. Cordiali Saluti, l'autista davanti.*".

Ossia, in parole povere, "Abbassa quei fari o ti metto la tua macchina nel…".

[15] Veramente pensiamo ad un'altra parola, che comincia con le stesse due consonanti e ha molte meno sillabe.

Capite che più gente ha i CD dietro, più *stupidotti* recepiranno il messaggio, visto che i loro fari in quel momento daranno fastidio anche a loro (oltre che a noi nello specchietto retrovisore). E quale modo migliore per convincere più gente possibile a mettere i CD sulla cappelliera che raccontargli che "inciuccano gli autovelox"?

Paolo, questa non dovevi farcela…

A questo riprendiamo il filo delle nostre note... anche se ci preoccupiamo per i problemi del Capo che diventano sempre più violenti. Purtroppo non abbiamo la più pallida idea di cosa abbiamo fatto per inacidirlo così, quindi cerchiamo di procedere con calma e – nel ricordarlo – edulcoriamo il problema dalle parti più spaventose.

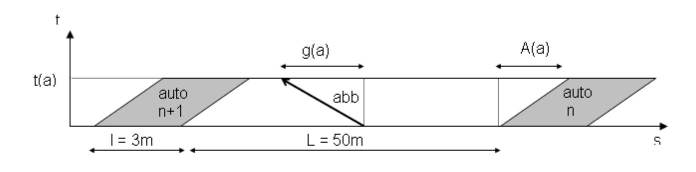
> *La gallina si trova sul bordo di una strada a senso unico dove esiste il limite di velocità (rigorosamente rispettato) di* 30 *km/h; le auto, che per comodità assimiliamo a dei rettangoli di* 3 *metri per* 2, *sono distanziate l'una dall'altra di* 50 *metri. La gallina attraversa quando le pare alla folle velocità di* 20 *km/h ad un angolo non necessariamente perpendicolare alla linea di mezzeria, ma quantomeno in linea retta. Quello che ci interessa sapere, è se le probabilità che sia investita siano maggiori o minori del* 10%.

Abbiamo raccolto le soluzioni di ***Michele***, ***Millenium Bug***, il ***Panurgo***, ***MaMo***, ***Cid***, ***Silvano***, ***Gnugnu***, ***Alberto R.***, ***Franco57***. Gli approcci sono stati diversi, mai risultati di solo due tipi, a seconda se veniva considerata la possibilità che il povero volatile attraversasse la strada anche in presenza di veicolo di fronte a sé oppure si astenesse dall'ovvia condanna a morte. In ogni caso, come si vedrà dalle soluzioni, non c'è compagnia assicurativa che scommetterebbe sul demente gallinaceo.

Ma andiamo per ordine. Vediamo la versione di ***Millenium Bug***, che ha adottato il titolo affibbiato dal Capo al volatile:

> Stranamente per RM i problemi di questo mese sono enunciati in modo abbastanza chiaro e lasciano poco spazio a interpretazioni: che sia un buon proposito della redazione per il nuovo anno? L'unico dato su cui posso al limite fare un'assunzione arbitraria è la direzione di attraversamento della gallina che suppongo un angolo distribuito uniformemente tra -90° e +90° rispetto alla linea di mezzeria e d'ora in poi assunto per convenzione positivo se orientato in modo che la gallina vada incontro alle auto.
>
> Chiamando a detto angolo e v e V rispettivamente le velocità di gallina e auto, trovo in funzione di a i seguenti valori:
>
> - $t(a)$: tempo che la gallina impiega ad attraversare
> - $A(a)$: spazio percorso dalle auto nel tempo $t(a)$
> - $g(a)$: componente di spostamento della gallina nella direzione del movimento delle auto
>
> Semplici calcoli portano a:
>
> - $t(a) = \frac{2}{v \cdot \cos(a)}$
> - $A(a) = V \cdot t = \frac{3}{\cos(a)}$
> - $g(a) = 2 \cdot tg(a)$

Schematizzo per visualizzare meglio il successivo calcolo della probabilità di ottenere un pollo babizzato.



4 *Schema di **Millenium Bug**.*

La probabilità della gallina di arrivare in età pensionabile (o meglio in età da brodo) è rappresentata dalla probabilità che il suo percorso, indicato con abb (aspirante buon brodo) non si sovrapponga all'impronta babizzatrice di una delle auto.

Si trova quindi la probabilità di salvezza:

$$p(a) = \frac{L - A(a) - g(a)}{L + l}$$

Il mio schemino vale per a>=0; facendo l'analogo per a<0 (ovvero abb meno propenso al suicidio…) si vede che vale la stessa formula, dato che *g(a)* diventa negativo. Inserendo i nostri valori e espressioni in funzione di a:

$$p(a) = \frac{50\cos(a) - 2\sin(a) - 3}{53\cos(a)}$$

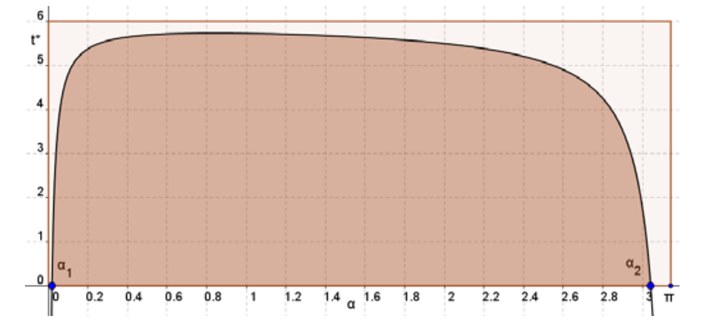
Ora devo generalizzare per tutti i possibili valori di a: basta quindi integrare utilizzando la funzione di distribuzione di a. Avendo assunto una distribuzione uniforme, basta integrare l'espressione così com'è tra -π/2 e +π/2 e dividere per π.

Occhio che dobbiamo integrare solo i valori positivi perché nei casi in cui *p(a)*<0 il nostro abb è ahimè spacciato! In pratica in questi casi si ridefinisce *p(a)*=0. Inoltre a regola l'intervallo di integrazione è da restringere leggermente rispetto a ±π/2 (diciamo di un grado circa) altrimenti l'espressione *p(a)* perde significato agli estremi: non perdiamo comunque nulla dato che per a prossimi a 90° era già dall'inizio evidente che *p(a)*=0 e pregustavamo la cena a base di pollo. Lungi da me ricavare in modo analitico i limiti in cui *p(a)*>0 e procedere all'integrazione a mano, sono passato alla forza bruta avvalendomi di una tabellina in Excel, da cui ricavo che il nostro abb dovrebbe soddisfare le sue aspirazioni con un buon 78.5% di probabilità.

Note finali:

- come sempre: ho buttato giù tutto così come mi veniva e quindi non mi fido troppo dei miei risultati
- è passato tanto tempo da quando ho fatto gli esami per la patente, ma una distanza di sicurezza di 50m per 30km/h mi sembra un po' eccessiva!
- avendo a che fare con una situazione simile quasi ogni mattina, quando passo da una strada con polli allo stato brado che attraversano, mi permetto di osservare che la dinamica dell'abb segue un modello diverso da quanto ipotizzato: l'abb attraversa (sempre quando gli pare… è vero) a una v bassa e parte poi in una direzione qualunque a 20km/h quando si accorge che l'auto arriva a una distanza critica Z. Inoltre di norma la direzione di fuga è opposta a quella precedente, per cui la probabilità di mangiare pollo al babi è paradossalmente maggiore se il pollo ha quasi finito di attraversare che non se si trova in mezzo alla strada. Ma questo diventerebbe un altro problema… magari la prossima volta.

Giusto per dare un'idea della parte relativa all'integrazione, vediamo un pezzettino della soluzione di ***Michele***:

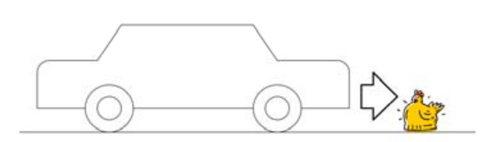


5 *Figura di* ***Michele***.

> Assumendo che t^* e α siano indipendenti, per l'ignara gallina scegliere un istante a caso nel varco tra due auto e una direzione qualsiasi verso la perigliosa traversata è equivalente a scegliere a caso un punto nel rettangolo $R = (0, \pi)\times[0, 6]$: G si salva tutte le volte che il punto (α, t^*) è compreso nella regione più scura della figura seguente, in cui è rappresentato il grafico della funzione $t^* = f(\alpha)$.
>
> Possiamo allora assumere che per G la probabilità di salvarsi sia il rapporto tra l'area della regione più scura e l'area del rettangolo R: $\dfrac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha)\,d\alpha}{6\pi} \approx 0.837$, dove α_1 e α_2 sono gli zeri di $f(\alpha)$ nell'intervallo $(0,\pi)$: $\alpha_1 \approx 0.02$ e $\alpha_2 \approx 3.04$.
>
> Morale: la probabilità per la povera gallina di finire male (pardon, in pentola) è maggiore del 10%, circa 16.3%.

Questo perché ***Michele*** è della scuola che non fa attraversare la gallina quando si spiaccicherebbe di faccia. Non resistiamo a proporvi il commento e la figura del ***Panurgo***:

> La mia personale esperienza è stata: una gallina in linea retta ad un angolo di circa 120° rispetto al mio moto. Non mi sono fermato a raccogliere la sventurata ex aspirante per timore del contadino; al suo posto ho dovuto raccogliere la targa anteriore che è caduta di lì a poco.



6 *Figura del* ***Panurgo***.

Sono esperienze che non si dimenticano. Del resto anche ***Cid*** si lamenta dello scarso realismo del problema:

> Per risolvere il problema ho dovuto tener conto di qualche dato aggiuntivo che nel testo del problema non era specificato. Ad esempio: viene indicata la velocità di 20 km/h per l'attraversamento della strada, ma non è specificata l'accelerazione iniziale che porta la gallina a questa velocità; considerato che la gallina parte da ferma, sembrerebbe che si debba considerare un'accelerazione infinita che porti la gallina istantaneamente alla velocità di 20 km/h. In alternativa, posso supporre che 20 km/h debba essere considerata come la velocità media con cui la gallina attraversa la strada.
>
> Un altro dato mancante è l'informazione se la gallina inizia ad attraversare anche nel momento in cui la macchina le sta passando davanti infilandosi tra le ruote anteriori e quelle posteriori (...e forse salvandosi passando indenne tra le due ruote posteriori) Suppongo che questa ipotesi non debba essere considerata in quanto ogni auto deve poter essere assimilata ad un rettangolo di 3 metri per 2 e quindi non vi sono informazioni precise su posizione e dimensione delle ruote

Ovviamente, poi, il nostro *solutore maximo* ***Cid*** risolve brillantemente. Giusto per completezza, utilizziamo il ragionamento di ***MaMo*** per spiegare come i due risultati sono tra loro correlati:

> Consideriamo ora i seguenti due casi:
>
> 1. La gallina, quando attraversa, si trova di fronte ad una automobile. La probabilità che avvenga questa situazione è data dal rapporto tra la larghezza di una automobile e la distanza tra due automobili cioè 3/53. In questo caso la gallina, qualunque direzione prenda, non riesce ad attraversare la strada (P_1= 1)
> 2. La gallina si trova in punto O posto ad una distanza d ($0 \leq d \leq 50$ m) dalla parte anteriore di una automobile. Questa situazione si verifica con una frequenza di 50/53. (...) La probabilità che la gallina ha di essere investita è (...) $P_2 = 0,16288$.
>
> Combinando i due casi esposti inizialmente si ottiene la probabilità totale cercata:
>
> $$P = 353\ P_1 + 5053\ P_2 \cong 0,21026$$
>
> Considerazioni finali:
>
> - Se la direzione fosse sempre perpendicolare alla strada (θ = 90°) la probabilità sarebbe: $P_{per}=653 \cong 0,1132$.
> - Se la gallina potesse scegliere la direzione da prendere la minima probabilità di essere investita sarebbe: $P_{min}=3+553 \cong 0,0988$, che si ottiene per un angolo cosθ=2/3, cioè θ = 48,19°.

Prima di concludere, la considerazione finale di ***Gnugnu***:

> La cercata probabilità di mangiare *pollo al babi* è quasi il 22%. Occorrerà, però, consultare Dario Bressanini sulla possibilità di cucinare la gallina, qualora abbia provato a infilarsi sotto una delle ruote.

Il Capo ha già fatto notare che Dario non è piemontese, ma la consulenza si può sempre chiedere. Ed ora andiamo avanti.

5.2.2 Nessuno si fila il filetto! (The Ultimate Problem)

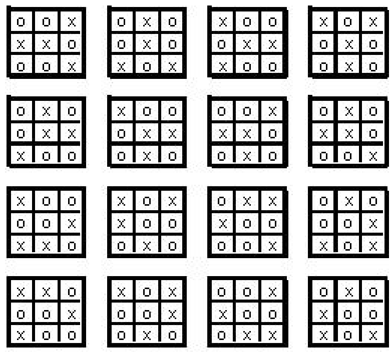
Voi non avete idea di quanto siamo felici di presentare questo problema... proprio perché il Capo ha promesso che è *veramente* l'ultimo sul tris, che lui insiste a chiamare filetto per fare il gioco di parole nel titolo. Speravamo che nessuno gli avrebbe dato la soddisfazione di risolverlo secondo le sue regole, ma al solito, i nostri lettori sono troppo compiacenti con il GC. Comunque, ecco il testo:

> *Ormai stufi di giocare a Filetto, avete scritto un programma che lo gioca da solo; siccome però il gioco proprio non vi piace, non avete programmato una raffinatissima strategia: il programma gioca casualmente, nel senso che butta giù alternativamente un tondo o una ics (dipende da chi deve giocare) e l'unica cosa che fa è controllare dopo ogni mossa se uno dei due vince da qualche parte, eventualmente fermandosi e annunciando la vittoria del giocatore opportuno (o il fatto che la partita è finita patta): nessuna analisi, insomma.*
>
> *Ora, voi e il vostro amico del cuore siete seduti davanti al programma che gioca; lo avete programmato per giocare un'enormità di partite, e decidete di scommettere con il vostro compare su chi vincerà più partite, se il primo o il secondo giocatore. Mentre siete presi dall'analisi, arriva il vostro (di tutti e due) amico di stomaco (il cuore è occupato), e decidete che uno di voi scommetterà sul primo vincente, un altro sul secondo vincente e il terzo scommetterà che ci saranno più patte. Su chi scommettete? Primo, secondo o patta?*

Come premesso, il nostri classici solutori hanno fatto la fila per accontentare il Capo: ***Millenium Bug***, il ***Panurgo***, ***Zar***, ***Cid***, ***Silvano***, ***Gnugnu***, ***Franco57***. Dato che è un po' di tempo che non pubblichiamo una delle ben motivate soluzioni di ***Cid***, cominciamo proprio da lui.

<u>*Risposta veloce*</u>

Per rispondere alla domanda basta considerare che le combinazioni possibili sono: $\frac{9!}{4!\cdot 5!}$, cioè il numero di differenti risultati possibili è: $\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=126$.



7 *Le combinazioni "patte" di* ***Cid***.

Le combinazioni corrispondenti a una patta sono appena 16 e sono in figura, per cui la probabilità di avere patta è uguale a: $\frac{16}{126}=\frac{8}{63}=0,\overline{126984}\approx 12,70\%$.

Non conviene quindi scommettere sulla patta.

Tra la vittoria del primo giocatore e la vittoria del secondo giocatore, è sicuramente più probabile la vittoria del primo giocatore in quanto il primo giocatore ha una mossa in più a disposizione e comincia per primo. Pertanto conviene scommettere sul primo giocatore.

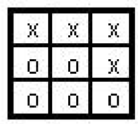
<u>*Analisi completa*</u>

A gentile richiesta rispondo volentieri, ecco quindi la mia risposta alla domanda facoltativa. Considero tutte le partite che non terminano con una patta, e per semplicità di calcolo considero che siano state giocate anche dopo la vittoria di uno dei due giocatori (fino a riempire tutte e nove le caselle).

Considerando che il primo giocatore giochi con il tondo ed il secondo con una ics, quante sono le partite in cui vi sono almeno 3 ics in fila (una volta riempite tutte e 9 le caselle)? *Sono esattamente* 48 *partite, in quanto vi sono* 8 *differenti modi per fare filetto e per ciascuno di questi* 8 *modi, la quarta ics può trovarsi in una qualsiasi delle restanti* 6 *caselle.*

Di queste 48 partite, quante sono state sicuramente vinte dal secondo giocatore? *Sono* 12 *le partite sicuramente vinte dal primo giocatore, e corrispondono alle* 12 *partite in cui le tre ics vincenti si trovano lungo una delle due diagonali in quanto in questo caso è impossibile che ci siano anche* 3 *tondi in fila.*

Delle restanti 36 partite con 3 ics in fila, qual è la probabilità che il primo a fare il tris sia stato il secondo giocatore? *La probabilità che il vincitore della partita sia stato il secondo giocatore è uguale al* 67,5%.



8 *Esempio di* ***Cid***.

Infatti, tutti e 36 *le configurazioni finali possibili consistono di una fila con* 3 *ics, una con* 3 *tondi e la restante con* 2 *tondi ed una ics, come nell'esempio in figura.*

La probabilità che l'ultima mossa del primo giocatore sia stata una dei 3 *tondi dell'ultima fila è uguale a:* 3/5 *ed in tal caso, il primo giocatore ha completato il tris dopo il secondo giocatore e la vittoria è quindi del secondo giocatore. Se invece l'ultima mossa del primo giocatore è stata una delle due caselle della seconda fila, bisogna considerare la probabilità che l'ultima mossa del secondo giocatore sia stata la ics in seconda fila, questa probabilità è uguale a: ¼.*

Infine, occorre calcolare la probabilità che essendo stata l'ultima mossa del primo giocatore in seconda fila, la penultima sia stata una dei 3 *tondi dell'ultima fila, tale probabilità è uguale a*: ¾. *Per cui la probabilità di vittoria del secondo giocatore (in una di queste* 36 *partite) è uguale a:*

$$\frac{3}{5}+\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}+\frac{3}{40}=\frac{48+6}{80}=\frac{54}{80}=\frac{27}{40}=67{,}5\%.$$

In totale qual è la probabilità che vinca il secondo giocatore? *La probabilità che vinca il secondo giocatore è uguale al* 28,81%.

Tale probabilità si calcola così:

$$\frac{12+36\cdot\frac{27}{40}}{126}=\frac{12+9\cdot\frac{27}{10}}{126}=\frac{12+\frac{243}{10}}{126}=\frac{363}{1260}=0{,}28\overline{809523}\approx 28{,}81\%$$

In totale qual è la probabilità che vinca il primo giocatore? *La probabilità che vinca il primo giocatore è uguale al* 58,49%.

Tale probabilità si calcola così:

$$1-\frac{16}{126}-\frac{363}{1260}=\frac{1260-160-363}{1260}=\frac{737}{1260}=0{,}58\overline{492063}\approx 58{,}49\%$$

Infine, un'analisi completa dovrebbe valutare anche la probabilità che la partita sia vinta dopo le prime k mosse (dove k varia da 5 a 9).

In totale qual è la probabilità che la partita sia vinta, dal primo giocatore, dopo le prime 5 mosse? *Questa probabilità è uguale a:* 2/21.

Dopo le prime 5 *mosse sono stati piazzati* 3 *tondi e* 2 *ics; siccome sono stati piazzati in modo casuale, non è importante l'ordine cronologico in cui sono stati inseriti per cui la probabilità si può calcolare anche tenendo conto solo dei* 3 *tondi.*

I filetti possibili sono 8*, la probabilità che il primo tondo sia in uno di questi* 8 *filetti è uguale a* 1/3*, (in quanto ci sono* 3 *caselle in ogni filetto su* 9 *totali). La probabilità che il secondo tondo sia nello stesso filetto è uguale a* ¼ *(*2 *caselle restanti in quel filetto su* 8 *totali). Analogamente, la probabilità che il terzo tondo sia nello stesso filetto è uguale a* 1/7*. La probabilità risulta quindi uguale a:* $8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{21}$.

In totale qual è la probabilità che la partita sia vinta, dal secondo giocatore, dopo le prime 6 mosse? *Questa probabilità è uguale a*: 37/420.

Dopo le prime 6 *mosse sono stati piazzati* 3 *tondi e* 3 *ics; siccome sono stati piazzati in modo casuale, non è importante l'ordine cronologico in cui sono stati inseriti. Bisogna però tenere conto della probabilità che ci siano due filetti, in quanto in tal caso aveva già vinto il primo giocatore alla mossa precedente.*

Probabilità che ci sia un filetto di ics = 2/21.

Se questo filetto è una delle 2 *diagonali non ci può essere alcun altro filetto; se è uno degli altri* 6 *filetti, la probabilità che ci sia anche un filetto di tondi si calcola così: probabilità che il secondo tondo sia nello stesso filetto del primo* = 2/5 *(*2 *caselle restanti in quel filetto su* 5 *a disposizione).*

Probabilità che il terzo tondo sia nello stesso filetto = ¼ *(*1 *casella restante su* 4 *a disposizione).*

La probabilità di avere due filetti è quindi uguale a: $\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{40}$.

La probabilità di non avere due filetti è uguale a: $1-\frac{3}{40}=\frac{37}{40}$, *per cui la probabilità di vittoria dopo esattamente* 6 *mosse è uguale a*: $\frac{2}{21}\cdot\frac{37}{40}=\frac{37}{420}$.

In totale qual è la probabilità che la partita sia vinta, dal primo giocatore, dopo le prime 7 mosse? *Questa probabilità è uguale a:* 37/140.

Dopo le prime 7 *mosse sono stati piazzati* 4 *tondi e* 3 *ics; siccome sono stati piazzati in modo casuale, non è importante l'ordine cronologico in cui sono stati inseriti. Bisogna però tenere conto della probabilità che ci siano due filetti, in quanto in tal caso aveva già vinto il secondo giocatore alla mossa precedente. Infine bisogna tener conto che tra i tondi che fan parte del filetto vincente deve esserci anche l'ultimo inserito, altrimenti il primo giocatore aveva già vinto alla quinta mossa, per cui quello non facente parte del filetto deve essere uno tra i primi tre tondi inseriti.*

Probabilità che ci sia un filetto di tondi = $3\cdot\frac{2}{21}=\frac{2}{7}$ *(moltiplico per* 3 *per tener conto che dal filetto può essere escluso uno qualsiasi dei 3 tondi).*

Sappiamo che la probabilità di non avere due filetti è uguale a: 37/40, *per cui la probabilità di vittoria dopo esattamente* 7 *mosse è uguale a*: $\frac{2}{7}\cdot\frac{37}{40}=\frac{37}{140}$.

In totale qual è la probabilità che la partita sia vinta, dal secondo giocatore, dopo le prime 8 mosse? *Questa probabilità è uguale a:* 1/5.

La probabilità si calcola così: avendo trovato che la probabilità che vinca il secondo giocatore è uguale a: 363/1260 *ed essendo* 37/420 *la probabilità di vittoria dopo* 6 *mosse, la probabilità di vittoria dopo le prime* 8 *mosse è:* $\frac{363}{1260}-\frac{37}{420}=\frac{1}{5}$ *(non essendoci altre possibilità di vittoria per il secondo giocatore).*

In totale qual è la probabilità che la partita sia vinta, dal primo giocatore, dopo le prime 9 mosse? *Questa probabilità è uguale a:* 71/315.

Analogamente al caso precedente si calcola: $\frac{737}{1260}-\frac{2}{21}-\frac{37}{140}=\frac{71}{315}$ *(non essendoci altre possibilità di vittoria per il primo giocatore).*

Riassumendo:

Probabilità che vinca il 1° giocatore	Probabilità che vinca il 2° giocatore	Probabilità di patta
(dopo la 5° mossa) 2/21= 9,52 %	(dopo la 6° mossa) 37/420= 8,81 %	(al termine della partita) 8/63= 12,70 %
(dopo la 7° mossa) 37/140= 26,43 %	(dopo la 8° mossa) 1/5= 20,00 %	
(dopo la 9° mossa) 71/315= 22,54 %		

Probabilità che vinca il 1° giocatore	Probabilità che vinca il 2° giocatore	Probabilità di patta
737/1260= 58,49 %	363/1260= 28,81 %	8/63= 12,70 %

Spero che questa analisi sia stata abbastanza completa, per far contenti Piotr e Rudy non ho messo in evidenza le varie situazioni di simmetria (...e tra queste, la ragione per cui il numero di possibili differenti patte sia un multiplo di 4).

Questo mese ***Cid*** ci è sembrato un po' ironico. Del resto le partite al tris non interessano a nessuno, anche se persino il nostro ***Zar*** ha inviato il suo contributo:

Buongiorno. Ho colto l'invito di Rudy e mi sono messo a studiare l'albero delle mosse del tris, o tic-tac-toe, come dicono i barbari. La mia analisi ha raccolto le seguenti informazioni: ci sono 255168 possibili partire di tris, delle quali 131184 sono vinte dal primo giocatore, 77904 sono vinte dal secondo e 46080 finiscono in parità.

Se consideriamo solo i possibili finali, senza considerare né in che modo ci si è arrivati, né le possibili rotazioni e simmetrie che possono portare uno nell'altro, allora possiamo dire che essi sono 138, di cui 91 vengono vinti dal primo, 44 dal secondo e 3 sono pari.

Dato che questi sono numeri ragionevoli, posso inserirli in coda a questo messaggio.

Partite vinte dal primo:

```
[0, 1, 0, 2, 1, 2, 0, 1, 0]
[1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1]
[1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 2]
[1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0]
[1, 0, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 2]
[1, 0, 2, 1, 2, 0, 1, 0, 0]
[1, 0, 2, 1, 2, 1, 1, 0, 2]
[1, 0, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 0]
[1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 2, 0]
[1, 1, 2, 0, 1, 0, 2, 1, 2]
[1, 1, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 0]
[1, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 0, 2]
[1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 0, 0]
[1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 1]
[1, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 1]
[1, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1]
[1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2]
[1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0]
[1, 2, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0]
[1, 2, 0, 1, 0, 2, 1, 1, 2]
[1, 2, 0, 1, 1, 0, 2, 2, 1]
[1, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 2]
[1, 2, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 2]
[1, 2, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 0]
[1, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 1]
[1, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 2]
[1, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 2, 0]
[1, 2, 0, 1, 1, 2, 2, 0, 1]
[1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 0]
[1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 2]
[1, 2, 0, 1, 2, 1, 1, 0, 2]
[1, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 1]
[1, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 0]
[1, 2, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1]
[1, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1]
```

```
[1, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 2, 1]
[1, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 2]
[1, 2, 1, 2, 0, 1, 0, 2, 1]
[1, 2, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1]
[1, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 2, 1]
[1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 2]
[1, 2, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1]
[1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1]
[1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 0]
[1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1]
[1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1]
[1, 2, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1]
[1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1]
[1, 2, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
[1, 2, 2, 0, 1, 0, 2, 1, 1]
[1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 1]
[1, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 1]
[1, 2, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 1]
[1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 0]
[1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 2]
[1, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 0, 2]
[1, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0]
[1, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 1]
[1, 2, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 0]
[1, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 2, 1]
[1, 2, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2]
[1, 2, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 0]
[1, 2, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 1]
[1, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 2]
[1, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 0]
[1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2]
[1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 0, 0]
[1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2]
[1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1]
[1, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 0, 1]
[1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 0]
[1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1]
[1, 2, 2, 1, 2, 0, 1, 0, 1]
[1, 2, 2, 1, 2, 0, 1, 1, 0]
[1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 0, 0]
[1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2]
[1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1]
[1, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1]
[1, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 1]
[1, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1]
[2, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 2]
[2, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0]
[2, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 0]
[2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 2]
[2, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0]
[2, 1, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0]
[2, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 1, 2]
[2, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 0]
[2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 0, 0]
[2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2]
[2, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 0]
```

Partite vinte dal secondo:

```
[1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2]
[1, 0, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 2]
[1, 0, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 0]
[1, 0, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2]
[1, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 0, 2]
```

```
[1, 1, 2, 0, 0, 2, 0, 1, 2]
[1, 1, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 2]
[1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 2, 2]
[1, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 2]
[1, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 1]
[1, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 1, 0]
[1, 1, 2, 0, 2, 1, 2, 0, 0]
[1, 1, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 2]
[1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 1, 2]
[1, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 0, 2]
[1, 1, 2, 1, 0, 2, 2, 1, 2]
[1, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 2, 2]
[1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 0, 2]
[1, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 0]
[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 0, 2]
[1, 1, 2, 1, 2, 2, 0, 1, 2]
[1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 0]
[1, 2, 0, 0, 2, 1, 1, 2, 0]
[1, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 2, 1]
[1, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 0]
[1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0]
[1, 2, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 2]
[1, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 2, 2]
[1, 2, 1, 1, 2, 0, 0, 2, 0]
[1, 2, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1]
[1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 0]
[1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 0]
[1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 0, 1]
[1, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 1, 2]
[1, 2, 2, 0, 2, 1, 2, 1, 1]
[1, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 2]
[1, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 1, 1]
[1, 2, 2, 1, 2, 1, 0, 2, 1]
[1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 0, 1]
[1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0]
[2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 2]
[2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 1, 0]
[2, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 0]
[2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0]
```

Partite pari:

```
[1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2]
[1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2]
[1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2]
```

(Direi che la notazione sia abbastanza evidente senza stare a spiegarla, no?)

Naturalmente i numeri potevano essere calcolati anche a mano, ragionandoci molto. Però così abbiamo a disposizione tutti i dati, sui quali possiamo fare ulteriori analisi, volendo. E poi è bello, ogni tanto, vedere le cose...

Il Capo concorda. Alice, dal canto suo, ha apprezzato il commento conclusivo di ***Gnugnu***:

> Credo che Rudy sia po' distratto, manca la domanda che solitamente pone (forse per indispettire Alice): qual è il numero medio di estrazioni necessarie per concludere una partita?

Vero, ma lui non l'ha posta e noi (soprattutto Alice) siamo contenti così. A rileggerci il mese prossimo!

6. Quick & Dirty

Scopo di questo Q&D è dimostrare che se qualcosa sembra complicata, forse è facile.

Dimostrare che l'equazione:

$$x^5 + y^5 + 2 = (x+1)^5 + (y+2)^5$$

non ha soluzioni intere.

7. Pagina 46

Prima parte

Ordiniamo gli n numeri positivi in ordine non decrescente:

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n .$$

Se tutti i numeri sono uguali abbiamo:

$$x_1 x_2 \ldots x_n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right)^n .$$

Supponiamo ora che non tutti questi numeri siano uguali tra loro: intendiamo dimostrare che, in questo caso, esiste un altro insieme di numeri avente la medesima somma ma il cui prodotto è maggiore del prodotto $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Sia A la media aritmetica dei numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$: dall'assunzione fatta di insieme ordinato, abbiamo che:

$$\begin{aligned} &x_1 < x_n; \\ &x_1 < A; \\ &x_n > A. \end{aligned}$$

Effettuiamo ora le due sostituzioni:

$$\begin{aligned} &x_n \to x_n' = A \\ &x_1 \to x_1' = x_1 + (x_n - x_n') \end{aligned} .$$

Questa sostituzione, come si verifica facilmente, *conserva la media aritmetica,* ossia resta:

$$\frac{x_1' + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n'}{n} = A$$

Nel prodotto $x_1 x_2 \ldots x_n$, tutti i numeri tranne il primo e l'ultimo sono invariati, dimostriamo che è:

$$x_1' x_n' > x_1 x_n .$$

Imponendo $t = x_n - x_n'$, ossia $x_n' = x_n - t$ e $x_1' = x_1 + t$, abbiamo:

$$\begin{aligned} x_n' x_1' &= (x_n - t)(x_1 + t) \\ &= x_n x_1 + (x_n - x_1)t - t^2 . \end{aligned}$$

Essendo però $x_n' = A > x_1$, abbiamo:

$$x_n - x_1 > x_n - x_1' = t ,$$

da cui otteniamo

$$(x_n - x_1) - t > 0,$$
$$(x_n - x_1)t - t^2 > 0$$

e, di conseguenza,

$$x_1^{'} x_n^{'} = x_n x_1 + (x_n - x_1)t - t^2 > x_n x_1 .$$

Ricordando che abbiamo posto $x_n^{'} = A$.

Se il nuovo insieme $x_1^{'}, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, A$ non è ancora composto da numeri tutti uguali tra di loro, possiamo organizzarli in ordine non decrescente e ripetere il procedimento suindicato per trovare un altro insieme la cui somma sia sempre la stessa della sequenza originale ma il cui prodotto sia maggiore del prodotto appena ottenuto: in questa nuova sequenza, *due* numeri saranno uguali ad *A*.

La ripetizione di questo ragionamento conduce a una sequenza in cui tutti i numeri sono uguali a *A*, dimostrando la tesi.

Seconda parte

La diseguaglianza si può dimostrare attraverso l'induzione: supponiamo essa sia valida per $n-1$ numeri positivi, ossia

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_1} \geq n-1 . \qquad \textbf{[1]}$$

Dimostreremo che questo implica che la diseguaglianza sia vera anche per *n* numeri.

Sia a_n il minore degli *n* numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$; allora,

$$a_1 - a_n \geq 0,$$
$$a_{n-1} \geq a_n .$$

Allora, $a_{n-1}(a_1 - a_n) \geq a_n(a_1 - a_n)$, e quindi

$$a_1 a_{n-1} + a_n^2 - a_n a_{n-1} \geq a_n a_1 .$$

La divisione per $a_n a_1$ fornisce:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_1} \geq 1. \qquad \textbf{[2]}$$

Se sommiamo le diseguaglianze **[1]** e **[2]** otteniamo:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_1} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_1}$$
$$= \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq (n-1) + 1 = n.$$

Quindi la diseguaglianza vale per gli *n* numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e per tutti i naturali *n*.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Un dì vedremo...

Questa è roba talmente tosta che non la prendiamo alla lontana, ma andiamo subito al punto.

La computazione quantistica può essere subito dietro l'angolo o potrebbe non essere mai realizzabile in pratica, in quanto la fisica necessaria per renderla di utilità pratica non è ancora stata scoperta, e potrebbe addirittura non esistere; questo però non ha impedito ai matematici di far di conto su quella che è la matematica soggiacente al problema.

Un computer quantistico, qualunque cosa esso sia, è completamente diverso da una calcolatrice o da un computer "classico"; in questi alla fine leggete esattamente il risultato del conto (a partire dalla *Pascalina*, che vi dava il risultato su sei cifre). Nella versione quantistica, avete i *qubits* ("bit quantistici", qualsiasi cosa essi siano) in una sovrapposizione di stati e, quando li leggete, ottenete solo uno di questi stati, mentre gli altri sono persi; questo può sembrare una perdita di informazione, ma il fatto che il nostro aggeggio possa essere in un enorme numero di stati diversi significa che (in un qualche modo tutto da definire) può portare avanti un numero di calcoli enorme in contemporanea; in sostanza, ogni stato *segue una certa linea di calcolo* e, alla fine, potremmo riuscire a forzare l'output (probabilistico) verso il risultato cercato.

Il guaio è come *programmare* il nostro computer quantistico (già non sappiamo come costruirlo, figurarsi programmarlo...); la buona notizia è che, almeno dal punto di vista teorico, la cosa si può risolvere per alcuni (pochi) casi; la cosa interessante è che *in teoria* sappiamo come far girare su un computer quantistico un algoritmo che risolve un problema decisamente duro: quello della *fattorizzazione* di un numero, attraverso l'algoritmo di Shor.

Adesso che vi abbiamo detto dove andiamo a finire, la prendiamo alla lontana.

Partiamo dal problema della fattorizzazione.

Se usate Internet Explorer (chi preferisce FireFox è perfettamente in grado di scoprire la strada per conto proprio), andate in "Help" e selezionate "About Internet Explorer..."; in seconda riga dovreste trovare il parametro "Cypher Strength". Rudy, che preferisce affidarsi alla prudenza di non mandare dati sensibili in rete, ha un misero "128 bits" come valore della robustezza di cifratura; infatti, questa è la lunghezza dei due primi che vengono moltiplicati tra di loro per ottenere la chiave di cifratura della ***cifratura RSA***.

Ad oggi, la fattorizzazione del risultato, posto che i due primi di partenza fossero della dimensione di 1.024 bit (formato raccomandato dai crittografi), richiederebbe 10^{145} anni sul processore standard utilizzato per queste misure[16]; bene, l'utilizzo dell'algoritmo di Shor su un computer quantistico funzionante a velocità standard e dotato di una coppia di registri (uno a 2.048 e uno a 1.024 *qubits*) risolverebbe il problema in una manciata di secondi.

Prima di cominciare a preoccuparci per la sicurezza dei nostri dati, vediamo qual è lo stato dell'arte nel campo: l'ultima notizia eclatante nel ramo risale al 2001, quando all'IBM sono riusciti a costruire un registro quantistico coerente a *sette* bit che ha fattorizzato con successo il numero quindici; siamo sulla strada buona, ma qualcosa ci dice che ci vorrà ancora del tempo.

[16] L'Opteron 2.2GHz

Per prima cosa, cerchiamo di capire come funziona l'algoritmo di Shor: cominciamo da qualcosa che dovreste conoscere[17], ossia un Teorema di Eulero, qui lo ristatuiamo in un modo più semplice e operativamente più utile.

Dato un numero *N* e un numero *a* primo rispetto ad *N*, se costruiamo la sequenza delle potenze di *a* modulo *N*, prima o poi troveremo il valore 1. Ora, supponiamo questo accada per una potenza *pari* di *a*, ossia si abbia $a^{2b} - 1 = 0 \bmod N$; questo significa che $(a^b - 1)(a^b + 1)$ è un multiplo di *N*, e (se non sono primi) scomponendo questi due valori possiamo rapidamente ottenere dei fattori di *N*.

Meglio se facciamo un paio di esempi: partiamo con $N = 85$:

- Se prendiamo $a = 19$, le sequenze di potenze modulo *N* sono 19, 21, 59, 16, 49, 81, 9, 1, 19, 21, 59,... e abbiamo trovato un 1 in ottava posizione, visto che $19^8 = 1 \bmod 85$; questo allora significa che (attenti che lavoriamo in modulo!) $19^4 + 1 = 17$ e $19^4 - 1 = 15$ hanno entrambi fattori comuni con *N*; siccome 17 è primo, sarà lui medesimo un fattore di *N*, mentre per quanto riguarda 15, uno dei suoi fattori sarà anche fattore di *N* (5, nella fattispecie).
- Se prendiamo $a = 33$, le sequenze di potenze modulo *N* sono 33, 69, 67, 1, 33, 69, 67,... e abbiamo trovato un 1 in quarta posizione, visto che $33^4 - 1 = 0 \bmod 85$; quindi $33^2 + 1 = 70$ e $33^2 - 1 = 68$ avranno fattori comuni con *N*.

Il guaio è trovare *b*; andare avanti sin quando si trova un 1 rischia di venire lungo, visto che la dimensione del problema cresce esponenzialmente rispetto alla dimensione di *N*; però, se riusciamo ad individuare la frequenza di ripetizione di un numero all'interno della sequenza, attraverso l'espressione (in modulo) $a^k = a^j \Leftrightarrow a^{k-j} = 1 \pmod N$ possiamo trovare rapidamente una fattorizzazione di *N*.

Ora, chi dice "frequenza" dice "Trasformata di Fourier", che è fatta apposta per individuare le periodicità; se al posto delle usuali espressioni trigonometriche utilizziamo i numeri complessi, una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[0,2A]$ ha coefficienti di Fourier dati da:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2A}} \int_0^{2A} f(x) e^{\frac{in\pi x}{A}} dx;$$

dove il coefficiente che moltiplica l'integrale viene introdotto per poter scrivere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \int_0^{2A} |f(x)|^2 dx,$$

che in seguito diventerà molto importante[18].

Adesso, supponiamo di avere una sequenza $\vec{f} = f_0, f_1, \ldots, f_{2A-1}$ (con A intero), che rappresentano il valore della funzione nei punti $x = 0$, $x = 1$, ..., $x = 2A - 1$ della

[17] È stato presentato come "Bungee Jumpers" in RM132, Gennaio 2010, con soluzione nel medesimo numero a "Pagina 46".

[18] Non fosse per un leggero sottofondo di pessimismo insito nella formula, Rudy considererebbe questa la più bella formula della matematica; è valida non solo per la Trasformata di Fourier, ma anche per molte altre: la formulazione preferita da Rudy (tagliando un po' per i campi sul concetto di "energia") è che "Spedire una funzione o la sua trasformata ti costa uguale". Il che spiace, ma è molto importante in Cibernetica.

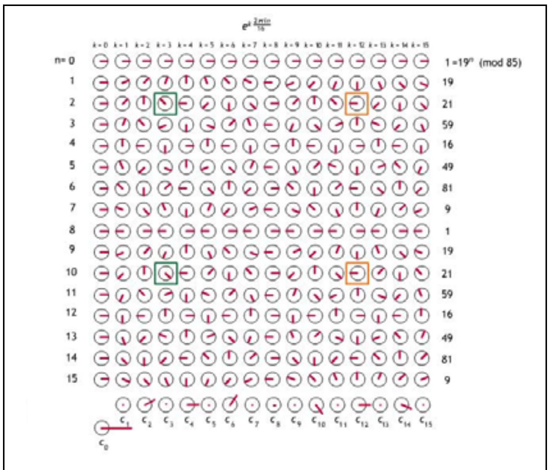
funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0,2A]$, e sostituiamo l'integrale della trasformata con una sommatoria fatta sui nostri punti:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2A}} \sum_{m=0}^{2A-1} f_m e^{\frac{ik\pi m}{A}} .$$

Supponiamo ora *f* abbia periodo *p*, ossia che $f_{m-p} = f_m$ per qualsiasi valore di m e che p sia un divisore di *2A*, ossia che $p = \frac{2A}{k}, k \in N$; se *n* non è un multiplo di *k* l'elemento f_m nella sequenza viene moltiplicato ad ogni suo riapparire per l'intero insieme delle radici dell'unità, e quindi assomma a zero; la formula completa (sembra complicata, ma non lo è) risulta:

$$c_n = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{2A}} \sum_{m=0}^{\frac{2A}{k}-1} f_m e^{\frac{in\pi m}{A}} & \text{se } n \text{ è multiplo di } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

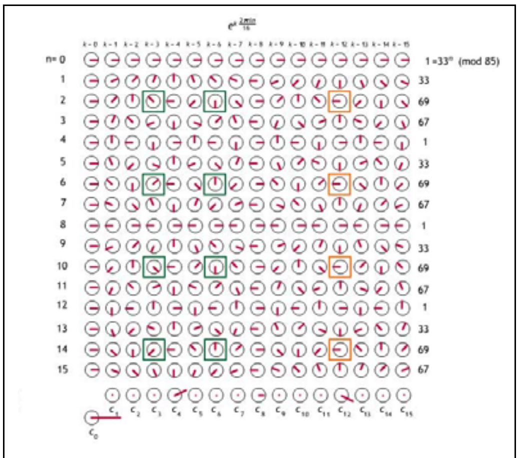
ossia, *gli unici coefficienti diversi da zero si hanno quando n è multiplo di k*. La cosa si vede nella Figura 9, nella quale sono rappresentati i coefficienti delle prime 16 potenze di 19 modulo 85; quando n è un multiplo di 2 (ad esempio nei quadrati arancioni), ogni ricorrenza dello stesso valore della potenza dà lo stesso valore, e quindi c_n può essere diverso da zero; negli altri casi (ad esempio nei quadrati verdi), vale zero.



9 *Si vede un motivo (forse).*

Per vedere se avete capito, ve ne facciamo vedere un'altra, la trovate in Figura 10: qui si tratta delle prime 16 potenze di 33 modulo 85: la sequenza ha periodo 4 e gli unici c_n diversi da zero sono proprio i multipli di 4.

Se non vi siete slogati le mascelle, adesso arriva la parte interessante: *Shor* ha dimostrato che per avere dei risultati interessanti nell'analisi dei residui di potenze nella ricerca dei fattori di *N*, bisogna analizzare le sequenze per cui la lunghezza 2^n è compresa tra N^2 e $2N^2$; quindi, per giocare con il nostro 85, dovremmo lavorare con sequenze di lunghezza 8192; a noi è bastato 16, ma solo perché sapevamo già dove saremmo andati a finire.



10 *Qui è più chiaro.*

Anche con le dimensioni obese degli hard disk e delle memorie di oggi (il nostro primo computer "serio" aveva 512K di RAM e un HD da *ben* 5 *mega!*) i numeri sembrano grandi, ma adesso vi raccontiamo di un computer che occupa meno spazio di un angelo che danza sulla punta di uno spillo. Ci siete tutti? Vogliamo sperarlo, visto che sin qui non è niente di nuovo e adesso comincia il bello. Cambiamo discorso.

I dati all'interno di un computer quantistico sono memoprizzati in *qubits* (abbreviazione di *quantom bits*), e vengono manipolati da delle *porte*; il qubit è un qualche sarchiapone i cui stati (quantistici) possono essere rappresentati da un vettore unitario in una base (ortonormale) bidimensionale del piano complesso, solitamente indicata con $|0\rangle$, $|1\rangle$, e lo stato in cui si trova la particella viene indicato come $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$; i due coefficienti sono genericamente dei numeri complessi soddisfacenti la condizione $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$; sin qui, normale meccanica quantistica: se *interrogate* il qubit (ossia se misurate il suo stato), ottenete il valore "0" con probabilità $|a_0|^2$, e il valore "1" con probabilità $|a_1|^2$.

Per quanto riguarda le porte, la cosa è più complessa: ad esempio, il *NOT quantistico*, sembra un NOT classico, come potete vedere dalla tabella in Figura 11; se però provate a inserire nella porta uno stato non puro (come sono, a priori, la maggior parte degli stati non misurati) del tipo $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$, e vi accorgete che il nostro aggeggio *lo lascia invariato*!

Input	Outpu t
$\|0\rangle$	$\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$\|0\rangle$

11 *"Quasi No"*

Ancora piuttosto interessante, come operazione unaria, è la cosiddetta *porta "R"* o, se preferite, lancio della moneta quantistica: trovate la tabella in Figura 12. Questo aggeggio, se mettete dentro $|0\rangle$, vi ritorna 0 o 1, ciascuno con probabilità ½. La cosa sembra utile come una bici con le ruote quadre, ma vedremo che serve.

Input	Output
$\|0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\|1\rangle$
$\|1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\|1\rangle$

12 *"Moneta Quantistica"*

Adesso andiamo nel difficile: porta a due qubit.

Per essere fisicamente realizzabile e non somigliare a una macchina del moto perpetuo, ogni stato in uscita deve variare linearmente con *ognuno* degli stati di ingresso, il che significa (non spaventatevi, siamo in dimensione due) che lo spazio degli stati di una coppia di qubit è il *prodotto tensoriale* dei singoli spazi degli stati; non solo ma la porta viene ad essere un operatore lineare invertibile su questo prodotto tensoriale. Adesso ve la spieghiamo meglio, proviamo con un esempio. Scusate la notazione, ma Equation Editor scrive solo in nero e qui ci servono i colori.

Supponiamo la porta agisca su due qubit: il primo, qubit, ha base dello spazio degli stati |0>, |1> e il secondo, indicato con qubit, ha spazio degli stati |0>, |1>. Se i due stati sono a=a_0|0>+a_1|1> e b=b_0|0>+b_1|1>, il prodotto tensoriale dei due stati è rappresentato dalla matrice:

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 \end{pmatrix}$$

Notiamo, incidentalmente, che anche questo è uno spazio, quindi ha una base rappresentata dalle quattro possibili matrici composte da tre zeri e un uno ottenute per prodotto tensoriale di ogni ket di un colore per ogni ket dell'altro colore[19] (no, non ve li scriviamo).

L'aggeggio che otteniamo moltiplicando i due spazi degli stati avrà genericamente forma

[19] Nota per quelli che non si ricordano la notazione di Dirac: un "ket", ad esempio, è $|a\rangle$, mentre il suo collega $\langle a|$, logicamente, si chiama "bra". *Evidentemente*, quelli di cui stiamo parlando sono Spazi di Hilbert.

$$c_{0,0}\ |0>|0>+c_{0,1}\ |0>|1>+c_{1,0}\ |1>|0>+c_{1,1}\ |1>|1>$$

che potete organizzare in una matrice, fermo restando che dovete anche avere la condizione $\left|c_{0,0}\right|^2+\left|c_{0,1}\right|^2+\left|c_{1,0}\right|^2+\left|c_{1,1}\right|^2=1$.

Tutto chiaro? Bene, questa è la parte che non ci serve: generalmente questo oggetto *non è* il prodotto tensoriale a⊗b: infatti possiamo scrivere la matrice come prodotto tensoriale solo quando il determinante è zero.

Quelli che ci interessano, però, sono proprio gli stati che *non* sono nella forma a⊗b: questi stati vengono detti "*entangled*" (vuol dire legati: ma tutto il mondo usa entangled), e la cosa si capisce da un esempio.

Supponiamo di avere un registro a due qubit che si trovi nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0>\otimes|0>+\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1>\otimes|1>$, e misuriamolo; abbiamo probabilità $\frac{1}{2}$ di trovarlo nello stato $|0>\otimes|0>$ e pari probabilità di trovarlo nello stato $|1>\otimes|1>$. Adesso però misuriamo qubit; se lo troviamo nello stato $|0>$, questo significa che anche qubit sarà nello stato $|0>$: insomma, i due stati sono legati (ossia *entangled*) tra di loro, se non lo fossero, misurare uno dei qubit non avrebbe permesso di sviluppare ipotesi sull'altro.

Bene, adesso cerchiamo di applicare l'algoritmo di Shor ad un computer quantistico.

L'idea è di cercare due fattori primi di un numero N partendo da un numero $x<N$ e cercando delle periodicità attraverso l'analisi di Fourier nella sequenza:

$$x^a \bmod N, \quad a=0,1,2,\ldots$$

Per prima cosa, procuriamoci gli strumenti di lavoro: servono un registro L di q qubit, con $N^2<2^q<2N^2$ e uno R abbastanza grande da contenere N: siccome qui il ruolo dei *nuclei di ferrite* della preistoria informatica è giocato da particelle tipo l'elettrone, le dimensioni non sono un problema.

Come condizione iniziale, mettiamo tutti i qubit di L nello stato $\left|0\right\rangle$.

Poi, carichiamo in L una *sovrapposizione equiprobabile* di tutti i numeri nell'intervallo $\left[0,2^q-1\right]$; la cosa si fa in un colpo solo, applicando la porta R_j al qubit j per tutti i qubit[20]. Visto, che la moneta quantistica serviva?

Adesso, per ogni numero a in L, calcoliamo $x^a \bmod N$ e scriviamolo in R; la cosa si può fare simultaneamente per tutti gli a presenti in L e nei due registri ci ritroviamo la sovrapposizione (attenti che c'è un prodotto tensoriale):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2^q-1}\left|a\right\rangle\otimes\left|x^n \bmod N\right\rangle.$$

Adesso, applichiamo la Trasformata Quantistica di Fourier al registro L: in pratica (sic!)

$$\left|a\right\rangle \text{ diventa } \frac{1}{\sqrt{2^q}}\sum_{c=0}^{2^q-1}e^{\frac{2i\pi ac}{2^q}}\left|c\right\rangle,$$

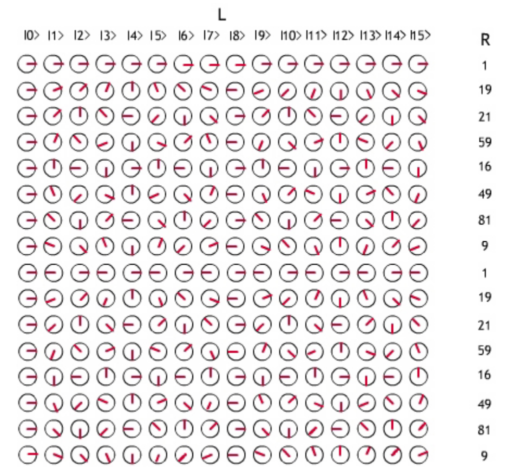
Andate a dare un'occhiata alla Figura 13: ne avete già viste di simili, quindi non dovrebbe spaventarvi troppo.

[20] Questo è uno dei trucchi dell'informatica quantistica: non si fanno passare i bit nelle porte, si passano le porte sui bit. Molto più veloce.

Qui ogni colonna corrisponde a una base standard ("pura", se preferite) di L, mentre l'ultima rappresenta il contenuto di R; per collegarci alle formule precedenti, $L \otimes R$ contiene la sovrapposizione:

$$\frac{1}{\sqrt{2^q}} \sum_{n=0}^{2^q-1} \frac{1}{\sqrt{2^q}} \sum_{c=0}^{2^q-1} e^{\frac{2i\pi ac}{2^q}} \left|c\right\rangle \otimes \left|x^a \bmod N\right\rangle .$$

Lavoriamo sempre con $N = 5, x = 19, q = 4$.



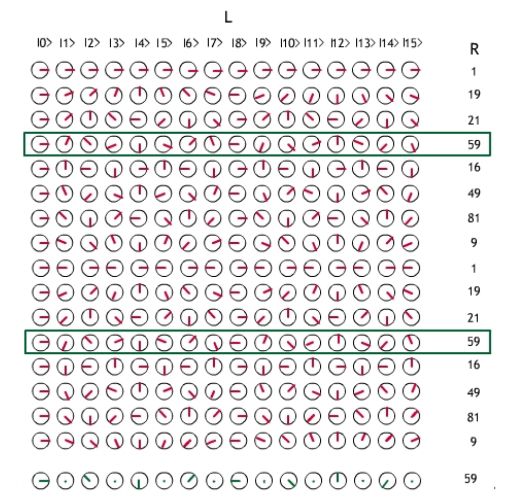
13 *…è evidente…*

Prima di fare il prossimo passo, notiamo una cosa: stiamo facendo una trasformata veloce di Fourier, che richiederebbe 2^q moltiplicazioni per ognuna delle 2^q righe, ma la grande idea di Shor è stata di utilizzare la sovrapposizione e l'entanglement tra gli stati per cavarsela in un paio di passi.

Adesso, siamo pronti al passo cruciale: leggiamo il registro R.

Questo è (nel nostro esempio) in una sovrapposizione di sedici stati, ma uscirà un valore solo, ad esempio 59: il registro L, essendo entangled con R, collasserà anche lui in una *somma di tutti gli stati* $\left|59\right\rangle$: trovate i vari stati evidenziati nei rettangoli verdi e, in ultima riga, quello che leggete nel registro L.

In questo passo, quello che otteniamo è un multiplo esatto di $p = \frac{2^q}{r}$ e, ripetendo il calcolo con lo stesso x un certo (piccolo) numero di volte, ci porta con notevole probabilità a ottenere una serie di valori il cui unico fattore comune è p, e quindi possiamo determinare facilmente r.



14 *Collassato!*

Ora, potrebbe sorgere un piccolo dubbio: qui $r = 8$, ossia è una potenza di 2, e quindi divide esattamente 2^q; si può comunque verificare (la cosa è *piuttosto* complicata, ma se chiedete ve la passiamo) che basta aumentare la dimensione del registro L per avere dei risultati soddisfacenti; per questo motivo, all'inizio del conto, avevamo richiesto che fosse $2^q > N^2$; noi abbiamo barato, ma per analizzare in modo corretto 85 avremmo dovuto utilizzare $q = 13$ e una tavola dei coefficienti di dimensione 8192^2; ora, se confrontate questo aggeggio con il Numero di Avogadro, vi accorgete che il rischio maggiore è di perderlo, sulla punta dello spillo…

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms