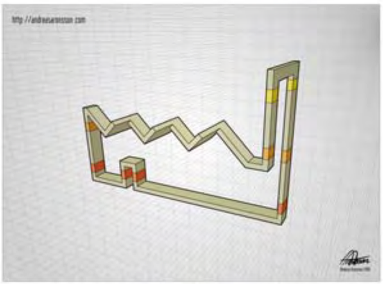
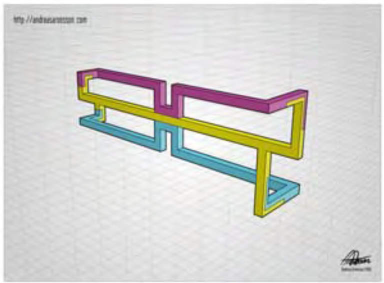
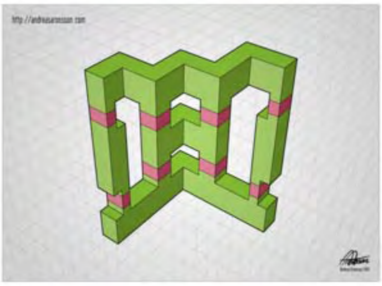
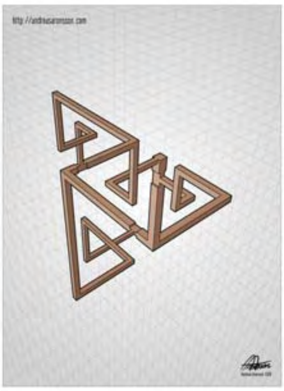
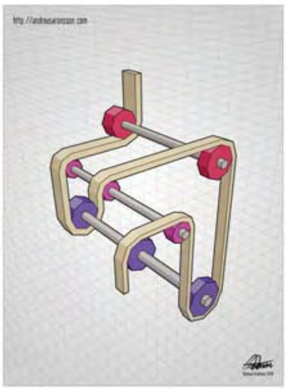
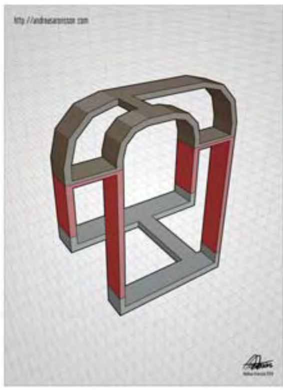
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 126 – Luglio 2009 – Anno Undicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM125 ha diffuso 2367 copie e il 01/07/2009 per Google eravamo in 8'350 pagine.

Le figure impossibili, soprattutto se non messe in mano alla genialità di M. C. Escher, dopo un po' stufano; a noi non pare sia questo il caso per quelle disegnate da ***Andreas AARONSON*** che, pur se ispirate a modelli ormai visti e rivisti, ci sembrano interpretate da un nuovo punto di vista. Ma si può dire, "punto di vista", parlando di certe cose?

1. Project Management

Non è abbastanza fare del nostro meglio,
a volte occorre fare ciò che è necessario.
(Sir Winston Churchill)

Per chi lavora nell'industria oggigiorno le due parole che danno il titolo a quest'articolo sono diventate un tormentone. È più che ovvio che organizzare un gruppo di persone con diversi interessi e abilità nell'intento di ottenere un preciso risultato sia un'attività di tutto rispetto e dalla grande importanza, ma allo stesso tempo pare che non si possa nemmeno più affrontare una pausa caffè senza avere un piano preciso e un responsabile di progetto.

Per quanto siano ormai diventati invisi i moderni artefici dell'organizzazione delle attività, devono aver avuto dei momenti di gran potere in passato. Resta infatti impossibile immaginare la costruzione di grandiosi monumenti come le piramidi o le strade romane, o cattedrali medievali, senza un coordinamento ed un'anima centrale a far sì che ogni pezzo andasse al suo posto. Certo gli architetti del passato avevano qualcosa che oggi i project manager non possono nemmeno sognare: schiavi o manodopera completamente controllabile e autorità senza limiti riguardo al progetto. Col passare dei millenni i lavoratori hanno sviluppato diritti e pretese, non solo per un trattamento salariale adeguato, ma anche per ottenere una certa dignità di persone.

In realtà il moderno concetto di lavoratore è proprio cambiato: una volta forse ci si immaginava una persona, più o meno in uniforme, che lavorava un campo o operava in una fabbrica, mentre oggi il concetto si è esteso: i *colletti bianchi*[1] sono forse quello che la maggior parte dei lettori di queste note immagina quando pensa alle attività che ogni giorno contribuiscono al salario di fine mese. Ed è anche per questo che le tecniche di coordinamento e direzione devono cambiare: organizzare la costruzione di un edificio può richiedere lo stesso tipo di sforzo di coordinare lo sviluppo di un software di gestione, oppure no.

La definizione ufficiale[2] di *project management* è *applicazione di conoscenze, attitudini, tecniche e strumenti alle attività di un progetto al fine di conseguirne gli obiettivi*; cioè si suppone che non esistano differenze nelle tecniche tra i progetti. Quello che si nota immediatamente dalla definizione è l'esistenza di "attitudini", parola diversa dalle altre: che vorrà dire? Perché non bastano conoscenze, tecniche e strumenti? Il concetto potrebbe riferirsi a ciò che si notava al paragrafo precedente, e cioè che il moderno PM non ha più potere di vita e morte su chi partecipa al progetto, ma normalmente ha solo poteri di "coordinatore".

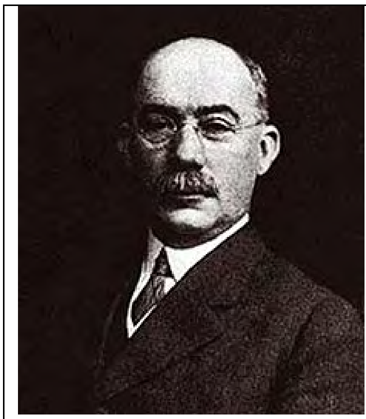
I modi di pensare devono necessariamente evolversi con le società, ma ciò non accade poi tanto in fretta. In un mondo di "lavoratori" che indossano tutti una camicia e siedono dietro ad una scrivania, il concetto di *capo*, o manager, continua ad essere associato al

---

[1] Interessante concetto proveniente dal mondo anglosassone degli anni trenta: gli operai delle fabbriche indossavano prevalentemente tute blu (blue-collar), mentre gli impiegati in uffici camicie bianche, notoriamente più sensibili allo sporco.

[2] Secondo il famigerato PMBOK, pubblicato dal Project Management Institute (www.pmi.org), associazione internazionale che si pone come scopo di definire e proteggere la professionalità dei PM. Nata dall'altra parte dell'Oceano, è diventata l'unica associazione riconosciuta per progetti governativi negli States. Per motivi imperscrutabili la Redazione di una certa Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa è piuttosto avvezza alle *tecniche e strumenti* di questa disciplina, ma prima che qualche esperto venga a correggerci le virgole vi ricordiamo che tutto quello che è scritto nelle pagine della Prestigiosa Rivista è prodotto da dilettanti, perfettamente consci di esserlo.

potere in senso negativo: una persona che decide quando si possono richiedere le ferie e se si potrà ricevere un aumento di stipendio o un miglioramento di posizione non può che essere associata a barzellette e ironie. In questo ambito, il project manager è una figura ancora più ridicola: di solito è un attore che opera tra diversi dipartimenti, alla ricerca di consenso di diversi interessi. Insomma, un rompiscatole che passa le sue giornate a cercare di convincere alcuni individui a concentrare i loro sforzi verso una determinata direzione, e per questo deve imparare ad essere carismatico, convincente e soprattutto credibile.


1 *Henry Laurence Gantt*

I manuali di project management esistenti in commercio hanno ormai parecchi capitoli dedicati alle *risorse umane*, a come ottenere consenso, a come motivare i membri del gruppo, a come creare un team. Quando le prime nozioni di gestione di progetto si facevano strada, all'inizio del ventesimo secolo, Henry Gantt[3] aveva già perfettamente chiaro il fatto che per poter dirigere un qualsiasi progetto occorreva studiare tutte le risorse a disposizione, di ogni tipo, e sapere come controllarle. Ingegnere meccanico laureato alla John Hopkins University (covo di numerosi premi Nobel), trovò un modo di tabulare la produttività di un team di lavoratori (ideando la famigerata Gantt Chart) e nella sua carriera di consulente riuscì a definire tecniche di motivazione moderne come i bonus di produttività collegati ai compiti assegnati.

Adesso le tecniche di Gantt sono state approfondite e migliorate, ma fondamentalmente i passi dell'organizzazione di un'attività sono quelli a suo tempo da lui definiti: pianificare con cura i metodi da utilizzare e definire un piano, attenersi al piano, misurare continuamente i risultati e confrontarli con quelli previsti, tenere sempre sotto controllo le variazioni e i rischi ad esso connessi. Oggi però ogni passo è definito, le metodologie hanno tutte un nome e una checklist da seguire, metodi vari, linee guida e sussidi informatici.

Un buon esempio è come gestire una riunione: corsi e liste sono organizzati per rendere ogni incontro efficiente e generare un risultato. In genere i punti principali sono:

1. Fissare con precisione l'obiettivo della riunione, in modo comprensibile, valutabile e motivante per tutti;
2. Fissare una durata ed attenersi a quanto concordato;
3. Evitare, con tecniche e comportamenti adeguati, il protrarsi di brusii o di scambi di battute sottovoce tra i partecipanti; definire regole di comportamento;
4. Definire e comunicare in anticipo l'ordine del giorno e non ammettere divagazioni;
5. Illustrare con chiarezza le conclusioni della riunione;
6. Definire i tempi di svolgimento delle azioni eventualmente concordate e gli argomenti della riunione successiva.

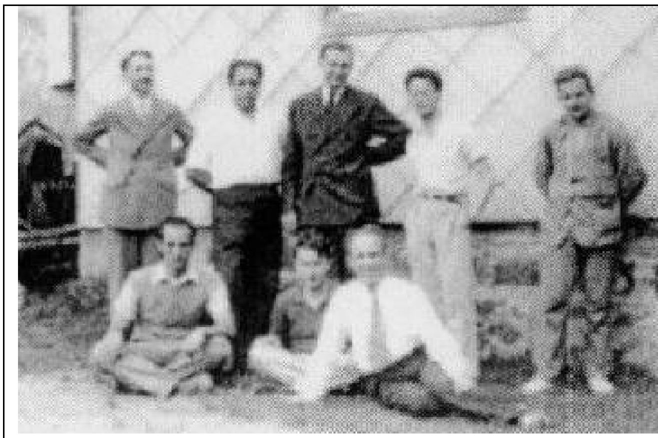
Questi sono solo piccoli suggerimenti, ma si trovano ovunque corsi incentrati su come facilitare una riunione ed esiste la figura professionale del facilitatore, per quanto noi non ne abbiamo mai conosciuto uno.

Leggendo le regole qui sopra sembrano perfettamente ragionevoli, eppure raramente seguite: dopotutto i metodi di interazione tra esseri umani hanno ancora tanto a che fare

[3] No, non è lui il protagonista di questo compleanno: non siamo riusciti a scoprire il suo mese di nascita, ma anche se potrebbe essere nato a luglio, non si può dire che sia un matematico.

con l'istinto e la cultura di ognuno di noi. E ancora, se seguire queste regole può aumentare l'efficienza di una riunione, non è detto che l'ignorarle possa portare al disastro.

Nel luglio del 1935, durante un congresso di matematici a Besse-en-Chandesse nasceva un matematico policefalo dal nome di Nicolas Bourbaki.



2 *Il primo congresso Bourbaki, Luglio 1935. Da sinistra a destra, dietro: Henri Cartan, René de Possel, Jean Dieudonné, André Weil; seduti: Mirlès, Claude Chevalley, Szolem Mandelbrojt*

Era più di un anno che tra André e Henri, professori all'università di Strasburgo, si discuteva su come potesse essere insegnata l'analisi differenziale ed integrale: il testo a disposizione era superato ed erano anni in cui la matematica francese era in declino soprattutto a causa della Prima Guerra Mondiale e del gap generazionale da essa creato. In Francia, infatti, i matematici non godevano di nessun privilegio particolare ed erano andati in guerra come ogni altro uomo abile della loro generazione, mentre in altre nazioni, come la Germania, venivano spesso assegnati a mansioni specifiche spesso evitando incarichi mortali.

Ci piace immaginare i due amici che discutono il problema animatamente e decidono che la soluzione migliore sia quella di creare un nuovo testo per l'insegnamento. Li vediamo raccogliere consensi e affrontare il problema in varie occasioni con altri matematici e colleghi durante le frequenti visite a Parigi. Qui gruppi di ex-studenti dell'*École Normale Supérieur* si incontravano ogni due lunedì al caffè *Capoulade* in Boulevard Saint-Michel vicino ai giardini Luxembourg. Le discussioni portarono infine a quel primo congresso, alle decisioni e al regolamento del gruppo. Il team si proponeva un ben preciso scopo – quello di unificare in un testo tutte le conoscenze moderne di analisi differenziale e integrale – e regole precise – come il consenso all'unanimità su tutte le decisioni, l'eliminazione dei nomi individuali dal trattato, il metodo assiomatico e l'obbligo di ritirarsi a cinquant'anni –: un progetto ambizioso.

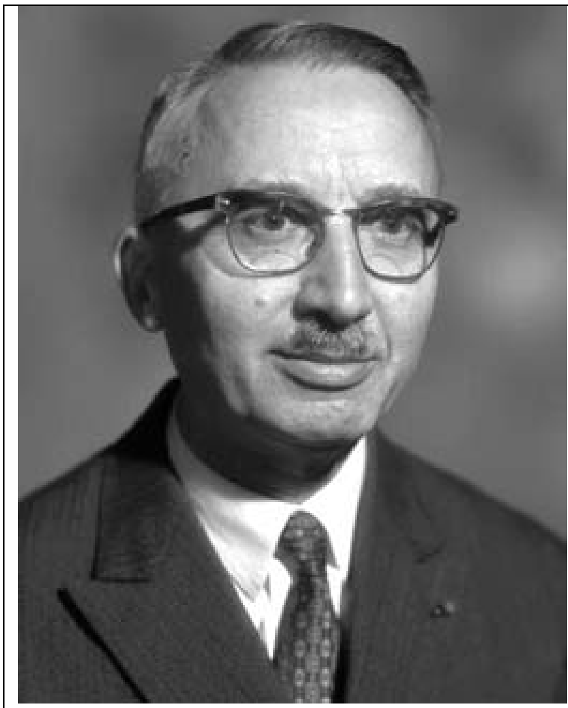
Di sicuro i membri del gruppo avevano un gran senso dell'umorismo: un buon esempio è il modo in cui scelsero il nome dell'autore del loro trattato di analisi. Nicolas Bourbaki fu probabilmente proposto da André Weil[4], che da giovane studente al suo primo anno di università era stato invitato ad una conferenza-scherzo, in cui uno studente anziano con una barba finta ed un forte accento straniero aveva spiegato numerosi falsi teoremi a cui aveva dato il nome di vari generali francesi, l'ultimo dei quali – probabilmente il più fantasioso – era il Teorema di Bourbaki. Tra l'altro Bourbaki è il nome di una stirpe di condottieri: Charles eroe della guerra di Crimea, e suo padre (greco) eroe nella guerra d'indipendenza ellenica nel 1827. Scelto il cognome decisero anche per un nome, Nicolas, e la moglie di uno dei membri si prestò come madrina di battesimo.

Del resto in seguito gli stessi membri continuarono a perpetuare la leggenda di Nicolas Bourbaki come un personaggio reale: quando l'editore esecutivo di Mathematical Reviews scrisse che Nicolas Bourbaki era uno pseudonimo utilizzato da un gruppo di matematici, ottenne una lettera infuriata da Nicolas stesso, e durante il periodo dadaista la morte di Bourbaki fu annunciata da qualche burlone.

[4] Di lui abbiamo parlato a profusione in RM088, "Figura e sfondo".

Indipendentemente dalla vitalità del matematico, i congressi Bourbaki, normalmente tenuti tre volte all'anno per una o due settimane, furono fin dal primo momento uno spettacolo incredibile ed affascinante per chiunque vi partecipasse per la prima volta. Dieudonné scrisse che l'ascoltatore "*ne usciva sempre con l'impressione di assistere all'incontro di pazzi. Non si poteva immaginare come questa gente, urlando – a volte tre o quattro allo stesso tempo – potesse mai ottenere qualcosa di sensato*". Lo stesso Weil[5] confermò che la struttura anarchica del consesso era voluta: "*In ogni riunione del gruppo non c'è mai stato un presidente. Ognuno parla quando vuole e tutti gli altri hanno il diritto di interromperlo… Il carattere anarchico di queste discussioni è stato mantenuto durante tutta l'esistenza del gruppo… Una buona organizzazione avrebbe senza dubbio richiesto che a ognuno venisse assegnato un argomento o un capitolo, ma l'idea non ci ha mai sfiorato… Quello che c'è da imparare da questa esperienza è che qualsiasi sforzo organizzativo avrebbe portato ad un trattato qualsiasi…*"

L'idea di un progetto condotto in questa maniera farebbe inorridire ogni buon teorico della gestione dei progetti: gli stessi partecipanti si chiesero spesso come fosse possibile che le riunioni continuassero e fossero un successo. Borel scrisse che molto dipese sempre dall'immensa dedizione dei suoi membri, soprattutto Henri Cartan, che da padre fondatore del progetto, non smise mai di crederci.



3 *Henri Paul Cartan*

Henri Paul Cartan era nato l'otto luglio[6] del 1904, figlio d'arte, visto che suo padre Elie era a sua volta uno dei professori dell'École Normale, collega e amico di Gaston Julia[7]. Nel periodo tra le due Guerre aveva stretto amicizie con matematici tedeschi, tra cui Heinrich Behnke, e dopo la guerra riprese i contatti malgrado la sua famiglia fosse stata decimata dal conflitto.

Tra la Normale, la Sorbona e l'Università di Strasburgo e i molti anni a Parigi ci furono viaggi e incontri ed un'intensa attività come matematico e iniziatore di nuovi progetti, di cui Bourbaki fu uno dei principali, ma non l'unico.

Le sue pubblicazioni, conferenze, e gli insegnamenti ai suoi studenti ne hanno fatto uno dei matematici che più hanno influenzato la matematica dei nostri giorni: tra i suoi studenti non si possono ignorare Jean-Pierre Serre o René Thom[8], e tanti altri che non citiamo e che hanno continuato ricerche adesso fondamentali. Ha ottenuto numerosi premi ed onori, tra cui uno dei più prestigiosi per un matematico, il Premio Wolf, nel 1980.

Il libro che pubblicò nel 1956 con Samuel Eilenberg, sull'algebra omologica, è ancora utilizzato e venduto, ed è stato il libro di testo di mezzo secolo di matematici francesi e non.

[5] Dobbiamo molto all'articolo di Armand Borel *Venticinque anni con Nicolas Bourbaki*, che si trova integralmente su http://www.ega-math.narod.ru/Bbaki/Bourb3.htm .

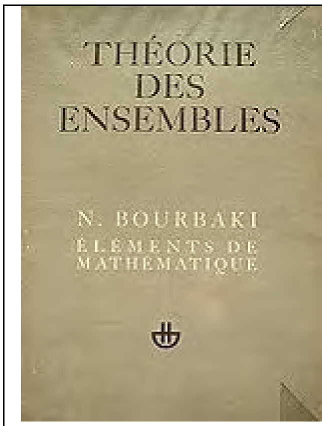
[6] Ebbene sì, compleanno multiplo questo mese. Di un matematico policefalo e di uno dei suoi papà.

[7] Di lui parliamo in RM073.

[8] Anche lui celebrato da noi in RM080.

L'uomo Henri Cartan non finisce con la matematica: fu anche impegnato sul fronte politico, raccolse firme per liberare matematici dissidenti, cominciando il suo impegno con Leonard Plyushch, e proseguendo creando comitati che proteggono scienziati dalle persecuzioni politiche in tutto il mondo. Fu un fervente sostenitore del Federalismo Europeo, fino a candidarsi come deputato per la comunità europea[9].

Nel 1935 Henri sposava Nicole Weiss, figlia di un fisico francese, dalla quale ebbe 5 figli: forse è un caso che nello stesso anno nascesse Nicolas Bourbaki, un progetto destinato a influenzare mezzo secolo di matematica.



4 *Il primo volume degli Éléments de mathématique*

Infatti, come ben Weil aveva previsto, non si trattò di un trattato qualsiasi: malgrado il metodo caotico ed il sistema che obbligava ogni componente a studiare e capire ogni parte del progetto, parti dei volumi degli *Éléments de mathématique* cominciarono a venir pubblicati a partire dal 1939, e a riscuotere qualche successo.

Una seria interruzione – o perlomeno un rallentamento – fu imposto dallo scoppio della Seconda Guerra Mondiale, che vide alcuni membri trasferirsi negli Stati Uniti, e altri impegnati su diversi fronti. Il progetto iniziale includeva sei libri, ognuno di dieci capitoli:

I. Teoria degli Insiemi
II. Algebra
III. Topologia
IV. Funzioni in una variabile reale
V. Spazi vettoriali topologici
VI. Integrazione

Alla fine della Seconda Guerra mondiale, però, solo alcuni capitoli dei primi tre volumi erano stati pubblicati. Ma le generazioni di matematici che presero il nome Nicolas Bourbaki non invecchiavano, e soprattutto credevano fermamente nel loro progetto: negli anni cinquanta ci si rese conto che ogni volume aveva richiesto una decina di anni, ma già nel 1958 i primi sei volumi erano quasi completi, e Grothendieck[10], che nel frattempo era diventato l'anima della terza generazione di Bourbaki, propose di continuare l'opera con altri tre volumi:

VII. Algebra omologica
VIII. Topologia elementare
IX. Varietà

Ed il progetto continua tutt'ora[11]; anche se negli ultimi anni più a rilento e con meno entusiasmo, è una realtà che sta per compiere ottant'anni. Niente male per un progetto organizzato contro ogni regola, con obiettivi definiti ogni volta in modo diverso e senza nessun project manager.

Henri Cartan, invece, si è spento l'anno scorso, alla veneranda età di centoquattro anni, nel bel mezzo delle Olimpiadi del 2008, testimone di un secolo di matematica e di progetti eccezionali.

---

[9] Si scoprono molte altre cose su di lui leggendo un'intervista che ha ormai compiuto dieci anni, negli archivi dell'AMS, http://www.ams.org/notices/199907/fea-cartan.pdf .

[10] Anche di lui abbiamo già parlato, in RM086.

[11] Visitare la pagina ufficiale dei collaboratori di Nicolas Bourbaki per credere: http://www.bourbaki.ens.fr/

Certo non avrebbe potuto ottenere un necrologio spassoso come quello della sua creatura matematica prediletta, Nicolas:

> *Les familles Cantor, Hilbert, Noether; les familles Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weil; les familles Bruhat, Dixmier, Samuel, Schwartz; les familles Cartier, Grothendieck, Malgrange, Serre; les familles Demazure, Douady, Giraud, Verdier; les familles filtrantes à droite et les épimorphismes strictes, mesdemoiselles Adèle et Idèle; ont la douleur de vous faire part du décès de M. Nicolas Bourbaki, leur père, frère, fils, petit-fils arrière-petit-fils et petit-cousin respectivement pieusement décédé le 11 novembre 1968, jour anniversaire de la victoire, en son domicile de Nancago. La crémation aura lieu le samedi 23 novembre 1968 à 15 heures au cimetière des fonctions aléatoires, métro Markov et Gödel.*
>
> *On se réunira devant le bar «aux produits directs», carrefour des résolutions projectives, anciennement place Koszul.*
>
> *Selon les vœux du défunt, une messe sera célébrée en l'église Notre-Dame des problèmes universels, par son éminence le Cardinal Aleph 1 en présence des représentants de toutes les classes d'équivalence et des corps algébriquement clos constitués. Une minute de silence sera observée par les élèves des Écoles normales supérieures et des classes de Chern.*
>
> *Car Dieu est le compactifié d'Alexandroff de l'univers, Grothendieck IV, 22.*

Un matematico del genere, però, non si era mai visto, e forse non si vedrà mai più.

2. Problemi

	Rudy d’Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
.mau.			
Zar			

Pressione bassa, come tutti gli anni. E voglia di fare niente, come tutti gli anni. Fortunatamente, abbiamo dei lettori che ci vengono in soccorso.

2.1 .mau.

Sull’origine di questo problema ci siamo impegnati a mantenere il più rigoroso segreto; per il momento, ci limitiamo a dire che ne riparleremo.

Riceviamo e volentieri pubblichiamo, con il permesso dell’Autore:

> Su un tavolo sono state messe in fila **50** monete di vari valori, da 1 cent a 2 euro.
>
> Alice *[No, non lei: quella di tutti i problemi dove dopo compare almeno un “Bruno”]* inizia a giocare prendendosi una moneta da uno degli estremi della fila; a questo punto è il turno di Bruno *[L’avevo detto, io!]*, che prende anche lui una moneta da uno dei due estremi, o dallo stesso da cui ha preso Alice o dall’altro; il gioco continua così fino a che tutte le monete sono finite nelle tasche di Alice o Bruno.
>
> Dimostrare che Alice ha una strategia che le permette di ottenere almeno tanti soldi quanto Bruno.

Piccola nota: vi ricordiamo che le soluzioni di ***.mau.*** ai nostri problemi sono, più che “soluzioni”, “risposte” (ossia ci dice la soluzione – senza un briciolo di calcolo – dopo due frasette che spiegano a grandi linee il calcolo; fosse per lui, RM avrebbe sei pagine, se tiriamo lungo il compleanno); visto che questa volta gli è inibita la risposta, cercate di fare un minimo di analisi, *please*.

2.2 Zar

Qui, sull’origine possiamo fornire ulteriori dettagli: ***Zar*** lo ha trovato alle selezioni per le Olimpiadi della Matematica, dove si è divertito molto (quest’anno, anche due di noi si sono divertiti molto); diciamo le cose che abbiamo da dire in nota, e gli lasciamo la parola.

> Avete sicuramente presente il problema del ragno e della formica[12] che si devono muovere sulle pareti di un parallelepipedo: il ragno parte da un punto della base e deve raggiungere un punto *antipodale* seguendo la strada più corta.
>
> Il punto *antipodale* è effettivamente il punto più lontano o ve ne sono altri più lontani?
>
> E qual è il punto più lontano di tutti?

Giusto per i non-bibliofilomatematicorecreativi (appena inventata, e ne siamo fieri!), riportiamo il problema originale nella formulazione del Ghersi (pag. 61 nella quarta edizione del 1972):

In una stanza di forma parallelepipeda il pavimento è un rettangolo di metri 5 per 7 e l'altezza è di metri 4. Sulla verticale del mezzo d'una delle pareti minori, a 50 centimetri dal soffitto, sta un ragno che ha preso di mira una mosca situata sulla parete opposta, sulla verticale nel mezzo di essa e distante 50 centimetri dal pavimento. Qual è la via più breve che possa seguire il ragno per raggiungere la mosca supposta immobilizzata dal terrore?

3. Bungee Jumpers

Provate che, se p è un numero primo e le parentesi quadre indicano la parte intera del numero, la differenza

$$\binom{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right],$$

è divisibile per p.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Fare matematica a Luglio è davvero cosa da professionisti: a parte i matematici veri, quelli con la emme maiuscola nel nome e un dottorato di ricerca nel cassetto, solo gli studenti alle prese con la maturità e la loro controparte, i professori che formano le commissioni d'esame, dovrebbero rimanere a parlare di numeri e funzioni nel mese eponimo di Giulio Cesare.

Sia come sia, qualche aneddoto matematico dovremmo riuscire a metterlo insieme anche questa volta. Per non peccare troppo di originalità, potremmo cominciare col parlarvi di noi. Alice e Piotr hanno nuovamente giocato ai quattro cantoni, scambiandosi i compiti istituzionali: il compleanno che avete appena finito di leggere è stato scritto da miss Riddle, mentre invece queste leggere farneticazioni che usualmente sono il regno di Treccia, questa volta sono state messe insieme dalla tastiera di Doc. In realtà, però, questa notizia di limitato interesse interno è solo una misera scusa per accennare ai quattro cantoni, e rifilarvi un'altra notizia (di interesse non meno limitato, e nemmeno meno provinciale): il CdR Estivo, che si svolge usualmente a Zurigo ai primi di Agosto,

[12] Lo abbiamo talmente presente che facciamo notare due cose:

1. Non è una formica, è una mosca!
2. La prima comparsa (in italiano) del problema è sul ***Ghersi***; recentemente abbiamo scoperto che G. ha potentemente scopiazzato da Eduard ***Lucas*** (anche i disegni!), quindi forse la prima comparsa fuori dalla lingua italiana va attribuita a lui.

Il meno giovane di noi (Rudy) ricorda la seconda comparsa italiana del problema sull'"***Angolo dei Wutki***", nei *primerrimi* numeri di "Linus" (ciao, Ennio!:-), in cui il ragno si chiamava Zrcadlo e la mosca Wutki. Ci chiediamo ancora adesso da dove diavolo nascano quei due nomi: se qualcuno con le iniziali E.P. (o anche altre: non ci formalizziamo) vuole spiegarcelo, saremo ben contenti di pubblicare.

questa si terrà ai primi di Luglio. E anche se sarà sempre Zurigo la base del CdR, sembra proprio che i nostri, stavolta, accompagnati da un variegato sottoinsieme di VAdLdRM aut similia, facciano un salto a Lucerna. E a Lucerna, come è noto, il Lago dei Quattro Cantoni c'è davvero.

Rudy, per conto suo, si è addirittura lanciato in un cimento che solo in qualche anno particolarmente fortunato gli riesce: il ***Summer Contest***. Lo trovate un po' più avanti in queste pagine, quindi non vale neppure la pena di rovinarvi la sorpresa: il grande concorso estivo (con i soliti premi in palio: centinaia e centinaia di abbonamenti vitalizi gratuiti ad una prestigiosa rivista di matematica ricreativa) riprende un PM di particolare successo, e non dovrebbe deludere neanche i lettori più esigenti.

E se provassimo a guardare anche solo un po' più lontano del nostro naso? Beh, allora dovremmo subito segnalare un paio di osservazioni interessanti. Ad esempio, esiste in rete una bella immagine di Paperino che si interroga inquieto in una nuvola di fumetti matematici. È un'immagine molto carina, e noi l'abbiamo a suo tempo usata, naturalmente senza chiedere niente a nessuno, da bravi saccheggiatori del web. La si può vedere anche qui: http://www.rudimathematici.com/RemoMabilia/remomabilia.htm#a037. Per fortuna, non tutti sono criminali come noi: ***Paolo Politi***, che tra gli altri ha anche il gran merito di mandare avanti il Caffè Scienza di Firenze (www.caffescienza.it) si è messo invece alla ricerca del legittimo proprietario, e l'ha trovato! Grande è stata la sua sorpresa nello scoprire che il fortunato possessore era italiano, matematico e fiorentino come lui: si tratta di ***Marco Barlotti***, (http://marcobar.outducks.org/SNat/index.html), che ha ottenuto il disegno direttamente dal grande ***Don Rosa***, il più grande paperografo al mondo, dopo ***Carl Barks***.

Il mese scorso, nel compleanno dedicato a Markov, nel descrivere le "catene dei crateri" dicevamo che "*usualmente sono il risultato di un impatto tra corpi celesti, un po' come i rimbalzi che i sassi piatti riescono a fare sull'acqua quando vengono lanciati con un angolo molto acuto rispetto alla superficie*". Ebbene, quanto detto non è vero: è il solito Doc che si documenta, ma lo fa male e ogni tanto dice delle grosse sciocchezze. Però RM è grande e potente, e riesce a correggersi da sola: in questo caso è stato ***Paolo Sirtoli*** ad accorgersi dell'errore e a mandarci una precisazione:

> "Solo una precisazione da pedante: le catene di crateri di cui riportate un bell'esempio su questo numero di RM non derivano da un impatto radente a mo' di pietra scagliata sull'acqua. Si tratta invece dell'effetto della forza di marea, che a volte riesce a sbriciolare un oggetto celeste e i frammenti cadono tutti in fila. Uno spettacolare caso è dato dalla povera cometa *Shoemaker-Levy*, che dopo essere stata sbriciolata in una ventina di frammenti, si è tuffata su (in) Giove nel 1994."

Secondo noi Paolo sbaglia: la precisazione che ha fatto non è affatto da pedante, è invece del tutto sacrosanta. E non sappiamo cosa ne pensate voi, ma vedere anche quel suo dubbio su quale possa essere la preposizione più adatta "…su (in) Giove…" mostra in realtà una profonda familiarità col cosmo: sui pianeti gassosi non si *atterra*, piuttosto si *entra*.

Poi, visto che è Luglio, vi facciamo un pesce d'Aprile. Dove cercate i problemi, di solito, in RM? Ma è ovvio, nel capitolo dei problemi. Epperò noi abbiamo un conto aperto con un lettore che vuol mantenere l'anonimato, e che chiameremo col il nome in codice di ***Instancabile Fustigatore*** (o IF, per gli amici). È uno dei pochi lettori che ha ben capito che in redazione siamo tutt'altro che bravi solutori, e ogni tanto ci tormenta (o meglio: ci fustiga) mandandoci le evidenze delle nostre manchevolezze o, peggio ancora, dei problemi che dovremmo essere in grado di risolvere, ma che immancabilmente non riusciamo a smuovere di un millimetro. Qualche giorno fa ci ha mandato un problema che, a sentir lui, lo assilla da tempo. Noi non ci crediamo per niente, che lo assilli, ma se mai fosse vero, e se mai qualche volenteroso masochista volesse cimentarsi nel tentativo di risolverlo, lo raccontiamo brevemente qui:

> "C'è un problema che mi tormenta da anni. Elettrostatica: sfera conduttrice carica, contatto con sfera conduttrice scarica, se le due sfere sono uguali la carica si ripartisce equamente. Cosa capita se i raggi sono diversi? Io a suo tempo l'avevo risolto con una serie (che convergeva abbastanza in fretta se le sfere erano solo vicine, ma non a distanza zero) di cariche fantasma ottenendo, a spanne, una strana funzione su cui non avrei scommesso molto. Sui libri, specialmente negli esercizi o le sfere sono sempre uguali o sparano cavolate del tipo proporzionale alla capacità. Sono arrivato anche a scrivere all'autore di un manuale che mi rispose come se fossi fuori di testa. Nell'edizione successiva, però, l'esercizio non c'era più. Voi che fisici siete, potete procurarmi una risposta credibile?"

Figuriamoci se noi, che siamo fisici, proviamo a metterci in un tale ginepraio. A Fisica insegnano soprattutto come non farsi fregare dai problemi, e in questo siamo bravissimi. Se però qualcuno di voi ha delle idee, sappiate che IF potrebbe apprezzare…

Infine, diamine, è estate! E d'estate si va al mare, ai monti o ai laghi. E non vorremmo davvero che vi dimenticaste che a Caldè di Castelveccana, riva lombarda del Lago Maggiore, ci sarà il solito festival matematico "***Tutto è Numero***" (quello che noi di RM continuiamo a chiamare "*Sagra del Pesce Algebrico*", ma non chiedete info con questo nome, siamo solo noi a chiamarla così…): da giovedì 23 a domenica 26 luglio: ci trovate in allenamento la Nazionale Italiana di Giochi Matematici che si allena per Parigi, oltre ad una pletora di altre attrazioni. Trovate tutto qua: http://www.tuttoenumero.it/it/festival/.

E adesso basta con le *Note*: è tempo delle *Soluzioni*.

4.1 [124]

Poche soluzioni, come c'era da aspettarsi. In realtà, il grande Campeador, il nostro ***Cid***, ci ha mandato perfino una soluzione del *Quick&Dirty*, mentre ***Giuseppe Bonacci*** ci ha mandato una gran bella semplificazione/generalizzazione del *Bungee Jumpers* (che non pubblichiamo per problemi sciocchi e tecnici, ma ci ripromettiamo di farlo al più presto). Per il resto, vi ricordate i problemi del numero scorso? Il primo si intitolava…

4.1.1 Non è un duplicato...

… ma in realtà si parla di lotterie. Il testo recitava più o meno così:

> *"Trattasi di lotteria; voi potete comprare dei biglietti, ciascuno dei quali ha un valore di vincita t; variabile casuale uniformemente distribuita tra 0 e 1 Euro; ogni biglietto costa un certo prezzo c, anch'esso compreso tra 0 e 1 Euro; voi potete comprare, se volete, anche zero biglietti; la "fregatura" è che se non vi piace il biglietto che avete comprato, lo gettate via e ne comprate un altro (sempre al costo c). Supponiamo che adottiate la miglior strategia; quanto vi aspettate di vincere, come funzione di c? Supponiamo voi non siate costretti a buttare via i biglietti precedenti, ma quando vi stufate di regalare soldi all'organizzatore della Lotteria, possiate presentare all'incasso un solo biglietto a vostra scelta; in questo caso, quanto vi aspettate di vincere?"*

Le lotterie non piacciono tanto, mi sa. Si sono cimentati col problema in pochi: ***Alberto R, Millennium Bug*** e ***Gnugnu***. Il problema era indubbiamente difficile, e a noi piace molto vedere come i nostri migliori solutori riescano ad essere obiettivi e rigorosamente analitici nei loro commenti. ***Alberto***, ad un certo punto della sua soluzione, scrive:

> È giusto questo risultato? Non lo so e ci spero poco. Mentre in un "normale" problema di matematica si presentano due alternative: "trovo la soluzione" o "non ci riesco", quando c'è di mezzo il calcolo delle probabilità le alternative diventano tre poiché alla due suddette si aggiunge, frequente e deprimente, il caso "ho trovato la soluzione…ma è sbagliata", cosa che, notoriamente, induce i matematici dilettanti a cambiare diletto dedicandosi alla coltivazione delle zucchine.

La verità, a parer nostro, è che le zucchine sarebbero onorate di avere certi curatori, perché sono tra gli ortaggi intellettualmente più dotati. E Alberto è certamente troppo modesto. A fargli compagnia possiamo mettere ***Millennium Bug***, che gli fa da controcanto:

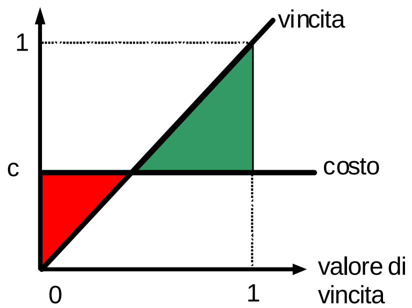
> Ecco le (mie) soluzioni, anche se non sono troppo soddisfatto di quella del problema 1

Però, a parte questa premessa, poi parte all'attacco:

> Spesso la parte più impegnativa dei problemi di RM è capirli. Ad esempio in questo non mi è chiaro perché uno debba gettare via il biglietto se non gli piace il valore di vincita: anche se minima comunque è meglio di niente! La cosa più logica mi pare allora interpretare questa "regola" nel senso che una volta che si ritira una vincita poi non si ha più diritto a giocare.

…e si lancia anche in grafici:

> Il caso più semplice di una sola giocata si può schematizzare così:



> Nell'ipotesi di una distribuzione uniforme tra 0 e 1 del valore di vincita del singolo biglietto a costo fisso c, la vincita attesa è data dalla differenza tra l'area verde e quella rossa, cioè tra i casi in cui realizzo un guadagno e quelli in cui vado in perdita.
>
> Notare che lo schema vale anche per il caso in cui si vendono biglietti a costo $c > 1$: io non lo escluderei a priori come assurdo, considerata la quantità di gente che gioca assiduamente al lotto, alcuni vantandosi di usare metodi "matematici" basati sui ritardi dei numeri.

Come preannunciato, anche ***Gnugnu*** era tra i solutori di questo problema. Ecco come ha affrontato la questione:

> La distribuzione dei premi associati ai biglietti non viene modificata dal risultato di una o più estrazioni, né l'esito di queste porta nuove informazioni. Perciò la convenienza a giocare, la speranza di vincita e la strategia che la massimizza, non possono che essere indipendenti dagli esiti osservati, a meno che il capitale a disposizione del giocatore si esaurisca per il ripetersi di estrazioni sfavorevoli. Se il giocatore dispone di un capitale sufficiente, la strategia dovrà essere del tipo: continuo a giocare fino a quando non estraggo un biglietto con un premio superiore ad un valore h dipendente solo dal costo c di un biglietto. Il premio atteso è uguale alla media aritmetica degli estremi dell'intervallo considerato, quindi se è $c > 0.5$ non ho alcuna convenienza a giocare, se $c = 0.5$ il gioco sarà equo e, volendo giocare, acquisterò un solo biglietto, affidandomi alla sorte.

Con c < 0.5, indicando con E l'evento "estraggo un biglietto con premio maggiore di h" e con $\boldsymbol{m}$ il valor medio di questo premio, avremo: $p(E)=1-h, \quad p(\overline{E})=h,$ e $m=\frac{1+h}{2}.$

L'evento E può verificarsi alla prima estrazione, oppure ad una delle successive e, dovendo ogni volta acquistare un biglietto avremo vincite medie $v(r)$ (anche negative) decrescenti col ritardo: $v(1)=m-c, v(2)=m-2c, \dots v(i)=m-i\,c, \dots$.

La vincita attesa sarà il valor medio di queste infinite vincite:

$$v_a=\sum_{i=1}^{\infty}h^{i-1}(1-h)v(i)=(1-h)\sum_{i=1}^{\infty}h^{i-1}\left(\frac{1+h}{2}-i\,c\right)=(1-h)\frac{1+h}{2}\sum_{i=1}^{\infty}h^{i-1}-(1-h)c\sum_{i=1}^{\infty}i\,h^{i-1}$$

da cui, ricordando che $0\le h<1, \quad \sum_{i=1}^{\infty}h^{i-1}=\frac{1}{1-h}, \quad \sum_{i=1}^{\infty}i\,h^{i-1}=\frac{1}{(1-h)^2},$

$$v_a=\frac{1+h}{2}-\frac{c}{1-h}.$$

Volendo rendere massima questa vincita attesa possiamo, per qualsiasi valore di $\boldsymbol{c}$, derivare rispetto ad h, ottenendo $\frac{\partial v_a}{\partial h}=\frac{1}{2}-\frac{c}{(1-h)^2}$ che si annulla quando $(1-h)^2=2c \quad \rightarrow \quad h=1-\sqrt{2c}$.

Il segno della derivata, positivo per h minore del valore trovato e negativo per h maggiore, garantisce che la vincita corrispondente è effettivamente quella massima possibile con questa strategia. Sostituendo il valore di h otteniamo:

$$v_{aMax}=\frac{1+1-\sqrt{2c}}{2}-\frac{c}{\sqrt{2c}}=\frac{2-2\sqrt{2c}}{2}=1-\sqrt{2c}\,.$$

Sorpresa! Per ogni valore di $\boldsymbol{c}$, i corrispondenti valori di h e del massimo della vincita attesa coincidono. Sarà un caso? Credo poco alle coincidenze casuali, e, in effetti, con qualche passaggio algebrico si può giustificare l'uguaglianza, evitando in questo modo, l'uso della derivata. Non riesco, però, a trovare una spiegazione soddisfacente che preceda il calcolo della funzione.

Il testo del problema ghigna sommessamente, ma l'ultimo paragrafo è un capolavoro: sibillino più che mai e quasi provocatorio. Mi piacerebbe rintracciare l'albero genealogico di Rudy per contare quante pizie vi compaiono.

Ohibò! Se la strategia è quella descritta, mi fermo solo quando si verifica E. Disporre dei premi precedenti, di importo certamente inferiore all'ultimo, è la quintessenza dell'inutilità. Supponiamo, allora, di poter contare su un capitale limitato: quanto basta per acquistare solo n biglietti. In questo caso avremo:

$$v_{na}=\sum_{i=1}^{n}\left[h^{i-1}(1-h)\left(\frac{1+h}{2}-i\,c\right)\right]+h^n\left(\frac{h}{2}-nc\right)$$

con la regola iniziale e

$$v_{na}=\sum_{i=1}^{n}\left[h^{i-1}(1-h)\left(\frac{1+h}{2}-i\,c\right)\right]+n\,h^n\left(\frac{h}{n+1}-c\right)$$

conservando il miglior biglietto estratto.

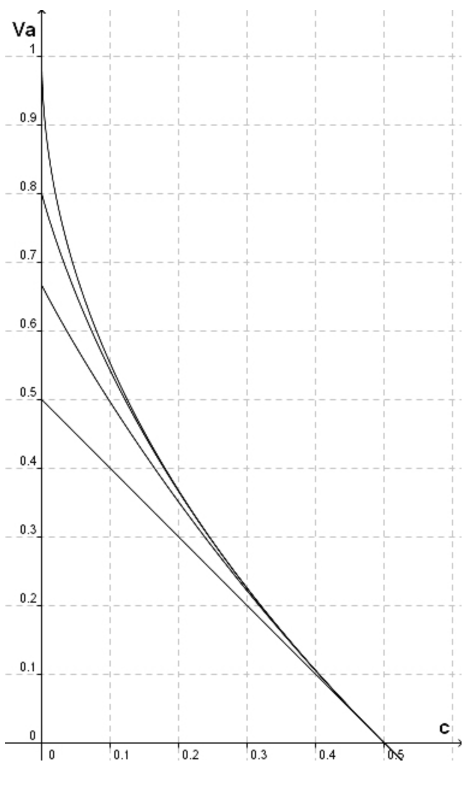
La seconda formulazione ha il vantaggio, di fornire, per qualunque valore di n, una derivata che differisce da quella trovata prima solo per un fattore non negativo

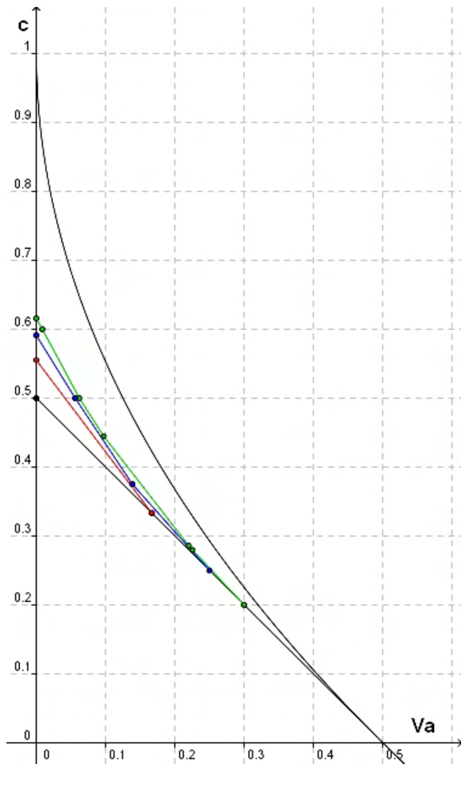
$$\frac{\partial v_{na}}{\partial h} = \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{(1-h)^2} \right) \left[1 + (n-1)h^n - nh^{n-1} \right]$$

e, sostituendo h con $1-\sqrt{2c}$, la funzione diventa

$$v_{na} = 1 - \sqrt{2c} - \frac{\left(1-\sqrt{2c}\right)^{n+1}}{n+1} = v_a - \frac{\left(1-\sqrt{2c}\right)^{n+1}}{n+1} .$$

Nel grafico a sinistra sono riportate, dal basso in alto, le curve v_{na} per n = 1, 2, 4 e la curva limite v_a. Come si vede la convergenza è molto rapida.





Per un confronto con il problema "Finché siamo in tempo…" del mese passato, il grafico a destra riporta le poligonali per n = 1, 2, 3, 4; 'normalizzate' ponendo ad 1 il premio per l'estrazione di una pallina bianca e dividendo per n il valore atteso. Scambiando gli assi, si può ipotizzare, anche questa volta, una convergenza, decisamente più lenta, verso il medesimo arco di parabola.

Le due funzioni limite sarebbero l'una l'inversa dell'altra, e si spiegherebbero i ripetuti ammiccamenti del GC. Nell'attesa che la comunità matematica si decida ad inserire l'ultima osservazione fra le tecniche dimostrative accettate, posso solo provare un risultato, decisamente controintuitivo, relativo a FSIT.. che non contraddice l'uguaglianza delle curve limite.

Dato un qualsiasi costo $c < 1$, esiste un m tale che, per ogni $n > m$, almeno una strategia risulta favorevole al giocatore.

Come ha giustamente osservato ***Cid*** nella sua ottima trattazione del caso $n = 3$, la strategia che permette di giocare vantaggiosamente con i più grandi valori di $\boldsymbol{c}$ è: continuo ad acquistare biglie fino a quando non ne estraggo una cattiva.

Giocando con n biglie, si dimostra facilmente che la probabilità di estrarre la prima biglia nera all'$\boldsymbol{i}$-esimo tentativo è $p(i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, per ogni i non maggiore di n, mentre è $(n+1)^{-1}$ la probabilità di giocare con il sacchetto contenente solo biglie bianche.

La vincita attesa con la strategia indicata è allora

$$v_{na} = \frac{n}{n+1}(1-c) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)(i-1-i\,c) = (1-c)\left[\frac{n}{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\right] - 1 + \frac{1}{n+1},$$

certamente positiva se $\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} > \frac{1}{1-c}$. La divergenza della serie armonica assicura il verificarsi dell'ultima disuguaglianza, per ogni n maggiore di opportuni, magari molto grandi, valori di m.

Un paio di note a margine sono indispensabili per accompagnare questa soluzione. La prima è che il ***Cid***, anche le rarissime volte che non risolve un problema, finisce per essere citato nella sua soluzione: questa è oramai quasi magia. La seconda è che, se andate a vedere a pagina 11 del numero scorso, troverete due soli coniglietti come indice di difficoltà di questo problema. Adesso, ritornate a guardare nelle pagine precedenti la soluzione di ***Gnugnu***, e ditemi voi se è credibile che Doc possa aver dato due soli simboli di difficoltà ad una cosa del genere. Vi servono altre prove del fatto che i redattori di RM fanno pesci d'Aprile in ogni periodo dell'anno?

4.1.2 Mezza Bilancia

Questo quesito ha senza dubbio incontrato più favori del precedente, almeno a giudicare dal numero di soluzioni giunte in redazione. Vi ricordate cosa chiedeva? Ecco qua:

> *L'idea è, approssimativamente, di prendere una di quelle teglie parallelepipedali e piazzarla su un supporto in modo che sia perfettamente bilanciata; a questo punto, dovendo pesare della farina, la compattiamo sulla sinistra, che formi un parallelepipedo all'interno della teglia riempiendola completamente per una certa lunghezza. Questo squilibrerà la monolancia, costringendoci a spostare il punto di appoggio sulla sinistra della teglia, sino a raggiungere un nuovo punto di equilibrio funzione della quantità di farina contenuta. Fred si è posto un'interessante domanda: "Ma senza sapere niente del peso della teglia o della farina, se io continuo ad aggiungerne e intanto sposto il fulcro, ci sarà un momento in cui il punto di appoggio sarà nel punto più a sinistra possibile, per poi ricominciare a spostarsi verso il centro… Ma in quel momento, fin dove arriva la farina nella teglia? È a sinistra o a destra del centro teglia?" Alberto non poteva essere da meno, e ha cominciato a chiedersi se fosse possibile determinare precisamente la posizione cui arriva la farina quando il punto di appoggio è il più a sinistra possibile. E Fred: "E tieni anche conto del fatto che stai lavorando con farina integrale, quindi con delle impurità che ti fanno variare il peso lungo il 'panetto'… in questo caso, cambiano le tue risposte?" Alberto: "Credo ci vogliano un po' di numeri: la nostra farina pesa 10 grammi per ogni centimetro di lunghezza di teglia, la teglia è lunga 20 centimetri e pesa 300 grammi; adesso, dovremmo poter trovare il punto di appoggio più a sinistra…*

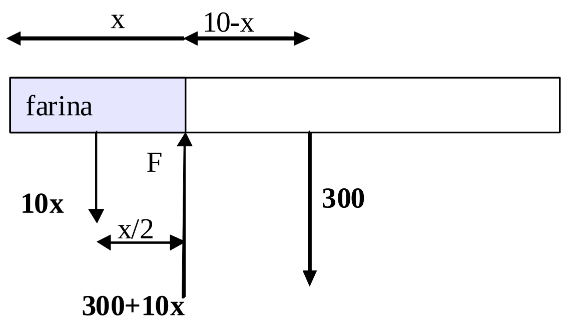
Come dicevamo, questo problema ha richiamato molti più solutori. In archivio abbiamo escussioni monolanciche di ***Cid***, ***BR1***, ***Trekker***, ***Millennium Bug***, ***Gnugnu***, ***Franco57***, ***AndreaB***. e ***Gino P***., ma il bello è soprattutto la varietà delle soluzioni proposte. Innanzitutto, varietà geografica: vi rendete conto che una soluzione giunge dal Brasile e una dall'Alaska? Oltre a questa, c'è anche varietà di metodo e di approccio, prima ancora che di soluzione.

Ad esempio, ***Cid*** è veloce nel giungere ad un risultato:

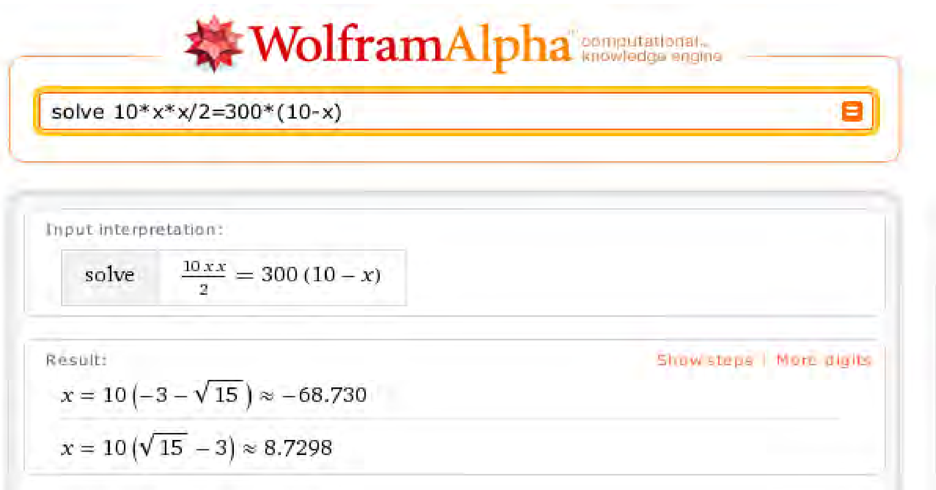
> Chiamo x la distanza in centimetri tra il fulcro e l'estremità sinistra della teglia. Il peso della parte di teglia a sinistra del fulcro risulta uguale a: $P_1 = \frac{300}{20} \cdot x = 15x$.
>
> La posizione del baricentro della parte sinistra della teglia dista dal fulcro: $d_1 = \frac{x}{2}$. Il peso della parte di teglia a destra del fulcro risulta uguale a: $P_2 = \frac{300}{20} \cdot (20 - x) = 15 \cdot (20 - x)$.
>
> La posizione del baricentro della parte destra della teglia dista dal fulcro: $d_2 = \frac{(20 - x)}{2}$. Chiamo P la variabile che indica il peso della farina. Siccome la farina pesa 10 grammi per centimetro, la lunghezza del blocco di farina da pesare risulta uguale a: $\frac{P}{10}$. La posizione del baricentro della farina dista dal fulcro: $d_P = x - \frac{P}{10} \cdot \frac{1}{2} = x - \frac{P}{20}$.
>
> Per poter stare in equilibrio, la *monolancia* dovrà rispettare la seguente condizione:
>
> $$P_1 \cdot d_1 + P \cdot d_p = P_2 \cdot d_2$$
>
> $$15x \cdot \frac{x}{2} + P \cdot \left(x - \frac{P}{20} \right) = 15 \cdot (20 - x) \cdot \frac{(20 - x)}{2}$$
>
> Risolvendo:
>
> $$150x^2 + 20Px - P^2 = 150 \cdot \left(400 - 40x + x^2\right)$$
>
> $$P^2 - 20Px - 6000x + 60000 = 0$$
>
> La taratura risulta quindi uguale a:
>
> $$P = 10x \pm \sqrt{100x^2 + 6000x - 60000} = 10x \pm 10 \cdot \sqrt{x^2 + 60x - 600}$$
>
> Chiaramente, il fulcro si troverà sempre a sinistra del centro teglia e le impurità della farina inevitabilmente causeranno errori nella misurazione. La posizione "più a sinistra possibile" del fulcro, si ha quando la farina raggiunge la posizione del fulcro; in tal caso il peso della farina risulterà uguale a: $P = 10 \cdot x$. Quindi nella formula: $P = 10x \pm 10 \cdot \sqrt{x^2 + 60x - 600}$, dovremo avere: $x^2 + 60x - 600 = 0$.
>
> Da cui si ricava: $x = -30 \pm \sqrt{900 + 600} = -30 \pm \sqrt{1500}$ centimetri..
>
> E siccome, chiaramente il valore di x non può essere negativo, si ottiene: $x = \left(-30 + \sqrt{1500}\right)$ centimetri.

Il solo che riesce a metterci di meno è ***Trekker***, ma non sappiamo se omologare la sua risposta: infatti, più che risolvere il problema lui ha voluto mostrarci la potenza di Wolfram Alpha:

> Il fulcro della *monolancia* è inizialmente al centro della teglia. Mano a mano che si aggiunge, a sinistra, farina compattata a parallelepipedo, il fulcro si muove a sinistra fino a "sfiorare" la faccia verticale destra del parallelepipedo di farina per poi rispostarsi a destra fino a ritornare al centro quando il parallelepipedo di farina avrà "invaso" l'intera teglia. Posto che x sia la lunghezza del parallelepipedo di farina quando il fulcro F è alla "massima sinistra", si può scrivere il "bilancio" dei momenti rispetto ad F ottenendo:



> $10x\,(x/2) = 300(10-x)$
>
> La soluzione di questa equazione di secondo grado la lascio trovare a Wolfram|Alpha (consiglio di farci un "giro" al link http://www79.wolframalpha.com/) ottenendo:



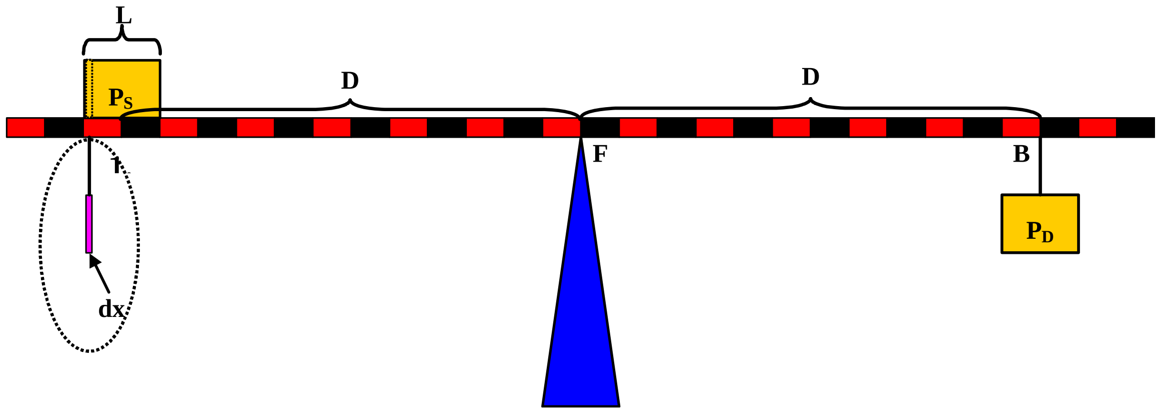
> Ovviamente è la soluzione positiva 8.7298 centimetri che ci interessa.

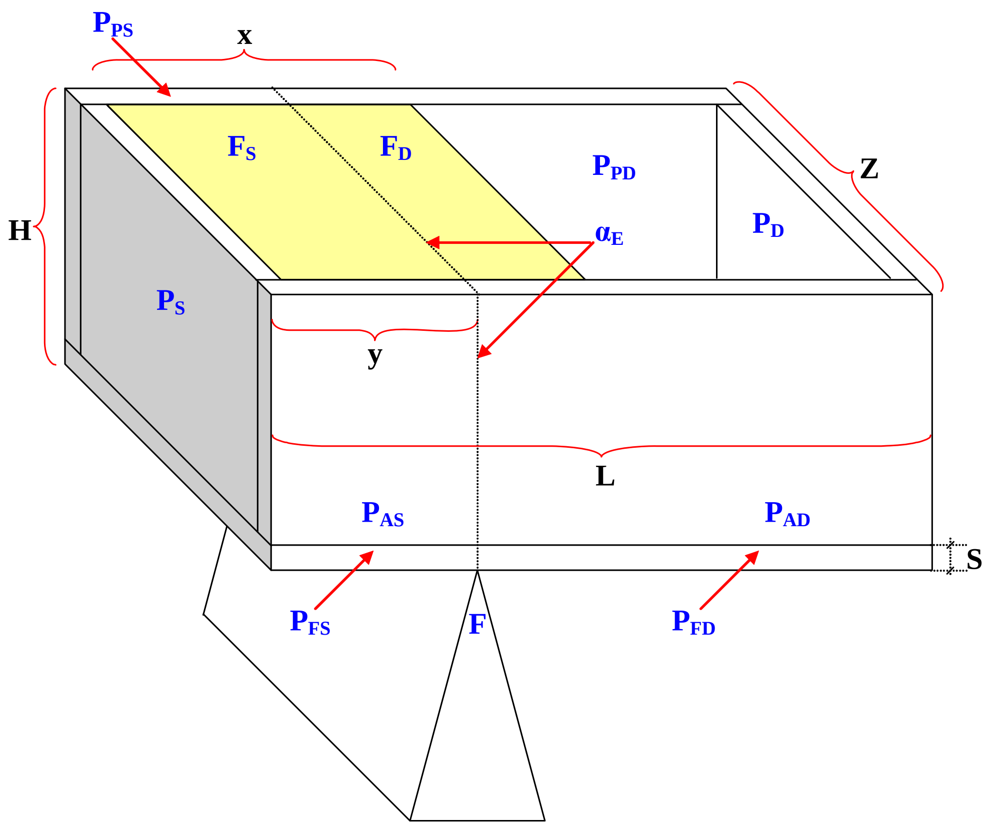
Trekker ci segnala poi che Wolfram Alpha ha fornito anche i valori nutrizionali della farina e perfino le proprietà fisiche. Potere della scienza, della rete e di Wolfram.

All'altro lato dell'approccio risolutivo si situa ***BR1***. In realtà, la sua, più che una soluzione è una provocazione, visto che quota la bellezza di otto pagine: ma, come dice lui stesso (faccina inclusa):

> "Non potevo restare indifferente alla provocazione verso gli ingegneri >:-(..."

Non riusciamo a darvi conto di tutte le pagine scritte dal nostro vendicativo ingegnere (che, tra l'altro, riscuote tutta la solidarietà del trecciuto ingegnere della redazione), ma almeno alcuni dei suoi splendidi disegni dobbiamo farvelo vedere:





Ci sarebbe molto da vedere, nelle otto pagine di ***BR1***: ma questo è già un numero voluminoso, specie per essere un numero estivo. Ci limitiamo allora a mostrare questi disegni: in fondo, sono così belli che viene voglia di guardarli a prescindere dal loro significato, cosa che mostra come anche l'ingegneria, oltre alla matematica, riesca ad avvicinarsi all'arte.

5. Quick & Dirty

Dovreste ricordare che 121 è il quadrato di 11, almeno sin quando restiamo in base dieci.

In quali altre basi succede la stessa cosa?

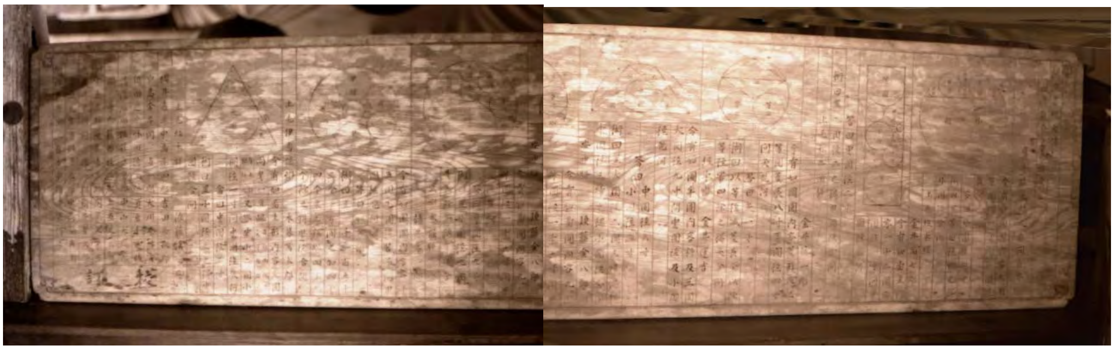
> *In qualsiasi base* $q > 2$*: vi basta avere i simboli "1" e "2", per poter scrivere:* $11_q \cdot 11_q = 121_q$.

6. Summer Contest 2009

…Avevamo promesso che, in caso di ragionevole successo del PM sui *sangaku*, ve ne avremmo passato qualcun altro come Summer Contest; siccome ***noi*** manteniamo le promesse, eccolo. In due parti, oltretutto.

6.1 Il Secondo di Nagano

Esattamente come l'altra volta cominciamo con l'originale. E, esattamente come l'altra volta, se volete sbirciare le soluzioni attenti che vanno da destra a sinistra.

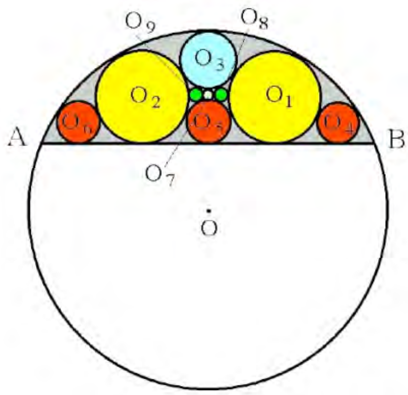


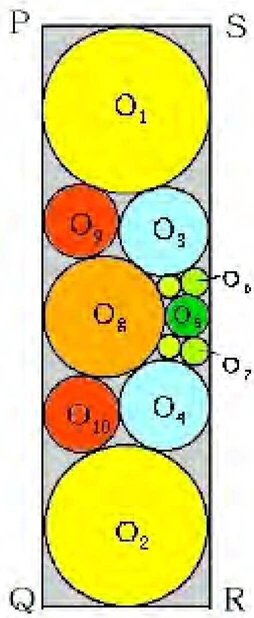
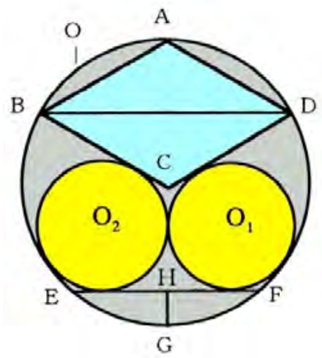
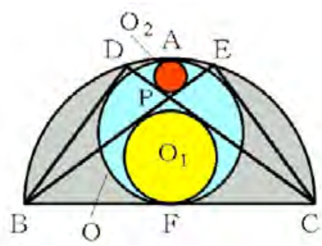
Due al prezzo di una! Bene, con calma.

La figura è simmetrica. I cerchi $O_1(r_1)$, $O_2(r_1)$, $O_4(r_3)$, $O_5(r_3)$ e $O_6(r_3)$ toccano la corda AB del cerchio $O(R)$, mentre $O_1(r_1)$, $O_2(r_1)$, $O_3(r_2)$, $O_4(r_3)$, e $O_6(r_3)$ sono tangenti internamente al medesimo cerchio $O(R)$.

$O_1(r_1)$, $O_2(r_1)$, $O_3(r_2)$, $O_4(r_3)$, $O_5(r_3)$ e $O_6(r_3)$ sono tangenti l'un l'altro, come mostrato. $O_7(r_4)$, $O_8(r_5)$ e $O_9(r_5)$ sono tangenti tra di loro e tangenti esternamente a $O_1(r_1)$, $O_2(r_1)$, $O_3(r_2)$ e $O_5(r_3)$ come mostrato.

Trovare R in funzione di r_1.



PQRS è un rettangolo. I cerchi $O_1(r_1)$, $O_2(r_1)$, $O_3(r_2)$, $O_4(r_2)$, $O_5(r_3)$, $O_6(r_4)$ e $O_7(r_4)$ sono tangenti a *RS*, mentre i cerchi $O_1(r_1)$, $O_2(r_1)$, $O_8(r_5)$, $O_9(r_6)$e $O_{10}(r_6)$ sono tangenti a *PQ*. $O_1(r_1)$ è tangente a *PS* e $O_2(r_1)$ è tangente a *QR*. I cerchi $O_i, i = 1,\ldots 10$ sono tangenti tra di loro come mostrato in figura. Trovate r_2 in funzione di r_3. *[Su questo vi diamo un ulteriore quesito: esiste una soluzione con un preciso metodo che risulta particolarmente ostico a Rudy. A tutti coloro che invieranno una soluzione, risponderemo con un "aiutino" sul metodo summenzionato e la richiesta di scriverci sopra un PM (RdA)]*	
$BD = a$ è una corda di $O(R)$, *ABCD* è un rombo che tocca *O* in *A*, *B* e *D*. *EF* è una corda di $O(R)$, *G* è il punto medio dell'arco minore *EF* e *H* è il punto medio del segmento *EF*. $O_1(r)$ e $O_2(r)$ sono tangenti tra di loro, a $O(R)$ internamente e ai segmenti *BC*, *CD* e *EF* come indicato. Trovare $GH = d$ in funzione di *a* e *r*.	
$O(r)$ è inscritto in un semicerchio e *BD* e *CE* sono tangenti a $O(r)$. $O_1(r_1)$ è inscritto nel triangolo *BCP* , $O_2(r_2)$ è tangente a *BD*, *CE* e (internamente) a $O(r)$. Trovate r_1 e r_2 in funzione di *r*.	

[Per la traduzione della parte sottolineata siamo debitori ad Alberto, che in certi campi naviga meglio di Rudy; vedete voi se è il caso di fidarsi]

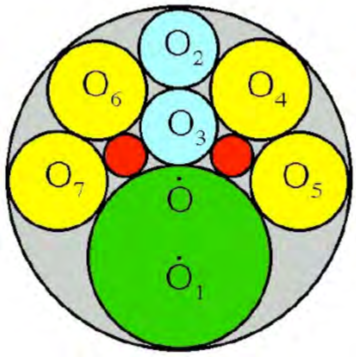
La figura è simmetrica.

$O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_4(r_4)$, $O_5(r_5)$, $O_6(r_4)$ e $O_7(r_5)$ <u>sono su un cerchio</u> e sono tangenti internamente a $O(R)$.

$O_3(r_3)$ è tangente esternamente a $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O \quad (r_3 \quad)$ e $O_6(r_4)$, come mostrato.

I centri di $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ e $O_3(r_3)$ giacciono su un diametro di $O(R)$.

Trovare r_1 in funzione di R.

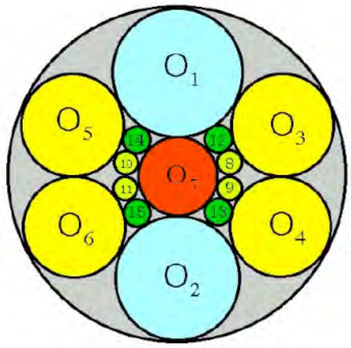


La figura è simmetrica.

I cerchi della catena $O_1(x)$, $O_2(x)$, $O_3(r_2)$, $O_4(r_2)$, $O_5(r_2)$ e $O_6(r_2)$ sono tangenti internamente al cerchio piu grande.

I cerchi della catena $O_1(x)$, $O_2(x)$, $O_8(r_3)$, $O_9(r_3)$, $O_{10}(r_3)$, $O_{11}(r_3)$, $O_{12}(r_4)$, $O_{13}(r_4)$, $O_{14}(r_4)$ e $O_{15}(r_4)$ sono tangenti esternamente a $O_7(r_1)$, come mostrato.

Trovare x in funzione di r_1.

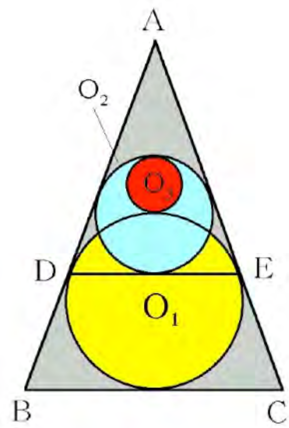


ABC è un triangolo isoscele e $O_1(r_1)$ è iscritto in ABC con punti di tangenza sui lati non di base D e E.

$O_2(r_2)$ è iscritto nel triangolo ADE.

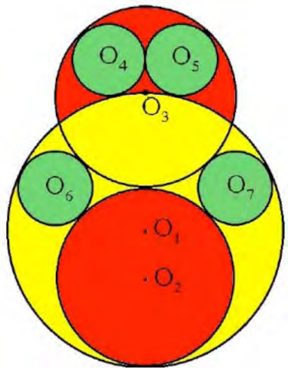
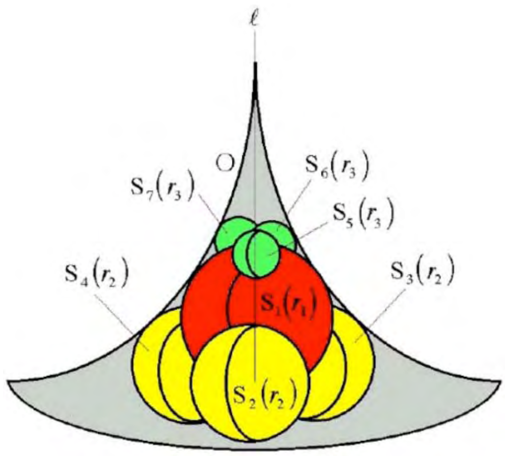
$O_3(r_3)$ è tangente esternamente a $O_1(r_1)$ e internamente a $O_2(r_2)$.

Trovate r_2 in funzione di r_3.



6.2 Quello di Zensoji

Opinione rigorosamente personale, ma a noi (soprattutto l'ultimo) questi piacciono molto di più.

La figura è simmetrica. $O_2(r_2)$ e $O_3(r_2)$ sono tangenti tra loro, e $O_2(r_2)$ è tangente internamente a $O_1(r_1)$. $O_4(r_3)$, $O_5(r_3)$, $O_6(r_3)$ e $O_7(r_3)$ sono tangenti a $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ e a $O_7(r_3)$, come mostrato. Trovate r_2 come funzione di r_1.	
ℓ è una linea tangente il quarto di circonferenza $O(R)$ in un suo punto terminale. La superfice laterale è ottenuta per rivoluzione del quarto di circonferenza lungo ℓ. $S_i(i=1,2,\ldots,7)$ è tangente alla superfice internamente, $S_1(r_1)$ è tangente a $S_i(i=2,3,\ldots,7)$, le $S_i(r_2)(i=2,3,4)$ sono tangenti esternamente tra di loro e $S_i(r_3)(i=5,6,7)$ sono tangenti esternamente tra di loro. Trovare r_1 in funzione di r_2 e r_3.	

La sfera $O(r)$ è divisa da piani paralleli in dischi, come mostrato.

Lo spessore a dei dischi azzurri è costante, e la superfice laterale S degli n dischi bianchi è anch'essa costante.

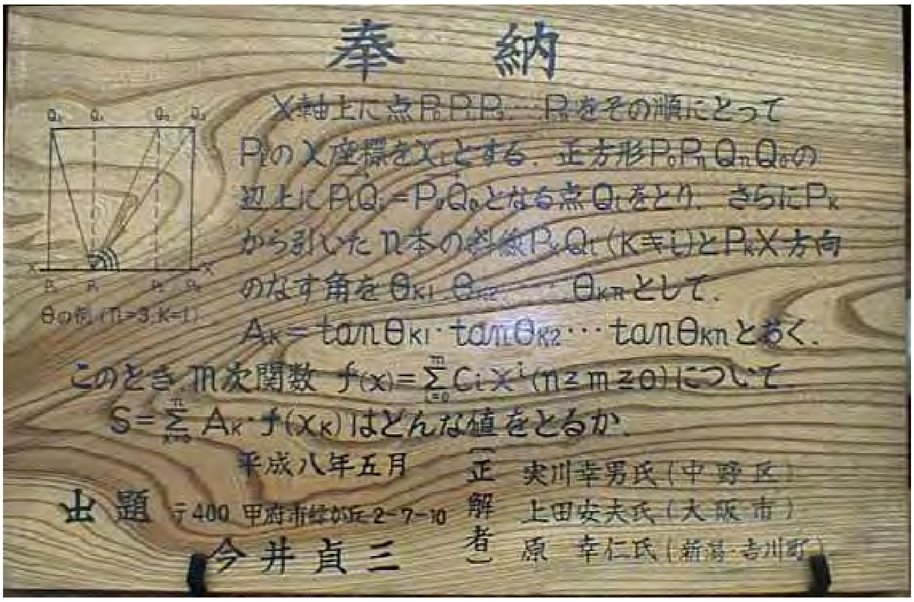
Trovate S in funzione di a, n e r.

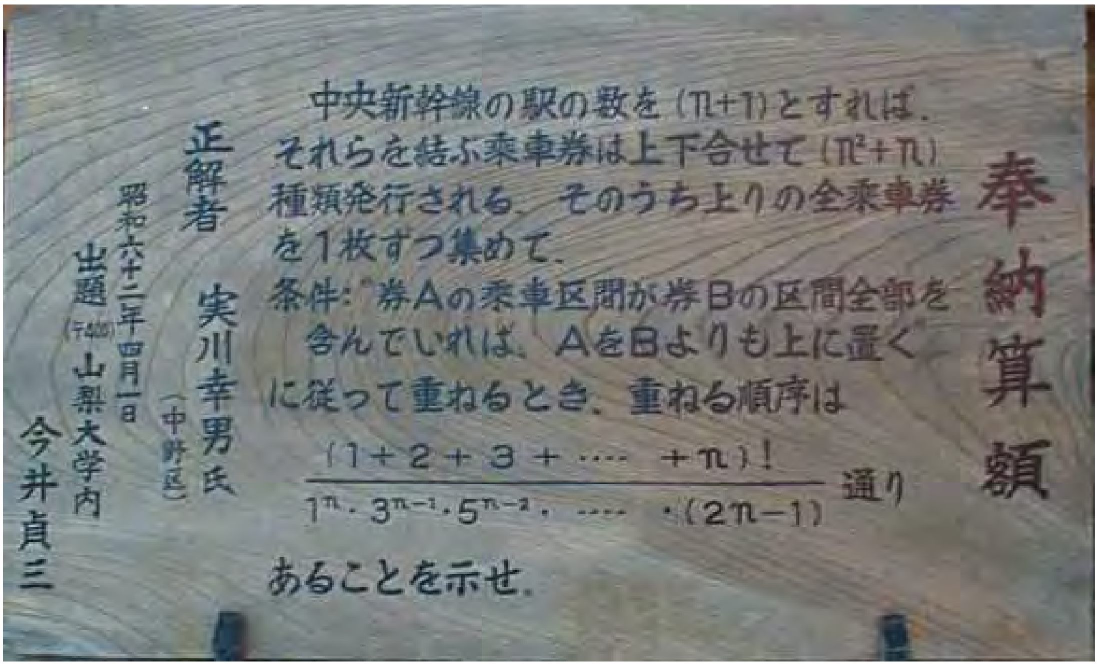
6.3 Questioni aperte

…O meglio, pesci d'aprile fuori stagione. Se volete provarci…

Quello qui sopra proviene dal tempio di Ikinoseki (Prefettura di Iwate).

I due qui sotto (uno dovreste averlo già visto) provengono invece dal tempio di Takeda, Prefettura di Yamanashi e sono piuttosto recenti:





Quello che vi chiediamo è, semplicemente, di mettere in bella copia problema e soluzioni, basandovi sugli evidenti indizi presenti sui *sangaku*.

7. Pagina 46

Ricordiamo che:

$$\binom{n}{p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}{p!};$$

Uno e uno solo dei numeri consecutivi $n, n-1, n-2, \ldots, n-p+1$ è divisibile per *p*, sia esso *N*; allora possiamo scrivere $\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{N}{p}$, e la differenza presentata nel problema può essere scritta come:

$$\frac{n(n-1)\ldots(N+1)N(N-1)\ldots(N-p+1)}{p!} - \frac{N}{p}.$$

Osserviamo ora che gli interi $n, n-1, \ldots, N+1, N-1, \ldots, n-p+1$ (abbiamo escluso *N*), quando vengono divisi per *p*, devono dare tutti i resti compresi tra 1 e $p-1$, visto che abbiamo escluso l'unico valore esattamente divisibile per *p*.

Ora dimostreremo che il numero

$$n(n-1)\ldots(N+1)(N-1)\ldots(n-p+1) - (p-1)!$$

è divisibile per *p*; scriviamo le equazioni

$$
\begin{aligned}
n &= k_1 p + a_1, \\
n-1 &= k_2 p + a_2, \\
&\dots \\
N+1 &= k_i p + a_i, \\
N-1 &= k_{i+1} p + a_{i+1}, \\
&\dots \\
n-p+1 &= k_{p-1} p + a_{p-1};
\end{aligned}
$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ sono gli interi $1,2,\dots,p-1$ in un qualche ordine.

È evidente che se tutti gli interi sulla destra sono moltiplicati tra di loro, ogni termine dell'espansione conterrà come fattore *p*, con la sola eccezione di $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{p-1}$, e quest'ultimo termine, per quanto detto qui sopra, dovrà essere uguale a $(p-1)!$, e quindi la differenza indicata deve essere divisibile per *p*.

Se moltiplichiamo questa differenza per l'intero $\frac{N}{p}$, il prodotto resta divisibile per *p*, il che significa che

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p} - \frac{N(p-1)!}{p}$$

è divisibile per *p*. Se dividiamo[13] questa differenza per $(p-1)!$, otteniamo:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} - \frac{N}{p} = \binom{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right]$$

che è ancora divisibile per *p*, visto che *p* e $(p-1)!$ sono primi tra loro.

[13] L'affermazione che il primo membro *sia divisibile* per il valore dato potrebbe parere azzardata, ma riconoscerete senz'altro nel primo membro della prossima formula un'espressione che genera sempre interi; per ulteriori dettagli (e una dimostrazione più rigorosa), potete verificare la parte **[1]** del Bungee Jumpers di RM_099 (aprile 2007).

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Maglione fantasia

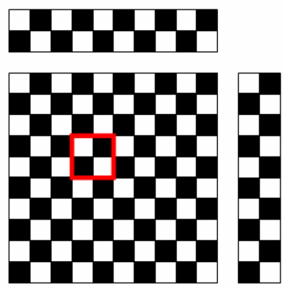
Povre filandere, e l'avrì mai ben,
dromer 'nt'la paja, creperì nel fen.
A sona la campanela, l'è né ciair né scur,
povre filandere, pichi 'l cö n'tal mur…[14]

Tanto per cominciare fuori ci sono trenta gradi (nel *Math Manor* anche qualcuno in più), e poi il titolo è sbagliato anche perché i maglioni si fanno con i ferri (giustappunto) da maglia, mentre qui vogliamo parlare di telai e tessitura[15].

La tessitura consiste sostanzialmente nell'interlacciamento di un insieme di fili detto *ordito* con un altro insieme di fili detto *trama*; i fili dell'ordito sono sollevati dal liccio separandoli in un livello superiore e uno inferiore, e nello spazio tra di loro[16] viene passata la spola (o navetta); quando esce dall'altra parte, si alzano altri fili dell'ordito e si fa tornare indietro la spola, ottenendo il tessuto.

In realtà un telaio ha normalmente almeno due licci (infatti il termine al singolare risulta pochissimo utilizzato: anche nei dizionari di solito trovate il solo plurale), ed esiste un metodo per descrivere cosa fare, basato su un interessante schema noto come l'*armatura* dei licci; vediamo il più semplice di tutti, in questo modo la cosa dovrebbe essere decisamente evidente.

In Figura 5 vedete l'armatura della tessitura *piana*; giusto per intenderci sulla notazione, nel quadrato abbiamo indicato dieci fili di ordito e dieci di trama; abitudine vuole che in questi schemi l'ordito sia rappresentato in nero e la trama in bianco; quindi, un quadrato nero indica che abbiamo alzato l'ordito, e quindi la trama passa sotto l'ordito; viceversa, un quadrato bianco indica l'abbassamento di quel liccio e quindi abbiamo la trama sopra l'ordito.



5 *Il più semplice*

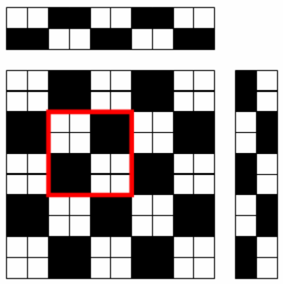
Capirete che una cosa del genere dal punto di vista operativo serve a pochino; infatti, si aggiungono di solito i due rettangoli indicati; quello sopra indica come vadano armati i licci, mentre quello di fianco indica quale liccio vada alzato in una data passata: un quadratino nero in prima colonna indica che dovete alzare il primo liccio (e abbassare il secondo), e viceversa.

En passant, notiamo che in realtà per definire il tutto ci sarebbe bastata la descrizione presente nel quadratino rosso (eventualmente con i due schemi delle armature e dei passaggi); questo potrebbe portarvi a pensare che, una volta trovato l'elemento minimo che descrive il tessuto che voglio ottenere, abbia anche trovato il numero di licci che mi servono; onde non vi facciate illusioni, vi proponiamo subito un contro-esempio: lato del motivo 4, ma vi bastano i soliti due licci. Lo trovate in Figura 6.

[14] Se questa vi sembra troppo politicizzata, "*The Analytical Engine weaves algebraic patterns, just as the Jacquard loom weaves flowers and leaves.*" Lady Ada Lovelace.

[15] Come quei lettori interessati più al *gossip* che alla matematica ricorderanno, la moglie di Rudy è originaria di Biella, importante distretto del tessile (anche se il suo paese d'origine – lo stesso di Pietro Micca – era più famoso per la produzione di cappelli); non avendo questo articolo il paragrafo "Acknowledgements", mettiamo qui i più sentiti ringraziamenti per l'aiuto nella traduzione del gergo tecnico.

[16] Che in inglese si chiama *shed*… Non è vero che gli inglesi hanno tante parole, sono sempre le stesse che significano cose diverse.


6 *Poco più complesso*

"Ehm… Rudy, sei sicuro che stia insieme? A occhio, stai facendo tornare la spola nello stesso modo…" Tanto per cominciare, mai detto che debba esserci una sola spola. Secondo, qui stiamo facendo del tessuto, non il fazzolettino della Barbie: supponetelo infinito o, se preferite, quando tirate fuori la spola bloccatela da qualche parte o tagliate il filo; vedete che il tutto sta assieme ugualmente.

Comunque la vostra è una buona domanda: si è dovuto aspettare il 1980 (con ***Grünbaum*** e ***Shephard***) per avere la dimostrazione che "condizione necessaria (ma non sufficiente) perché un tessuto formi un blocco unico è che ogni colonna e ogni riga contengano almeno un punto bianco e un punto nero".

La frase "vi bastano i soliti due licci" probabilmente vi ha messo la pulce nell'orecchio: sì, esistono dei tessuti che richiedono *k* licci; e a questo punto la domanda diventa di quanti tessuti si possano tessere dato un certo numero di licci.

Anche questa è una buona domanda, peccato che non abbia una risposta generale; ***Steggall***, già nel 1908, aveva trovato il numero dei tessuti possibili di una data dimensione aventi esattamente una casella nera in ogni riga e colonna, e abbiamo visto che successivamente si è dimostrato che questa è una condizione necessaria; altri (***Hoskins***) hanno risolto dei casi particolari, come ad esempio quanti tipi di tessuto *diagonale*[17] siano possibili; però di caso generale non se ne parla, almeno per adesso.

Comunque, qualcosa si può fare, e dovrebbe esservi venuto in mente; prendiamo una matrice 2×10 rappresentante, con gli opportuni 0 e 1 l'armatura dei licci, e una 10×2 rappresentante quale liccio vada alzato; cosa succede a moltiplicarle?

In realtà non servono delle matrici così grandi, essendo ampiamente sufficienti quelle che riproducono la struttura fondamentale; infatti, se proviamo con la seconda struttura che abbiamo ottenuto, si vede che:

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Ossia, data la matrice L di sollevamento e la matrice H di armatura, abbiamo che il tessuto D è dato da $L\times H=D$. Il che riesce a mettere un po' di matematica (o quantomeno una formula) nel nostro lavoro.

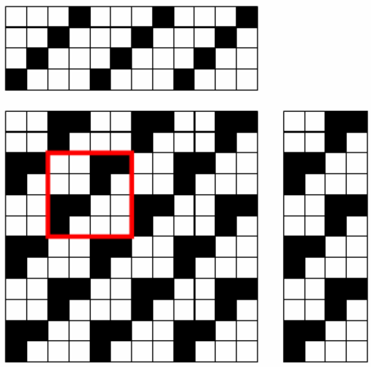
Ora complichiamoci la vita. Se quello che otteniamo è una matrice, esiste un modo leggermente più complicato (dal punto di vista pratico: dal punto di vista teorico è semplicissimo) per ottenerlo, ed è quello di partire dalla matrice finale e moltiplicarla per la matrice identità; per prova usiamo un disegno leggermente più complesso:

$$\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

"…Sai che scoperta…" No, calma; in questo modo, anche se aumenta il numero delle armature, diventa decisamente più semplice fare il disegno, o meglio capire come dal disegno si arriva al metodo per costruirlo; trovate l'esempio in Figura 7.

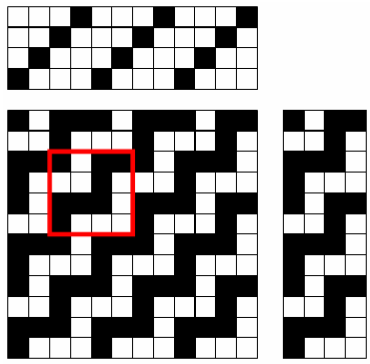
[17] Chi ha fatto il servizio militare ricorderà che questo era il tessuto della divisa "elegante".

Prima di dire che è una solenne stupidaggine, pensateci un attimo; in questo modo, si riesce ad avere una rappresentazione *univoca* (anche se non ottimale) del tessuto che volete ottenere; e la cosa non è da poco.



7 *Il Teorema del Calzino*

Adesso, però, arriviamo al punto topico; prendiamo un altro tessuto, sempre disegnato con il metodo della matrice identità; in particolare, consideriamo quello rappresentato in Figura 8.



8 *Due al prezzo di uno*

Non aspiriamo a portare il livello di interesse di questo pezzo sino al farvi costruire un telaio, ma una volta tanto sarebbe utile; infatti tra le figure 7 e 8 esistono strane parentele, degne di essere esplorate sperimentalmente.

Infatti, se utilizzate trame separate per il tessuto di Figura 7, alla fine otterrete *due diversi tessuti*, immediatamente separabili; uno viene tessuto al di sopra dell'altro e, quando smontate il tutto, vi ritrovate con due pezze.

Se invece utilizzate un'unica trama, allora vi consigliamo di usare il tracciato di Figura 8; se partite dal lato destro, vi ritrovate con l'ideale platonico di un *calzino*; infatti, alla fine, dovreste riuscire a tirare fuori un cilindro piuttosto appiattito; se, invece, decidete di invertire l'ordine di sollevamento dei licci, vi ritrovate con, come recita la didascalia, un pezzo di tessuto legato da una sola parte, e quindi di dimensione doppia rispetto a quello che avreste ottenuto con una tessitura "normale" (sconsigliato in inverno: è molto più "leggero").

Complicato? Sì, piuttosto. Fortunatamente, ***Clapham*** ha trovato la quadra.

Indichiamo con $\sum R_i$ [18] la somma sulla riga i-esima della matrice e $\sum C_i$ l'analoga somma sulle colonne; supponiamo inoltre di ordinare le varie somme in modo tale che $\sum R_1 \leq \sum R_2 \leq \ldots \sum R_m$, e analogamente ("R" diventa "C", "m" diventa "n") per le colonne (questo è sempre possibile, se vi ricordate un vecchio "Quick&Dirty"); la cosa si può fare, visto che il fatto che stiano o no assieme non dipende dall'ordine delle colonne ma solo dal fatto che abbiano una certa conformazione; se a questo punto vi vengono in mente le combinazioni lineari di Algebra I, avete centrato la cosa.

Adesso, supponiamo s e t siano degli interi per cui $0 \leq s \leq m$ e $0 \leq t \leq n$, escludendo però la possibilità che sia $(s,t) = [(0,0)\ o\ (m,n)]$; inoltre, definiamo la funzione E come:

$$E(s,t) = t \cdot (m-s) - \left(\sum C_1 + \sum C_2 + \ldots + \sum C_t\right) + \left(\sum R_1 + \sum R_2 + \ldots + \sum R_s\right).$$

Il bello della dimostrazione di Clapham è che deve essere $E(s,t) \geq 0$, e *che il nostro tessuto si divide se e solo se* $E(s,t) = 0$ per un qualche (s,t); ossia, in un'ottica più formale:

[18] Notazione inventata da noi per motivi puramente estetici; l'originale era ancora peggio.

Come determinare se un tessuto sta assieme (Teorema di Clapham): Se $\sum R_1 = 0$, si prenda $s = 1$ e $t = 0$, e il filo di trame corrispondente a $\sum R_1$ può essere estratto; in caso contrario, per ogni $t = 1,2,\ldots n$, si cerchi il massimo s tale che $\sum R_s < t$ (le somme di riga sono ordinate in modo crescente), e si valuti $E(s,t)$ nel modo definito sopra. Se, escludendo $E(m,n)$, uno di questi è pari a zero, allora i fili di trama corrispondenti alle somme di riga $\sum R_1,\ldots,\sum R_s$ e i fili di ordito corrispondenti alle somme di colonna $\sum C_1,\ldots,\sum C_t$ possono essere estratti. In caso contrario, il tessuto è un blocco unico.

Ora, se riuscite a capire cosa voglia dire questo, il signor Jacquard e tutti i suoi emuli li mandiamo in malora producendo dei maglioncini matematicamente molto simpatici…

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms