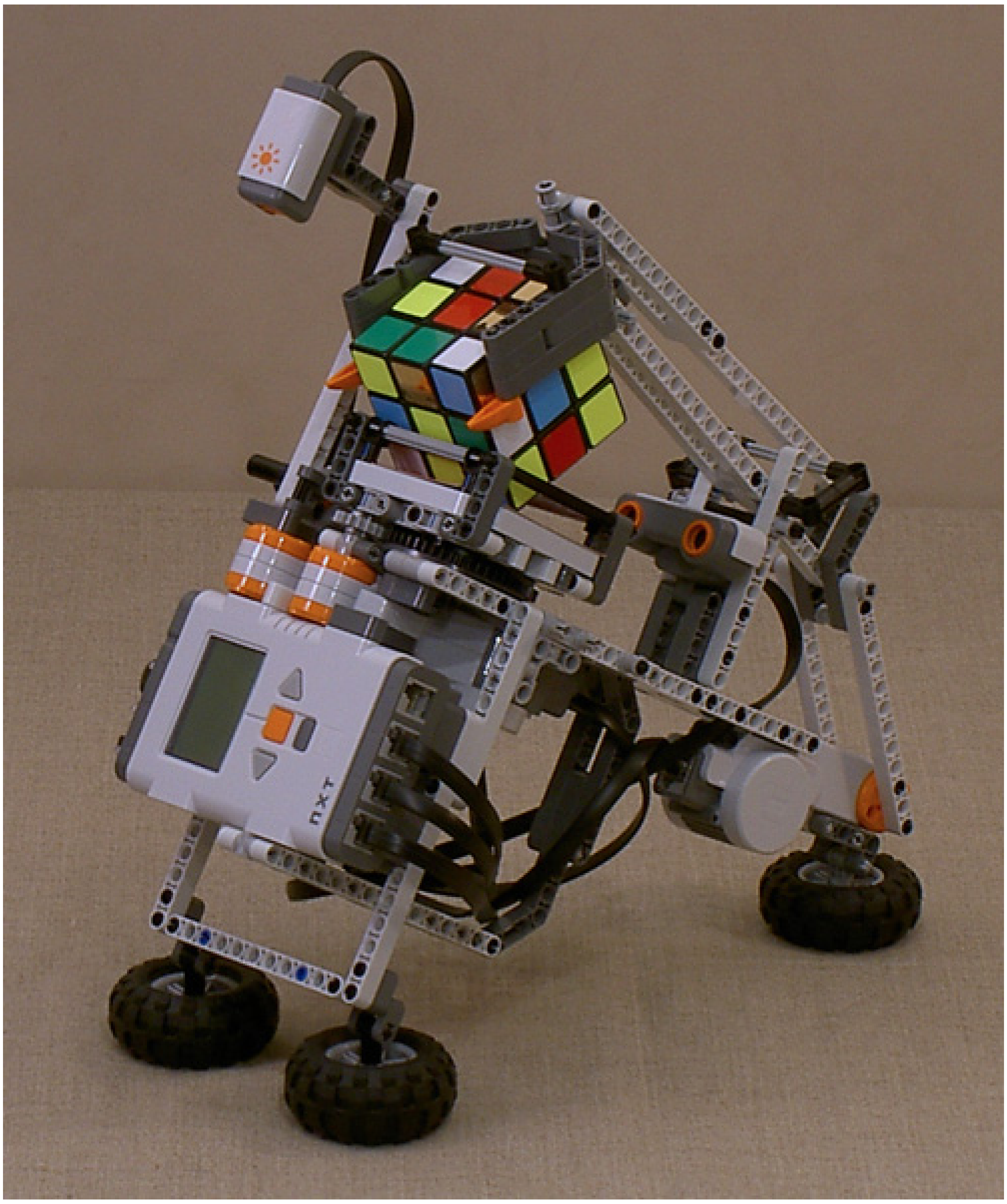
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 122 – Marzo 2009 – Anno Undicesimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM121 ha diffuso 2'291 copie e il 25/02/2009 per Google eravamo in 31'900 pagine.

Tilted Twister è un robot costruito da ***Han ANDERSON*** utilizzando unicamente un LEGO *Mindstorms NXT Retail-kit* in grado di risolvere il Cubo di Rubik in circa sei minuti. Dovendo risparmiare sui servomeccanismi, per effettuare alcune operazioni TT gira "sé stesso" tenendo fermo il cubo. Potete scaricare progetto e programmi dal suo sito: http://tiltedtwister.com/index.html.

1. Saranno Famosi?

Archimede sarà ricordato quando Eschilo
sarà dimenticato, perché le lingue muoiono
ma le idee matematiche non lo fanno.
"Immortalità" può essere una parola stupida,
ma probabilmente un matematico ha la migliore
possibilità di raggiungerla, qualunque cosa essa sia.

*(*Godfrey Harold Hardy, "A Mathematician's Apology"*)*

La conoscenza del mondo fisico da parte dell'uomo procede quasi sempre per approssimazione. Anche se ai bambini si preferisce dare una visione un po' più eroica e affascinante della situazione, in realtà il vero lavoro oscuro di gran parte dei ricercatori è meno eroico di quel che sembra, volto spesso all'affinamento della conoscenza tramite il miglioramento nell'approssimazione di qualche importante decimale. Ciò non toglie che la risposta migliore che si possa dare ad un ragazzo che chiede quanto sia distante la Luna sia certamente "più meno quattrocentomila chilometri", perché è importante che la risposta sia chiara e che la curiosità sia soddisfatta, e possibilmente soddisfatta con una bella cifra tonda. È anche una risposta ragionevolmente corretta dal punto di vista scientifico: certo ben lontana dall'essere esaustiva, ma tutto sommato è onesta. D'altra parte, non appena il ragazzo che ha fatto la domanda mostra il persistere di un certo grado di interesse bisognerebbe passare a mostragli quante precisazioni necessita una risposta più adeguata alla sua domanda: "Ehi, guarda che la Luna non è mica sempre alla stessa distanza!", e via a discettare che lo sarebbe se la sua orbita attorno alla Terra fosse circolare, cosa che non è; e quindi via a concionare su Keplero e le sue ellissi, che in quanto tali hanno un paio di fuochi e quindi distanze minime e massime da essi del corpo orbitante, e a valle del sermoncino si potrebbe concludere con "… e insomma, la distanza della Luna varia tra i 363.000 e i 405.000 chilometri".

Naturalmente, la seconda lezione sulla distanza Terra-Luna non è affatto detto che debba essere l'ultima. I numeri potrebbero ulteriormente affinarsi (fino a diventare 363.104 e 405.696, ad esempio), fino a suscitare l'inevitabile domanda su quali siano i metodi e gli strumenti di misurazione; e da qui si passerebbe certo a cercare di capire quanto questi siano affidabili, precisi, e quale sia il limite di precisione della loro misura. Si potrebbe allora perfino arrivare a decidere epistemologicamente che non ha senso chiedere di conoscere la distanza della Luna con la precisione di un ångström[1], o viceversa che invece è proprio questo un obiettivo importante da perseguire. Si potrebbe passare a mettere in discussione le definizioni stesse, cercare di capire con quale precisione siano postulate le unità di misura essenziali, e magari giungere alla conclusione che è necessario ridefinirle[2]; o allontanarsi ancora di più dalla domanda iniziale, e indagare sulla realtà fisica della figura matematica (l'ellisse) disegnata dalla Luna, dalle perturbazioni in grado di indurre variazioni certo molto maggiori dell'ångström di cui sopra, della corrispondenza tra matematica e fisica, e di quella tra fisica e realtà. Il tutto, naturalmente, senza ancora sperare di avvicinarsi seriamente al lavoro quotidiano dei ricercatori; però forse iniziando a capire che la forza essenziale della scienza si trova

[1] Misura che vale, per chi non se lo ricordasse, il bel numero 10^{-10} metri. Prende il nome da Anders Jonas Ångström, fisico svedese pioniere della spettroscopia. Quando disegnò i primi spettri solari, Anders dovette adattarsi ad usare una unità misura davvero piccola: in un millimetro ce ne entravano dieci milioni. In memoria di questa faticaccia, il decimillionesimo di millimetro ha preso il suo nome.

[2] Non è cosa che non capiti, infatti: con buona pace del Bureau International des Poids et des Mesures di Sevrès, il metro non è più definito in base al suo campione in platino-iridio né in funzione della lunghezza del meridiano terrestre.

assai più nella rigorosa e onesta definizione dei propri limiti che nelle enormi informazioni raccolte e messe a disposizione dell'umanità.

Questa costante frequentazione della limitatezza della scienza, questa familiarità con percentuali di approssimazione che costantemente crescono senza mai però coprire la completezza della conoscenza – per non parlare dei principi fondamentali che addirittura negano che tale completezza sia davvero raggiungibile perfino in teoria – portano gli scienziati sperimentali ad avere una sorta di estrema cautela, di antipatia, di sfiducia nei confronti delle certezze assolute. Il 100% di conoscenza è una chimera irraggiungibile in quasi ogni evento, e proprio per questo quando davvero si realizza è guardato con sospetto. Da questo punto di vista, l'ineluttabile mortalità degli esseri viventi è un cento per cento particolarmente inquietante. Questa potrebbe essere una buona giustificazione del perché i fisici sperimentali siano tendenzialmente poco propensi ad affrontare la morte, se non fosse che una tale scarsa propensione è abbastanza diffusa anche presso molte altre categorie professionali. Amenità a parte, è certo che la consapevolezza della propria terrestre caducità porta la maggior parte degli uomini alla ricerca di qualcosa più duraturo del fragile involucro che contiene le proprie menti e coscienze: all'uopo in genere si prendono in considerazione le religioni, ma la ricerca della gloria scientifica, dell'immortalità garantita dall'incidere il proprio nome nei testi del sapere è una scorciatoia verso l'immortalità abbastanza popolare tra i cultori della scienza. Come dice G.H. Hardy[3] nella citazione riportata in testa a quest'articolo, una importante scoperta matematica, ma ci sentiamo di estendere il campo anche alla fisica o altra disciplina stabile e rigorosa, rischia di portare l'autore verso un'immortalità forse ancora maggiore di quella degli artisti e dei poeti, perché le scoperte scientifiche sono assai meno legate alle caduche abitudini umane di quanto lo siano le opere d'arte.

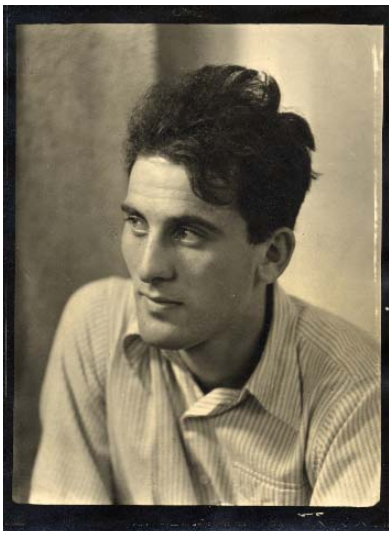

1 *Nicola Cabibbo*

Certo è che diventare famosi come Archimede non è propriamente una cosuccia facile da ottenere; è quindi naturale che ci si possa accontentare anche di glorie e onori più piccoli, specialmente se fruibili direttamente in vita, prima di passare a dare una ulteriore personale conferma a quella strana percentuale del 100% di cui si parlava poc'anzi. Un riconoscimento come il premio Nobel è infinitamente meno importante del giudizio della Storia, ma indubbiamente è fonte di grande soddisfazione per chi lo riceve; e, per la medesima ragione, difficilmente si accetta serenamente la mancata assegnazione quando ci sarebbero tutti gli estremi per ottenerlo. È pertanto immaginabile che lo scorso novembre, quando Yoichiro Nambu, Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa hanno ricevuto il Nobel per la fisica, Nicola Cabibbo sia rimasto quantomeno interdetto nel vedere il suo nome brillare dell'accecante sfavillio della sua assenza. I risultati scientifici che hanno portato Kobayashi e Maskawa agli onori di Stoccolma sono infatti estensioni di un'idea originale di Cabibbo, e non a caso lo strumento caratteristico della teoria si chiama matrice CKM[4]: la K sta evidentemente per Kobayashi e la M sta per Maskawa, ed è un po' strano che i tecnici delle luci della ribalta svedese si siano dimenticati di accendere anche la C di Cabibbo.

[3] Molto di più sulla filosofia di Hardy si può trovare nel suo Compleanno, in RM049.

[4] Gli studi di Cabibbo sono stati fondamentali per tutta la teoria dei quark: l'introduzione dell'*angolo di Cabibbo* contribuì a chiarire gli aspetti della *stranezza* dei quark (intesa come tipologia di quark, non come qualità etica) e le sue relazioni con l'interazione debole; e contribuì all'idea dell'esistenza del quark *charm*. Le estensioni di Kobayashi e Maskawa portarono all'ipotesi di esistenza degli altri due tipi di quark, *top* e *bottom*. La matrice CKM serve a calcolare le probabilità di transizione da un quark all'altro.

Se il tema del discorso è l'immortalità, il mancato premio Nobel è al massimo un passo falso, nulla di più. Senza contare che, nel caso specifico, il termine immortalità è da lui interpretato in maniera verosimilmente molto diversa da quella usata da Hardy. Nicola Cabibbo è infatti presidente[5] della Pontificia Accademia delle Scienze, e come tale confiderà in una sorta di immortalità meno volatile di quella della memoria degli uomini. Ma non è detto che tutti abbiano la sua stessa capacità di consolarsi con la fede. Ad esempio, sospettiamo che l'opinione di Beppo Occhialini sulla vita ultraterrena fosse decisamente diversa: ciò non di meno, per quel che riguarda i mancati inviti a cena da parte del Re di Svezia, Beppo non aveva proprio nulla da invidiare a Cabibbo. Anzi.



2 *Giuseppe "Beppo" Occhialini*

"Brindo non a Beppo, ma a tutti noi: potremmo un giorno collaborare con lui, che è la via sicura per vincere un premio Nobel": il brindisi era solo immaginario, senza vino o champagne, ma le parole sono di Bruno Pontecorvo[6], ed estremamente significative. Giuseppe Occhialini, detto Beppo, è stato uno dei maggiori fisici italiani del Novecento: pesarese (anzi fossombronese) per nascita, fiorentino per studi, iniziò la sua carriera scientifica ad Arcetri, collaborando con Bruno Rossi nello studio dei raggi cosmici. Tra il 1931 e il 1934 si trasferì al Cavendish Laboratory di Cambridge, dove lavorò con Patrick Blackett sulle camere a nebbia. L'esperienza di Occhialini sui raggi cosmici e quella di Blackett nei sistemi di rivelazione portò subito ottimi frutti: vennero osservate le coppie elettrone-positrone[7] prodotte dai raggi gamma, precedendo i laboratori americani, al punto che nel 1948 a Blackett venne assegnato il Nobel "per lo sviluppo della camera a nebbia di Wilson e le conseguenti scoperte nei campi della fisica nucleare e dei raggi cosmici". Tornato in Italia nel 1934, se ne ripartì presto per incompatibilità con il regime dell'epoca: si trasferì in Brasile rispondendo all'invito di Gleb Wataghin e riprese lì i suoi studi sui raggi cosmici. Lo scoppio della guerra lo rese "nemico residente" agli occhi delle autorità brasiliane, e dovette abbandonare l'università di Sao Paulo. Si rifugiò sui monti Itatiaya (era anche un esperto alpinista: adesso una cima della catena montuosa porta il suo nome) fino all'armistizio. Riprese poi a lavorare prima a Rio de Janeiro e quindi, grazie ai buoni uffici di Blackett, di nuovo in Gran Bretagna. Cominciò cosi a lavorare con Cecil F. Powell nel suo laboratorio di spettroscopia. Il progetto si basava sulla ricerca di particelle elementari tramite emulsioni fotografiche, e Beppo comprese subito che le lastre usate erano troppo poco sensibili. Si mise in contatto con il responsabile della Ilford, la ditta produttrice, e dette indicazioni per ottenere delle lastre assai più adatte alla ricerca delle particelle elementari. Scambiò informazioni con Giulio Cesare Lattes, che aveva conosciuto in Brasile, e insieme decisero che tipo di lastra usare; infine, lo stesso Beppo si prese cura di arrivare in cima al Pic du Midi per esporre le nuove lastre ultrasensibili ai

---

[5] Ruolo che dovrebbe prevedere, tra l'altro, l'essere consultati direttamente dal papa su questioni scientifiche. Compito di grande responsabilità, specialmente quando scienza e fede entrano in conflitti che possono facilmente essere strumentalizzati. A titolo di esempio delle sue capacità di giudizio si può riportare questa sua celebre frase: "*Oggi tra gli scienziati cattolici è chiarissimo che si può benissimo credere nell'evoluzionismo e nella Creazione (non nel creazionismo). Dire il contrario è come sostenere che la Terra è piatta o il Sole si muove perché così dice la Bibbia"*.

[6] Il più giovane dei "ragazzi di via Panisperna", la leggendaria squadra romana di fisici formatasi attorno a Enrico Fermi. Bruno Pontecorvo, fratello del regista Gillo, è noto anche per essere stato uno dei pochissimi scienziati atomici ad emigrare nell'URSS, mentre la maggioranza si dirigeva verso gli Stati Uniti.

[7] Il positrone era stato teorizzato da Carl Anderson, ma mai rivelato in precedenza. Tra l'altro, l'osservazione della creazione della coppia elettrone-positrone è stata la prima conferma sperimentale all'antimateria teorizzata da P.A.M. Dirac.

raggi cosmici. Fu proprio in quelle lastre così esposte che pochi giorni dopo Occhialini, Lattes, Powell e il giovane Muirhead trovarono la prima prova dell'esistenza del mesone π, il pione. Nel 1950, Powell ricevette il premio Nobel "per lo sviluppo del metodo fotografico di studio dei processi nucleari e le scoperte relative ai mesoni ottenute con tale metodo".

Se la cronaca del Nobel del 1950 sembra troppo simile a quella del Nobel del 1948, è bene rimarcare le differenze, che pure furono significative. Patrick Blackett riconobbe immediatamente il ruolo fondamentale di Beppo nella scoperta, e fu tra quelli più sorpresi nel constatare la mancata assegnazione del premio a Occhialini. Gli disse subito "Avresti dovuto essere con me sul palco" e, a dimostrazione che non erano solo parole vuote, nella memoria scritta e messa agli atti per la lectio magistralis del premio, Blackett riconosce pienamente il ruolo del fisico italiano. Quando nell'articolo fa la cronistoria della scoperta, ben cinque paragrafi iniziano con le parole "Occhialini ed io…". Due anni dopo, invece, Cecil Powell non fa niente del genere, nonostante il ruolo di Beppo nella sua scoperta fosse stato forse ancora più importante di quanto lo era stato nella precedente collaborazione con Blackett; e non lo cita neppure nella memoria ufficiale; il nome di Occhialini vi compare una sola volta, in una nota a piè di pagina relativa ad un riferimento bibliografico con molti autori. È facile dire che, fosse stato inglese o americano, Beppo sarebbe passato alla storia come uno dei pochissimi duplici laureati del Premio Nobel; ma in fondo, se è vero che un Nobel non è garanzia d'immortalità, forse non lo sarebbero neanche due. Ma di sicuro nella sua Fossombrone, nelle Marche e nell'Italia tutta ci sarebbero oggi molte più scuole, vie e piazze a lui dedicate, se quei piccoli anticipi svedesi di immortalità gli fossero stati a suo tempo riconosciuti; mentre oggi il suo nome è noto quasi esclusivamente agli addetti ai lavori.

Per controbilanciare l'avarizia del fato è giusto ricordare anche che a volte l'immortalità scientifica arriva quasi senza cercarla. A costo di rasentare il sacrilegio, ci arrischiamo a dire che in qualche caso gioca un ruolo decisivo la dea bendata. Esistono periodi particolarmente fortunati, gravidi di scoperte importanti e non necessariamente difficili da ottenere; di solito sono i tempi successivi a qualche grande sconvolgimento scientifico, a quella che Kuhn chiamerebbe una rivoluzione scientifica, che cambiando punti di vista e approccio alla conoscenza apre improvvisamente molte nuove possibilità di indagine.


3 *Johann Balmer*

Johann Balmer è stato per tutta la vita un onest'uomo: nato nel 1825 a Losanna, trasferitosi a Basilea, si dedicò presto alla matematica. La studiò all'università di Karlsruhe e poi in quella di Berlino, fino a raggiungere il dottorato nella sua Basilea nel 1849. Qui incominciò la sua carriera di professore, insegnando in un collegio per ragazze per tutta la vita, fino alla sua morte avvenuta nel 1898. La vita nobile e discreta di un insegnante di liceo, insomma: lontana dalle stravolgenti emozioni di un Galois, e tutto sommato anche dalle peripezie tra laboratori e montagne di un Occhialini. Se non fosse che, alla veneranda età di sessant'anni (tanto per smitizzare il luogo comune che vuole matematici e fisici produttivi solo in giovanissima età), Balmer scrive una breve memoria sulle righe spettrali dell'idrogeno[8]. Nella nascente disciplina della spettroscopia, osservare la posizione delle caratteristiche righe spettrali di un elemento, e domandarsi perché mai si trovassero sempre in corrispondenza di ben precise lunghezze d'onda e non altre, era un tutt'uno. La domanda, del resto, era davvero fondamentale: una autentica risposta del "perché fisico" di tale comportamento si riuscirà ad avere solo molti anni

[8] E per ribadire il concetto, l'unico altro lavoro sul tema lo scrisse dodici anni dopo, quando era settantaduenne.

dopo, quando in soccorso alla spettroscopia arriverà la ancor più giovane Meccanica Quantistica e il modello atomico di Bohr; ma questo avverrà solo quindici anni dopo la dipartita di Balmer. Pur senza dare una spiegazione teorica del tutto prematura e assolutamente inadatta ad un professore di liceo quale lui era, Balmer constata che le lunghezze d'onda delle righe spettrali dell'idrogeno rispettano la formula empirica relativamente semplice:

$$\lambda = \frac{hm^2}{m^2 - n^2}\ .$$

Ponendo h pari ad una ben precisa costante e n pari a 2, la formula riproduceva esattamente i valori delle lunghe d'onda per m pari 3, 4, 5, 6; e, come se non bastasse, riuscì a prevedere anche la non ancora osservata riga spettrale in m=7.

La sensazione è quella di aver avuto un gran colpo di fortuna: Balmer non indagava minimamente il significato fisico delle righe spettrali, e probabilmente si limitava a cercare, nei ritagli di tempo che gli lasciava l'insegnamento liceale, una regola empirica che andasse d'accordo con il risultati sperimentali. L'averla trovata prima di altri (è abbastanza sicuro infatti che, prima o poi, una regola empirica del genere finisca sempre per essere trovata) ha legato il suo nome alla formula e alla serie, e adesso tutti gli studenti del mondo ricordano il vecchio professore svizzero, quando incontrano la serie di Balmer sui libri testo di spettroscopia, di fisica atomica, di astrofisica.

È persino possibile che uomini come Balmer vengano alla lunga sottovalutati, oltre che invidiati: non c'è teorico dilettante che non pensi, dopo aver comparato la complicazione degli operatori hilbertiani o delle matrici di Heisenberg con la innocente semplicità della formula di Balmer, che ad un risultato del genere sarebbe potuto arrivarci pure lui, se solo fosse nato nel tempo e nel luogo giusto. Questo, però, non è affatto detto che corrisponda a verità: in fondo, prima del tentativo riuscito di Johann Balmer ce ne furono diversi altri che non funzionavano bene. Ma tutto questo viene facilmente dimenticato, e rimane invece la sensazione di una grande fama almeno parzialmente immeritata.

In matematica esiste un esempio eclatante di fama imperitura regalata, rubata, insomma immeritata: un esempio che fa impallidire il nome e la fortuna di Balmer. Del protagonista di questa storia non abbiamo neanche un ritratto, una caricatura, nulla che possa darci anche solo una vaga idea delle sue fattezze[9]: ma il suo nome è famosissimo e onnipresente in ogni testo di teoria dei numeri, e non solo: stiamo parlando di Christian Goldbach. Il nome di questo matematico è indissolubilmente legato ad un unico oggetto matematico, che non è neppure dimostrato. Si tratta della celeberrima Congettura di Goldbach: semplicissima ad esporsi, tuttora resistente a qualsiasi tipo di dimostrazione. Come tutti gli oggetti mitologici, esiste in più di una forma, e quella originale non è la migliore; o per meglio dire, la Congettura di Goldbach così come essa è nota non è stata affatto congetturata da Goldbach. Non è stato insomma il nostro eroe ad affermare che:

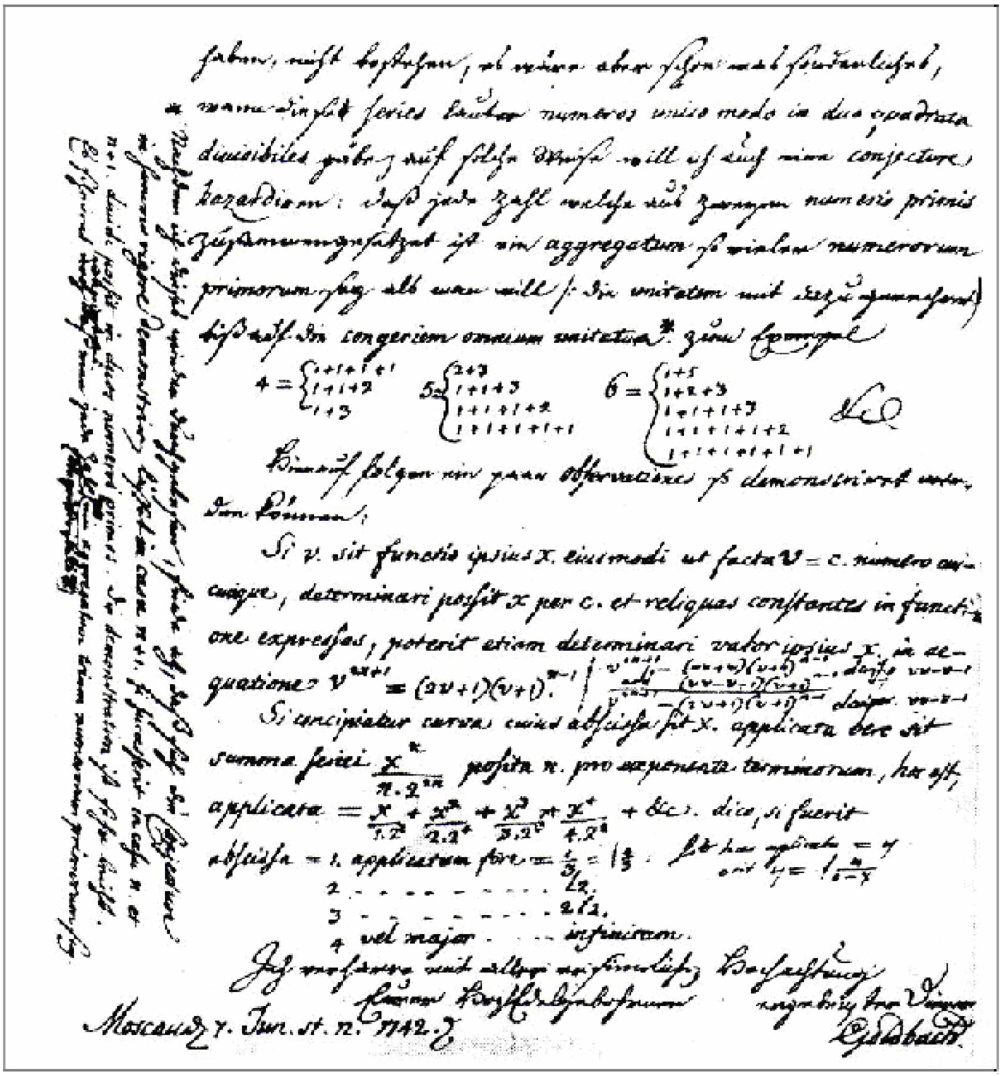
OGNI NUMERO PARI MAGGIORE DI 2 È DATO DALLA SOMMA DI DUE PRIMI

Quel che in realtà Goldbach fece fu scrivere una lettera ad Eulero[10], sottoponendogli una ipotesi apparentemente diversa: non per niente i numeri pari non vengono minimamente

[9] Disperati per cotanta mancanza, abbiamo prima pensato di mettere un ritratto vuoto, o con una silhouette settecentesca; poi abbiamo meditato di mettere il cartello stradale di indicazione della cittadina tedesca di Goldbach, e infine di appiccicare la foto di alcuni lingotti d'oro su un ritratto di Johann Sebastian Bach. Poi, rammentandoci che chi scrive abusa da un decennio di uno pseudonimo palesemente derivato da una scimmiottatura del nome del protagonista di questo mese, abbiamo deciso che il povero Goldbach era stato fin troppo tormentato da RM, e abbiamo definitivamente soprasseduto.

[10] Anche a lui abbiamo dedicato un compleanno, in RM051.

menzionati nel testo. La lettera è datata 18 Novembre 1742[11], è ancora conservata e ve ne possiamo mostrare un'immagine:



Quel che Goldbach postula è ciò che oggi è nota come la "Congettura dispari" di Goldbach, ovvero: "Ogni numero intero dispari maggiore di 5 è dato dalla somma di tre primi". La cosa stupefacente è che nella versione originale la congettura sembra abbastanza più contorta; Eulero notò che la richiesta originale di Goldbach era implicata dall'ipotesi relativa ai numeri pari come somma di due soli primi, ed è nella forma euleriana che la congettura è nota oggi.

Una volta caduto sotto i colpi di Wiles l'Ultimo Teorema di Fermat[12] e rasa al suolo la Congettura di Poincarè[13] grazie all'attacco di Perelman, i mostri sacri irrisolti della matematica sembrano essere sensibilmente ridotti. In realtà sono ancora molti i problemi noti e difficili: resiste ancora qualcuno dei ventitré problemi di Hilbert[14] e quasi tutti i problemi del Millennio, ma il grande pubblico probabilmente riconosce come mostri sacri

---

[11] Per quel che può contare, un'ulteriore conferma che la fortuna può colpire a qualsiasi età: Goldbach aveva all'epoca 52 anni: certo ben lungi dall'essere una cariatide, ma altrettanto certamente non un giovincello di primo pelo.

[12] Teorema ed autore protagonisti del Compleanno in RM091.

[13] Poincarè trova la sua gloria tra le nostre pagine in RM075.

[14] I leggendari problemi e Hilbert stesso sono protagonisti in RM060.

solo più l'Ipotesi di Riemann[15] e la Congettura di Goldbach. Se si chiedesse ad un matematico quale dei due preferirebbe dimostrare, se per magia potesse farlo, non c'è dubbio che questi sceglierebbe l'Ipotesi di Riemann, se non altro perché con quella nel sacco è probabile che anche l'attacco alla Congettura avrebbe maggiori speranze di successo[16]; ma è altrettanto certo che il fascino esercitato sull'uomo della strada da parte della creatura di Goldbach è molto maggiore, se non altro perché riesce facilmente a capirne l'enunciato, cosa non altrettanto evidente per l'Ipotesi di Riemann.

4 *Il romanzo di Doxiadis sulla Congettura*

Così, avere il nome legato ad un problema così affascinante da essere protagonista non solo di memorie e saggi, ma anche veri e propri romanzi[17], è forse quanto di meglio la matematica possa offrire in termini di immortalità scientifica: e, come e peggio di quanto succede a Balmer, Goldbach viene spesso ritenuto un nessuno dotato di molta, molta fortuna. In questo crudele giudizio c'è probabilmente del vero: in fondo, la sua Congettura sembra fosse già nota a Descartes, per non parlare del fatto che alla fin fine è stata formulata da Eulero. A questo proposito, Paul Erdös[18] era solito dire che comunque era assai meglio che la Congettura portasse questo nome, perché Eulero era già matematicamente molto ricco, mentre Goldbach era matematicamente molto povero.

Povero, ma non inesistente come molti tendono a pensare.

Christian Goldbach nacque il 18 marzo 1690 in una delle città intellettualmente più ricche della sua epoca, quella Königsberg patria anche di Kant e di Hilbert. Studiò diritto e medicina, ma si interessò sempre di matematica. Scambiò lettere con Leibnitz, si incontrò con Nicolaus (primo) Bernoulli e con De Moivre a Londra e Oxford, poi con Nicolaus (secondo) Bernoulli a Venezia, che lo mise in contatto con Daniel, altro genio della celeberrima famiglia svizzera[19]. Più tardi partecipò al progetto della fondazione a San Pietroburgo della Imperiale Accademia delle Scienze, sulla falsariga dell'Accademia delle Scienze di Berlino, e qui ottenne una cattedra di matematica e di storia. Era il 1725, e questo dimostra che Goldbach non era propriamente un nessuno: otto anni prima aveva pubblicato un'importante memoria intitolata "*Specimen methodi ad summas serierum in Acta eruditorum*", dove trattava della somma di serie infinite, studiate dopo aver conosciuto i Bernoulli.

Essere segretario dell'Accademia Imperiale delle Scienze di San Pietroburgo significa essere una personalità importante nella nascente nazione russa. San Pietroburgo è la capitale voluta dallo zar Pietro il Grande, che regnerà proprio fino al 1725. Alla sua morte il successore Pietro II è ancora troppo giovane e la reggente Caterina cerca un tutore per l'educazione dello zarevic; lo trova proprio in Christian Goldbach, che seguirà il pupillo e la corte a Mosca, dove Caterina ha deciso di spostare la capitale.

[15] Il compleanno di Riemann è in RM068, ma di lui si trova molto altro tra le nostre pagine.

[16] In verità, la cosa non è del tutto automatica: questa tecnica di arrivare a Goldbach attraverso Riemann fu attuata inizialmente da Hardy e Littlewood, anche se poi Vinogradov rimosse la necessità dell'Ipotesi di Riemann dalle loro conclusioni. A tutt'oggi sembra però che presupponendo esatta l'Ipotesi di Riemann sia dimostrabile almeno la Congettura "dispari" di Goldbach, che è meno forte della Congettura vera e propria.

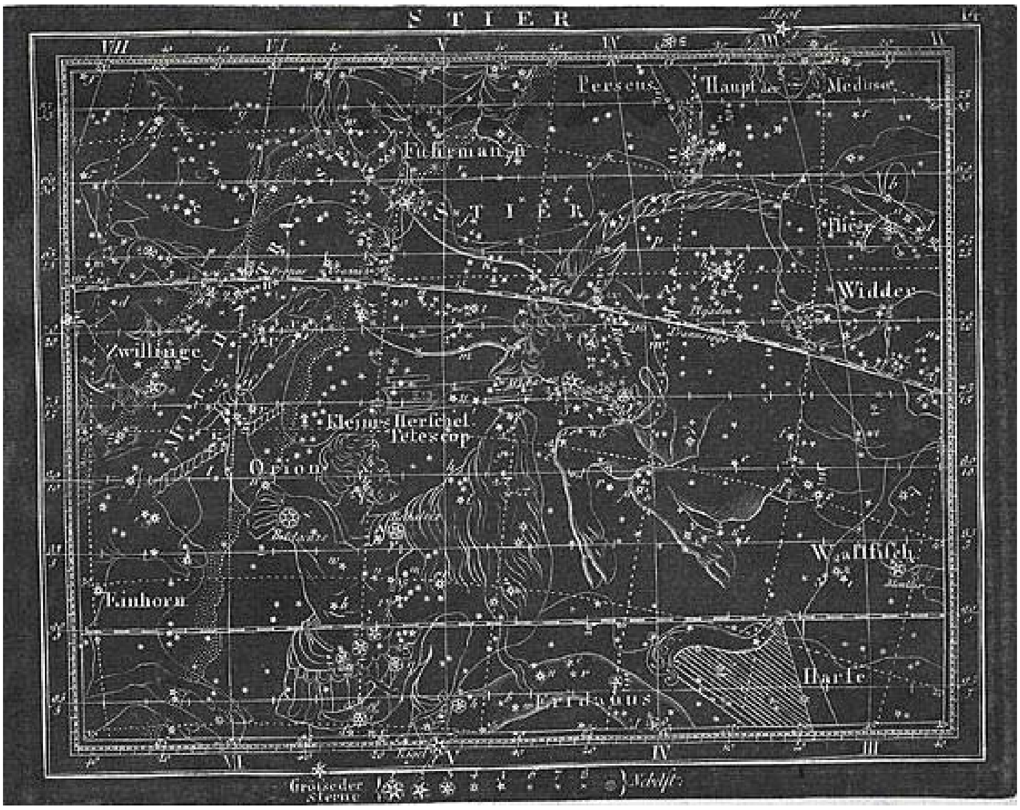
[17] Il più noto è probabilmente "Zio Petros e la Congettura di Goldbach", di Apostolos Doxiadis, Bompiani, euro 6,70. È un romanzo breve che narra dell'ossessione del protagonista, un ipotetico matematico greco, per la dimostrazione della Congettura. È stato il primo vincitore del Premio Peano dell'Associazione Subalpina Mathesis.

[18] Certo, anche Erdös ha già avuto la sua celebrazione, in RM110.

[19] Di tutta la famiglia Bernoulli si è parlato in RM093.

Mentre Goldbach si trasferisce a Mosca, Eulero giunge a San Pietroburgo; i due maggiori matematici in terra di Russia – anche se la distanza fra i due è abissale – cominciano a scambiarsi delle lettere, come è naturale aspettarsi tra personalità che si interessano dello stesso oggetto di studio. La celebre lettera del 1742 contenente la Congettura fa parte di questo lungo epistolario.

La vita di Goldbach si snoda tra importanti cariche e incarichi in una Russia governata da una corte tempestosa e soggetta a molti, continui sconvolgimenti; i suoi impegni si fanno sempre più politici che accademici. Dopo essere stato tutore dello Zar e segretario dell'Accademia, Christian diventa un consigliere perpetuo di zar e zarine, e di fatto assume su di sé la responsabilità dell'istruzione della nazione. Impegni che certo lo distolgono dalle sue ricerche, ma dall'epistolario con Eulero risulta evidente che Goldbach era matematico valente e in linea col suo tempo, uno dei pochi a capire, ad esempio, il nuovo approccio di Fermat alla Teoria dei Numeri.

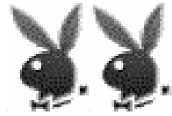


5 *Neuester Himmels Atlas di C. Goldbach: costellazione del Toro*

E non fu solo matematico. Compilò un Atlante dei Cieli davvero bello e artistico, come si può vedere sfogliandolo nel sito della Linda Hall Library of Science, Engineering & Technology, dove è integralmente riprodotto.

Forse non fu un genio, e la notorietà del suo nome è eccessiva, per i contributi che effettivamente diede alla matematica. È insomma possibile che Goldbach stia alla matematica come Carneade alla filosofia, anche se a rendere celebre il secondo è stata solo la citazione manzoniana, mentre almeno Goldbach la congettura l'ha scritta da solo sulla lettera indirizzata a Eulero. Ma di certo era uomo di scienza, curioso; capace di vedere l'infinito nelle stelle e nelle profondità sconosciute dei numeri primi.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Sono tornati anche i colori!			
Aspettando Natale			

2.1 Sono tornati anche i colori!

…quelli atossici, che potete farvene una scorpacciata tanto sono innocui. Non solo, ma essendo lavabili (nel senso che si lavano via con un po' d'acqua: i due significati contrapposti di questa parola ci hanno sempre lasciati perplessi) hanno dato la stura ad una serie di giochini da parte dei due Validi Assistenti da farci pensare che siano passati dalla stupidità infantile al rimbecillimento senile senza soluzione di continuità.

Il tutto, logicamente, causato dalla resa dei vecchi giochi in funzione del ragionevole rendimento scolastico, come vi abbiamo narrato nel secondo problema del numero scorso. Nel (per ora vano) tentativo di mostrare che il termine "rimbecillimento senile" (posto che debba essere applicato a qualcuno nella famiglia) va considerato di totale appannaggio dell'Augusto Genitore, Fred ha deciso di mettersi a giocare con un po' di biglie e i colori, ponendo un interessante problema sul tipo di quelli che si inventava anni fa.

"Allora, qui dentro ci sono quattro (ti ricordi come si conta fino a quattro, vero?) biglie di colori diversi, e qui ci sono i quattro colori equivalenti. Estraggo una biglia e la tengo fuori, poi ne estraggo un'altra e la dipingo dello stesso colore della prima. Appena il colore è asciutto, rimetto entrambe le palline nel sacchetto. Secondo te, quante coppie di estrazioni dovrei aspettarmi di fare, prima di avere tutte le palline dello stesso colore?"

Ora, sapete che se c'è un concetto simpatico a Rudy (e antipatico ad Alice) in Calcolo delle Probabilità quello è proprio il concetto di "Valore Atteso", e infatti il Nostro si è lanciato a capofitto alla ricerca della soluzione; ce l'ha fatta, quindi adesso la domanda è: "Quanto viene a voi?".

La seconda domanda dovrebbe essere "…e quanto è venuto a Rudy?" Nel senso che ha fatto un errore: è il suo errore preferito, ve ne abbiamo già parlato, quindi dovreste riuscire ad evitarlo. Invece preferiamo chiedervi, se ne avete voglia, di provare a generalizzare sul numero delle biglie. O dei colori, se preferite…

2.2 Aspettando Natale

"Rudy, guarda che Natale è passato."

"Nah. Sto parlando del prossimo. E il Calendario è in ritardo".

Una volta tanto non è vero, che il Calendario è in ritardo: Rudy ha già trovato un paio di idee di quelle che di solito vengono *frantically* inseguite verso i primi di dicembre, quindi una volta tanto è tranquillo fin verso giugno, in merito. Il motivo è che ha scovato un problema che, a occhio, dovrebbe richiedere di cominciare adesso a scambiarsi i regali del Natale prossimo per essere sicuri di arrivare alla fine in tempo. E adesso vorrebbe voi gli deste una mano a verificare questa sua impressione: sarebbe felice di essere smentito, in quanto se si risolvesse in un tempo ragionevole ha intenzione di applicarlo.

La sua idea è approssimativamente questa: per il cenone (da quell'ottima cuoca che è sua madre, dovreste ormai saperlo) saranno invitate venti persone, organizzate in dieci coppie; a ognuno verrà richiesto di portare un "pensierino", imponendo un limite di spesa (basso: c'è la crisi).

Il fatto è che pochissimi degli invitati si conoscono tra di loro (le coppie sì, spiritosi!); quello che Rudy vorrebbe organizzare, come *ice breaking*, sarebbe una specie di lotteria.

Pensava, infatti, di scrivere i nomi delle persone su venti foglietti, e poi far estrarre a ciascuno un foglietto, nell'idea di dare a ciascuna persona il "presente" portato dal nome e cognome presenti sul foglietto; codicillo supplementare, se qualcuno estrae il proprio nome *o il nome del proprio partner*[20], tutti (ho detto "tutti"!) i biglietti vengono rimessi nel cappello e si procede ad una nuova estrazione; quando finalmente si riesce ad attribuire tutti i biglietti, a ciascuno viene consegnato il regalino corrispondente al nome presente sul bigliettino.

Ora, come dicevamo, il dubbio di Rudy è che si tiri decisamente per le lunghe, a forza di estrazioni e riestrazioni; quindi, tanto per cominciare vorrebbe sapere quante estrazioni "corrette" (ossia che non debbano essere ripetute) sono possibili; inoltre, farebbe piacere una stima del numero atteso di estrazioni che si dovranno fare nella serata prima di riuscire ad attribuire i pacchettini e passare alla cena.

Ça va sans dire (…ma allora perché stiamo a dirvelo?) che se a "dieci" sostituite un generico "n", la cosa potrebbe essere molto apprezzata per le feste future…

3. Bungee Jumpers

Dimostrate che, se i cateti di un triangolo rettangolo sono esprimibili come quadrati di interi, allora l'ipotenusa non può essere un intero.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Con marzo speriamo che la primavera sia finalmente alle porte. Dopo tanti anni poveri di freddo e neve forse non siamo più abituati, ma quest'inverno ci è sembrato particolarmente lungo...

Come forse i nostri lettori più accaniti avranno notato, la Redazione non ha bisogno di scuse molto valide per festeggiare, e dall'inizio dell'anno praticamente non si occupa d'altro, per esempio i compleanni: a febbraio RM, a marzo il Capo, ad aprile Alice, poi a maggio Piotr... siamo sempre lì a congratularci tra noi.

[20] Lo mettiamo in corsivo perché non vorremmo vi perdeste di vista il concetto, come successo il mese scorso… Vedete la parte "Soluzioni & Note" per ulteriori dettagli. Se il problema fosse solo di tirar fuori un nome diverso dal proprio finirebbe nei Q&D, non nei problemi. Anzi, una cosa simile c'è già finita.

Però questo mese c'è ben altro da dire.

Il Festival della Matematica si terrà anche quest'anno a Roma, ma solo la seconda parte, tra il 19 ed il 22 marzo. L'appuntamento di questa edizione è raddoppiato, e la prima parte della manifestazione, prevista per il 10 e l'11 marzo, si svolgerà a New York all'Istituto Italiano di Cultura e alla prestigiosa Italian Academy alla Columbia University.

Alla manifestazione, intitolata "Creazioni e ricreazioni matematiche", parteciperanno otto premi Nobel e tre medaglie Fields, persone come John Nash e Ian Stewart, ma anche Mariano Tomatis (www.marianotomatis.it), che sapete bene essere molto caro ad RM. Il sito ufficiale è questo: www.festivaldellamatematica.it.

Di sicuro potete scoprire parecchio anche da www.gravita-zero.org, che ha sempre le ultimissime notizie su quello che accade in ambiente scientifico.

6 *Il logo della Festa della Matematica*

Noi non ci saremo, ve lo diciamo subito. Esattamente in concomitanza, infatti, va in onda a Torino la sesta edizione della Festa della Matematica, (il programma completo dell'evento si trova su www.festadellamatematica.bussola.it) e il 20 marzo ci saranno anche i due rappresentanti maschili di RM con una splendida presentazione.

Se invece vi trovate a Venezia tra il 27 ed il 29 marzo, fate una visita al Convegno Matematica e Cultura 2009 (www.mat.uniroma1.it/venezia2009), soprattutto se siete studenti, visto che l'ingresso per voi è gratuito.

Marzo è anche il mese del pi-day (per l'orrida abitudine degli americani di scrivere le date al contrario, il 14 marzo diventa il 3-14): celebrazioni di ogni tipo si trovano in rete, a noi piace segnalare il sito di polymath (http://www2.polito.it/didattica/polymath/), che a sua volta ne segnala a bizzeffe, ed ovviamente l'edizione marzolina del Carnevale della matematica, che sarà ospitata da Marcellosblog (http://marcelloseri.blogspot.com/).

Ogni segnalazione a cui abbiamo pensato in ritardo troverà posto nella nostra pagina di Memento (www.rudimathematici.com/memento.htm).

Per il resto godetevi l'arrivo della primavera!

4.1 [121]

4.1.1 Amazing Albert

Oh, quante mail di protesta per il problema del mago Albert! Prima di darci al contenzioso, ecco il succo del testo:

> *Dato un normale mazzo da cinquantadue carte, il prestigiatore ne fa scegliere cinque, senza fargliele vedere, e le fa passare al Valido Assistente. Lui ne mostrerà al prestigiatore solo quattro, una per volta, ed il prestigiatore sarà in grado di indovinare la quinta. Qual è il trucco?*
>
> *Quanto può essere grande il mazzo per azzeccarci con cinque carte estratte e quattro mostrate? E con d carte scelte da un mazzo di n, di cui ve ne mostrano d–1 e dovete indovinare l'altra?*

In dieci anni di matematica ricreativa innumerevoli volte Rudy ha dovuto presentare le proprie scuse[21] per un'errata esposizione del problema; questa volta però afferma di aver ragione, perché le critiche del tipo "questo problema è preso da Martin Gardner..." sono

[21] E quando mai? Più che presentare scuse ha qualche volta ammesso che i problemi non fossero espressi molto chiaramente, ma che comunque le estensioni derivate potevano essere interessanti…[AR]

false. Se andate a compulsare i sacri testi, nella fattispecie il volume quattro[22] al capitolo tredici ("La convenzione di magia di Chicago"), si trova il seguente gioco, attribuito a Victor Eigen:

> "Mescolerete questo normale mazzo di carte, e ne sceglierete cinque; da queste cinque, *ne sceglierete una*. Disporrò le restanti quattro carte nell'ordine che preferisco e le inserirò in una busta, tutte con la faccia verso il basso. La busta verrà portata da uno qualunque di voi a mia moglie, che è nella sua camera: chi porta le carte busserà tre volte e passerà da sotto la porta la busta a mia moglie, senza dire nulla. Mia moglie esaminerà le carte e vi dirà qual è la carta restante del gruppo di cinque."

Siccome la carta prescelta non può essere una delle quattro inviate alla signora Eigen, è necessario codificare solo 48 carte; se i coniugi Eigen si sono accordati su una numerazione delle 52 carte del mazzo, attraverso l'ordinamento delle quattro carte inviate possiamo comunicare, in base alla numerazione concordata, un numero; siccome quattro carte possono essere disposte in $4! = 24$ modi diversi, abbiamo bisogno di un'ulteriore informazione, o meglio di un ulteriore bit per identificare la prescelta tra le 48: nessuno sapeva che gli Eigen avevano prenotato due camere comunicanti e, quando Victor dava il numero della stanza alla quale bussare, potendo scegliere tra due numeri trasmetteva in questo modo l'ulteriore bit di informazione.

Le soluzioni di diverso tipo sono arrivate da ***Mirtillo***, ***Salmastro***, ***Alberto Regoli***, ***Gnugnu***, ***Millenium Bug***, ***Cid***, ***Ema***, ***Br1*** e ***Franco57***. Per dare il benvenuto a ***Salmastro*** nella schiera dei solutori di RM pubblichiamo per prima cosa la sua soluzione:

> Prendo spunto da un vostro per niente velato suggerimento e parto col considerare che le carte di un mazzo francese (da piccolo lo facevo con le napoletane, che sono a "base" 10), si possono facilmente ordinare in base al seme ed al valore, attribuendo un ordine ai semi, che esso sia il pokeristico Come Quando Fuori Piove o il bridgistico Prendi Cara Questi Fiori, non importa. Per fare il raffinato, uso l'ordine PCQF ed all'interno dei singoli semi li ordino, per quanto ovvio, dall'Asso al Re. In sostanza per me 1 è l'Asso di Picche e 52 è il Re di Fiori.
>
> A questo punto vengono prese cinque carte dal mazzo, di cui quattro vengono mostrate al "mago", che deve indovinare la quinta. La quinta carta, ovviamente, è compresa fra le 48 "coperte" (le 47 residue più essa stessa) e come ho fatto prima, anche queste quarantotto possono essere ordinate, associandone ciascuna ad un numero compreso fra 1 e 48, sempre con lo stesso criterio seme-valore.
>
> In particolare la carta residua più bassa di Picche avrà il numero 1, la più alta di Fiori il 48. Ed ora viene il difficile: che informazione possono dare le quattro carte mostrate al mago? Sembrerebbe nessuna... però esse stesse, usando l'ormai consueto criterio, possono essere ordinate... In ordine crescente le chiameremo A, B, C e D.
>
> L'assistente le potrà mostrare in vari modi: per esempio prima A, poi B, indi C, infine D, ma anche così: ABDC oppure ACDB etc., praticamente in 24 modi diversi, pari, è pleonastico dirlo, a 4! modi. Associamo ad ognuna di queste permutazioni un numero da 1 a 24 e saremo (quasi) a posto, perché in effetti le carte fra le quali indovinare sono 48, doppio di 24.
>
> Se dividiamo, per esempio, le carte in due gruppi [1, 24] e [25-48], ci serve un'ulteriore informazione che distingua a quale dei due insiemi la carta da predire appartenga. Ci basta un'alternativa semplice del tipo, chessò, destra-sinistra...ed uso proprio questa! Se l'assistente mostra le carte con la sinistra (tenendo il

[22] Per chi ha la versione inglese: "The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions".

mazzetto delle cinque con la destra) dico che la "quinta" è nel primo gruppo, se le mostra con la destra, invece, è nel secondo.

In tal modo sono state create 48 configurazioni (pari a 4!x2) che coprono tutto il campo dei possibili casi. Se il mazzo generico è formato da N carte, da cui se ne tolgono D, e se T è il numero di alternative (destra-sinistra o simili), il giochino riesce, esattamente, quando

N=(D-1)!xT

ma riesce lo stesso (diremmo ad abundatiam) quando N<(D-1)!xT... basta che non sia maggiore, cioè... il che è ovvio...

Chiudo osservando che se (D-1) è un numero dato, non altrettanto si può dire di T... La fantasia del mago e dell'assistente può generarne quanti se ne vuole, per esempio: la prima carta la mostro con la sinistra, la seconda con la destra e così via... ...e quando la mostro alzo il gomito o lo tengo abbassato, inclinando la testa a destra o a sinistra, facendo l'occhiolino con l'occhio destro etc etc etc. T si può pertanto interpretare come la produttoria dei singoli "trucchetti" (Ti) che i due volponi sapranno inventarsi, sempre che la memoria li aiuti!

Stessa soluzione presenta ***Br1***, per poi decidere di lavorare in modo alternativo:

Vediamo allora come invece si può operare, utilizzando *esclusivamente* le 4 carte da mostrare. Iniziamo indicando come "*metà bassa*" l'insieme dei *numeri d'ordine* compresi fra 1 e 26, e come "*metà alta*" quelli da 27 a 52.

Quando il Valido Assistente riceve le 5 carte dal Proponente, può trovarsi di fronte ad una delle seguenti situazioni:

- **Caso "5-0":** i *numeri d'ordine* delle 5 carte sono tutti compresi nella *metà bassa*
- **Caso "0-5":** i *numeri d'ordine* delle 5 carte sono tutti compresi nella *metà alta*
- **Caso "4-1":** i *numeri d'ordine* di 4 delle carte sono compresi nella *metà bassa*, il quinto è compreso nella *metà alta*
- **Caso "1-4":** il *numero d'ordine* di una delle carte è compreso nella *metà bassa*, gli altri 4 sono compresi nella *metà alta*
- **Caso "3-2":** i *numeri d'ordine* di 3 delle carte sono compresi nella *metà bassa*, gli altri 2 sono compresi nella *metà alta*
- **Caso "2-3":** i *numeri d'ordine* di 2 delle carte sono compresi nella *metà bassa*, gli altri 3 sono compresi nella *metà alta*

Nei **Casi "5-0"** e **"0-5"**, il Valido Assistente esclude una qualsiasi delle 5 carte (che sarà quella da identificare), e mostra le altre 4 al Solutore; costui, vedendo 4 carte tutte nella stessa *metà*, sa (per accordo preliminare col Valido Assistente) che anche la quinta si trova nella stessa *metà*. In quella *metà*, vi sono 22 *numeri d'ordine* liberi, e quello giusto da identificare sarà stato codificato dal Valido Assistente nel *numero magico* in base alla tabella sopra mostrata.

NOTA_1: in questi due **Casi**, c'è un qualche spreco di informazione; il Valido Assistente può selezionare a piacimento una qualsiasi delle 5 carte per destinarla come *carta da identificare*; inoltre, il valore del *numero magico* utile a far trovare la soluzione al Solutore varia fra 1 e 22, per cui se il Valido Assistente indicasse invece 23 o 24 come *numero magico*, in combinazione a quanto sopra, potrebbe fornire al Solutore altri indizi, chessò, la presenza di un Jolly o l'età del Proponente…

Nei **Casi "4-1"** ed **"1-4"**, il Valido Assistente esclude una qualsiasi delle carte (che sarà quella da identificare) dalla *metà* che ne comprende 4, e mostra le altre 4 carte al Solutore; costui, vedendo una carta isolata in una *metà*, e 3 carte nell'altra, sa (per accordo preliminare col Valido Assistente) che anche la quinta si trova in quest'ultima *metà*. In essa, vi sono 23 *numeri d'ordine* liberi, e quello giusto da identificare sarà stato codificato dal Valido Assistente nel *numero magico* in base alla tabella sopra mostrata.

NOTA_2: in questi due **Casi**, di nuovo c'è un qualche spreco di informazione, anche se in misura minore rispetto al caso precedente; il Valido Assistente può selezionare a piacimento una qualsiasi delle 4 carte per destinarla come *carta da identificare*; inoltre, il valore del *numero magico* utile a far trovare la soluzione al Solutore varia fra 1 e 23, per cui se il Valido Assistente indicasse invece 24 come *numero magico*, in combinazione a quanto sopra, potrebbe fornire al Solutore altri indizi, chessò, ancora la presenza di un Jolly o il sesso del Proponente…

I **Casi "3-2"** e **"2-3"** sono di gran lunga più complessi; il Valido Assistente non può qui escludere come carta da identificare una di quelle comprese nella *metà* che ne comprende 2, altrimenti il Solutore si troverebbe davanti una situazione analoga a quella dei **Casi "4-1"** ed **"1-4"**, cioè 3 carte in una *metà* ed una sola nell'altra. Deve (il Valido) allora escludere una delle 3 carte dalla *metà* che ne contiene 3, per cui il Solutore si troverà davanti una situazione con 2 carte in ciascuna *metà*.

Quindi l'informazione codificata nel *numero magico* deve, in questi casi, indicare al Solutore *anche in quale metà* andare a cercare la carta da identificare… Supponiamo allora che la Tabella 2, per i **Casi "3-2"** e **"2-3"**, vada interpretata diversamente, ovvero come mostrato qui di seguito nella Tabella a lato.

				Metà						Metà						Metà						Metà	
A	B	C	D	Bassa	1	B	A	C	D	Bassa	7	C	A	B	D	Alta	1	D	A	B	C	Alta	7
A	B	D	C	Bassa	2	B	A	D	C	Bassa	8	C	A	D	B	Alta	2	D	A	C	B	Alta	8
A	C	B	D	Bassa	3	B	C	A	D	Bassa	9	C	B	A	D	Alta	3	D	B	A	C	Alta	9
A	C	D	B	Bassa	4	B	C	D	A	Bassa	10	C	B	D	A	Alta	4	D	B	C	A	Alta	10
A	D	B	C	Bassa	5	B	D	A	C	Bassa	11	C	D	A	B	Alta	5	D	C	A	B	Alta	11
A	D	C	B	Bassa	6	B	D	C	A	Bassa	12	C	D	B	A	Alta	6	D	C	B	A	Alta	12

7 *Tabella di* ***Br1***

Il Solutore, in questi casi, si troverà davanti una situazione con 2 carte in ciascuna *metà*; dal *numero magico*, estrarrà l'informazione su quale *metà* (*alta* o *bassa*) considerare, ed avrà poi a disposizione un *numero magico secondario*, con valore compreso fra 1 e 12.

Immaginiamo adesso di suddividere la *metà* di interesse in due *sub-metà*, comprendenti l'una i primi 13 *numeri d'ordine* della *metà* in questione (*sub-metà bassa*), e la seconda gli altri 13 (*sub-metà alta*).

Quando il Valido Assistente riceve le 5 carte dal Proponente in uno dei **Casi "3-2"** e **"2-3"**, può trovarsi di fronte ad una delle seguenti situazioni:

- **Sottocaso "3-0":** i *numeri d'ordine* delle carte della *metà* che ne contiene 3 sono tutti compresi nella *sub-metà bassa*
- **Sottocaso "0-3":** i *numeri d'ordine* delle carte della *metà* che ne contiene 3 sono tutti compresi nella *sub-metà alta*
- **Sottocaso "2-1":** 2 dei *numeri d'ordine* delle carte della *metà* che ne contiene 3 sono compresi nella *sub-metà bassa*, il terzo nella *sub-metà alta*
- **Sottocaso "1-2":** 2 dei *numeri d'ordine* delle carte della *metà* che ne contiene 3 sono compresi nella *sub-metà alta*, il terzo nella *sub-metà bassa*

Nei **Sottocasi "3-0"** e **"0-3"**, il Valido Assistente esclude una qualsiasi delle 3 carte della *sub-metà* di interesse (che sarà quella da identificare); il Solutore, avendo identificato la *metà* di interesse grazie al *numero magico*, e vedendo 2 carte nella stessa *sub-metà*, saprà (per accordo preliminare col Valido Assistente) che anche la terza si trova nella stessa *sub-metà*. In quella *sub-metà*, vi sono 11 *numeri d'ordine* liberi, e quello giusto da identificare sarà stato codificato dal Valido Assistente nel *numero magico secondario* in base alla tabella sopra mostrata.

NOTA_3: in questi **Casi**, di nuovo c'è un qualche spreco di informazione, anche se in misura ancora minore rispetto a prima… Il valore 12 per il *numero magico secondario* potrebbe identificare ad esempio la presenza di un generico Jolly…

I **Sottocasi "2-1"** ed **"1-2"** portano ad ulteriori complicazioni: il Valido Assistente non può escludere come carta da identificare quella compresa nella *sub-metà* che ne comprende una sola, altrimenti il Solutore si troverebbe davanti una situazione analoga a quella dei **Sottocasi "3-0"** e **"0-3"**, cioè 2 carte in una *sub-metà* e nessuna nell'altra. Deve allora escludere una carta dalla *sub-metà* che ne contiene 2, per cui il Solutore si troverà davanti una situazione con *una sola carta* in ciascuna *sub-metà*.

Quindi l'informazione codificata nel *numero magico* deve, in questi casi, indicare al Solutore *non solo* in quale *metà* andare a cercare la carta da identificare, ma anche in quale *sub-metà*… Poniamo allora che la Tabella 3, per i **Sottocasi "2-1"** ed **"1-2"**, vada ancora interpretata diversamente, ovvero come mostrato nella Tabella.

				Metà	Sub	
A	B	C	D	Bassa	Bassa	1
A	B	D	C	Bassa	Bassa	2
A	C	B	D	Bassa	Bassa	3
A	C	D	B	Bassa	Bassa	4
A	D	B	C	Bassa	Bassa	5
A	D	C	B	Bassa	Bassa	6

				Metà	Sub	
B	A	C	D	Bassa	Alta	1
B	A	D	C	Bassa	Alta	2
B	C	A	D	Bassa	Alta	3
B	C	D	A	Bassa	Alta	4
B	D	A	C	Bassa	Alta	5
B	D	C	A	Bassa	Alta	6

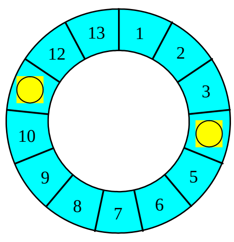
				Metà	Sub	
C	A	B	D	Alta	Bassa	1
C	A	D	B	Alta	Bassa	2
C	B	A	D	Alta	Bassa	3
C	B	D	A	Alta	Bassa	4
C	D	A	B	Alta	Bassa	5
C	D	B	A	Alta	Bassa	6

				Metà	Sub	
D	A	B	C	Alta	Alta	1
D	A	C	B	Alta	Alta	2
D	B	A	C	Alta	Alta	3
D	B	C	A	Alta	Alta	4
D	C	A	B	Alta	Alta	5
D	C	B	A	Alta	Alta	6

8 *Tabella di **Br1***

Il Solutore, quindi, si troverà davanti una situazione con 2 carte in ciascuna *metà*: dal *numero magico*, estrarrà l'informazione su quale *metà* (*alta* o *bassa*) considerare; noterà che in tale *metà* è presente una carta per ciascuna *sub-metà*, ed ancora dal *numero magico* saprà quale sia la *sub-metà* di interesse. Avrà poi a disposizione un *numero magico terziario*, con valore compreso fra 1 e 6.

Ogni *sub-metà* comprende 13 valori consecutivi del *numero d'ordine*; in essa, in origine, sono presenti 2 carte, ed il Valido Assistente deve escluderne una, quella da identificare. Vi sono 13 x 12 / 2 = 78 modi diversi di piazzare 2 carte su 13 posizioni, ed il *numero magico terziario* può assumere solo i valori da 1 a 6…



9 *Schema di **Br1***

È però ancora possibile codificare univocamente la posizione della carta incognita in tutti i 78 casi, se si ragiona come segue: supponiamo di chiudere ad anello la *sub-metà*, in modo tale che la 13ª casella confini con la 1ª.

Si osserva che, comunque siano piazzate le due carte nell'anello, la *minima distanza* fra esse non può essere superiore a 6 caselle; se, come nell'esempio qui sopra, le carte si trovassero nelle posizioni 11 e 4, partendo dalla carta piazzata nella casella 11 l'altra si ritroverebbe nella 6ª successiva. Semmai quella della casella 4 fosse invece nella 5, allora quella della casella 11 sarebbe invece posizionata 6 caselle dopo quella della 5…

Allora, in questi **Sottocasi**, il Valido Assistente lascia sul campo la carta che precede (nell'anello) quella *incognita* di 6 spazi, o meno, e codifica, nel *numero magico terziario*, la *distanza fra le due*.

In pratica, se il Solutore si trovasse davanti una situazione con 2 carte in ciascuna *metà*, dal *numero magico* estrarrebbe l'informazione su quale *metà* (*alta* o *bassa*) considerare; noterebbe che in tale *metà* è presente una carta per ciascuna *sub-*

> *metà*, ed ancora dal *numero magico* saprebbe quale sia la *sub-metà* di interesse. Partendo dall'unica carta presente nella *sub-metà* identificata, conterebbe circolarmente tanti spazi quanti indicati dal *numero magico terziario*, ed avrebbe la soluzione…
>
> Questo sotto-sotto-caso è esaustivo, completo, nel senso che ogni possibile codifica del *numero magico* viene utilizzata per una potenziale soluzione… Non resta spazio per immaginare ulteriori informazioni dal Valido Assistente al Solutore, tipo Jolly o altro…
>
> Poiché nella eventualità più completa e comprendente (3 carte da una *metà*, 2 dall'altra), nel peggiore dei casi (due carte in una *sub-metà*, l'altra altrove) non c'era spazio per alternative, mi pare che non vi siano altre soluzioni…

Anche ***Franco57*** ha un approccio pratico, e tra le altre cose afferma:

> (...) C'è però un'altra potenziale fonte di informazione che l'assistente potrebbe fornire al mago: ed è determinata proprio dalla scelta, evidentemente operata dall'assistente, su quale delle d scelte a caso sarà la carta da indovinare. L'informazione è basata sull'insieme delle $d-1$ carte da scoprire, indipendentemente dal loro ordine. Siccome l'assistente questo può farlo in d modi, non può fornire più di un fattore d di informazione, del tutto indipendente dal precedente. Se questa informazione fosse effettivamente fruibile per il mago, il che non è né immediato né scontato essendo le d carte scelte a caso, e considerando anche l'ordine delle carte scoperte, egli potrebbe indovinare la carta in un gruppo massimo di $d\cdot(d-1)! = d!$ carte. Quindi $n = d!+d-1$ costituisce un massimale per il numero di carte.
>
> Lasciando da parte il discorso dell'ordinamento delle carte scoperte, mi chiedo se su $d\cdot k$ carte coperte, dove k è un intero positivo, quindi $n = d\cdot k+d-1 = d\cdot(k+1)-1$ carte, esistano due funzioni che potremmo chiamare codifica e decodifica con queste caratteristiche:
>
> - la codifica, usata dall' assistente, stabilisce per ogni d-upla del mazzo quale debba essere la carta da indovinare
> - la decodifica, usata dal mago, per ogni ($d-1$)pla stabilisce con sicurezza in quale dei d sottoinsiemi di k carte coperte si trovi la carta codificata.
>
> Se queste due funzioni esistono sempre, allora il massimale è effettivamente raggiungibile. In base alle prove che ho fatto sembra che queste funzioni ci siano sempre, ma non l'ho dimostrato in generale, quindi per ora questa è per me solo una congettura.

E qui ci fermiamo, anche perché le ipotesi formulate da ***Gnugnu*** sui VAdLdRM dopo aver affrontato questo problema sono da telefono azzurro:

> Riesco a pensare solo a quattro alternative:
>
> a) Rudy è un extraterrestre e allora i figli oltre a muoversi a velocità doppia rispetto al gatto che scappa (cfr. RM114) possono anche memorizzare tutti gli schemi;
>
> b) presentano il gioco con l'aiuto di un prontuario cartaceo o informatico, a scapito della meraviglia del pubblico;
>
> c) si accontentano del metodo classico;
>
> d) convincono papà a trovare algoritmi più abbordabili

Così vi diamo più tempo per pensarci. Per i più curiosi in rete si può reperire il documento relativo al problema originale, con tanto di soluzione, cercando "Michael Kleber, the best card trick".

4.1.2 "...i bambini fanno 'Ooh'..."

Per prima cosa, riassumiamo anche qui il problema:

> *Alberto ha preso cinque biglie di dimensione diversa e le ha piazzate in un cono di carta; per una strana combinazione, le biglie inserite in ordine crescente erano tutte completamente tangenti alla parete e ciascuna era a contatto con quella/quelle immediatamente sopra/sotto; sapendo che l'ultima biglia (la più piccola) ha un raggio di otto millimetri e la più grande di diciotto, qual è il raggio di quella di dimensione intermedia?*

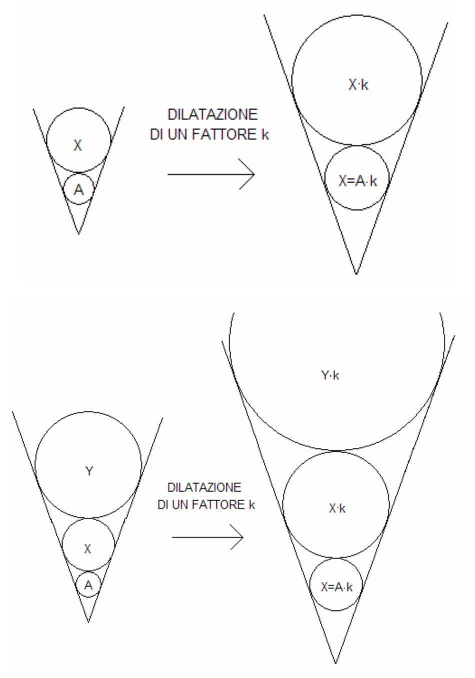
Con, per buona misura, una seconda parte:

> *Fred ha preso quattro biglie rosse e otto biglie blu, e le ha disposte ad occhi chiusi in cerchio. Che probabilità ci sono che nel risultato finale non ci siano due biglie rosse vicine?*

Molti sono stati tratti in inganno dal numero di birre del problema: Alice ha dichiarato pubblicamente che la parte non probabilistica era facilissima, e a quel punto non ha potuto lasciare la terza birra nella sua misurazione... Ma che dire? Malgrado la facilità della prima parte, pochi si sono avventurati nella soluzione: ***Agapetòs***, ***Millenium Bug***, ***GaS***, ***Gnugnu***, ***GinoPieri***, ***Zar***, ***Franco57***.

Per la prima parte ci affidiamo a ***GaS***:

> Siano A – X – Y – Z – B, in ordine dalla più piccola alla più grande e con A e B noti, i raggi delle 5 biglie (nel testo si ha A=8 e B=18). Per poter stare impilate uno sopra l'altro in un cono, i 5 raggi delle biglie devono essere in progressione geometrica con ragione k= X/A. Perché?
>
> Immaginiamo di impilare le prime due biglie (A e X) e dilatiamo il tutto del fattore k sopra definito.
>
> Per la similitudine delle due configurazioni, la successiva biglia che possiamo impilare nella configurazione di sinistra (Y) è equivalente alla sfera grande della configurazione di destra (X•k). Si avrà quindi Y= X•k=A•k². E così via… Si ha quindi:
>
> $X=A\cdot k$
>
> $Y=A\cdot k^2$
>
> $Z=A\cdot k^3$
>
> $B=A\cdot k^4$



10 *Le figure di* ***GaS***

> Dall'ultima equazione si ricava $k^4=B/A$ da cui possiamo ricavare anche le incognite X, Y e Z. È interessante sottolineare il (probabile) motivo per cui l'Autore del problema abbia richiesto le dimensioni della sola biglia intermedia, è l'unica che abbia un'espressione digeribile: $Y=\sqrt{A\cdot B}$. Con le posizioni del problema per A e B si ha che la biglia intermedia ha un raggio Y = 12.
>
> Per quanto riguarda l'approccio probabilistico di Fred, non so proprio di cosa si stia parlando. Per quanto mi riguarda, con le biglie si gioca esclusivamente su un circuito tracciato sulla sabbia e non so quindi come definire il "risultato finale" del gioco fatto dal VA²dLdRM su di un cerchio...

Alice è d'accordo, ovviamente, e non pochi degli altri solutori si sono fermati qui. ***Gnugnu*** liquida la parte probabilistica molto in fretta:

> Fissata la posizione di una biglia rossa, restano da sistemare le restanti 3 in 11 posti; mentre, per escludere due rosse consecutive, possiamo sostituire ogni rossa con una coppia rossa seguita (preceduta) da blu, i posti disponibili scenderanno da 11 a 7. La probabilità cercata sarà pertanto:
>
> $$p = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{35}{165} = \frac{7}{33}.$$

Volendo seguire un altro ragionamento, sentiamo ***Millenium Bug***:

> (...) arrischio un soluzione al volo per il problema delle 12 biglie, facendo un volgare conteggio delle combinazioni che ci interessano. Considero di dover mettere le biglie in posizioni numerate da 1 a 12. Con 12 biglie di cui rispettivamente 4 e 8 uguali è chiaro che ci sono 12!/(4!*8!) = 495 disposizioni possibili.
>
> Conto ora i casi in cui ho le sequenze di 4,3,2 biglie rosse, tenendo conto che anche le posizioni 1 e 12 sono adiacenti:
>
> 4: Ci sono 12 disposizioni possibili
>
> 3: La sequenza di 3 può posizionarsi in 12 modi diversi e, per ciascuna di esse la quarta biglia rossa ha 7 possibilità (escludo le 2 adiacenti alla sequenza di 3, già contate prima); quindi 12*7 = 84 combinazioni
>
> 2: La sequenza di 2 può posizionarsi in 12 modi diversi.
>
> Rimangono 8 posizioni ammesse (10-2, per il discorso di prima) per le rimanenti 2
>
> biglie. Quindi 8!/(6!*2!) = 28. In tutto avremmo 28*12 = 336 casi.
>
> Però qui c'è un inghippo: in 7 dei 28 casi anche le due biglie rimaste sono adiacenti e quindi la combinazione in oggetto verrebbe contata due volte. Bisogna quindi dividere per 2 per avere il conteggio corretto: 12 * 21 + 12 * 7 / 2 = 294
>
> In definitiva, sommando tutti i risultati ho: 12 + 84 + 294 = 390 casi in cui ci sono due rosse vicine.
>
> Le probabilità sono dunque 390/495 = 78.78 % che ci siano due rosse vicine e 105/495 = 21.21 % che NON ci siano due rosse vicine.

Per una volta vorremmo farvi notare che le probabilità calcolate coincidono (di solito siamo tanto sadici da offrirvi soluzioni diverse con risultati diversi...). E con questo ci aggiorniamo. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Quanti zeri ci sono al fondo di 100! ?

> *Il numero degli zeri al termine di un numero indicano quante volte questo è divisibile per* 10*, e questi sono* 10*. Inoltre,* $10=5\cdot 2$*, quindi dobbiamo contare anche gli altri* 10 *multipli di* 5*, e siamo a* 20*. Quelli che non abbiamo ancora contato sono i quattro multipli di* 25 *(*25, 50, 75, 100*)* per la seconda volta*, visto che contengono il termine* 5^2 *che, grazie al "mucchio di 2" avanzati, è in grado di contribuire con altri zeri. Totale,* 24 *(e non* 20*).*

6. Pagina 46

Abbiamo già ricavato (BJ&P46 su RM_060, gennaio 2004) che un triangolo rettangolo ha lati *x*, *y* e *z* interi se e solo se:

$$\begin{cases} x = 2tab, \\ y = t\left(a^2 - b^2\right), \\ z = t\left(a^2 + b^2\right). \end{cases}$$

Dove *t* è un intero qualunque e *a* e *b* sono interi primi tra loro con *a*>*b*.

Supponiamo esistente un triangolo soddisfacente le condizioni del problema; ponendo il fattore di proporzionalità *t* pari a 1, possiamo esprimere i lati del triangolo come:

$$\begin{cases} x^2 = 2ab, \\ y^2 = a^2 - b^2, \\ z = a^2 + b^2, \end{cases}$$

sotto le stesse condizioni viste precedentemente per *a* e *b*.

La seconda di queste equazioni può essere riscritta come $a^2 = b^2 + y^2$, e quindi:

$$\begin{cases} b = 2tu, \\ y = t^2 - u^2, \\ a = t^2 + u^2, \end{cases}$$

dove *t* e *u* sono interi primi tra loro. Otteniamo quindi

$$x^2 = 2\left(t^2 + u^2\right)2tu;$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = tu\left(t^2 - u^2\right).$$

Ma *t* e *u* sono primi tra loro, il che implica che siano anche primi rispetto a $t^2 + u^2$; quindi, dovendo il prodotto $tu\left(t^2 + u^2\right)$ essere il quadrato di un intero, ognuno dei fattori deve essere il quadrato di un intero, ossia devono esistere degli interi x_1, y_1, z_1 tali che:

$$\begin{cases} x_1^2 = t, \\ y_1^2 = u, \\ z_1^2 = t^2 + u^2. \end{cases}$$

L'ultima equazione afferma che, sotto le assunzioni iniziali, esiste un triangolo rettangolo con cateti $t = x_1^2$, $u = y_1^2$ e ipotenusa z_1 con x_1, y_1, z_1 interi; non solo, ma considerando che:

$$z_1^4 = \left(t^2 + u^2\right)^2 = a^2 < a^2 + b^2 = z,$$

si ha che deve essere $z_1 < z$.

Quindi, se esiste un triangolo rettangolo in cui i due cateti sono quadrati di interi e la cui ipotenusa è un intero, ne esisterà un altro soggiacente alle stesse condizioni con ipotenusa più piccola. Utilizzando lo stesso ragionamento a questo secondo triangolo, possiamo costruire una successione di triangoli con le ipotenuse decrescenti. Siccome tutte queste ipotenuse devono assumere valori interi, arriveremo a un triangolo la cui ipotenusa ha lunghezza 1. Ma questa è una contraddizione in quanto il valore 1 non può essere somma dei quadrati di due numeri interi.

7. Paraphernalia Mathematica

Capita tutt'altro che spesso che i luoghi sacri di RM vengano ceduti dai tenutari a persone esterne alla Redazione: anche se Piotr concede molto volentieri la penna dei compleanni ad Alice, che ormai è a tutti gli effetti una co-tenutaria (per non parlare del mese scorso, quando l'ha concessa perfino al GC), soltanto una volta ha aperto la porta ad un esterno: *Dario Bressanini*. Alice, dal canto suo, ogni tanto lascia i maschietti della Redazione a giocare con le sue S&N, ma nessun altro ha avuto finora tale privilegio. I Paraphernalia Mathematica di Rudy, infine, sono quasi altrettanto immacolati: ce ne ricordiamo solo uno – ormai disperso nella notte dei tempi – affidato a Piotr, e un altro – più recentemente – concesso a *Mariano Tomatis*.

Insomma, inutile negarlo: i tre loschi figuri sono maledettamente gelosi, e se cedono le chiavi di casa a qualcuno, deve proprio valerne la pena. Anche stavolta pensiamo che l'articolo che state per leggere la pena la valga per intero. L'autore è ***Maurizio .mau. Codogno***, detto talvolta *Puntomaupunto*, ed è così noto in rete che non dovrebbero servire presentazioni: è il tenutario di un blog che è spesso tra i cinquanta più letti d'Italia, è stato un'autorità della Naming Authority (cosa proprio da lui, questa: essere un'autorità al quadrato), vince alle Cenerentoliadi, traduce Hofstadter (seguite i nostri EUNBeT, vero?), nutre due gatte (ma in questo il nostro Silverbrahms lo batte 4 a 2), sa tutto dei Beatles e legge ottanta libri all'anno. Ah, sì, certo: è anche un matematico vero, molto più bravo dei tre redattori di RM; ma questa caratteristica è abbastanza diffusa tra RMers, e quindi non vale quasi la pena ricordarla.

L'articolo è veramente curioso, parla di una graziosa caratteristica del Triangolo di Tartaglia scoperta da quel genio della matematica (ricreativa e no) che è stato Edouard Lucas, e… ma cavolo, leggetevelo da soli, no?

7.1 Pari o dispari?

Noi lo chiamiamo Triangolo di Tartaglia. Più o meno tutto il resto del mondo lo chiama Triangolo di Pascal. Credo che per gli arabi sia il Triangolo di Khayyam, e gli svizzeri potrebbero anche definirlo Triangolo di Bernoulli; i cinesi poi ci fanno gentilmente notare come loro lo conoscevano e ne parlavano ben prima che noi europei ne avessimo anche solo una lontana idea. Sicuramente l'avete visto chissà quante volte anche voi: è il triangolo formato dai coefficienti delle potenze nello sviluppo del binomio $(1+a)^n$ al crescere di n, insomma lo sviluppo binomiale di Newton, tanto per aggiungere ancora un altro nome alla sfilza di matematici enunciati all'inizio. Se così non vi viene in mente ancora nulla, magari vedere le sue prime righe vi dà qualche idea.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

11 *Le prime righe del triangolo di Tartaglia*

Generare il triangolo è semplice: i due lati del triangolo sono composti da tutti 1, e ogni altro numero è la somma dei due immediatamente sopra di esso. Le proprietà di questo triangolo sono tantissime, e ci si potrebbe scrivere probabilmente un libro sopra; ad esempio, se siete amanti dei numeri di Fibonacci sarete deliziati nello scoprire che è possibile trovare una successione di Fibonacci ben nascosta tra le righe (e le colonne).

Scriviamo il triangolo in formato leggermente diverso e facciamo la somma dei numeri sulle diagonali: otteniamo proprio i numeri di Fibonacci. Simpatico, no?

Ma non voglio parlare di Fibonacci, bensì di un misconosciuto matematico francese dell'Ottocento: Edouard Lucas. In effetti una correlazione c'è, visto che Lucas generalizzò la successione di Fibonacci e in suo onore quella che inizia con 1, 3, 4, 7, 11... si chiama appunto successione di Lucas.

Ma Lucas, che fu un semplice professore di liceo, mi sa tanto che sia stato snobbato dai grandi matematici francesi da Cauchy a Poincaré, il che è semplicemente una vergogna. Oltre che esserci simpatico perché era un matematico intuitivo e amava i giochi matematici – ha anche scritto un'opera in tre volumi intitolata Récréations Mathématiques – ha scoperto dell'ottima matematica. Purtroppo per lui, è nato con un secolo di anticipo. Era, infatti, fissato con la rappresentazione binaria: roba tirata fuori già da Leibnitz ma che non aveva alcun interesse pratico almeno fino a che non sono stati sviluppati i primi elaboratori elettronici. Per fare un esempio, Lucas studiò i numeri di Mersenne (quelli della forma 2^n–1, la cui rappresentazione binaria è quindi composta da tutti 1) e trovò un metodo (relativamente...) molto rapido per verificare se sono primi. ...Ancora oggi non è un caso che i numeri primi giganteschi che si scoprono ogni tanto siano di Mersenne, perché si usa una variante del suo metodo, detta test di Lucas-Lehmer. Un altro esempio dell'infatuazione di Lucas per la rappresentazione binaria è data dal gioco della Torre di Hanoi, inventato da lui e che – toh! – si risolve esattamente in 2^n–1 passi, ciascuno dei quali ha un immediato corrispondente intuitivo in un numero binario.

1 ...	1														
1 ...	1	1													
2 ...	1	2	1												
3 ...	1	3	3	1											
5 ...	1	4	6	4	1										
8 ...	1	5	10	10	5	1									
13 ...	1	6	15	20	15	6	1								
21 ...	1	7	21	35	35	21	7	1							
34 ...	1	8	28	56	70	56	28	8	1						
55 ...	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1					
89 ...	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
144 ...	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
233 ...	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
377 ...	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	
610 ...	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1

12 *I numeri di Fibonacci, ottenuti sommando le righe del Triangolo di Tartaglia*

Anche la proprietà che Lucas ha scoperto e che ora mi accingo a mostrare e dimostrare è legata ai numeri binari, ed è assolutamente incredibile a prima vista. Innanzitutto, un po' di notazioni per semplificarci la vita dopo. Definiamo B(n,k), con $k \leq n$, il coefficiente (**binomiale**) di a^k nello sviluppo di $(1+a)^n$. Se prendiamo per esempio

$$(1+a)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1,$$

abbiamo B(5,2) = 10. Nel nostro triangolo di Tartaglia, le righe – a partire dalla zeresima perché noi siamo matematici e ci piace iniziare dallo zero – contengono per l'appunto i coefficienti binomiali.

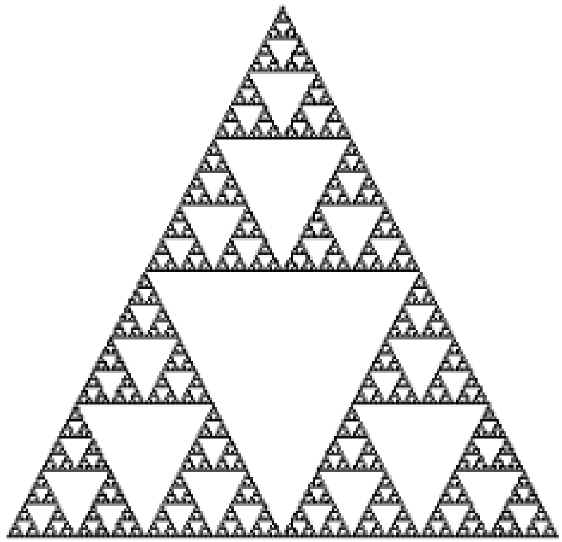
Per quanto detto prima, esiste una formula ricorsiva per calcolare B(n,k): se k=0 oppure k=n, esso vale 1, altrimenti vale

$$B(n-1,k-1) + B(n-1,k).$$

Esiste anche una formula diretta per calcolare B(n,k): esso vale

$$\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

dove n! indica chiaramente la funzione fattoriale e cioè il prodotto dei numeri da 1 a n. Supponiamo però che non ci interessi sapere esattamente qual è questo numeraccio, ma ci basti scoprire se è pari (P) oppure dispari (D).



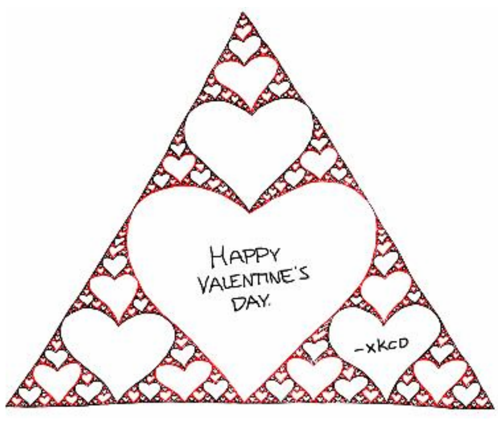
13 *Numeri dispari (neri) e pari (bianchi) nel Triangolo di Tartaglia*

Se guardiamo il disegno qui a fianco, dove i quadratini neri corrispondono ai numeri dispari e quelli bianchi ai numeri pari, sono certo che vi accorgete che c'è una regolarità di un qualche tipo: si vedono triangoloni e triangolini che sembrano avere una struttura frattale. In effetti un frattale fatto così ha anche un nome, triangolo di Sierpinski; possiamo quindi immaginare che ci sia una formula piuttosto compatta che ci permetta di esprimere questa regolarità. E qui arriva appunto Lucas, con il suo teorema:

> «Se scriviamo n e k in forma binaria, aggiungendo se necessario degli zeri a sinistra di k in modo che le due rappresentazioni abbiano la stessa lunghezza, allora B(n,k) sarà un numero dispari se e solo se in ciascuna posizione dove la rappresentazione di k ha un 1 allora la rappresentazione di n ha un 1.»

Tutto qua.

Non so se avete notato il genio di Lucas al lavoro: per calcolare ad esempio se B(31415,926) è pari o dispari, ci basta trasformare i due numeri in forma binaria (costo dell'operazione O(n log n)) e confrontarli (costo O(n)). Roba che si può fare anche con carta e matita, mentre vi sfido a calcolare i fattoriali oppure fattorizzare tutti i numeri per vedere quante sono le potenze di due nei fattoriali sopra e sotto la divisione.



14 *Auguri di S. Valentino da xkcd.com*

D'altra parte, la cosa ha anche un senso: a noi non interessa il valore del coefficiente binomiale fino all'ultima cifra, ma solo una piccola parte di esso – noi che siamo abituati ai computer diremmo "il bit meno significativo" – e quindi non serve necessariamente dover fare tutti i conti. Ma da qui a scoprire la regola enunciata sopra ce ne vuole! Noi siamo più fortunati di Lucas, perché a differenza sua sappiamo già qual è il risultato che dobbiamo dimostrare. Ma dobbiamo comunque dimostrarlo, no? Ecco qua come ho fatto io, probabilmente seguendo una strada non ottimale ma che ha il vantaggio di "pensare binario", il che mi pare nello spirito di Lucas.

Iniziamo con alcuni casi facili. B(n,n) è uguale a uno, e quindi dispari; e in effetti, visto che k è uguale ad n, è immediato che in ogni posizione in cui nello sviluppo binario di k c'è un 1, anche nella corrispondente posizione di n un 1 c'è per forza. B(n,0) vale anch'esso 1, ma può dare qualche problema in più per verificare la nostra tesi... se non si è abituati a fare matematica e quindi non si conoscono "le mirabolanti proprietà dell'insieme vuoto", come ci raccontavano all'università. La rappresentazione binaria di zero è composta da tutti zeri, il che significa che non c'è alcun 1; detto in altro modo, l'insieme delle posizioni con una cifra 1 è l'insieme vuoto. Ma allora è vero che per tutte le (inesistenti) posizioni dove c'è un 1, c'è un 1 anche nella posizione corrispondente di n!

Se non siete ancora convinti della cosa, provo a spiegarlo con la logica formale. L'espressione A → B è logicamente equivalente a NOT B → NOT A. La nostra frase «in ciascuna posizione dove la rappresentazione di k ha un 1 allora la rappresentazione di n ha un 1» diventa «in ciascuna posizione dove la rappresentazione di n non ha un 1 (cioè ha uno 0) allora la rappresentazione di k non ha un 1 (cioè ha uno 0)». Vista così, converrete con me che è assolutamente vero, no?

L'ultimo caso che ci serve come base di partenza è B(n,k) per n=2^r e k diverso da 0 e n. Visto che la rappresentazione di n è del formato 1000...000, e quella di k ha per definizione un 1 in un'altra posizione, dobbiamo dimostrare che tutti questi valori sono pari. In effetti, scriviamo B(n,k) nella versione estesa

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k}.$$

Quando k è dispari, se si esclude il fattore n si possono accoppiare tra loro tutti gli altri numeri pari, uno al numeratore e uno al denominatore: 2 con n–2, 4 con n–4, e così via. Tutte queste coppie di numeri hanno esattamente lo stesso numero di fattori 2: se non ci credete, scrivetele in formato binario e controllate qual è la cifra 1 che si trova più a destra. Quindi tutti questi fattori 2 si eliminano, e resta solo a numeratore n, cioè 2^r. Se invece k è pari, gli accoppiamenti lasciano liberi a numeratore n e a denominatore k; ci resta pertanto qualche fattore 2 in più da scialare a numeratore, e il risultato continuerà ad essere pari.

A questo punto, siamo pronti ad affrontare il caso generale. Fissiamo n, e prendiamo tutti i B(n,k) visti come i coefficienti delle potenze crescenti – andrebbero anche bene decrescenti per ovvie ragioni di simmetria, ma non stiamo a sottilizzare – di a nello sviluppo di $(1+a)^n$. Se definiamo **polinomio r-binario** il polinomio $(1+a)^m$ dove m=2^r, e ci limitiamo a guardare la "firma di parità", vale a dire scriviamo p se il coefficiente è pari e D se il coefficiente è dispari, abbiamo appena visto che la firma di parità di un polinomio r-binario è Dpppp...pppD, dove il primo D corrisponde al coefficiente del termine di esponente 0 e il secondo a quello del termine di coefficiente m, cioè 100...0 se viene scritto in notazione binaria.

```
DpppppppD
    DpppppppD
-------------
DpppDpppDpppD
 DpppDpppDpppD
--------------
DDppDDppDDppDD
```

15 *La firma binaria che corrisponde a* $(1+a)^8(1+a)^4(1+a)$

Scriviamo ora il nostro polinomio $(1+a)^n$ come prodotto di polinomi r-binari e iniziamo a fare il prodotto da quello con r più grande a quello con r più piccolo. Notiamo innanzitutto che ciascun prodotto, dal punto di vista dei coefficienti, consiste nel *sommare* la firma di parità $Q_1Q_2Q_3\dots Q_{t-1}Q_t$ con sé stessa spostata di m=2^s posizioni per un qualche s. Per costruzione, è impossibile che nei vari prodotti che si fanno si arrivi a sommare per qualche esponente due valori entrambi dispari, visto che questo significherebbe che la somma di potenze di 2 con esponenti tutti diversi tra loro sia una potenza di due con esponente ancora diverso. Sempre per costruzione, se nel nostro polinomio fattorizzato non c'è l'esponente di indice 2^k allora al passo corrispondente a k non sarà possibile far diventare dispari gli esponenti di formato $(2r+1)k$ *e* ai passi successivi non potranno quindi diventare dispari quelli tra $(2r+1)k$ e $2(r+1)k-1$. Se invece c'è l'esponente di indice 2^k allora quegli esponenti diventano dispari e si può andare avanti... ottenendo così per induzione esattamente il risultato voluto. Visto in questo modo, l'enunciato del teorema sembra assolutamente naturale: ma come ho detto all'inizio, il genio è stato vedere che si poteva lavorare in una configurazione come questa. Lucas è stato un genio, non c'è che dire.


16 *Francois Edouard Anatole Lucas*

Quando si arriva a un risultato così bello, un matematico pensa subito a come lo si possa generalizzare. Purtroppo non sono riuscito a vedere nulla di fattibile con il modulo 3. Oltre al fatto che non è che io sia un così bravo matematico, credo che conti molto il fatto che 2 sia un numero primo strano, come dicono gli inglesi: "2 is an even prime number, so it is odd". Lascio comunque al lettore la possibilità di generalizzare il teorema ;-).

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms