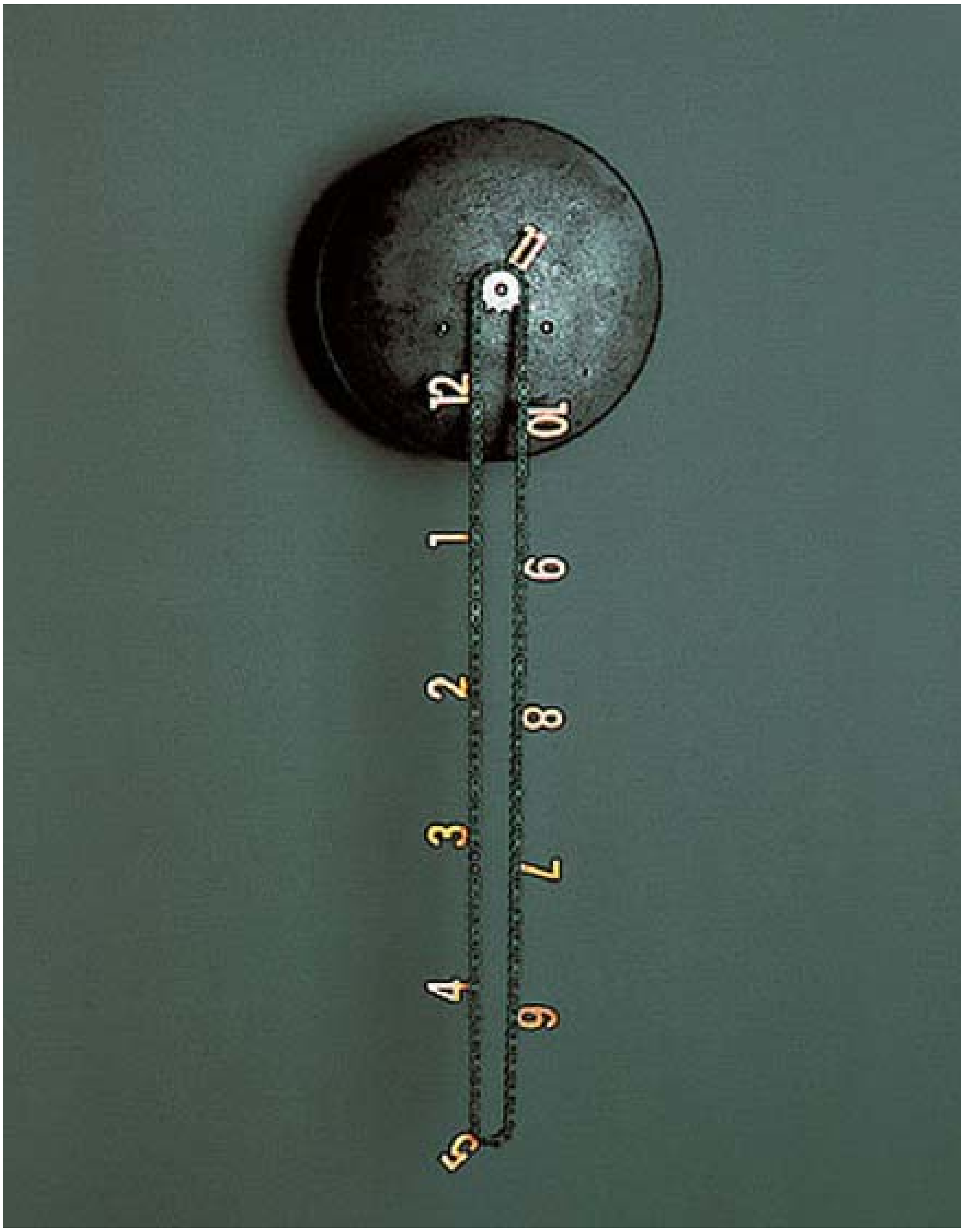
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 132 – Gennaio 2010 – Anno Dodicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM131 ha diffuso 2'503 copie e il 10/01/2010 per Google eravamo in 10'300 pagine.

Promesso, per un po' non parliamo più di orologi, ma questo ci pare degno di nota. Lo ha inventato ***Andreas Dober*** e (se non avete paura delle conseguenze legali), non dovrebbe essere difficile duplicarlo riciclando pezzi della vecchia bicicletta. Se preferite le vie più corrette, potete portarvelo a casa per 2'300 dollari. Sconsigliato a chi, come Rudy e Doc, ha gatti curiosi (BTW, sono circa le undici e dieci).

1. Tout se tient

La citazione[1] e le due definizioni qui sopra, oltre a rappresentare (in questa forma) un'indubbia sfida per la nostra Linotype, hanno un'altra correlazione.

Non abbiamo mai particolarmente apprezzato la frase di Humpty-Dumpty, per l'evidente motivo che il concetto medesimo di *dialogo* implica un accordo sulla terminologia utilizzata; nel contempo, però, abbiamo visto utilizzare i termini "morale" e "etica" a significare il medesimo concetto, sembrando l'unico criterio di scelta tra i due quello retorico (nel senso di "bel parlare") di non avere la ripetizione del termine troppo vicino alla stessa ricorrenza; criterio dubbio quant'altri mai, visto che molte figure retoriche

[1] È nostra abitudine fornire sempre una traduzione, e non vogliamo fare eccezione qui: "*Quando* io *uso una parola – disse Humpty Dumpty in un tono piuttosto sprezzante – significa esattamente quello che io decido che significhi, né più né meno.*".

(epifora, iterazione, anafora, epanalessi, dittologia[2]…) non sono altro che forme particolari di ripetizione, tutte ampiamente utilizzate in letteratura.

Il fatto che due parole diverse abbiano il medesimo significato già ci insospettisce quando si parla di lingue a noi scarsamente note[3], potete facilmente immaginare cosa ne pensiamo quando si tratta della nostra lingua natale; va detto che anche il nostro Zingarelli, dal quale abbiamo preso le definizioni di testa, in questo caso non aiuta.

Nel mese di maggio del 2009, due degli estensori di queste note sono stati coinvolti come secondi relatori in una conferenza relativa al tema della bioetica: il tema nasceva dalla discussione relativa al caso di Eluana Englaro e, indipendentemente da quali fossero le posizioni dei relatori, ci venne richiesto di contribuire facendo chiarezza su termini scientifici. Visto che il terzo (in ordine di intervento: in realtà, era il principale) relatore era Maurizio Mori, docente di Bioetica all'Università di Torino, il nostro ruolo si ridusse alla spiegazione del concetto di "rivoluzione scientifica"; la nostra idea iniziale, cestinata poi per scelta, era di suscitare alcuni dubbi sulla coincidenza dei concetti di "morale" ed "etica".

E qui, come accennato più sopra, casca l'asino.

Compulsati i più svariati dizionari di filosofia, testi liceali del quarto e quinto[4] anno, una definizione dicotomica del pensar bene tra morale ed etica risultava irraggiungibile. Quando, a uno di noi, sono tornate in mente antiche frequentazioni.

Nei cosiddetti Anni di Piombo, i due terzi della Redazione di RM frequentavano una libreria specializzata in fantascienza[5], dove imperava un Famoso Esperto italiano; all'epoca, stranamente, i due personaggi tendevano a restare silenziosi, non condividendo le idee politiche né della libreria, né dell'esperto, né della casa editrice per la quale lavorava; si aggiravano tra gli scaffali e, in funzione delle proprie simpatie, cercando di ignorare il notevole contributo acustico del Famoso Esperto, spendevano le poche lire che avrebbero dovuto rappresentare il pranzo in libri di fantascienza. E un giorno uno dei due loschi figuri compulsò un volume: l'autore era degno di fiducia, e lo sguardo vagamente annoiato del Famoso Esperto prometteva bene. La frase "…mah, non posso parlarne male, visto che l'ho tradotto…" ci faceva anche sentire soddisfatti politicamente, nonostante il titolo facesse sembrare Nietzsche un membro dei Centri Sociali (all'epoca, si chiamavano "Autonomi").

Tout se tient: anche quel libro, terminata la lettura, finì in biblioteca ad accumulare polvere; sin quando un vago ricordo dei contenuti, nei primi mesi del 2009, non si affacciò timidamente alla coscienza. L'ultima parte era letteralmente satura di definizioni che l'Esperto aveva tradotto con i termini "morale" e "etica", e li aveva contrapposti[6]!

---

[2] Ci sentiamo in dovere di passarvi un paio di definizioni, visto che il Capo le ha buttate lì come fossero cosa stranota. L'*epifora* è una figura retorica di ordine che consiste nel ripetere la stessa parola o le stesse parole alla fine di frasi o versi successivi, per rinforzare un concetto. La figura retorica speculare è l'*anafora*, che consiste nel ripetere la stessa parola all'inizio della frase. L'*epanalessi* o *geminatio* è una figura retorica che consiste nel ripetere all'inizio, al centro o alla fine di una frase una parola o un'espressione per rafforzarne l'idea. La *dittologia* consiste nell'usare una coppia di parole dal significato simile collegate da una congiunzione per ottenere un particolare effetto ritmico oltre che semantico.

[3] Ad esempio il giapponese: nel compleanno di Aida Yasuaki, "Shedworking", RM121, il problema verteva sulle parole "*bushi*" e "*samurai*". Assolutamente non sinonimi, come speriamo di aver dimostrato.

[4] Solo quarto e quinto perché, come diceva Lagrange – RM048, "Torino 1750" – parlando d'altro, è lì "la vera filosofia di tutta la questione".

[5] Il restante terzo frequentava suppergiù la seconda elementare.

[6] Raggiunto il *climax*, possiamo fornirvi alcuni parametri: Theodore STURGEON, "*More than Human*", Galaxy, 1953. Traduzione italiana di Riccardo VALLA: "*Nascita del Superuomo*", Editrice NORD, 1974. Per il nome della libreria, visto che quest'anno a Capodanno i due soggetti non si sono incontrati, dovrete aspettare: c'è, probabilmente, lo spunto per un altro compleanno.

Avevamo preparato un grazioso schemino, completo dei numeri di pagina ai quali si riferiva la citazione (versione italiana):

Morale	**Etica**	**pag.**
Istinto di sopravvivenza *codificato* all'interno del gruppo.	Codice / leggi / regole che permettono all'individuo di vivere in modo *utile* alla propria specie.	255
Regole seguite dalla *comunità* per assicurare la sopravvivenza dell'*individuo.*	Regole seguite dall'*individuo* per assicurare la sopravvivenza della *comunità.*	256
Obbedienza alle regole formulate dalla comunità per aiutare a (soprav)vivere l'individuo.	Fede (non obbedienza) ad un codice per una sopravvivenza superiore a quella personale.	263

Una definizione sicuramente incompleta ma che consideriamo ragionevolmente efficace è quella di vedere la "morale" come il non compiere un'azione per paura di un male verso di noi, mentre secondo "etica" compiamo un'azione per un bene verso gli altri: forse, un esempio chiarisce il concetto.

Secondo alcuni, un esempio di questa differenza è la *Scommessa di Pascal*. Pascal[7] sosteneva che fosse meglio credere in Dio piuttosto che non credere seguendo il seguente ragionamento: supponendo ci sia il 50% di probabilità che Dio esista:

1. Se Dio non esiste:
    a. Se hai creduto in Dio, non ne avrai nulla
    b. Se non hai creduto in Dio, non ne avrai nulla
2. Se Dio esiste:
    a. Se hai creduto in Dio, ne avrai bene
    b. Se non hai creduto in Dio, ne avrai male.

Sempre secondo Pascal, se sommiamo i singoli casi, credendo in Dio abbiamo (nulla+bene=bene), mentre non credendo in Dio abbiamo (nulla+male=male); quindi, conviene credere in Dio.

Ora, indipendentemente dal nostro credere o no in Dio, secondo le nostre definizioni di "morale" e "etica", mutuate da Sturgeon, il ragionamento è moralmente ineccepibile, ma eticamente schifoso[8].

Vediamo un altro esempio.

[7] Protagonista di "I lati di Dio", RM053.

[8] Non solo, ma matematicamente fa acqua da tutte le parti: il 50% dell'esistenza di Dio, contato il migliaio di religioni esistenti oggi al mondo, andrebbe specificato su una singola divinità. Capite che il credere nel Dio *sbagliato* vi porta subito nella stessa categoria dei non credenti, anzi, peggio. Quindi, va bene il 0.005% delle volte.

Guglielmo Libri o, per meglio dire, il Conte Guglielmo Libri Carucci della Sommaja, nasce il primo gennaio del 1803 a Fiesole, in un luogo che prima di chiamarsi Italia era Granducato di Toscana.


1 *Guglielmo Libri Carucci della Sommaja .*

La sua era una delle più antiche famiglie fiorentine, e la sua educazione fu in linea con le possibilità familiari: dopo una buona educazione di base, entra all'Università di Pisa nel 1816 (quindi, all'età di tredici anni) con l'intenzione di studiare legge; cambia velocemente idea, dirigendo i suoi studi verso la matematica e le scienze naturali.

Non vorremmo, a questo punto e con quel che segue, dare l'immagine di un *bon vivant* che ha scoperto la comodità del ruolo di "studente universitario a vita" per occuparsi dei fatti suoi scroccando soldi ad una famiglia ragionevolmente agiata: nel 1820 (anno della laurea[9]) pubblica le *Memorie […] sopra la teoria dei numeri*, e il libro viene decisamente ben accolto non solo da qualche professore in cerca di finanziamento, ma da gente del calibro di Babbage[10], Cauchy[11] e Gauss: questo permette un deciso sveltimento della burocrazia (che, se non fossimo in Toscana, definiremmo "borbonica") e tre anni dopo Guglielmo si ritrova ad insegnare. Ciò nonostante, il Nostro trova la cosa piuttosto noiosa e riesce ad ottenere un'esenzione dall'insegnamento.

Riassumendo, siete in questa posizione:

1. Ragionevolmente agiati
2. Non avete impegni di docenza
3. Vi piace la matematica

Alla domanda "Cosa fate?", almeno all'inizio dell'Ottocento, l'unica risposta è "Parigi", e Guglielmo vi si reca incontrando persone del calibro di Laplace, Poisson, Ampère, Fourier e Arago. Siccome l'incontrare i massimi matematici del tempo non sembra bastargli, durante uno dei ritorni a casa riesce ad essere coinvolto in una cospirazione politica tendente a dotare il Granducato di una nuova costituzione: la cosa gli vale, nel 1830, l'occasione di scappare nuovamente in Francia (per evitare l'arresto), dove spera che le amicizie scientifiche gli permettano di lavorare. Nel 1833 riesce ad ottenere la cittadinanza francese e ad entrare all'*Académie des Sciences*, dove succede nientemeno che a Legendre.

Eletto all'Accademia (che, tra l'altro, comporta un ottimo stipendio), chiunque si considererebbe "arrivato" e, probabilmente, si occuperebbe con tranquillità del proprio quieto vivere: non Guglielmo, che prende l'impegno di Accademico sul serio e comincia a litigare.

9 Era al quarto anno, e qualcuno potrebbe dire "tutto normale": considerate comunque che all'epoca aveva diciassette anni.

10 Di lui si parla in "La farina di Ofelia", RM059.

11 "L'antipatico" di RM117.

Infatti, esistevano fortissimi risentimenti sul fatto che una persona non francese *di nascita* avesse avuto accesso all'Accademia; a questo si aggiunga che, a voler essere gentili, il nostro era un tipo arrogante.

Comunque, l'amico Arago (Segretario Perpetuo dell'Accademia) gli trova un incarico al Còllege de France e, negli anni successivi, Libri diventa assistente di Calcolo delle Probabilità alla Sorbona: non sappiamo nulla del carattere di Arago, ma i due finiscono per litigare e, nel 1835, vengono citati come il peggior nemico uno dell'altro. Non solo, ma tutti gli amici di Arago, a torto o a ragione, si scagliano contro il Nostro. Tra questi, l'altro monumento della matematica francese, Liouville: sono diventati storici i litigi tra i due all'Accademia, al punto che *"…Liouville fece il suo famoso annuncio relativo all'importanza del lavoro di Galois sulle equazioni algebriche in risposta ad un attacco di Libri nel 1843…"*[12].

Dal punto di vista della produttività scientifica, i migliori anni per Libri sono quelli tra il 1830 e il 1841: in questo periodo, infatti, tra le altre cose pubblica i primi quattro volumi (dei sei previsti: gli altri due non hanno mai visto la luce) dell'opera "*Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la rénaissanace des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*"; per avere un'idea dello spessore dell'opera, consideriamo che anche quel barboso di Benedetto Croce ha detto "*…una ricca ed eccellente raccolta di conoscenze non comuni e un lavoro di versatile studioso e vivida mente*[13]*…*".

Uno dei punti di forza dell'*Histoire* è l'enorme numero di citazioni delle fonti: Libri era diventato un esperto collezionista di libri rari e di manoscritti matematici e, nel 1841, alla pubblicazione dei primi quattro volumi, la sua raccolta di manoscritti toccava ormai il numero di milleottocento, alcuni dei quali erano stati sino ad allora considerati perduti: Fermat[14], Descartes, Eulero[15], d'Alembert, Galileo[16], Leibniz[17], Mersenne[18], Gassendi… Nel 1847 (ossia in sei anni dalla prima misura nota) la sua raccolta tocca i 40.000 volumi.

Adesso, non pensate al canuto studioso chiuso nella sua torre d'avorio che claudicante visita antiquari alla ricerca di edizioni rare: come potete facilmente calcolare, Guglielmo aveva all'epoca quarantadue anni, e nel 1841 era stato nominato Ispettore delle Biblioteche di Francia.

Per rispondere alla domanda di come una persona odiata dall'intero establishment accademico dell'epoca sia riuscito a raggiungere un posto così prestigioso, partiamo dall'*incipit* di un libro che c'entra decisamente poco:

> *Uno spettro si aggira per l'Europa: lo spettro del comunismo. Tutte le potenze della vecchia Europa si sono coalizzate in una sacra caccia alle streghe contro questo spettro: il papa e lo zar, Metternich e Guizot, radicali francesi e poliziotti tedeschi.*

Sì, il Carneade di questa frase, *quel* Guizot, è l'amico di Libri che, sfruttando l'ampia conoscenza in libri antichi del Nostro, gli permette di raggiungere l'ambita carica.

---

[12] Rice: *Brought to book: the curious story of Guglielmo Libri.* European Mathematical Society Newsletter, 48 (2003), 12-14.

[13] L'onestà intellettuale ci impone di terminare la citazione: "*…ma non quello che ci si aspetterebbe da quella che dovrebbe essere una storia della scienza."* E, visto quanto ci sta simpatico Benedetto Croce, lo consideriamo un complimento.

[14] "Polenta d'estate", RM091.

[15] "Di minuscole forme", RM051.

[16] "Rigoroso esame", RM085.

[17] "L'acusmatico, RM054.

[18] "Dalla cella all'infinito (via rete)", RM092.

Le fiabe di solito finiscono a questo punto, ma la vita reale continua: nel 1848 in Francia e non solo[19] c'è una rivoluzione, Guizot esce dal governo, Libri non ha più amicizie influenti e gli viene informalmente comunicato che a breve sarebbe stato arrestato sotto il sospetto di furto di libri dalle biblioteche francesi: prima che il provvedimento possa essere messo in atto, Libri raggiunge l'Inghilterra, dove 30,000 volumi l'avevano di poco preceduto[20].

Chi ha nemici in Francia ha amici in Inghilterra, almeno all'epoca: Libri viene accolto come un eroe, e un italiano, Antonio Panizzi, all'epoca Direttore della Libreria del British Museum, gli procura l'amicizia di Augustus DeMorgan, che scrive una serie di articoli in difesa del Nostro: e, visto che abbiamo iniziato questo pezzo sostenendo la scarsa affidabilità dei sinonimi, lo citiamo in lingua originale[21]:

> " *... in science he would not be a Frenchman, but remained an Italian. One of his great objects was to place Italian discovery, which the French historians had not treated fairly, in its proper rank. ... We suspect that political animosity generated this slander, and that a real belief in the minds of bad men that collectors always steal, and that the charge was therefore sure to be true.*"

Comunque, in Francia lo condannano a dieci anni (in contumacia) per furto, e quindi Guglielmo deve restare in Inghilterra; arrivato senza un soldo, riesce a mantenere uno stile di vita ragionevole.

Infatti, pubblica il "*Catalogue of the Mathematical, Historical, Bibliographical and Miscellaneous Portion of the Celebrated Library of M. Guglielmo Libri* ", contenente i titoli di 7.628 libri che vengono messi in vendita a due riprese: unanimemente, in Inghilterra, questa è considerata la base bibliografica per tutti gli studi di storia della matematica[22].

Nel 1868, all'età di sessantacinque anni, la salute di Libri comincia a peggiorare: non può tornare in Francia, quindi torna nella casa natìa, a Fiesole, dove si spegne il 28 settembre 1869, presumiamo circondato da 22.372 libri.

Nella nostra accezione, il comportamento di Libri è forse moralmente riprovevole. Eticamente, una volta tanto, non abbiamo dubbi.

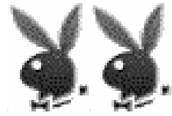
[19] Ulteriori notizie in un libro dello stesso autore del brano citato poco sopra, dal titolo "Il 1848".

[20] Per una non solo più avvincente, ma anche più corretta narrazione di questo evento, si veda "Rue Sainte Marguerite, N^ 41", RM055, agosto 2003.

[21] Che potrebbe essere tradotta più o meno così: *"…nella scienza non fu un francese, ma rimase un italiano. Uno dei suoi grandi obiettivi fu di porre le scoperte italiane, che gli storici francesi non avevano trattato con giustizia, nella giusta luce. … Sospettiamo che fu animosità politica a generare questa calunnia, insieme con la reale convinzione nella mente delle persone malvagie che i collezionisti rubano sempre, e l'accusa dovesse quindi essere vera."*

[22] Non lo diciamo noi: lo dice il St. Andrew's College.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Perché la gallina ha attraversato la strada?			
Nessuno si fila il filetto (The Ultimate Problem)			

2.1 Perché la gallina ha attraversato la strada?

Negli U.S.A. esistono un mucchio di barzellette di pessimo gusto sul perché le galline attraversino la strada, e a noi ne piace una sola[23] ma, avendo trascorso un'infanzia, una giovinezza e una "presa di patente" (si dice?) in un luogo decisamente bucolico e pieno di galline vaganti, siamo piuttosto *concerned* rispetto al problema. Questa volta, vorremmo calcolare le probabilità di sopravvivenza della gallina.

Il nostro *aspirante buon brodo* (nel senso che è ancora giovane e vorrebbe diventare vecchia) si trova sul bordo di una strada a senso unico dove esiste il limite di velocità (rigorosamente ed esattamente rispettato) di 30 km/h; le auto, che per comodità assimiliamo a dei rettangoli di 3 metri per 2, sono distanziate l'una dall'altra di 50 metri (stranamente, rispettano le distanze di sicurezza. OK, questo è uno sforzo incredibile di fantasia… Quella dei CD-ROM nella macchina di Rudy ve la raccontiamo poi con le soluzioni, se fate i bravi). La gallina, essendo notoria la sua (della gallina, non di Rudy) inettitudine in cinematica del punto materiale, non sta lì tanto a pensarci e attraversa quando le pare alla folle velocità di 20 km/h ad un angolo non necessariamente perpendicolare alla linea di mezzeria (l'avete mai vista una gallina scappare? Ecco, in quella direzione), ma quantomeno in linea retta.

Quello che ci interessa sapere, è se le probabilità di mangiare *pollo al babi* (tutti i piemontesi sanno cos'è, gli altri se lo possono immaginare) siano maggiori o minori del 10%.

2.2 Nessuno si fila il filetto! (The Ultimate Problem)

Niente da fare, ci abbiamo provato in tutti i modi. Nessuno vuole giocare a Filetto[24]. Promesso, questo è l'ultimo problema, in ogni senso: anche perché ci pare che una volta

[23] "Perché la gallina ha traversato il Nastro di Möbius?" "Per andare dall'altra… Aaah, lasciamo perdere…"

[24] Quello che nel testo viene chiamato "filetto" è in realtà il "tris", mentre molte persone per "filetto" intendono il "tria" o "tavola reale".

risolto questo si sia risolto tutto, in merito. Attenzione che dopo la domanda c'è una richiesta facoltativa.

Ormai stufi di giocare a Filetto, avete scritto un programma che lo gioca da solo; siccome però il gioco proprio non vi piace, non avete programmato una raffinatissima strategia: il programma gioca *casualmente*, nel senso che butta giù alternativamente un tondo o una ics (dipende da chi deve giocare) e l'unica cosa che fa è controllare dopo ogni mossa se uno dei due vince da qualche parte, eventualmente fermandosi e annunciando la vittoria del giocatore opportuno (o il fatto che la partita è finita patta): nessuna analisi, insomma.

Ora, voi e il vostro amico del cuore siete seduti davanti al programma che gioca; lo avete programmato per giocare un'enormità di partite, e decidete di scommettere con il vostro compare su chi vincerà più partite, se il primo o il secondo giocatore. Mentre siete presi dall'analisi, arriva il vostro (di tutti e due) amico di stomaco (il cuore è occupato), e decidete che uno di voi scommetterà sul primo vincente, un altro sul secondo vincente e il terzo scommetterà che ci saranno più patte. Su chi scommettete? Primo, secondo o patta?

Come dicevamo, una gentile richiesta. Sapete tutti che Doc si arrabbia quando sente parlare di *evidenti* ragioni di simmetria; bene, in questo caso si arrabbia anche Rudy, visto che la semplificazione dell'albero delle partite del filetto per via informatica è anche secondo lui, tutt'altro che *evidente*, soprattutto se volete renderla veloce (l'aveva fatta, una volta, in basic con il *reversi*). Quindi, questa parte analizzatela bene e li farete contenti.

3. Bungee Jumpers

Dimostrate che, per qualsiasi naturale *N*, se $r = \varphi(N)$ (toziente di *N*) è il numero dei naturali minori di *N* che *non* dividono *N*, se a è un numero primo rispetto a *N*, allora $a^r - 1$ è divisibile per *N* [*NdR: Teorema di Eulero. Uno dei tanti…*].

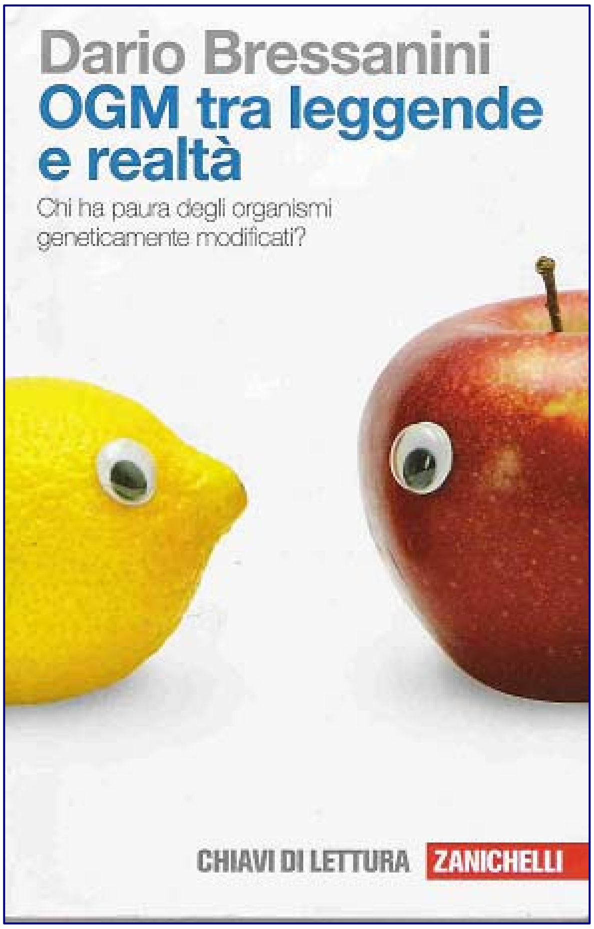
La soluzione, a "Pagina 46"

4. Era Una Notte Buia e Tempestosa

Esistono forme diverse di "regolarità", anche dal punto di vista meramente temporale; basta dare uno sguardo in edicola per rendersi conto che si trovano pubblicazioni quotidiane e pubblicazioni settimanali, e molte altre periodicità: quindicinali, bisettimanali, trimestrali, semestrali, perfino annuali; per non parlare del fatto che, fino a qualche anno fa, i giornali uscivano addirittura con due edizioni al giorno. E anche senza andare in edicola, basta guardare all'interno di questo stesso giornale: RM ha una immutabile cadenza fissa, e così la maggior parte delle sue rubriche, come i PM, o Compleanni, le S&N, eccetera. Però esistono anche rubriche che vedono la luce solo con una certa cadenza, ogni *n* mesi, per dirla alla maniera matematica. Solo che, appunto, quel *n* è comunque un numero ben preciso e inamovibile.

Questa rubrica, invece – lo abbiamo ripetuto fino alla noia – non ha questa regolare periodicità: però, con nostro stesso stupore, sta assumendo una sorta di regolarità impropria e imprevista, riassumibile con l'espressione "non comparire per un sacco di tempo, poi venire pubblicata per un sacco di mesi di seguito". È una regolarità davvero barbara, a ben vedere, ma è comunque una regolarità. Forse; comunque, non è che la cosa sia davvero importante, no?

4.1 OGM tra leggende e realtà



«*Un campo di grano è naturale quanto un grattacielo*»

Ci sono un sacco di buone ragioni per ospitare "*OGM tra leggende e realtà*" di Dario Bressanini in questa rubrica. La più immediata è che poche persone possono essere catalogate come "amici di RM" quanto Dario: lettore della prima ora, gran solutore di problemi, primo scrittore "ospite" su una rubrica fissa di RM[25] e, naturalmente, tenutario di uno dei "blog d'autore" di Le Scienze, al pari di noi. A voler essere corretti fino alla pignoleria, bisognerebbe anche precisare che il suo blog "*Scienza in Cucina*" è di gran lunga più popolare[26] del nostro, senza contare che senza il suo il nostro probabilmente non sarebbe mai esistito. Ma, anche se sussistono evidenti debiti di riconoscenza da parte della redazione di RM nei suoi confronti; anche se il criterio fondamentale di "appartenenza alla comunità *erremmesca*" del libro recensito è oltremodo soddisfatto; anche e nonostante tutto ciò, permangono ancora molti forti argomenti indipendenti per parlare di questo libro in questa rubrica.

E, a ben vedere, la cosa può sembrare strana: in fondo, questa rubrica parla solitamente di testi di matematica: e per quanto il professor Bressanini sia in grado di discettare di matematica assai meglio di noi, questo suo libello non è un testo di matematica: tratta infatti di biologia, o meglio ancora di sociobiologia, se non proprio di biologia antropologica; ovvero di come alcuni argomenti di biologia vengano affrontati e vissuti dall'uomo contemporaneo.

E allora? È lecito parlarne in questa sede?

Dichiariamolo subito: la risposta è sì. In linea di principio, tutti coloro che appartengono alla virtuale comunità di RM sono interessati alla matematica, e di conseguenza le loro opere meritano anche solo per questo la dignità di recensione, anche fossero romanzi d'amore o manuali di lombricoltura. E con questo si sarebbe detto tutto, se non fosse che questo libro di Bressanini è davvero, in un certo senso, *anche* un libro di matematica, e come tale rende la eventuale perplessità dovuta alla sua presenza qui del tutto illegittima.

---

[25] Se non riconoscete il riferimento, fate un salto in archivio a scaricare RM064, Maggio 2004: quel mirabile compleanno "*Requiem per una Formula*", dedicato alla storia della Cubica, è suo.

[26] Al pari di "*Notiziole di .mau.*" (altro blog di un dotto amico di RM) orbita quasi sempre all'interno dalla Top100, ovvero tra i cento blog più seguiti di Italia (e se ne contano ben più di ventimila, ormai)

Sia ben chiaro: nelle duecento e passa pagine del libro non troverete una formula neppure a pagarla, pochissimi numeri, e a malapena qualche grafico. Ma la matematica è qualcosa di più dei numeri e delle formule: è lo studio dei rapporti, delle relazioni, perfino delle armonie che si instaurano tra grandezze in qualche modo tra loro comparabili. E la prima cosa che fa la matematica, nel momento stesso in cui comincia a esistere come reale disciplina della mente, è quella di definire gli oggetti che costituiscono il suo campo di interesse.

Definizioni: ogni testo di matematica ne contiene. Anzi, forse è questa la caratteristica più diretta, più immediata dei testi di matematica: ogni buon testo scientifico dovrebbe partire dalla definizione degli enti di cui parla, eppure si possono facilmente trovare dei libri di argomento scientifico che non si preoccupano di delimitare con precisione il loro campo d'azione. Però ciò non è immaginabile per un testo di matematica: articolo, libello o tomo che sia, uno scritto matematico comincia sempre dalle definizioni.

E il libro di Bressanini è quasi esclusivamente un libro di definizioni. Questo, almeno in una certa misura, lo rende un libro di matematica. L'argomento reale, il cuore del libro sono ovviamente gli OGM, gli organismi geneticamente modificati; e sono un argomento sul quale ognuno di noi ha già, verosimilmente, una sua ben precisa opinione. Ma la domanda che bisognerebbe porsi è come questa opinione si sia formata, in base a quali reali conoscenze. Chi scrive è convinto di essere persona mediamente ben informata su un numero limitato di argomenti, e sufficientemente informata su un numero un po' maggiore di temi; ebbene, per chi scrive la lettura di *OGM tra leggende e realtà* è stata, da questo punto di vista, una severa disillusione. È stata l'occasione per scoprire come molte delle cose che si danno per scontate sono in realtà assai diverse da come si crede.

È un po' come rendere merito al nome della collana della Zanichelli in cui questo titolo è inserito: *Chiavi di Lettura*. Nome che suggerisce l'idea di fornire degli strumenti per leggere, per capire determinati argomenti; perché è proprio quanto fa il libro protagonista di questo articolo.

Cosa è un *OGM*? E, per contro, cosa è veramente *biologico*, *naturale*? Quali sono le specie geneticamente modificate diffuse nel mondo, e in quali parti del mondo lo sono? Esistono, si commerciano animali OGM? E soprattutto, per quali ragioni si fanno modifiche genetiche su certi organismi, e *quali* modifiche genetiche vengono attuate, a quale scopo? Se sapete rispondere a tutte queste domande, è ragionevole attendersi che, quale che sia il vostro giudizio sugli OGM, esso sarà comunque un giudizio attendibile, ragionato: in una parola, informato. Se invece a queste domande non sapete rispondere (come non sapeva farlo l'autore di queste note) è lecito sospettare che il giudizio che avete sugli OGM (favorevole o contrario che sia) non sia fondato su basi razionali.

Al giorno d'oggi, il sentire comune nel nostro paese è universalmente, o quasi, anti-OGM: questo basterà, probabilmente, a far classificare il libro di Bressanini come un'opera pro-OGM. Questo ci dispiace un po', perché a noi sembra che l'attenzione dell'autore sia tutta dedicata non a sollecitare favori o benevolenze verso gli organismi geneticamente modificati, ma solo a far sì che il lettore abbia a disposizione tutti gli elementi per giudicare consapevolmente. In questo senso, è importante ricordare che un campo di grano, nonostante i luoghi comuni e le pubblicità dei biscotti, è qualcosa di profondamente artificiale, totalmente alieno dalla natura selvaggia non antropizzata; o che gli OGM più diffusi sono quelli resistenti a determinate malattie delle piante, così da rendere possibile una sensibile riduzione dei pesticidi; di solito sia gli OGM sia i pesticidi sono visti come pericolosi per l'uomo, ma quasi mai si pensa che sono costituzionalmente contrapposti. O, più semplicemente, che l'uomo sta modificando le specie vegetali e animali da millenni, attraverso selezioni e incroci che hanno davvero poco di naturale, anche se solo da poco tempo lo fa tramite l'ingegneria genetica: in compenso, fino a qualche anno fa lo faceva esponendo a caso le sementi a radiazioni nucleari, nella speranza generica di ottenere una mutazione utile, e la cosa non aveva avuto il minimo clamore tra i media.

Poi, naturalmente, sarà sempre possibile restare contrari all'idea degli organismi geneticamente modificati: per il permanere dell'incertezza, inevitabile e permanente in ogni azione o intervento di laboratorio; o per ragioni più direttamente religiose, spirituali o filosofiche: la maggiore conoscenza non è mai limitazione di libertà. Anzi, a maggior ragione: si potrà sempre essere favorevoli o contrari ad un'idea, un concetto, una posizione, ma sarà sempre meglio essere favorevoli o contrari dall'alto di una conoscenza precisa e quanto più possibile scientifica, piuttosto che solo per sentito dire.

Titolo	OGM tra leggende e realtà
Autore	Dario Bressanini (aka ChiQua, aka Lord Stokastik)
Editore	Zanichelli
Collana	Chiavi di lettura
Data di Pubblicazione	Ottobre 2009
Prezzo	11,80 Euro
ISBN	9-788808-062413
Pagine	224

5. Soluzioni e Note

Siamo in ritardo.

Ogni volta che siamo in ritardo ci spendiamo in scuse ed ognuno dei Redattori si prende le sue colpe (in realtà solo Alice e Piotr, il Capo arriva sempre in tempo per definizione), ma questa volta non sprechiamo tempo neppure per le scuse (anche perché la colpa è proprio dell'estensore di queste poche righe).

Visto che è il primo numero del 2010, dedichiamo ancora pochi secondi a ringraziarvi per tutti i messaggi di auguri e di stima che ci avete inviato sotto le feste, e passiamo subito alle vostre soluzioni.

Scusate, ma siamo in ritardo.

5.1 [131]

5.1.1 La costanza dà i suoi frutti

Siamo in ritardo. Sarà meglio che vi ricordiamo subito il problema:

> *Rudy ha nel salvadanaio monete per la ragguardevole cifra di 102 Euro e 40 centesimi, ed incarica Alberto e Fred di cambiare la paccata di soldi. I due decidono di giocarsi il lavoro a testa e croce; ogni volta che viene testa segna un punto Alberto, ogni volta che viene croce segna un punto Fred; vince chi per primo arriva al valore… (e qui non si è capito, stavano parlando piano). Chi vince porta le monete.*
>
> *I nostri avevano appena avuto il tempo di fare sedici tiri che la partita deve essere sospesa. Volendo seguire le loro regole sino in fondo, e considerato che Fred ha fatto due punti più di Alberto, si accordano in modo tale che Fred porta 72,65 Euro, mentre Alberto porta il resto.*
>
> *Ora siete perfettamente in grado di capire non solo il loro ragionamento per quanto riguarda la divisione ma anche quale fosse il valore al quale avevano deciso di fermarsi.*

Soluzioni ne sono arrivate parecchie: da ***Ilaria***, ***Tiggi***, ***Cid***, ***Alberto R.***, ***Gnugnu***, ***Franco57*** (che con questo mese compie un anno a inviare soluzioni ad RM, e noi ne siamo oltremodo onorati), ***Stefano D'I***, ***Andrea***, ***Rethi***. Come al solito una montagna di critiche all'estensore del problema sono giunte in parallelo, sentite l'incipit di ***Alberto R.***:

> Questa volta il problema è di una oscurità diabolica (persino nel titolo).
>
> Anzitutto la descrizione del metodo usato da Rudy per accumulare il suo gruzzolo (mettere via tutte le monete da 2 € e la più grande delle altre) è irrilevante e devo ritenere che sia stata malignamente inserita solo per confondere le idee.
>
> Poi leggiamo: ".... I due pigri cominciano a litigare per decidere chi debba portare i soldi...."
>
> <pigri>, dunque nessuno dei due ha voglia di alzare il sedere dalla sedia per andare a portare un sacchetto di monetine allo zio barista e vorrebbe lasciare l'incombenza all'altro. Però alla fine ci vanno entrambi. Assurdo!
>
> È vero che si ripartiscono il carico: € 102,40 divisi in € 72,65 uno ed € 29,75 l'altro, ma non sarà certo il peso di una manciata di monete a cambiare la fatica del viaggio.
>
> Si potrebbe ipotizzare il contrario: entrambi desiderano la gratitudine del parente, sempre in cerca di monetine, e vorrebbero portargliene il più possibile. In tal caso la parola "pigri" sarebbe un falso indizio, astutamente inserito dai sadici redattori di RM per inquinare il quadro probatorio e sviare le indagini.

Per non parlare della soluzione di ***Ilaria***, che è tutta un programma:

> **Quindici** (uomini sulla cassa del morto, e una bottiglia di rum)
>
> Dunque. È evidente che i pischelli si siano spartiti la grana in proporzione alla probabilità che ognuno dei due aveva di raggiungere il valore prefissato. Evidente perché? Bè, perché è l'unico sistema che 1) permette di "seguire fino in fondo le loro regole", 2) tira in ballo tutti i dati del problema, e 3) giustifica le tre birre di valutazione a fronte di due pipe e due coniglietti. (Detto fra parentesi, gente, lungi da me passare nella schiera di coloro che sindacano i vostri insindacabili giudizi ma questo me lo sono pappato in dieci minuti netti. Il secondo invece oddio). (Poi magari l'ho cannato). (Però mi pare di no).
>
> Ciò detto, chiamiamo X il numero di punti che assegna la vittoria, e N il massimo numero di lanci ancora da fare per raggiungere X. (Se a qualcuno interessa, N=2X–

> 17. È perfettamente inutile specificarlo ma io ad averlo detto mi sento più sollevata. Sono malata). Supponiamo che si facciano tutti gli N lanci anche se uno dei due arriva prima a X: nella pratica è una cosa cretina, ancorché fattibile, nella teoria mi semplifica parecchio i calcoli dopo. N lanci permettono 2^N disposizioni di teste e di croci, delle quali un tot favorevoli ad Alberto e (2^N–1 tot) (sono malata) favorevoli a Fred. Indi per cui poscia andiamo prontamente a verificare se i rapporti 72,65/102,40 e 29,75/102,40 possono essere espressi come qualcosa/una potenza di due. Guarda caso, possono. Per la precisione, diventano 1453/2048 e 595/2048. Duemilaquarantotto è niente di meno che 2^11, quindi il minimo numero massimo... – 'spetta. Mi sto incartando – diciamo: il minimo N possibile è 11. Niente mi garantisce che N non sia ancora maggiore e possa essere semplificato coi due numeratori, ma per ora è un buon punto di partenza. Faccio i debiti calcoli, che non vi trascrivo tanto non portano a nulla, e scopro che effettivamente undici non funge. Dodici non può essere preso in considerazione perché N deve essere necessariamente dispari (serve un numero pari di lanci per portare entrambi a N–1, più uno per decidere la vittoria), proviamo con tredici. Per la fortuna mia e di altri duemilacinquecento abbonati avete infierito meno di quanto avreste potuto, quindi con tredici la cosa funziona. Adesso prendete un cachet per il mal di testa perché sto per partire coi calcoli, e una che fino al mese scorso non aveva mai toccato GeoGebra figuratevi in che rapporti possa stare col formula editor.
>
> Allora. Dopo sedici lanci Fred conduce per due punti: è un modo contorto per dire che Fred sta a nove, Alberto a sette. Alberto (facciamo che si è accaparrato le teste) necessita di altre sette teste per arrivare a quattordici; per raggiungere lo stesso risultato a Fred servono cinque croci. Aggiungiamoci il tiro della bella e arriviamo ai nostri tredici, e a scoprire che il tetto che avevano fissato era di quindici punti. Delle 2^13 combinazioni ottenibili (itero: sto supponendo che i tiri si facciano tutti comunque) (non è che penso siate duri d'orecchie, lo dico più che altro per ricordarmelo io) sono favorevoli ad Alberto quelle che presentano otto o più teste, vale a dire:
>
> - quella con 13 teste e 0 croci, che è una sola;
> - quelle con 12 teste e 1 croce, che sono 13 perché la croce può uscire in una qualunque delle tredici posizioni;
> - quelle con 11 teste e 2 croci. La prima croce può stare in qualunque posizione, la seconda in una qualsiasi delle altre dodici. Le croci tra loro sono intercambiabili, quindi ci sono 2 fattoriale combinazioni equivalenti, che dà come risultato (13·12)/2!=78 combinazioni. L'ho detta malissimo ma il concetto c'è;
> - quelle con 10 teste e 3 croci, che sono (13·12·11)/3!=286 (non fatemelo ridire vi prego);
> - quelle con 9 teste e 4 croci, che sono (13·12·11·10)/4!=715 (vi fidate? Vero che vi fidate?)
> - quelle con 8 teste e 5 croci, ovverosia (13·12·11·10·9)/5!=1287, e siamo te deum laudamus arrivati alla fine.
>
> La somma di tutta questa roba che ho detto fa 2380. 2380 su 2^13 fa 0,2905 e rotti. 0,2905 e rotti per 102,40 fa 29,75, che sono precisamente gli euro portati da Alberto. Ragazzi, ce l'abbiamo fatta. Cinque minuti di pausa, poi sotto col prossimo.

A proposito del prossimo vi facciamo sapere un po' più avanti, ma se volete una soluzione più pacata (anche se non priva di apprezzamenti per il sadismo del Gran Capo) proviamo a passarvi quella di ***Gnugnu***:

> Dando per scontato che il gruzzolo sia stato ripartito secondo le probabilità di vittoria (trattandosi di versione misère sarebbe, forse, più appropriato sconfitta),

Alberto ha, all'interruzione del gioco, una probabilità p_A = (10240 – 7265)/10240 = 595/2048 di raggiungere per primo il traguardo stabilito.

Si tratta di calcolare, in un gioco a testa e croce, quale sia la probabilità per un giocatore di arrivare per primo ad $n + 1 > 2$ esiti positivi, quando l'altro inizi con un vantaggio di 2 colpi.

Affinché questo avvenga deve succedere che, all'ultimo lancio la moneta mostri il verso scelto dal giocatore, questi abbia già totalizzato n successi, e l'avversario meno di $n + 1 - 2 = n - 1$, altrimenti avrebbe già *vinto*.

L'ultima condizione equivale ad un numero di tiri precedentemente effettuati appartenente all'intervallo $n \dots 2(n-1)$.

Sarà pertanto: $p(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{2(n-1)}\binom{i}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2^{2n-1}}\cdot\sum_{i=n}^{2(n-1)}2^{2(n-1)-i}\binom{i}{n}$.

La tentazione di tabulare *p(n)*, per poi cercarne il valore più prossimo a p_A, è forte, ma, vista l'atmosfera natalizia e il debito che ho verso Rudy per avermi permesso, proponendo il problema, di ammirare la splendida soluzione di ***Flo*** apparsa su RM131, proverò a sottoporgli un procedimento balneare. In questo modo il GC, spaparanzato su una spiaggia brasiliana, potrà calcolare le probabilità anche se, per proteggerlo da sabbia, umidità, salsedine e roubo, non ha portato il palmare.

L'ultima sommatoria, è un polinomio calcolato in 2, e si trasforma, sulle tracce di Horner, in:

$$\sum_{i=n}^{2(n-1)}2^{2(n-1)-i}\binom{i}{n}. = \left(\left(C_0\cdot 2 + C_1\right)\cdot 2 + C_2\right)\cdot 2\cdots + C_{n-2}\ ,$$

dove i coefficienti binomiali si possono ricavare facilmente, per iterazione, utilizzando la relazione ricorsiva:

$$C_0 = \binom{n}{n} = 1;\quad C_j = \binom{n+j}{n} = \frac{n+j}{j}\binom{n+j-1}{n} = \frac{n+j}{j}C_{j-1}\quad \forall j \in \mathrm{N}_0\,.$$

Osservato che il denominatore di p_A vale 2^{11}, e che la sommatoria fornisce valori interi, si può iniziare il calcolo con $n = 6$.

Sulla rena, inumidita per impedire alla brezza di far sparire le tracce, si svilupperà la tabella:

Rapporto		**7/1**	**8/2**	**9/3**	**10/4**
Binomiale	1	7	28	84	210
Doppio		2	18	92	352
Somma	1	9	46	176	**562**

Dove i valori della prima riga iniziano con $(n+1)/1$ e, ad ogni iterazione, vedono incrementare numeratore e denominatore di un'unità; quelli della seconda iniziano con 1 e proseguono con il prodotto del precedente per il rapporto della riga superiore; mentre nella terza compare sempre il doppio della somma precedente.

La sommatoria vale 562, minore del desiderato 595. Tenendo conto che la probabilità di vittoria per Alberto (giocatore svantaggiato) aumenta con il crescere di n, si può ripetere il calcolo con $n = 7$:

Rapporto		8/1	9/2	10/3	11/4	12/5
Binomiale	1	8	36	120	330	792
Doppio		2	20	112	464	1588
Somma	1	10	56	232	794	2380

Essendo $p(7)=\frac{2380}{2^{13}}=\frac{2380}{8192}=\frac{595}{2048}=p_A$, ad Alberto servono ancora 7 + 1 = 8 risultati positivi per raggiungere il traguardo e, visto che al momento dell'interruzione ne aveva già collezionati 7, questo era posto a 15.

Come se non bastasse, ***Gnugnu*** propone anche un *approfondimento*:

Modificando il distacco fra i due giocatori al momento della sospensione del gioco, cambia solo l'estremo superiore della sommatoria e, ad ogni addendo di quest'ultima, corrisponde una colonna nella tabella. Si è scelto di sviluppare il calcolo usando le probabilità di Alberto, proprio perché, essendo questi in svantaggio, a Fred, suo avversario, servivano meno successi per concludere il gioco. Nella tabella seguente, si sviluppa il calcolo per ricavare, al contrario, la probabilità di Fred di arrivare a 6 punti, prima che Alberto ne ottenga 8.

Rapporto		6/1	7/2	8/3	9/4	10/5	11/6	12/7
Binomiale	1	6	21	56	126	252	462	792
Doppio	0	2	16	74	260	772	2048	5020
Somma	1	8	37	130	336	1024	2510	5812

Indicato con *q(n)* la probabilità di Fred di vincere con n+1 successi, si ottiene correttamente: $q(5)=\frac{5812}{8192}=\frac{1453}{2048}=1-p(7)$.

Le somme precedenti l'ultima si possono utilizzare per calcolare le probabilità di vittoria per Fred, sempre in 6 colpi, qualora lo svantaggio di Alberto fosse stato inferiore e, perciò, a quest'ultimo occorressero meno esiti positivi.

La colonna evidenziata in rosso corrisponde alla situazione di parità al momento della sospensione. In questo caso il problema sarebbe stato particolarmente semplice e, senza alcun calcolo, i fratelli avrebbero diviso in parti uguali la grave incombenza, indipendentemente dalla meta prefissata.

Questa osservazione, riconvertita in formulacce porta ad una identità che non ricordavo: $\sum_{i=n}^{2n}\binom{i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=1 \quad \forall n\in \mathrm{N}$.

Identità che si può utilizzare per semplificare il calcolo di *p(n)*, sarà infatti:

$$p(n)=\frac{1}{2}\sum_{i=n}^{2(n-1)}\binom{i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=n}^{2n}\binom{i}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}-\binom{2n-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}-\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

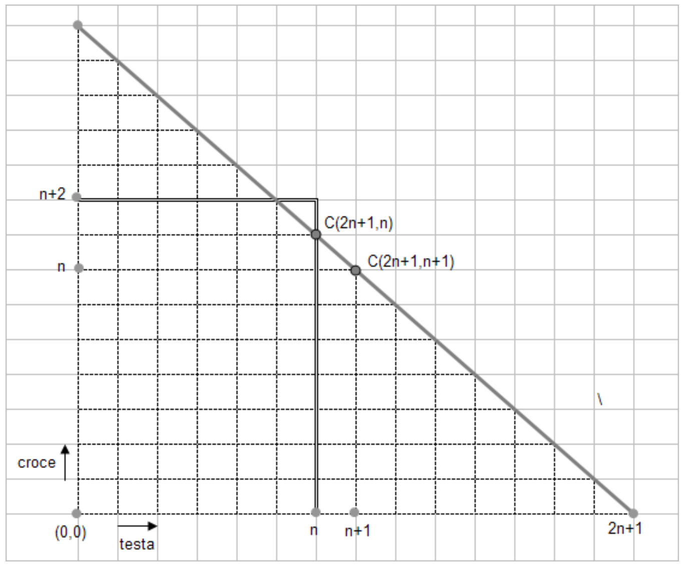
L'equazione risolvente il problema diventa $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=\frac{429}{2048}$, che ha per soluzione $n = 7$.

Molto bella ed interessante anche la versione di ***Franco57***:

Se, al momento della interruzione della partita, a Fred mancavano n punti per vincere, ad Alberto ne mancavano $n+2$ e la partita, se portata a termine, sarebbe potuta durare al massimo altri $n+(n+2)-1=2\cdot n+1$ tiri.

Per comodità di calcolo immaginiamo di non fermare il gioco appena uno dei giocatori è giunto al punteggio obiettivo, ma che si proseguano tutti gli $2\cdot n+1$ lanci di moneta e a posteriori si vada a vedere che ha raggiunto l'obiettivo. La semplificazione da fatto che ora abbiamo $2^{2\cdot n+1}$ sequenze testa/croce equiprobabili.

La seguente figura illustra l'idea. Si parte dall'origine e si arriva fino alla linea obliqua con testa che avanza a destra e croce in alto; vince Fred se raggiunge la linea doppia verticale, vince Alberto se raggiunge la linea doppia orizzontale (suppongo testa per Fred e croce per Alberto).



2 *Figura di **Franco57**.*

Fred vince se escono almeno n teste. Visto che i lanci che guardiamo sono $2\cdot n+1$ questo è equivalente a dire che sono uscite sicuramente meno di $n+1$ croci e Alberto ha perso.

Riassumendo Alberto vince con $n+2$, $n+3$, .. $2\cdot n+1$ croci , Fred con n, $n+1$, $n+2$, ..., $2\cdot n+1$ teste. Essendo il numero di lanci fissato, la probabilità che escano k croci è uguale alla probabilità che escano K teste, e come è noto è un coefficiente binomiale, quindi Fred ha più di Alberto la probabilità che escano n croci e $n+1$ teste o $n+1$ teste e n croci, che vale esattamente:

$$\Delta p=\frac{1}{2^{2\cdot n+1}}\cdot 2\cdot\binom{2\cdot n+1}{n}$$

Poiché Fred porta 72,65 € del totale di 102,40 € e Alberto il resto di 29,75 € l'accordo corretto deve essere

$$\Delta p=\frac{7265-2975}{100240}=\frac{429}{1024}=\frac{1}{2^{2\cdot n}}\cdot\binom{2\cdot n+1}{n}$$

Scomponendo in fattori 429 si ottiene 3x11x13: dunque si deve trovare il fattore 13 nel prodotto al secondo termine e il primo valore utile si ottiene per $2n+1=13$, per $n=6$ quindi, per il quale in effetti l'equazione è verificata.

Poiché hanno già fatto 16 lanci, tolti i 2 punti di vantaggio di Fred rimangono 14 punti fatti da entrambi: al momento della interruzione Alberto ha quindi 7 punti e

Fred 2 di più, 9 quindi, che, sommati ai 6 ancora da conquistare danno 15 che è il valore obiettivo cercato.

Rimane da verificare che l'equazione abbia una unica soluzione e questo è vero perché la funzione $\Delta p(n)$ è decrescente, infatti:

$$\Delta p(k-1) > \Delta p(k) \Leftrightarrow \frac{1}{2^{2\cdot k-2}} \cdot \binom{2\cdot k-1}{k-1} > \frac{1}{2^{2\cdot k}} \cdot \binom{2\cdot k+1}{k} \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdots(2\cdot k-1)}{(k-1)!} > \frac{(k+2)\cdots(2\cdot k-1)\cdot(2\cdot k)\cdot(2\cdot k+1)}{k!} \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot \frac{(k+1)}{1} > \frac{(2\cdot k)\cdot(2\cdot k+1)}{k} \Leftrightarrow 2\cdot k+2 > 2\cdot k+1 \Leftrightarrow 2>1$$

E con questo passiamo al prossimo problema... siamo in ritardo!

5.1.2 Si è rotta la vecchia valigia!

Siamo in ritardo!

Vediamo se riusciamo a sintetizzare il secondo problema del Capo...

> *La vecchia valigia di Rudy ha una combinazione a tre cifre che Paola (sua moglie) non si ricorda mai. Per fortuna è rotta, per cui basta che due cifre siano corrette per poterla aprire. Supponendo di andare per tentativi, e provare tutte le combinazioni possibili, e che ogni tentativo duri tre secondi, che metodo usate, e quanto ci mettete?*

Quasi tutti quelli che si sono cimentati nella soluzione hanno notato somiglianze con i metodi di riduzione delle schedine del superenalotto, il che ha reso senz'altro il problema ben più interessante che il ritrovamento delle vecchie bollette nella valigia di Rudy. I solutori di questo problema sono stati il nostro ***Cid***, ***Ilaria***, ***Silvano***, ***Flo***, ***Gnugnu***, ***Franco57***, ***Tommaso***, ***Mot***, ***g1***.

Cominciamo a caso, quindi con ***Mot***:

> Se immaginiamo le combinazioni delle tre rotelle come coordinate abbiamo un cubone 10x10x10, e ogni punto di questo reticolo "cancella" le tre rette parallele agli assi coordinati. Ad esempio, se provo la combinazione 123 sto provando in realtà 28 combinazioni, le 9 "x23", 9 "1y3 e 9 "12z" e la "123" contata una sola volta.
>
> Ora, appare evidente che una configurazione di punti come quella qui sotto risolve il nostro problema, no? Le righe sono le x, le colonne le y e nelle caselle c'è la z. In pratica lavorando su un ottavo del cubo ne cancello altri 3, e poi ripeto il procedimento un'altra volta. Mi complimento con me stesso per questa spiegazione lineare e comprensibile. Bravo, bravo, bravo.

> Il dramma è che è tragico da ricordare, c'è qualche modulo 5 qui e lì e se devo appuntarmi 'sta roba da qualche parte facevo prima ad appuntarmi la combinazione (che potrebbe essere una soluzione). Credo si possano trovare sequenze di più facile memorizzazione, ad esempio facendo tutta la diagonale "000", "111" ecc... ma sono troppo pigro per cercarle. In definitiva 50 tentativi, 150 secondi.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4					
1	4	0	1	2	3					
2	3	4	0	1	2					
3	2	3	4	0	1					
4	1	2	3	4	0					
5						5	6	7	8	9
6						9	5	6	7	8
7						8	9	5	6	7
8						7	8	9	5	6
9						6	7	8	9	5

Interessante, vero? Abbiamo provato a dirlo a Paola, ma la reazione non è stata esaltante.

Le altre soluzioni sono molto simili – tutte con lo scopo di ridurre il numero di combinazioni – quella di ***Flo*** sfrutta anche la parità, quella di ***Franco57*** con dimostrazione del numero di combinazioni massimo. Vi siamo debitori di qualche considerazione di ***Ilaria*** che avevamo promesso poco fa...

> Detto fra noi: un orecchio un minimo allenato è perfettamente in grado di riconoscere lo scatto di una rotella che va in posizione, il che ridurrebbe i tentativi a venti e i moccoli a sessanta intensi secondi. Pur tuttavia siamo sempre matematici dilettanti e non scassinatori professionisti, quindi evito di rifilarvela come soluzione e cerco di inventarmi qualcosa di più onesto.

Per il resto ottiene un risultato che non soddisfa neppure lei, per cui ve lo risparmiamo. Purtroppo anche questa soluzione – comunicata a Paola – ha scatenato ulteriori ire. Forse dovremmo smetterla di cercare di aiutarla, e semplicemente fornirle una valigia senza combinazione.

Ora basta, che c'è altro da dire. E siamo in ritardo.

5.1.3 Ceci n'est pas un problème

Come dice il titolo, non si trattava di un vero e proprio problema, ma di un'idea del Capo di generalizzare un vecchio problema (proposto in RM017 e risolto in RM018, come ci hanno fatto notare in tanti). Il vecchio problema non ve lo riportiamo, la generalizzazione dovrebbe andare più o meno così:

> *Abbiamo un ponte traballante, e* n *persone che lo devono attraversare. Il ponte regge al massimo due persone, può essere attraversato solo con una lampada (che deve essere quindi riportata indietro ogni volta), le persone hanno dei tempi di attraversamento* k_1, k_2, ..., k_n. *e dovete farle passare in un tempo minore di* w. *Quale strategia adottate?*

Come al solito, se il problema non ha soluzioni, attira l'attenzione. ***Gnugnu*** ci ha scritto subito:

> Aumentare il numero degli attraversanti non modifica, sostanzialmente il problema. Siano $k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n$ i tempi di transito. La strategia banale vede il più veloce che accompagna, in ordine arbitrario, tutti gli altri, con un tempo complessivo $t = (n-2)k_1 + \sum_{i=2}^{n} k_i = (n-3)k_1 + \sum_i k_i$.
>
> A questa si può contrapporre un'unica alternativa, che consiste nel far attraversare assieme i due più lenti, utilizzando, per riportare la lampada, un veloce che deve, però, trovarsi già sulla sponda di destinazione. Occorre per questo che, prima dei lenti, i due più veloci abbiano passato il ponte e uno dei due sia ritornato con la

> lampada. Il guadagno di tempo varrà $g = -\Delta t = k_x + k_1 - 2k_2$, dove x è il meno lento dei due bradipi accoppiati.
>
> Questa tecnica si può usare una o più volte, cominciando dalla coppia più lenta e proseguendo con quelle immediatamente più veloci, fino a quando il Δt corrispondente continua ad essere negativo.
>
> Non vedo alcun modo di aumentare, mediante la semplice modifica dei tempi, la complessità della soluzione; occorrerebbe un intervento sulle regole, ad esempio più di due persone attraversanti contemporaneamente, una limitazione del numero massimo di passaggi per partecipante o l'introduzione di un fattore *stanchezza*, che aumenti i tempi di transito al crescere dei tragitti. Tutte modifiche che ridurrebbero la genuina bellezza del problema.

Insomma, che il problema non è niente di che. Stessa opinione aveva ***Ilaria***, e simile il risultato (a meno di simboli grafici). ***Silvano***, invece, ci ha proposto diversi algoritmi, di cui presentiamo l'ultimo:

> Visto che le soluzioni esponenziali (io faccio il sistemista come mestiere...) non mi piacciono mi sono messo a cercare una soluzione (che non ho dimostrato essere ottima, ma che con buona approssimazione ci si avvicina empiricamente) che non fosse esponenziale. (...) si basa su un ragionamento e sull'osservazione di diverse combinazioni di soluzione del programmino Excel che calcola la soluzione ottima.
>
> Bene guardando le soluzioni ottime (per vari parametri di K(0)<=K(1)<=...<=K(n) che ipotizzo quindi ordinati che nel nostro programmino ha un costo come noto di n·log(n)) osservo che essenzialmente la soluzione "1111...1" (ossia tutti sono passati dall'altra parte) si ottiene secondo 2 logiche:
>
> A) Faccio in modo che attraversino il ponte K(n) e K(n–1) a coppie utilizzando K(0) e K(1) nel seguente modo:
>   a. Attraversano k(0) e K(1) insieme (costo probabilmente non significativo in quanto k(1) deve comunque attraversare il ponte)
>   b. Torna indietro K0
>   c. Attraversano K(n) e K(n–1)
>   d. Torna Indietro K(1)
>   e. Attraversa K1 e K2
>
> B) Ogni volta torna indietro K(0) e accompagna il più lento facendo la spola:
>   a. Attraversa k(0) e K(n)
>   b. Torna indietro k(0)
>   c. Attraversa K(0) e K(n–1)
>
> In entrambi i casi ho fatto attraversare k(n) + K(n–1) a spesa di un costo diverso.
>
> Le differenze nelle soluzioni dipendono a questo punto da N (se ci sono o meno 2 persone da far passare insieme) e dal risultato che si ottiene dalla disequazione che si ottiene ignorando il passo "a" di A):
>
> Costo A) k(0)+max(K(n),K(n–1))+K(1)+max(K(1),K(0))
>
> Costo B) K(0)+K(n)+K(0)+K(n–1)
>
> Sfruttando l'ordinamento si giunge alla conclusione che conviene
>
> "Costo A)" se: 2K(1)–K(0)< K(n–1)
>
> "Costo B)" se: 2K(1)–K(0)>=K(n–1)

La logica dell'ipottico programmino è:

1) Faccio attraversare i più lenti K0 e K1

2) Scelgo A) o B) a fronte delle disequazioni di cui sopra rispetto ai rimanenti.

3) Una volta trasportato il "lento", mi ritrovo sempre con K(0) e K(1) Già passati e quindi Itero l'algoritmo. al passo 2

I limiti della logica esposta (a fronte di indubbi vantaggi computazionali...) sono che:

1) Non è detto che quando rimangono "POCHI" (ossia 1 o 2 elementi) ki che soddisfano il "Caso A)" convenga sempre in quanto dipende da quali e quanti sono gli elementi che invece soddisfano il "Caso B)" anche se negli esempi che ho fatto non mi torna nulla di erroneo ed in genere ottengo sempre la soluzione ottima, quindi sono confidente che poi alla fine se la soluzione NON è ottima poco ci mancherebbe....

2) Ho ipotizzato che il passaggio di K1 non sia rilevante (caso (A) punto "a") cosa che se ho pochi elementi potrebbe non essere valida.

Abbiamo già detto di essere in ritardo? Qualcuno ha visto il Bianconiglio? Ci vediamo il mese prossimo, per il nostro non-compleanno!

6. Quick & Dirty

Durante una delle ultime gite, Rudy si è trovato davanti ad una colonna *ettagonale* e, mentre guardava questa stranezza, si è accorto che vedeva quattro dei sette lati. Se vi trovate ad alcuni metri dalla colonna, qual è la probabilità che vediate quattro lati? E quale che ne vediate tre?

Le probabilità sono entrambe 1/2*; se Rudy dalla sua posizione vede quattro lati, un altro Rudy nella posizione opposta rispetto alla colonna vedrà solo tre lati, e viceversa. Essendo la probabilità che Rudy sia in uno dei due punti equivalente, deve valere* 1/2.

7. Zugzwang!

7.1 Pensaci bene

Pessima traduzione, ma ve la meritate. Infatti, conoscete già l'autore ma non ve ne è fregato niente.

Con calma. Titolo originale: ***Think Twice***. Autore: ***Sid Jackson***, lo stesso che ha inventato "Field of Action" che vi abbiamo spiegato la volta scorsa. E per questo diciamo che vi meritate la pessima traduzione; secondo noi il gioco era bellissimo, ma nessuno ha detto o fatto nulla. Seccante.

Vi concediamo come scusante che richiedeva un po' di lavoro manuale prima di cominciare anche solo ad analizzare il gioco, ma francamente la cosa ci ha un po' deluso; speriamo che quello di questo trimestre solleciti qualcosa in voi, visto che l'attrezzatura necessaria si limita a due fogli di ***carta*** (possibilmente a quadretti), ***matite*** (due, colori contrastanti) e almeno sei neuroni a testa, nessuno dei quali inibitore: ciascuno dei due giocatori deve riuscire a contare agilmente sino a trentasei. Se volete la versione deluxe, un paio di biro (stesso colore va benissimo).

Setup: ciascuno dei due giocatori traccia un quadrato di 6x6 (totale trentasei, come dicevamo) quadretti, e inserisce a caso nei quadretti ottenuti tutti i numeri da uno a trentasei (senza farsi vedere troppo dall'altro); quando entrambi hanno finito, mettono i due fogli uno vicino all'altro, e si decidono i turni.

Gioco: Quando è il suo turno, un giocatore sceglie un numero (tra quelli non ancora scelti) e colora del proprio colore quel numero su entrambe le scacchiere; si continua sin quando non sono finiti i numeri, quindi diciotto turni di gioco; poi si contano i punti, e qui bisogna faticare un attimo.

Punteggio–Fase 1: Si contano i quadrati dello stesso colore che formano una riga, una colonna o una diagonale: i punteggi sono:

- Linea di quattro: un punto.
- Linea di cinque: tre punti.
- Linea di sei: cinque punti

Notate che la "linea di sei" vale come "linea di sei", non fate punti per le due linee di cinque e le tre linee di quattro contenute al suo interno.

Punteggio–Fase 2: A questo punto, si considera la più grande area di quadrati connessi (uniti per un lato: le unioni per angoli non contano) per ognuno dei due giocatori: la differenza tra le due aree viene attribuita come punteggio al giocatore con l'area più grande: questo conto viene fatto separatamente *su entrambe le scacchiere*, quindi può darsi che su una acquisisca punti un giocatore e sull'altra l'altro giocatore (o che su una scacchiera si pareggi: zero punti, in quel caso).

Vince chi fa più punti; conoscendo il vostro entusiasmo per i giochi che presentiamo, non stiamo neanche a spiegarvi la versione *misère*.

No, non vi facciamo neanche l'esempio. Attivateli, quei sei neuroni!

8. Pagina 46

Sia $k_1, k_2, \ldots, k_r$ l'insieme dei numeri naturali primi rispetto a *N*.

Consideriamo gli *r* numeri $k_1a, k_2a, \ldots, k_ra$: questi numeri sono anch'essi primi rispetto a *N*, in quanto anche *a*, per ipotesi, è primo rispetto a *N* e tutti loro, quando vengono divisi per *N*, danno un resto diverso. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned}
&k_1 a = q_1 N + a_1 ,\\
&k_2 a = q_2 N + a_2 ,\\
&\ldots\\
&k_r a = q_r N + a_r .
\end{aligned}$$

Dove $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sono gli stessi numeri $k_1, k_2, \ldots, k_r$ in ordine diverso, in quanto i vari a_i sono distinti tra loro e minori di *N* e, se non fossero primi rispetto ad *N*, non lo sarebbero oppure i k_i. Moltiplicando tra di loro tutte le uguaglianze che abbiamo ottenuto, abbiamo:

$$k_1 k_2 \ldots k_r a^r = NM + a_1 a_2 \ldots a_r$$
$$k_1 k_2 \ldots k_r \left(a^r - 1\right) = NM$$

Da cui segue che $\left(a^r - 1\right)$ è divisibile per *N*.

Paraphernalia Mathematica

8.1 Un paterno consiglio

"…Attraverso la Cluster Analysis,
posso trovare quali sono le
caratteristiche dei suoi amici…"
Charles Eppes, almeno due volte
per ogni stagione di "Numb3rs"

Preciso intento di questo pezzo è fornire a Charlie qualche metodo di ricerca un po' più aggiornato. Partiamo da lontano, come al solito..

Quando in sociologia si parla di grafi, ogni *nodo* (o vertice) rappresenta un *agente* e una coppia di nodi può essere connessa da un *legame* (o arco) indicante il fatto che esiste una qualche interazione sociale tra di loro; ad ogni nodo possiamo associare un *grado* (il numero degli archi del nodo) e una *forza*, data dal peso dei legami rappresentati dagli archi; la forma di legame più semplice è quella *binaria*, nel senso che il legame o c'è o non c'è, non ha direzione e il peso del legame è sempre unitario: comunque nulla vieta, se preferite complicarvi la vita, di assegnare un peso e una direzione, mantenendo la cosa più generale.

Cambiamo un attimo discorso: ciascuno di voi ricorda di sicuro quei problemi di fisica nel quale un tot di palline (perfettamente elastiche, perfettamente sferiche, massa perfettamente nota,… eccetera) si scontrano tra di loro e si chiede di calcolare cosa succede; prendete quantità di moto e/o energia cinetica, calcolate un po' di velocità e direzioni… magari viene lungo, ma si risolve.

Bene, adesso fatelo con un gas, con le molecole al posto delle palline.

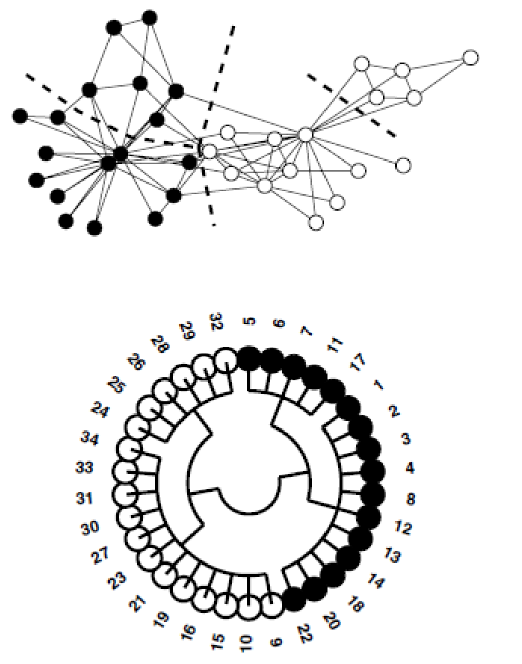
Infatti: all'aumentare del numero delle palline, il nostro sistema diventa decisamente intrattabile; tant'è che non si usano più delle grandezze fisiche *microscopiche* (velocità e direzione delle molecole), ma si cercano grandezze *macroscopiche* (sempre per restare nell'esempio del gas, la temperatura) o, quantomeno, *mesoscopiche*: grandi abbastanza da essere estendibili all'intero sistema, ma calcolate basandosi sulle caratteristiche di un piccolo numero di agenti.

Ora, l'idea sarebbe di applicare questi metodi alle grandi reti: prendiamo un gruppo di agenti che interagiscano tra di loro (nodi del grafo) con una qualche regola d'interazione (caratteristiche microscopiche) e cerchiamo di ricavare regole macroscopiche o mesoscopiche che ci permettano di capire la struttura.

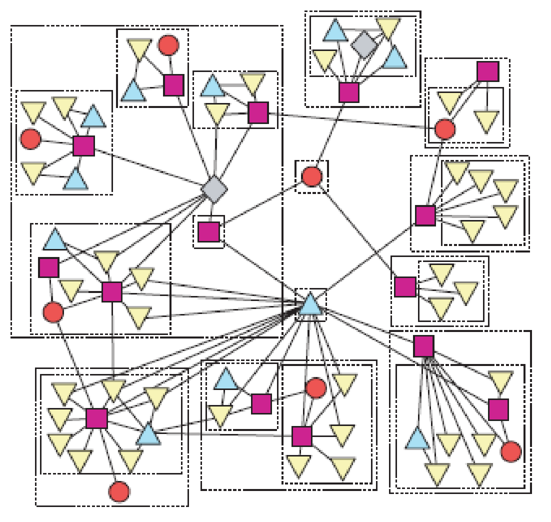
"Forse, se ci fai l'esempio di una struttura mesoscopica…" L'esempio più interessante, probabilmente, è quello delle *comunità*, definite come un gruppo di nodi densamente connessi (relativamente al resto della rete) tra di loro ma, come gruppo, scarsamente connessi agli altri gruppi densi della rete.

Comunità se ne trovano dappertutto, anche senza andare a cercare l'esempio classico dei *social network* in internet; a partire da quelle che si formano in un gregge nell'allevamento dei cuccioli passando (per quanto riguarda la specie umana) alle comunità di raccoglitori e cacciatori, alle strutture feudali, e avanti sino alle nazioni; insomma, le comunità intese in senso matematico sembrano un concetto importante, per definire una struttura.

Un metodo grazioso per rappresentare le strutture di comunità lo trovate in figura 3: partendo dalla rete, la si partiziona in comunità secondo la definizione data poco sopra, e poi si continua a suddividere ognuna delle sottoreti sin quando non si arriva a comunità composte da un unico punto; questo processo di partizionamento può essere rappresentato da un albero detto *dendrogramma*, che cattura perfettamente quale sia la struttura delle comunità all'interno di questa rete. Qui vi abbiamo dato un esempio che, anche se reale e molto famoso nell'ambiente (ve ne parliamo dopo) in realtà è abbastanza semplice; reti più complesse possono mostrare una struttura contemporaneamente gerarchica e modulare; solo per farvi un esempio di quanto possano venire complicate le cose, nella Figura 4 vedete l'organizzazione di una università, con rettorato, facoltà, dipartimenti eccetera eccetera; se rimescolate il disegno, riuscire ad individuare la struttura diventa decisamente complesso.



3 *Dalla rete alle comunità*



4 *Cambio del piano di studi*

Infatti, uno degli aspetti che rendono complicato il riconoscimento delle comunità in una rete è proprio il fatto che la definizione stessa di comunità dipende fortemente dal contesto; non solo, ma se avete scelto come definire le comunità nel caso specifico, vi ritrovate a dover risolvere un problema di quelli intrattabili[27], verificando per ogni elemento le connessioni con qualsiasi altro elemento.

Bene, torniamo alla figura 3; adesso vi spieghiamo di cosa si tratta.

Il sociologo ***Wayne Zachary*** stava analizzando i rapporti di amicizia in un gruppo, e aveva scoperto che le relazioni di "amico di…" erano quelle rappresentate in figura; quello che non vi abbiamo detto prima è che si trattava di un club di karate e, mentre Zachary lo studiava, avvenne una divisione all'interno del club: lo scisma portò alla formazione di due associazioni, e Wayne si accorse che queste *rispecchiavano perfettamente la struttura delle amicizie del dendrogramma*. Insomma, per dirla in modo sgrammaticato, avrebbe potuto prevedere "dove sarebbe andato chi" solo studiando i cluster formati dalle amicizie: lo "Zachary Karate Club" è giustamente diventato famoso negli ambiti della rappresentazione dei gruppi per questo motivo (oltre, presumiamo, per essere probabilmente la prima scuola di arti marziali a prendere il nome da un sociologo).

[27] Per gli amanti delle definizioni formali: è NP-completo.

Come si usa un dendrogramma? Beh, restando allo Zachary Club, vediamo che esiste una prima suddivisione in due comunità (che è poi lo split in due club avvenuto successivamente), ma possiamo vedere che esiste anche un'altra divisione, più fine, in *quattro* comunità, e questa è una struttura che *potrebbe* portare ad un'ulteriore divisione dei due club: insomma, grazie al dendrogramma, abbiamo trovato una struttura mesoscopica. Anzi, due.

Infatti, soprattutto quando lavorate con reti ampie, potete riconoscere diverse strutture di comunità a differenti livelli di risoluzione mesoscopica: senza andare a pensare subito ai social network, nell'ambito dei lettori di RM, ad esempio, esiste un piccolo[28] sottogruppo rappresentato dai lettori abituali di questa rubrica, e tempo fa si sono formate delle *cliques* (ci piace il termine inglese: la traduzione italiana "cricca", invece, ci sta piuttosto antipatica) finalizzate alla risoluzione e all'approfondimento di alcuni problemi.

Meglio partire da un tentativo di definizione intuitiva: per il momento, definiamo *comunità* come un gruppo di nodi che sono collegati tra di loro in modo "più denso" di quanto siano collegati con altre parti della rete; la differenza tra i diversi metodi per individuare le comunità si basa proprio sul concetto di "più denso": questo concetto, infatti, varia in funzione dello scopo del ricercatore, e ciascuno, giustamente, cerca di utilizzare il metodo più utile per lui.

Uno dei metodi concettualmente più semplici è quello del ***MultiDimensional Scaling***, applicato con successo al Congresso degli Stati Uniti per verificare quali strutture mesoscopiche esistessero: in pratica, è stato registrato per un grosso insieme di leggi come aveva votato ogni singolo rappresentante e si sono cercate quindi le maggiori similitudini di voto tra i votanti: questo ha evidentemente mostrato una struttura di bipartizione tra conservatori e *liberal* ma, soprattutto nei periodi di grande tensione razziale, ha mostrato un'inattesa divisione tra eletti negli stati del Nord e del Sud anche su argomenti che con il razzismo non c'entravano nulla.

Sempre per restare nei metodi classici (insomma, quelli che ci aspettiamo usi Charlie), un altro buon metodo è quello cosiddetto del ***Linkage Clustering***: in sostanza, si organizza una *matrice di adiacenze* in cui il generico elemento A_{ij} identifica quanto siano vicini il nodo i e il nodo j: se restiamo sul semplice e consideriamo la "vicinanza" una proprietà commutativa, la nostra matrice risulterà simmetrica. Organizzata la matrice, si considera il valore massimo al suo interno (ossia gli i e i j più legati tra di loro) e li si considera congiuntamente: stessa operazione per tutti gli elementi che hanno un legame forte[29] tra di loro e consideriamo queste nuove unioni come degli elementi della nostra rete. Ricalcoliamo la matrice, e avanti in questo modo sin quando non riusciamo a ricostruire l'intero dendrogramma. Questo metodo ha un enorme successo soprattutto nel campo della biologia filogenetica.

Quello del Linkage Clustering è un metodo cosiddetto *agglomerativo,* ossia, prendiamo un nodo, cerchiamo i suoi vicini e decidiamo che quello è un gruppo; al secondo passaggio, consideriamo la vicinanza tra i gruppi e avanti: se questo vi ricorda il *Metodo di Kruskal* per costruire l'albero minimo di attraversamento di una rete, avete perfettamente ragione, infatti, è copiato da quello.

Il fatto che si sia posta l'enfasi sulla parola "agglomerativo" dovrebbe suscitare in voi un sospetto: esistono anche metodi *suddivisivi*, nei quali si parte dall'intera rete e la si suddivide in cluster; metodi decisamente complicati, quindi è meglio se ne parliamo dopo, prima ne vediamo qualche altro semplice.

[28] L'aggettivo è stato scelto da Rudy con preciso intento polemico.

[29] Immaginiamo sia chiaro che il concetto di "forte", qui, gioca lo stesso ruolo del precedente "più denso": dipende molto da cosa state cercando.

Dicevamo che ogni metodo inventato serve a soddisfare un'esigenza particolare: ***Brian Kernighan***[30] e ***Shen Lin*** si sono trovati davanti ad un problema difficilmente risolubile attraverso i dendrogrammi, loro scopo era quello di suddividere un circuito elettrico su varie schede, minimizzando le connessioni tra le diverse schede: si tratta evidentemente di riuscire ad individuare i cluster di componenti e di far stare un cluster tutto sulla stessa scheda.

Il metodo, piuttosto semplice, si basa sulla misura Q della "qualità" di una determinata configurazione (nel nostro caso Q misura quante poche siano le connessioni tra schede diverse): a questo punto si spostano degli elementi (singoli componenti o interi cluster già identificati) su un'altra scheda e si misura Q; dopo un certo numero di passi, si prende la configurazione con il valore di Q più soddisfacente e si ricomincia. Il metodo, come si intuisce, dipende strettamente da quanto sia buona la vostra configurazione di partenza, e quindi di solito viene utilizzato come ottimizzazione supplementare una volta che si siano già ragionevolmente identificati i cluster con altri sistemi.

Dicevamo, prima, che alcuni metodi si basano, sotto sotto, sulla ricerca del cammino minimo: un metodo che sfrutta ampiamente questa ricerca è quello della cosiddetta ***Betweenness Centrality*** (qualcuno ci dà una mano a tradurlo, per favore? "Betweenness", fino a "Centrality" ci arriviamo da soli): in questo caso, di solito si lavora sugli archi del grafo più che sui nodi.

Per prima cosa, si identifica l'arco con il maggior traffico (o con il legame più forte, fate voi) e lo si elimina: questo causa una ridistribuzione del traffico (e quindi bisogna ricalcolare tutta la matrice): a questo punto, si ricomincia da capo sin quando non si ottengono i singoli nodi isolati. La "Betweenness" è, appunto, la misura di quanto un arco sia coinvolto in molti cammini minimi tra diversi nodi, ossia (e questo è il punto importante) quanto quell'arco faccia da comunicazione tra diverse strutture mesoscopiche.

I nomi bilingue non sono una meraviglia, ma "cricca" proprio non ci piace; il prossimo metodo, quindi, risponde allo scioglilinguico nome di ***Percolazione a k-Clique***: il concetto è più semplice di quanto sembri e, finalmente, ci permette di definire un termine in un modo un po' meno approssimativo di quanto fatto sinora: si definisce *k-Clique* l'insieme di k nodi legati tra di loro da $k(k-1)/2$ link, ossia abbiamo una rete completamente magliata: il metodo si basa sull'osservazione che le comunità sembrano consistere di piccole *Cliques* che condividono i loro nodi con altre *Cliques* nella stessa comunità: una *Comunità di k-Cliques* diventa quindi l'unione di k *Cliques* adiacenti che condividono $k-1$ nodi: l'analisi di questo aggeggio può essere fatta spostando (qui i testi usano il termine "percolando", da cui il nome) uno schema di *k-Clique* da ogni *k-Clique* sui suoi vicini riallocando un nodo e tenendo fissi i restanti $k-1$ nodi: definiamo allora "Comunità" l'insieme dei nodi esplorabile per percolazione dello schema di *k-Clique*.

"Che bello, allora siamo riusciti a dare una definizione *formale* di comunità!" Beh, no, mica tanto. Qui, quello che frega è la domanda "…Ma quanto vale *k*?" Al momento, ci si focalizza nei valori compresi tra 3 e 6, ma la cosa, come capite, è altamente soggettiva e più alto è k più diventa difficile soddisfare la definizione di comunità. Il metodo, comunque, oltre ad essere applicabile a diversi livelli (considerando le comunità ottenute come nodi), ha un'enorme potenza nell'analisi dei casi in cui una persona appartenga a più comunità, come ad esempio quella dei lettori di RM, quella dei vostri colleghi di lavoro e la vostra famiglia: in quel caso, siete voi il nodo che va tenuto fermo mentre vi percola sopra il modello (perché questa ci sembra un'immagine particolarmente disgustosa?).

[30] Sì, proprio "quel" Kernighan: l'amico di Ritchie e coinventore del linguaggio "C"

È interessante notare che, anche se continuiamo a tenere nel nebuloso la definizione di "comunità", è piuttosto facile misurare quanto sia buona una certa suddivisione attraverso la minimizzazione della ***modularità***, definita come:

$$Q = \sum_i e_{ii} - b_i^2 ,$$

Dove e_{ij} rappresenta la parte di terminazioni di archi che uniscono il gruppo i al gruppo j, mentre $b_i = \sum_k e_{ik}$ è una misura della parte di archi che iniziano e terminano all'interno del gruppo: il valore $Q = 0$ è una soluzione banale (tutti i nodi nella stessa comunità), e alti valori di Q indicano che siamo di fronte ad un raggruppamento di gruppi per cui i legami non sono quelli che ci aspetterebbe in un gruppo casualmente connesso.

Se vi sembra che sin qui non si sia fatto altro che complicare delle ovvietà, aspettate a vedere il metodo del ***Partizionamento Spettrale***: qui, partendo dalla matrice A_{ij} delle connessioni, si calcola lo *Spettro* della matrice Laplaciana, le cui componenti sono definite come:

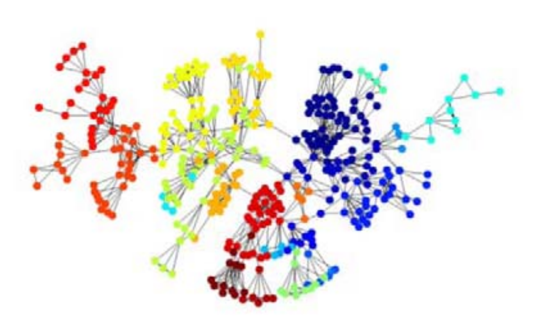
$$L_{ij} = k_i \delta(i, j) - A_{ij} ,$$

dove $\delta(i, j)$ è il Simbolo di Kronecker (pari a uno se $i = j$, zero altrove) e k_i il peso dell'arco considerato (o la sua molteplicità: è lo stesso, in pratica): il metodo più semplice, di solito, divide in due parti la rete e poi continua a dividere sin quando lo si ritiene opportuno: ad ogni passo si definisce un vettore indice s con componenti $+1$ se l'elemento appartiene al primo gruppo e -1 se appartiene al secondo: a questo punto, il peso totale delle unioni tra i due gruppi di nodi si può esprimere attraverso l'espressione

$$R = \frac{1}{4} s^T L s ,$$

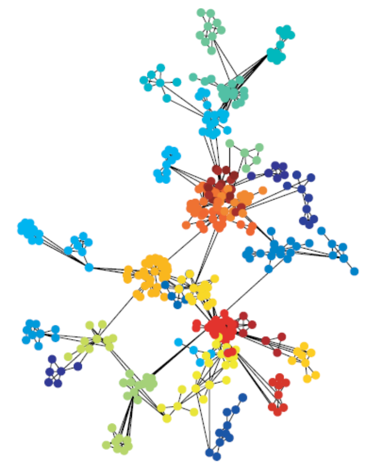
e la partizione migliore sarà quella con il valore di s che minimizza R (attenzione che s è un vettore e L una matrice, quindi non semplificate: T è la solita variabile ausiliaria delle trasformate di Laplace). Abbiamo detto di dividere in due parti la nostra rete, ma nulla vieta (complicando evidentemente i calcoli) di dividerla in più parti ad ogni passo: anche qui si può misurare la modularità della rete, ma lasciamo perdere.

Una facile domanda che ci si può porre a questo punto è: "Ma quanto funzionano questi metodi?" Beh, abbastanza bene; la cosa si vede se cerchiamo di studiare le relazioni in un campo in rapido sviluppo, e quale migliore dello studio delle reti? La rete degli studiosi di rete (più carino in inglese: "*the network of network scientists*") più grossa studiata sinora possiede più di 1500 nodi: è noto il narcisismo degli scienziati, superato solo da quello degli attori del cinema ("Numero di Erdős" dovrebbe dirvi qualcosa) e anche in questa rete la tendenza a scrivere un articolo avendo come coautore qualcuno di famoso è notevole. Non solo, ma si consideri anche che data la relativa facilità con la quale gli studiosi di rete possono mettersi in contatto (certo, usano Internet come dei matti), le liste di citazioni al fondo degli articoli sono sempre chilometriche, spesso più lunghe dell'articolo medesimo: ***Porter*** e ***Onnela*** hanno provato a prendere un paio di articoli con bibliografie particolarmente lunghe, e hanno trovato una macro comunità connessa della dimensione di 379 specialisti, ciascuno dei quali aveva scritto articoli con



5 *Hi mom, I'm here!*

qualche altro collega; la ricerca con l'analisi spettrale delle comunità ha portato alla colorazione che trovate nella Figura 5.


6 *Più chiara*

Va detto che qui si capisce piuttosto poco: da bravi esperti della rappresentazione delle reti quali ormai siete, comunque, vi basta applicare una distanza tra due elementi tale che sia proporzionale alla modularità tra gli elementi (vi ricordate che nelle comunità è minima, vero?) e tracciare il tutto, possibilmente mantenendo i colori. *Et voila*! Ottenete la bellissima rappresentazione di Figura 6. Sicuramente più chiara, rispetto alle due originali bibliografie che prendevano otto pagine…

Ora, a parte il fornire un mucchio di idee per le prossime puntate di Numb3rs, queste tecniche presentano anche un'altra interessante caratteristica: rendono uno di noi piuttosto triste, visto che una ricerca di questo tipo in un ambito ben specifico e più ridotto (una settantina di nodi) è stato il lavoro sussidiario della sua tesina di laurea; dieci giorni di scarabocchi per scoprire quattro comunità… Con questi giochini, tre minuti ed era tutto fatto[31].

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[31] Per i futuri biografi: si trattava di trovare le comunità partendo dalle bibliografie di un buon numero di testi di storia della fisica (insomma, chi citava chi, non *coautorship*). In dieci giorni di duro lavoro, il nostro eroe aveva individuato quattro comunità, sostanzialmente centrate su Geymonat, Jammer, Neugebauer e Needham. Cosa che per chiunque all'epoca conoscesse un minimo l'argomento era evidente sin dall'inizio.