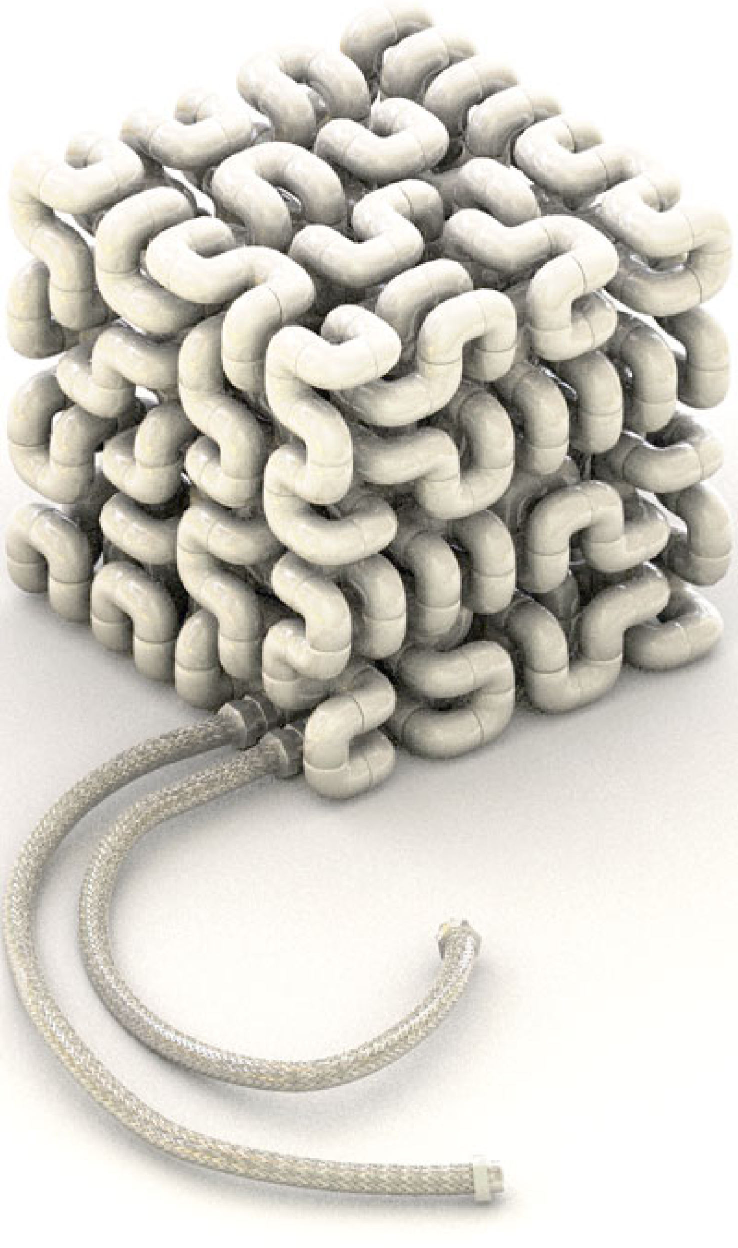
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 121 – Febbraio 2009 – Anno Undicesimo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM120 ha diffuso 2277 copie e il 30/01/2009 per Google eravamo in 34'100 pagine.

Il giorno che il nostro cervello sarà cubico, le circonvoluzioni a forma di Curva di Peano saranno (probabilmente) un *must*: pregasi notare le due connessioni di I/O alla spina dorsale. ***Vivien MULLER***, però, quando ha progettato questo aggeggio, pensava solo ad un *termosifone*. E il bello è che funziona decisamente bene…

1. Shedworking

Hana wa sakura-ji
Hito wa bushi[1]
(Proverbio giapponese)

…e adesso chi lo spiega agli inglesi che *loro* hanno un neologismo?

In realtà la parola esiste da tempo nella lingua inglese, semplicemente ha cambiato significato; shed ha la stessa radice, nell'inglese antico, di shadow, e indica il luogo riparato (e il fatto che ci sia un tetto e non sia una serra implica ci sia ombra) in cui venivano riposti gli attrezzi da giardino; con il tempo, tutti i materiali necessari alla cura dell'abitazione e, successivamente, al bricolage hanno raggiunto le vanghe e le zappe nella sunnominata costruzione, e lo shed è diventato il deposito di tutte quelle cose, dal concime organico ai cacciaviti, che non è considerato opportuno tenere in bella vista sul tavolo del salotto e si preferisce quindi accumulare nella baracca scarsamente visibile al fondo del giardino; a ben vedere, anche da questo concetto di "scarsamente visibile" potrebbe nascere la derivazione da shadow; da qui a deposito di tutto il ciarpame che non serve più ma non si ha il coraggio di buttare via il passo è decisamente breve, ed è con piacevole stupore che, dopo aver rimandato per decenni, quando un britannico decide finalmente di mettere ordine nel suo shed, è praticamente sicuro di ripercorrere al contrario la propria vita, dal giornale di tre anni prima sino al giocattolo (rotto) dato tristemente per disperso in occasione di un riordino delle stanze di molti anni fa.

1 *Walden, in un disegno di Sophia Thoreau. La legnaia è sulla sinistra.*

Un luogo del genere non poteva che attrarre gli eccentrici; in particolare, quelli che ossimoricamente considerano l'eccentricità come norma di vita: gli artisti.

Visto che la destinazione iniziale non era quella di deposito del ciarpame assortito, non siamo sicuri la capanna costruita da Thoreau a Walden sia assimilabile ad uno shed, anche se fonti ben più autorevoli di noi[2] sostengono a spada tratta questa affermazione; l'idea comunque di un luogo riparato, silenzioso e isolato in cui svolgere un lavoro creativo era comunque presente, quindi non staremo a sindacare.

L'evoluzione dello shed come luogo creativo procede a grandi passi; è notizia recente il termine del restauro di quello appartenuto a George Bernard Shaw, e non è difficile trovarne in rete le fotografie; come vedete dall'immagine che riproduciamo, tutte le necessità fondamentali dello scrittore sono soddisfatte; macchina da scrivere, carta e cestino sono presenti assieme ai più recenti prodotti della tecnologia: il telefono era, in realtà, una linea privata collegata alla casa vera e propria, utilizzato

2 *Lo shed di G. B. Shaw.*

[1] "Il fiore per eccellenza è il ciliegio, l'uomo per eccellenza è il guerriero".

[2] Ma non Thoreau: in occasione della stesura di queste note abbiamo compulsato la nostra copia di *Walden* e l'unico uso di shed come sostantivo lo abbiamo trovato riferito alla piccola legnaia: "*I have also a small woodshed adjoining, made chiefly of the stuff which was left after building the house.*" Quindi, per il nostro, la capanna era una *house*, e lo shed era la costruzione annessa, assolutamente non abitabile. Trovate la citazione subito dopo la lista dei costi sostenuti per la costruzione.

unicamente in caso di reali emergenze, come il fatto che fosse pronto il pranzo[3]. Storia vuole che l'intero *Pigmalione* sia stato scritto in questo luogo.

L'evolvere dei tempi e delle tecnologie non cambia molto l'aspetto dello shed; alla macchina da scrivere si sostituisce il computer, il cellulare prende il posto del telefono, ma se confrontiamo il luogo di lavoro di Shaw con quello di Michael Pollan, vediamo che le differenze non sono poi molte; asimovianamente, potremmo restare perplessi dalla sparizione del cestino della carta straccia, che presumiamo comunque sostituito da un'icona sul desktop.

3 *Lo shed di Michael Pollan.*

Sarebbe sbagliato comunque considerare l'uso dello shed come limitato alle attività puramente letterarie; la breve indagine che abbiamo compiuto ci ha portato a nutrire seri dubbi sulla traduzione del termine reso con garage in cui Jobs e Wozniak avrebbero costruito il loro primo personal computer e, cosa per noi decisamente più importante, sono ormai quasi due anni che una parte consistente di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa viene interamente elaborata in quello che, a tutti gli effetti tranne uno[4], è uno shed: il *Math Manor*. L'ombra nera sulla sinistra è lo stipite della porta in grado di garantire un ragionevole isolamento sonoro.

4 *Il* Math Manor.

Ma non è questo il punto che ha trasformato un'antica parola in un neologismo. In realtà, lo *shed(working)* è diventato una reazione alla crisi aiutato dallo sviluppo delle telecomunicazioni.

Gli anni degli *yuppies* e le strisce di Dilbert ci hanno abituato all'idea di lavoro in open-space, con l'immediata e renitente disponibilità dei colleghi all'organizzazione di un meeting in cinque minuti; le buone capacità di una LAN aziendale rendono ormai imperativa la risposta ad una mail in un tempo sempre più vicino allo zero. Però…

Però tutti fanno un lavoro; nel senso che ad un certo punto anche gli epigoni di Dilbert devono chiudersi nel proprio *cubicle*, accendere il cervello e svolgere una qualche attività puramente intellettuale; in un senso letterale del pronome evidenziato, il *proprio* lavoro è quello che svolgiamo da soli, in un isolamento dal resto del mondo; nel momento stesso nel quale dobbiamo comunicare i risultati a qualcuno, le varie crisi economico-finanziarie degli ultimi tempi e un minimo di coscienza per i problemi dell'inquinamento e del riscaldamento globale unite allo sviluppo nel campo delle telecomunicazioni hanno fatto sì che gli incontri in un luogo reale siano sempre più ridotti.

Per dirla con le parole di un giornalista inglese, nella baracca al fondo del giardino oggi è più probabile trovare un contabile che uno scrittore: lo *shedworking* è diventato un affare per tutti, sotto almeno due punti di vista.

[3] Dalla fotografia non si vede, ma il telefono deve aver rappresentato un problema tecnologico non da poco; infatti, questo shed aveva anche la caratteristica di poter ruotare, cambiando il panorama visibile dalla finestra in funzione dell'umore dello scrittore.

[4] Non è al fondo di un giardino.

Psicologicamente, i pochi secondi necessari a traversare il giardino o a chiudere la porta diventano il momento nel quale si passa dalla visione casalinga a quella del lavoro; questo nell'ottica dilbertiana era rappresentato dalle ore necessarie per il *communting*, tempo che adesso viene ridotto virtualmente a zero rendendo il passaggio tra le due dimensioni paragonabile non ad un viaggio epico[5] ma piuttosto all'istantaneo *flash* dato dall'uso di sostanze psicotrope.

Fisicamente, qualunque sia il sottofondo sonoro che ritenete imprescindibile all'attività intellettuale (ivi incluso il sottofondo zero, ossia il silenzio), diventa raggiungibile con estrema facilità, senza contrattazioni temporalmente dispendiose con i colleghi di ufficio; l'arredamento, il permesso di fumare o l'abbigliamento considerato corretto diventano decisioni autonome non legate a standard aziendali.

Per onestà intellettuale dobbiamo riportare anche i lati negativi dello shedworking: il primo, per noi al momento meno importante, è che l'industria e la burocrazia si sono accorti dell'affare, ed oggi i prezzi di uno shed dedicato al lavoro d'ufficio hanno raggiunto prezzi decisamente alti; non solo, ma diventando un luogo nel quale si passa buona parte della giornata, i regolamenti comunali impongono allo *shedworker* di sottostare a leggi e leggine relative all'abitabilità e a migliaia di altre condizioni, permessi e vincoli in grado di rendere il passaggio dal cubicle allo shed una fatica di Sisifo[6].

Il secondo problema, decisamente più importante, è però *la porta*: chiudersi all'interno dello shed e uscirne solo per la soddisfazione delle necessità fisiologiche fondamentali. Sin quando si è uno scrittore la modalità può essere considerata normale, ma francamente non ci sentiamo di imporlo come stile di vita ad un manager intenzionato a mantenere la propria posizione in una struttura che, per quanto riguarda gli altri elementi, ha fatto una filosofia del detto *mors tua, vita mea*. Non solo: quando il costruirsi dei muri attorno per garantire la propria sopravvivenza diventa una regola di un intero paese, la cosa prende una brutta piega.

Forse per i racconti dei nostri nonni e/o genitori, una parola per noi particolarmente antipatica è *autarchia*[7]: il governo in carica all'epoca riscuote presso di noi simpatie sostanzialmente nulle e ancora oggi l'espressione "caffè di cicoria" non è esattamente un punto di merito. Eppure nel mondo ci sono state altre nazioni che hanno applicato le regole dell'autarchia.

Raramente in questa rubrica vengono prese posizioni manichee, ma una parte consistente della Redazione ritiene che in questo caso sia necessario.

La traduzione che viene solitamente data per la frase giapponese all'inizio di questo articolo – "il fiore per eccellenza è il ciliegio, l'uomo per eccellenza è il *samurai*" – è terribile per due motivi: tanto per cominciare traduce un termine giapponese con un altro

---

[5] Ci riferiamo, qui, ai tempi *epici* di trasferimento che ogni pendolare conosce.

[6] Tant'è che sono nati appositi blog in grado di fornirvi il supporto per tutto il tragitto: dalle regole di costruzione, passando per la pubblicità dei nuovi modelli, sino ai regolamenti comunali (limitati al Regno Unito, purtroppo): evidentemente il migliore secondo noi è http://www.shedworking.com. Se, invece, preferite qualcosa di più legato al management dell'ufficio in casa, allora vi consigliamo la newsletter http://www.homeofficeweekly.com. Tutti gli appassionati della vita in ambienti ristretti sono comunque in attesa della prossima evoluzione: chiunque di noi abbia visto le tristissime foto delle ville americane in vendita a seguito della crisi finanziaria si è posto il problema: "Ma dove andranno ad abitare, adesso?" Semplice: http://www.tumbleweedhouses.com. Per il momento abbiamo trovato solo siti commerciali, ma probabilmente, nel momento nel quale leggerete queste note, sarà possibile trovare altro: l'idea di una casa che costa poco più di un'auto, in fondo, non è da buttare. E rende anche sensato il rispetto dei regolamenti comunali.

[7] Un ulteriore motivo di antipatia è dato dal fatto che etimologicamente non è molto chiaro cosa significhi: il nostro dizionario etimologico preferito, il Devoto (senza Oli) dà due derivazioni:

1. αυτός, "sé" e ἀρκεω, "io basto".
2. αυτός, "sé" e ἀρχω, "io comando"

Inutile dire che non troviamo nessuna delle due particolarmente simpatica; qui, comunque, ci stiamo riferendo alla prima.

termine giapponese, il che è un evidente segno del fatto che da qualche parte deve esserci qualcosa di sbagliato; secondariamente riduce il tutto ad una parte, e proprio alla parte peggiore.

In realtà, il termine *bushi* indica, genericamente, l'appartenente ad una famiglia della classe militare: a partire dall'editto Tokugawa del 1615 l'elenco delle famiglie militari viene strettamente definito e l'intero sistema governativo, dall'imperatore[8] sino all'ultimo soldato, era formato unicamente da appartenenti al *buke*, la classe militare: al di sotto, restano gli *heimin*, la gente comune: contadini (*hyakusho*), artigiani (*shokunin*) e mercanti (*chonin*)[9].

All'interno del *buke*, comunque, i *samurai* rappresentavano il gradino più basso, e la loro ignoranza era proverbiale; tant'è che, nonostante la formazione dei *bushi* fosse approfondita[10], era perfettamente normale che un *heimin* fosse più colto di un *samurai*.

Il mantenimento di una struttura sociale così rigida impone al Giappone uno strettissimo isolamento: per tutto il periodo Tokugawa (o periodo *Edo*, dal nome della capitale, l'odierna Tokyo) dal 1600 al 1867, il Giappone si rinchiude nel proprio shed e sviluppa una forma strettissima di autarchia: nel 1624 vengono espulsi gli spagnoli, nel 1639 tocca ai portoghesi e nel 1640 a tutti gli altri[11].

Dal punto di vista culturale e in particolare per quanto riguarda la matematica, comunque, non si partiva da zero: durante il periodo Heian[12] erano stati importati dalla Cina svariati testi matematici. Esattamente come in Europa la cultura era conservata e diffusa attraverso le chiese e i monasteri, i templi buddisti svolsero in Giappone la stessa funzione anche se senza un grande successo dal punto di vista della matematica: si dice che durante lo shogunato Ashikaga (1338–1573) fosse praticamente impossibile trovare in Giappone una persona "versata nell'arte della divisione".

Dobbiamo aspettare l'inizio del diciassettesimo secolo per trovare il primo matematico giapponese: è questo il periodo in cui Kanbei Mori scrive i suoi libri; oggi, purtroppo, ne è sopravvissuto uno solo – un trattato sul *soroban*, l'abaco giapponese – ma è a questo momento che si fa risalire la nascita della matematica giapponese.

Come in ogni campo, l'importante è trovare qualcuno che cominci; la Matematica Nazionale, o *wasan*[13], inizia il suo florido sviluppo con un allievo di Mori, Koyu Yoshida (1598–1672): il suo libro *Jinkoki* ("i piccoli e i grandi numeri") diventa rapidamente sinonimo di aritmetica e imprime uno sviluppo alla matematica nella direzione computazionale più che in quella logica, e questo indirizzo resterà ben infisso in tutta la matematica giapponese successiva.

In questo periodo nasce la politica dell'autarchia giapponese, o *sakoku*; contrariamente ad altri tentativi dello stesso tipo in altri periodi e in altre parti del mondo, non solo durerà sino al 1854, quando il commodoro Perry (aiutato dalle *black ships* della marina militare statunitense) riuscirà a forzare il blocco, ma garantirà uno sviluppo della cultura tale da meritarsi, in giapponese, il termine di *genroku*, normalmente tradotto come "Rinascimento": per darvi un'idea, questo è il periodo in cui si sviluppano gli *haiku*, in cui il *no* e il *kabuki* raggiungono le loro vette più alte e in cui nasce la pittura *ukiyo-e*; inoltre

8 Che, essendo una cosa diversa dallo *shogun*, aveva una funzione puramente rappresentativa e contava, a voler essere gentili, quanto il solito due di coppe a briscola quando la briscola è denari.

9 Ne manca una: gli *eta*, ossia i reietti. O, se preferite l'espressione indiana, i *paria*.

10 *Myokyo* (i tredici classici cinesi), *mongaku* (retorica), *koyomi* (calendaristica),… e, secondo noi più interessante, *san* (matematica).

11 Unica eccezione, una singola compagnia commerciale olandese.

12 Coincidente suppergiù con il Medio Evo occidentale

13 Abbiamo già visto che *san* significa "matematica"; *wa*, semplicemente, significa "Giappone".

nascono le discipline dell'*ikebana* e del *cha-no-yu*; vi lasciamo alle ricerche in questi campi, qui ci limitiamo a dire che in un'area che per noi riveste uno scarso interesse (l'architettura e l'arredamento di interni), relativamente a quel periodo esiste un libro tradotto in italiano: Edward S. Morse, *La casa giapponese* (BUR, 1994: con 307 disegni dell'autore): quelle venticinquemila lire sono sicuramente appartenenti al 5% dei soldi meglio spesi della nostra vita passata.

Se Mori è stato l'iniziatore, comunque il titolo di massimo matematico di quel periodo è normalmente attribuito a Seki, che in Giappone viene considerato come una figura data dalla somma di un Newton e un Leibnitz[14]; e, se i manoscritti a lui attribuiti (buona parte, purtroppo, perduti) sono effettivamente suoi, deve aver passato una fetta consistente della sua – per l'epoca – non breve vita[15] a scrivere.

Non solo Seki sviluppa una teoria dei determinanti che precede di almeno dieci anni quella di Leibnitz, ma si impegna in problemi decisamente complessi: tra i pochi documenti salvatisi, uno riguarda la discussione delle soluzioni di un'equazione di millequattrocentocinquattottesimo grado.

Una delle scoperte più importanti tra quelle attribuite a Seki è quella dell'*enri*, o *principio del cerchio*: lungo le stesse linee sviluppate da Eudosso, l'idea era di utilizzare un metodo di esaustione per calcolare l'area del cerchio ma, contrariamente ai Greci, non attraverso la definizione di poligoni a sempre più lati, ma piuttosto attraverso la divisione della circonferenza in rettangoli. Ciò non ostante, possiamo considerare l'*enri* come una forma primitiva di calcolo differenziale, con l'interessante caratteristica di poter essere estesa anche ad altre figure quali sfere ed ellissi, come verrà fatto nei tempi successivi.

5 *Aida Yasuaki.*

Da questo ambiente emerge la figura di Aida Yasuaki; nato il 10 febbraio del 1747 nella capitale della Prefettura di Yamagata, nel nord del Giappone. Studia, dall'età di 15 anni, con matematici del calibro di Yasuyuki Okazaki, per spostarsi a Edo all'età di ventidue anni ed iniziare il suo lavoro presso lo *shogun* Tokugawa Ieharu come ingegnere idraulico, responsabile del controllo dei fiumi e dei sistemi di irrigazione. Il lavoro però non piace ad Yasuaki, che aveva deciso sin da giovane di diventare il miglior matematico giapponese: nel suo tentativo, ci sono spunti per ben più di un dramma shakespeariano.

Lo scopo di Yasuaki nel muovere a Edo, in realtà, era quello di poter diventare allievo di Sadasuke Fujita, che all'epoca era considerato il miglior matematico giapponese; per farlo, Yasuaki aveva coltivato l'amicizia di Teirei Kamiya, un discepolo diretto di Fujita. Yasuaki aveva sviluppato svariati brillanti teoremi per attirare l'attenzione di Fujita, ma quest'ultimo aveva rilevato alcuni errori e quindi aveva rifiutato di accettare Yasuaki come allievo.

Uno dei libri più famosi di Fujita era il *Sijyo Sampo*: il rifiutato Yasuaki si mette d'impegno e scrive il *Kaisei Sampo*, in cui critica l'opera di Fujita. Kamiya, disonorato dal fatto di aver presentato Yasuaki a Fujita, scrive una feroce critica al *Kaisei Sampo*.

La controversia non coinvolge solo i singoli personaggi: degenera in una vera faida tra la scuola *Seki* (rappresentata da Fujita) e la scuola *Sijyo* nel momento stesso in cui Ajima, allievo diretto di Seki, prende le difese di Fujita.

[14] Trattati rispettivamente nei compleanni di RM071 e RM054.

[15] Nasce nel 1642 e muore nel 1718.

Potrebbe sembrare una diatriba di corridoio tra docenti relativa alla propria immagine pubblica, ma nel 1786 avviene l'evento decisivo: con la morte di Tokugawa Ieharu e la salita al potere di Tokugawa Ienari, Aida viene a perdere il posto di lavoro. Da questo momento, decide di dedicarsi unicamente alla matematica e all'insegnamento, scrivendo i *Sanpo Tensi Shinan*, nel 1788; qui vengono trattate per la prima volta una serie di formule relative alle sfere, alle ellissi e ai cerchi, oltre a metodi per associare ai problemi le equazioni risolutive:

> *Aida produce dai sessanta agli ottanta lavori l'anno, nell'isolamento: ad oggi gli si attribuiscono più di duemila opere, alcune anche non matematiche; fu un insegnante della matematica tradizionale e un grande divulgatore dei metodi utilizzati in questa disciplina.*[16]

Nella nostra innata speranza che ogni personaggio di una tragedia nella prossima rappresentazione scampi il finale previsto e viva felice e contento, lo *shedworking* potrebbe rappresentare un buon *deus ex machina*, come lo è stato per Aida Yasuaki.

[16] K Shimodaira, Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990), nostra traduzione dalla citazione sul sito dell'università scozzese di St. Andrews.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Amazing Albert			
"…i bambini fanno 'Ooh'…"			

2.1 Amazing Albert

Non per dire delle banalità, ma tutti invecchiano, inclusi i VAdLdRM; Alberto, da allegro casinista preadolescenziale qual era, si è ritrovato a dover gestire una congrega di teppisti (sua definizione) di età nell'intervallo]7;12[(estremi esclusi: si capisce?); non stiamo a narrarvi i dettagli, vi basti sapere che (dovendosi occupare di loro durante le vacanze natalizie), è arrivato a casa dalla prima giornata di animazione in uno stato che il suo Augusto Genitore anni fa amava descrivere come "tricolore", nel senso di *nero* di collera, *rosso* di rabbia e *verde* di bile; alla richiesta di spiegare cosa fosse successo, la risposta è stata: "Quei deficienti mi DANNO DEL LEI!!!".

Ancora adesso Rudy si sta sganasciando dalle risate, con i tre colori che diventano sempre più carichi sulla faccia di Alberto: il tormentone preferito in famiglia ormai è quello di chiamare Alberto gridando "*Aanimatooreeee! Ssscusiii, Aanimatooreeee*" con voce particolarmente stridula e petulante.

OK, no jokes, che si arrabbia. In realtà Alberto ha preso la cosa talmente sul serio che anche suo fratello ha smesso di fare il cretino (Fred è ancora oggetto dell'animazione), e si è proposto per dargli una mano durante la recita che stanno organizzando, facendogli da assistente per lo spettacolo di magia (…ma l'assistente dell'assistente, si chiama VA^{2}dLdRM?).

L'idea di "Amazing Albert" è sostanzialmente questa: "Questo è un normale mazzo da cinquantadue carte; adesso sceglietene cinque, senza farmele vedere, e passatele al mio Valido Assistente; lui me ne mostrerà solo quattro, una per volta… Bene, vedo il sette di picche, la Donna di cuori, l'otto di fiori e il tre di quadri; adesso, dovrebbe essere evidente a chiunque che la carta restante non è altro che il Re di picche…" Stupore della folla di teppisti mentre Fred mostra effettivamente la carta indicata, quinta del gruppo.

Il gioco ha avuto un notevole successo, ed è stato ripetuto più volte durante la serata, quindi possiamo escludere qualunque trucchetto probabilistico; evidentemente, l'Assistente e l'Assistente dell'Assistente hanno trovato un metodo, e adesso vogliono vedere se riuscite a trovarlo; non solo, ma Alberto gradirebbe anche sapere quanto può essere grande il mazzo[17] per azzeccarci con cinque carte estratte e quattro mostrate;

[17] Ignorate semi e valori: carte genericamente numerate, ordinabili e distinguibili.

mentre Rudy, sempre pronto a generalizzare, sta cominciando a porsi problemi con d carte scelte da un mazzo di n, di cui ve ne mostrano $d-1$ e dovete indovinare l'altra…

Come è andata a finire? Oh, non gli danno più del "lei"; adesso, gli danno del "*voi*"…

2.2 "…i bambini fanno 'Ooh'…"

Non per dire delle banalità, ma tutti invecchiano, inclusi i VAdLdRM (Eh? Sì, lo so. Ma il problema è diverso). Il solito Alberto, ad esempio, sta mostrando una preoccupante tendenza alla sufficienza dal punto di vista scolastico: a parte uno scivolone in latino (al momento in fase di recupero), quell'ordalia che di solito erano i colloqui con i prof si sono trasformati in un tranquillo "…Potrebbe impegnarsi di più, ma va bene così…"

Capite che a questo punto urgevano provvedimenti, nel senso buono del termine.

Volendo fare un qualcosa di simbolico (c'è la crisi, potevamo mica regalargli il Ferrarino: ché poi lo usava papà per un paio d'anni, prima di darglielo…) e forti del fatto che Rudy non butta mai via niente, abbiamo restituito ad Alberto una serie di cose sequestrate nel corso degli anni (scolastici) di scarso rendimento; considerato il fatto che già in *seconda elementare* era stato evidenziato qualche problema, è palese che quando si è visto arrivare il sacchetto delle biglie e il libro di *Maghetto Pasticcio*[18], abbia detto "Ooh… Che bello…" con un tono tale che Rudy e Paola stanno ancora cercando un modo per raschiare il sarcasmo dal *parquet*. Comunque, siamo stati dei temerari: quelle biglie all'epoca erano pericolosissime in presenza di Fred, e ancora adesso (in privato) siamo piuttosto contenti dello scarso rendimento scolastico che ne ha permesso il sequestro.

Il guaio è che con la cessazione della pericolosità delle biglie è cessato anche l'interesse di Alberto e Fred per le suddette; infatti, anziché mettersi a tracciare un cerchio per terra, Alberto ha iniziato ad infilarle in un cono, mentre Fred ad occhi chiusi le piazzava per terra (con indubbio interesse da parte di Virgilio il gatto); a questo punto sono sorti i problemi.

Alberto, dicevamo, ha preso cinque biglie di dimensione diversa, e le ha piazzate in un cono di carta; per una strana combinazione, le biglie inserite in ordine crescente erano tutte completamente tangenti alla parete e ciascuna era a contatto con quella/quelle immediatamente sopra/sotto; sapendo che l'ultima biglia (la più piccola) ha un raggio di otto millimetri e la più grande di diciotto, ci si chiedeva quale fosse il raggio di quella di dimensione intermedia.

Fred, più sul probabilistico, aveva preso quattro biglie rosse e otto biglie blu, e le disponeva ad occhi chiusi in cerchio (decisamente approssimativo, ma comunque rendeva l'idea); quello che vorrebbe sapere è che probabilità ci sono che nel risultato finale *non* ci siano due biglie rosse vicine.

Pensateci pure con calma, che tanto Virgilio sta giocandoci lui, con le biglie…

3. Bungee Jumpers

Trovate le ultime cinque cifre del numero $N = 9^{\left(9^{\cdot^{\cdot^{\left(9\right)}}}\right)}$, che contiene 1001 cifre "9" nella serie di elevamenti a potenza, calcolati come indicato.

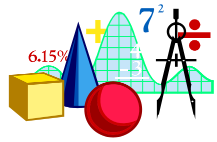
La soluzione, a "Pagina 46"

[18] "*Maghetto Pasticcio / sta dentro la vasca / poi fa una magia / e c'è il mare in burrasca. /Che lampi! Che tuoni! / Ci portano via! / Maghetto Pasticcio, cambia magia!*": sedici pagine in cartone, ognuna spessa tre millimetri. Recitata da Alberto (5 anni), era l'unica cosa in grado di addormentare Fred (2, all'epoca). Se vi interessa come va a finire, dopo il coinvolgimento di streghe, lupi e marziani con disco volante d'ordinanza, si trovavano tutti a mangiare una torta.

4. Soluzioni e Note

Ci siamo. Nei dintorni del 2 febbraio 1999 Rudy Mathematici, la prima versione della rivista che ora sfogliate, vedeva la luce. Contava due pagine e non poteva sapere che chiamarsi RM001 sarebbe servito, perché prima o poi ci sarebbero veramente volute tre cifre per contarne i numeri. Non poteva nemmeno immaginare che dieci anni dopo ci sarebbe stata ancora, una rivista chiamata Rudi Mathematici.

Quindi tanti auguri a noi. Tanti auguri alle Soluzioni e Note, rubrica esistente fin dal primo numero (ebbene sì, il Capo aveva pensato proprio a tutto), e soprattutto ai nostri lettori e solutori, che non solo sono parte integrante della rivista, ma credendo in noi hanno fatto diventare Rudi Mathematici quello che è oggi. Buon compleanno, Rudi Mathematici.



6 *Il primo logo di RM – febbraio 1999*

E con questo basta, siamo troppo emozionati per raccontarvi altre novità... se ci ricordiamo ve le metteremo nella pagina di Memento sul sito (http://www.rudimathematici.com/memento.htm), anche se per questo mese abbiamo superato noi stessi, ci siamo perfino ricordati di aggiornare la pagina dei Memorabilia! Passiamo direttamente al corpo della rubrica, ovvero le vostre soluzioni.

4.1 [120]

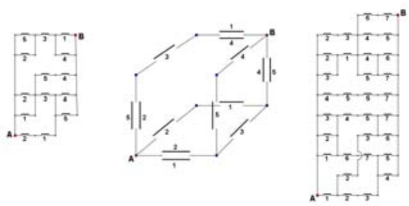
4.1.1 Trattasi di decidere

Un problema che associa tre pipe, tre coniglietti e tre birre non può che far gola ai soutori più accaniti. Prima di tutto, vediamo qual è la richiesta.

> *Si tratta di organizzare una macchina per votazioni basata unicamente su k interruttori, eventualmente coordinati tra di loro, in grado di accendere una lampadina quando, su (2n–1) votanti, almeno n sono d'accordo. Trovare gli schemi per i casi di qualche altro n (3 e 4, ad esempio: 5 e 7 votanti), cercando anche di minimizzare il numero degli interruttori.*

Il Capo, in una nota a piè pagina, aveva anche accennato al fatto che la soluzione generale non fosse nota, e forse a questo dobbiamo le tante le mail e i tentativi giunti i Redazione per questo problema. Trattasi, infatti, di un problema noto[19] come "majority voters". Comunque per quanto ci riguarda siamo più che contenti di aver stimolato la curiosità e l'interesse di tutti, e proviamo a dare un piccolo spazio a quelli che hanno mandato qualcosa: ***Gnugnu***, ***Emanuele***, ***Allanon***, ***GinoPieri***, ***Trekker***, ***Millenium Bug***, l'inossidabile ***Cid***, ***Franco57***, ***Fabrizio***.

La maggior parte dei contributi contengono molti disegni, per cui cerchiamo di schematizzare un pochino e riassumere i risultati fin qui conseguiti.

Commento	Disegni dei circuiti
Il meglio che sia riuscito a trovare per le macchine ad interruttori: 14 per n=5 e 33 per n=7. Non sono molto soddisfatto, ma tant'è. Per quanto concerne il numero di interruttori necessari in funzione di n, nulla più di una congettura, del tutto priva di qualsiasi giustificazione razionale: dovrebbe essere dell'ordine di grandezza del binomiale di n su (n–1) /2, chilometro più chilometro meno.	***Gnugnu*** 

[19] Ringraziamo ***Fabrizio*** per l'informazione.

<table>
<tr>
<td>
Il problema forse non l'ho capito bene perché mi sembra una semplice applicazione di calcolo combinatorio. Consideriamo N persone che possano agire su un certo numero di interruttori di un circuito.

Sia Q un numero minore di N tale che:

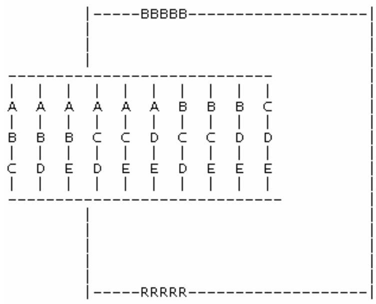
1) se almeno S persone chiudono i propri interruttori il circuito è chiuso per ogni $S \geq Q$
2) se solo R persone chiudono i propri interruttori il circuito è aperto per ogni $R<Q$

Consideriamo le N su Q combinazioni di N elementi a Q a Q. Uniamo in serie i Q interruttori per ogni combinazione e uniamo in parallelo questi "finali". Se Q persone qualsiasi chiudono i loro interruttori essendoci tutte le combinazioni ci sarà anche quella costituita da questo sottoinsieme. Viceversa se meno di Q persone chiudono i loro interruttori ovviamente tutti i finali che sono costituiti da interruttori in serie di Q persone diverse saranno aperti. CVD.

Esempio (il disegno): N=5, Q=3, BBBBB sono la batteria, RRRRR è la lampadina

Per risparmiare interruttori ovviamente si possono "collassare" gli interruttori su ogni riga.

È banale dimostrare per costruzione che su ogni riga potremo avere al minimo $N-Q+1$ interruttori. (Il D non lo potremmo avere perché per come abbiamo costruito le combinazioni non abbiamo più abbastanza lettere a disposizione CVD). Da cui il minimo totale (con questo tipo di costruzione) numero di interruttori da usare sarà $(N-Q+1) \cdot Q$. Infatti nel caso dell'esempio sopra bastano 9 interruttori.
</td>
<td>
Emanuele



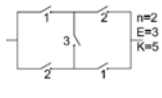
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Detto $E=2n-1$ il numero degli elettori, n quindi rappresenta la maggioranza, il circuito minimo che ho trovato comprende in generale $k=(E^2+1)/2$ interruttori

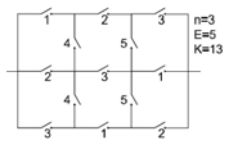
Lo schema generale potete vederlo dal pdf allegato, con esempi da n=2; E=3; k=5 fino a n=7; E=13; k=85. lo schema è immediatamente generalizzabile.

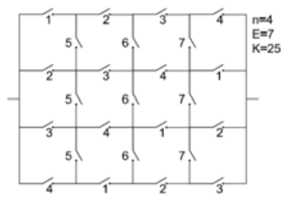
In pratica si compongono n righe con le n permutazioni cicliche dei primi n elettori, e si collegano trasversalmente con gli (n–1) elettori rimanenti; lo schema è meccanico e ripetitivo e vale per qualsiasi n (o E che dir si voglia).

Ovviamente per ogni E, esistono E! reti tutte equivalenti ma con diversa permutazione dei numeri da 1 a E. Non riesco a dimostrare che $k=(E^2+1)/2$ sia il minimo assoluto degli interruttori possibili fra tutte le possibili reti….

Invece è abbastanza facile "vedere graficamente" che le siffatte reti "funzionano", perché ad es. dati n elettori
</td>
<td>
Allanon[20]







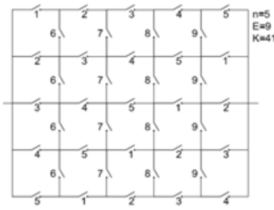
</td>
</tr>
</table>

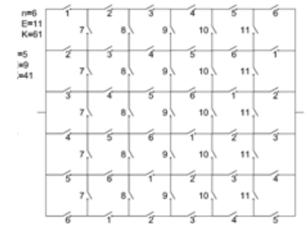
[20] ***Allanon*** ci ha poi scritto dicendo di aver trovato degli errori nel suo ragionamento. Troviamo il suo approccio ed i suoi schemini comunque belli ed interessanti, per cui speriamo che non si offenda se pubblichiamo comunque.

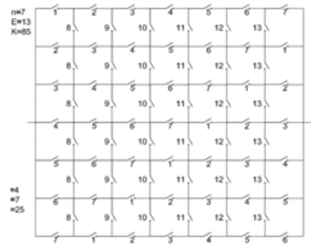
qualsiasi si può sempre proseguire su una riga con una parte di questi n elettori fino a quando non si arriva su una colonna sulla quale ci si può muovere verticalmente fino a trovare una ulteriore riga sulla quale proseguire etc.

Il fatto che sulle righe ci siano tutte le permutazioni cicliche dei primi n elettori garantisce che in fondo si può arrivare comunque.

Anche in questo caso ad una dimostrazione formale chiusa non sono arrivato; se trovo qualcosa ve lo comunicherò.







GinoPieri

Visto che ogni votante ha appena due opzioni “sì”, “no”, credo che il cammino più facile per trovare la soluzione sia ricorrere ai vecchi concetti di elettronica digitale binaria, ritirando dagli scaffali della memoria l’algebra booleana o quello che ne è rimasto.

Il primo impulso è stato di tentare la minimizzazione implorando l’aiuto dei signori Veitch e Karnaugh, poi mi sono accorto che per più di quattro variabili il loro processo è impraticabile. Sono ricorso allora a semplici manipolazioni algebriche.

Innanzi tutto ho calcolato le combinazioni C((2n–1),n) che rappresentano il minimo necessario di voti per approvare la cosa che sia stata messa in votazione. Sin qui niente di particolarmente scabroso.

n	$C_{((2n-1),n)}$
2	3
3	10
4	35

Indicando con le prime lettere dell’alfabeto i votanti e i contatti degli interruttori da loro azionati, per n = 2 avremo le seguenti combinazioni vincenti:

ab, ac, bc

Sotto forma di espressione booleana avremo:

1) $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$

Ricordiamo che la moltiplicazione corrisponde alla funzione “E” (AND) e l’addizione alla funzione “O” (OR) che possono essere realizzate con interruttori in serie la prima e in parallelo o, quando possibile, con un collegamento diretto (Wired OR), la seconda.

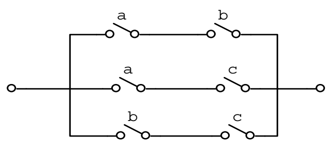


Fig 1

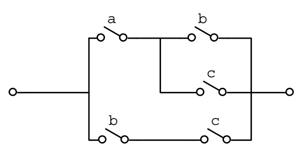


Fig 2

Stando allora alla forma canonica della 1) il circuito sarebbe quello della Fig 1 utilizzando 3 interruttori con 6 contatti. Riscriviamo la 1), tentando minimizzare:

a(b+c) + bc

Allora il circuito diventa come in Fig 2, economizzando un contatto, gli interruttori continuano comunque 3, uno per ogni votante. Il circuito, anche se disegnato differentemente è perfettamente uguale a quello della rivista.

Bene, pensando di essere sulla strada giusta ho addizionato due variabili, corrispondendo ai due nuovi elettori, avendo adesso: a, b, c, d, e, f. Quando però ho tentato scrivere ordinatamente le 10 combinazioni vincenti, dopo vari tentativi ho dovuto smettere per non rischiare la sanità mentale. Il soccorso allora, ancora una volta, è venuto dalla tecnica binaria.

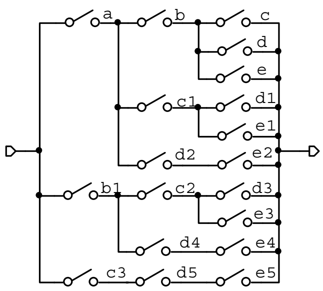
Ho stabilito di indicare con "1" l'interruttore chiuso o il votante del "sì" e con "0" il caso contrario. Con le 5 variabili posso allora scrivere le 25 o 32 combinazioni differenti di cui solo 10 saranno quelle di interesse o, in altre parole ho scritto i numeri, in notazione binaria, da 31 fino a zero:

É facile adesso avere ordinatamente le 10 combinazioni dove appaiono appena e soltanto tre "1" e ottenere la tabella a lato da cui possiamo ricavare direttamente l'espressione booleana minimizzata:

a • [b • (c + d + e) + c(d + e) + d • e]+ b·[c·(d+e) + d·e]+ c·d·e

E schematizzare il circuito che impiegherà 5 interruttori e 19 contatti. Il circuito non minimizzato ne avrebbe richiesti 30. Davvero una bella economia!

a	b	c	d	e
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1



Trekker

Il problema di trovare uno schema di k interruttori coordinati ma non necessariamente in un numero minimo si può risolvere in generale facendo ricorso all'algebra di Boole. Ricordiamo che il teorema di espansione, o Teorema di Shannon, afferma che assegnata una generica funzione di commutazione in n variabili $f(x_1,x_2,...,x_n)$ essa si può sempre esprimere come:

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, .., x_n) + \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, .., x_n)$$
$$f(x_1, x_2, .., x_n) = [x_1 + f(0, x_2, .., x_n)] \cdot [\bar{x}_1 + f(1, x_2, .., x_n)]$$

dove con + si intende OR includente e con · si intende AND o congiunzione, cioè ogni funzione di commutazione si può esprimere come "OR di AND" e "AND di OR".

Troviamo ad esempio uno schema di interruttori per 3 votanti che, per semplicità di notazione, chiameremo A,B,C. Scriviamo la tabella di verità con la convenzione che 1 significa interruttore chiuso o lampadina accesa e 0 significa interruttore aperto o lampadina spenta. In pratica una cella della colonna "Lampada ON" contiene 1 solo e soltanto nei casi in cui la corrispondente riga contiene due o più "uni". La sintesi della funzione booleana che descrive l'ultima colonna, espressa nella forma OR-AND, è pertanto:

$$f(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC\,.$$

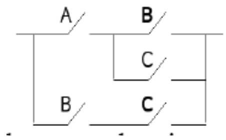
A	B	C	Lampada ON
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Schema per tre votanti

Sfruttando la proprietà di idempotenza (cioè X=X+X), la proprietà di complementazione (cioè $\overline{X}+X=1$) e la proprietà distributiva, dopo un "briciolo" di elaborazione si ottiene:

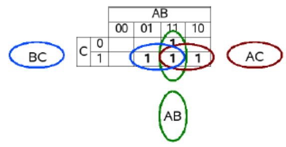
$$f(A,B,C)=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC+ABC+ABC=(\bar{A}+A)BC+A(\bar{B}+B)C+AB(\bar{C}+C)$$
$$f(A,B,C)=BC+AC+AB$$
$$\boldsymbol{f(A,B,C)=A(B+C)+BC}$$

a cui corrisponde il circuito con k=5 interruttori coordinati in figura.



Circuito con K=5 interruttori

Avremmo potuto ottenere la sintesi della funzione booleana anche ricorrendo alle mappe di Veitch-Karnaugh-Zakrevskii: si proceda al "priming" (cioè si marchino con 1 le celle aventi coordinate corrispondenti agli "uno" della tabella della verità) e si incornicino le celle contigue marcate. Ogni cornice genera un termine primo includente per la funzione data e la loro somma è una copertura minimale. Si noti che una coppia di "uni" adiacenti sulla mappa corrisponde ad una somma del tipo



Meglio di mille parole

$$X\cdot F+\overline{X}\cdot F=(X+\overline{X})F=F\ .$$

Più in generale un gruppo di 2^m celle marcate ed adiacenti è rappresentabile dall'AND di (n–m) variabili, costituite dalle variabili con valore immutato in tutte le 2^m caselle, prese in forma negata se con valore 0 altrimenti prese in forma naturale. Un disegno, forse, è meglio di mille parole.

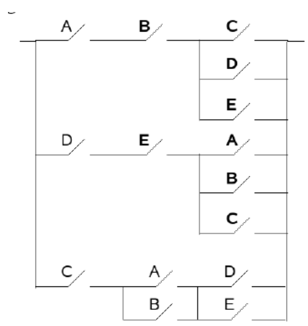
Con i 5 votanti {A,B,C,D,E} la tabella di verità diventa quella qui a destra. E ragionando nel medesimo modo si può, ad esempio, evitando di avere variabili negate e quindi con solo interruttori coordinati normalmente spenti, sintetizzare la seguente funzione booleana, non necessariamente minima:

A	B	C	D	E	Lampada ON
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Tabella di verità

f(A,B,C,D,E) = AB(C+D+E)+DE(A+B+C)+ C(A+B)(D+E)

cioè ci deve essere il voto dei primi due (A e B) e di almeno uno degli ultimi tre (C o D o E) oppure il voto degli ultimi due (D ed E) e di almeno uno dei primi tre (A o B o C) oppure il voto del terzo (C) con il voto di almeno uno dei primi due (A+B) e di almeno uno degli ultimi due (D+E). Lo schema con k=15 interruttori coordinati è a destra.



Schema con 15 interruttori

Con i 7 votanti {A,B,C,D,E,F,G} una possibile soluzione (di nuovo utilizzando solo interruttori coordinati normalmente spenti), non necessariamente minima, è rappresentabile con k=35 interruttori coordinati organizzati come indicato dalla funzione booleana seguente:

f(A,B,C,D,E,F)= ABCD +
(E+F+G)[AB(C+D)+CD(A+B)]+EFG(A+B+C+D) +
+[(A+C)(B+D) + (A+B)(C+D)][E(F+G)+FG]

Mi risparmio il disegno dello schema.

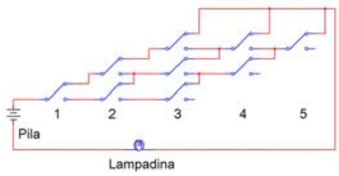
Millenium Bug

Dopo aver lavorato su una soluzione convenzionale che non sto a riportare[21], affronto il problema in modo alternativo, forse barando un po'.

Suppongo infatti di disporre non di semplici interruttori, ma di deviatori[22] che schematizzo come segue. Ho indicato i due contatti di uscita SI e NO, pronti per l'uso nel nostro marchingegno.

deviatore

Prendendo in esame il caso di 5 votanti, costruisco questa rete.



Il circuito

I deviatori posti sulla stessa verticale sono sincronizzati tra loro e corrispondono a un singolo votante, identificato dal numero sottostante.

Vediamo che ogni voto affermativo, nella geometria determinata dalla figura, fa salire di un "livello" in verticale e la votazione ha esito affermativo se c'è un percorso che permette di arrivare al terzo livello, cioè se ci sono almeno 3 consensi.

Considerando che 3 dei deviatori (quelli più in basso nelle colonne 3, 4 e 5) funzionano in realtà come semplici interruttori, ho usato in tutto 9 dispositivi e precisamente 6 deviatori e 3 interruttori. Emulando i deviatori con i due interruttori, dovrei in pratica utilizzare 15 interruttori, se volessi rispettare rigorosamente i requisiti problema.

Per inciso, nella migliore soluzione che avevo trovato provando a mettere insieme i semplici interruttori, servivano appunto 15 interruttori.

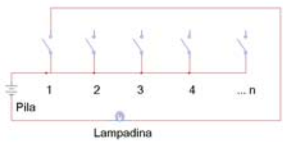
Nel caso del circuito necessario per la redazione attuale, la mia soluzione comporta l'uso di 4 dispositivi, contro i 5 richiesti dal circuito proposto nel testo del problema.

Per i già noti motivi, non sto a disegnare lo schema per 7 votanti e oltre, che si ricavano in modo abbastanza immediato.

In generale, per 2n–1 votanti e quindi maggioranza n ho bisogno di un numero di commutatori pari a n2, o se preferite, $n^2 - n$ deviatori e n interruttori.

Faccio notare che questa soluzione si può leggermente modificare per effettuare una votazione in cui il numero di votanti è a piacere pari o dispari ma si fissa una soglia di voti, anch'essa a piacere, per decidere per il sì o il no. Non vi svelo come si fa così al limite lo mettete come seguito al problema nel prossimo numero...

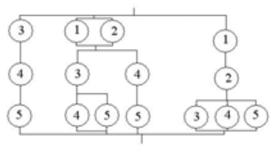
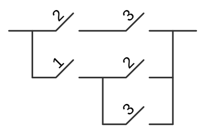
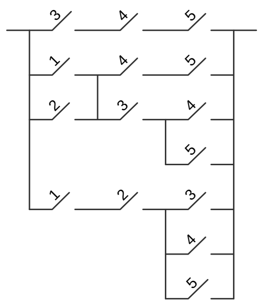
Chiudo proponendo al GC questo altro circuito che per generici n votanti consente di utilizzare SOLO (udite udite) n interruttori. Sono sicuro che questa sarà la soluzione da lui preferita, per la sua semplicità e economicità e non solo.



Lo schema preferito da Rudy…

Dimenticavo: chiaramente Rudy voterà con l'interruttore 1…

[21] visto che a quest'ora più di uno l'avrà già trovata e inviata. Inoltre (motivo vero) mi costringerebbe a disegnare troppi di schemini grafici che odio fare.

(...) pur avendo trovato una soluzione valida, non sono del tutto sicuro che sia la minima. Perlomeno, anche se fosse realmente quella che minimizza il numero di interruttori, non sono sicuro che sia corretto il mio modo di dimostrarlo (...)	***Cid*** 
Propongo questo metodo, che mi ha dato risultati incoraggianti, visto che a mano, sulle piccole reti, non sono riuscito a fare di meglio. In generale cerco un circuito CIR per minimizzare gli interruttori comandati da n pulsanti P_1, P_2, .. , P_n. Ogni pulsante quali comanda un proprio insieme di interruttori, dovendosi accendere la lampadina se almeno k pulsanti sono stati premuti ($0 \leq k \leq n$). Chiamo la funzione che costruisco CIR(k, (P_1, P_2, .. , P_n)) e la penso esprimibile con l'uso di due operatori SER e PAR per costruire nuovi circuiti mettendo rispettivamente in serie e in parallelo altri circuiti. In questo modo si possono costruire molti circuiti diversi, ma ahimè molti altri circuiti non si possono rappresentare in questo modo, ad esempio non il *Rude Sarchiapone*. Naturalmente considero SER e PAR associativi (quindi accettano più parametri) e commutativi: per ogni circuito x, y SER(SER(x,y),z)= SER(x,SER(y,z)) = SER(x,y,z) SER(x,y) = SER(y,x) PAR(PAR(x,y),z)= SER(x,PAR(y,z)) = PAR (x,y,z) PAR(x,y)=PAR(y,x) Il circuito per k = n è ovviamente costituto dal mettere in serie gli n interruttori, ciascuno dei quali corrisponde a un pulsante: CIR(n, (P_1, P_2, .. , P_n)) = SER(P_1, P_2, .. , P_n) Il circuito per k=1 è ovviamente costituto dal mettere in parallelo gli n interruttori, ciascuno dei quali corrisponde a un pulsante: CIR(1, (P_1, P_2, .. , P_n)) = PAR(P_1, P_2, .. , P_n) Per la definizione ricorsiva che segue mi serve anche la definizione del circuito per k = 0: CIR(0, (P_1, P_2, .. , P_n)) = COL dove COL è un semplice operatore di collegamento, un filo senza interruttori che dà sempre la lampadina accesa, cioè	***Franco57***  Caso 2 su 3  Caso 3 su 5

[22] in pratica è noto che si può costruire un deviatore con due comuni interruttori che siano sincronizzati tra loro: quando l'uno chiude, l'altro apre e viceversa. Così facendo la mia soluzione non sarebbe la più economica, dato che il numero di componenti tende a raddoppiare. Stando però alle quotazioni correnti sul mercato dei componenti elettrici, un deviatore costa al massimo un 25% più di un interruttore, per cui la condizione di minimo costo imposta dall'avaro autore del problema è pienamente rispettata!

per ogni circuito X, SER(COL, X) = X.

Inoltre mi serve la definizione del circuito con 1 interruttore:

CIR(1,(P)) = PAR(P) = P

Per 1< k <n divido l'insieme dei pulsanti in due sotto-insiemi il più possibile della stessa cardinalità, cioè per n pari n/2 entrambi, per n dispari, rispettivamente n/2–1/2 ed n/2+1/2:

$(P_1, P_2, .. , P_h)$, $(P_{h+1}, P_{k+2}, .. , P_n)$; h = int(n/2)

L'idea base è di riapplicare ricorsivamente la funzione di costruzione del circuito ai due sottoinsiemi più piccoli rispettivamente per i e per j interruttori, essendo i+j=k e, ovviamente i ≤ h e j ≤ n–h.

Metto in serie queste due sotto-reti, ottenendo quindi i benefici di una moltiplicazione di casi risolti. Poi tutti questi pezzi di circuito generati per diversi valori di i, j li devo mettere in parallelo per ottenere esattamente la funzione che voglio.

$$\mathrm{CIR}(k,(P_1,P_2,..,P_n)) = \underset{\substack{i+j=k\\ 0\le i\le h,\\ 0\le j\le n-h}}{PAR}\mathrm{SER}(\,\mathrm{CIR}(i,(P_1,P_2,..,P_h)),\ \mathrm{CIR}(j,(P_{h+1},P_{h+2},..,P_n))\,)$$

Da notare che la definizione data per k=1, cioè

$\mathrm{CIR}(1, (P_1, P_2, .. , P_n)) = \mathrm{PAR}(P_1, P_2, .. , P_n)$

in realtà non è necessaria perché discende direttamente dalla definizione generale. Infatti ad esempio:

CIR(1,(B,C))

=PAR(SER(CIR(1,(B)),CIR(0,(C))),SER(CIR(0,(B)),CIR(1,(C)))

= PAR(SER(B,LIN),SER(LIN,C) = PAR(B,C)

La lasciamo però perché è utile in pratica.

Ecco un esempio per calcolare la rete nel caso 2 su 3:

CIR(2,(1,2,3)) =

= PAR (SER(CIR(0,(1)) , CIR(2,(2,3))),

SER(CIR(1,(1)) , CIR(1,(2,3))))

= PAR(SER(2,3) , SER(1, PAR(2, 3)))

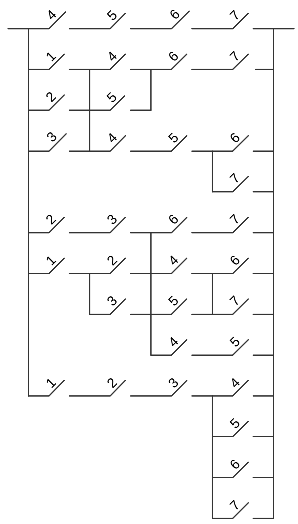
che richiede quindi 5 interruttori e graficamente si presenta come in figura.

Il circuito generato in questo modo per 3 su 5 richiede 15 interruttori.

Il circuito generato in questo modo per 4 su 7 richiede 35 interruttori.

Posto F(k,n) il numero di interruttori richiesto dalla funzione ricorsiva di generazione del circuito, abbiamo:

$$F(0,n) = 0$$



Caso 4 su 7

$$F(k,n)=\sum_{\substack{i+j=k\\ i\le \mathrm{int}(\frac{n}{2})\\ j\le \mathrm{int}(\frac{n+1}{2})}}\left(F(i,\mathrm{int}(\frac{n}{2}))+F(j,\mathrm{int}(\frac{n+1}{2}))\right)$$

Naturalmente abbiamo F(n,n) = F(1,n) = n

Si può vedere che se $k\le 2^m$, allora $F(k,2^m)=P_{k-1}(m)\cdot 2^m$ dove $P_k(x)$ è un polinomio di grado k.

Per k=2 si vede che $F(2,2^m) = m\cdot 2^m$

infatti è immediata la verifica per m=1 e per ipotesi induttiva se è vera per $n = 2^{m-1}$ allora

$F(2,2^m) = F(0,2^{m-1})+F(2,2^{m-1})+F(1,2^{m-1})+F(1,2^{m-1})+$

$+F(2,2^{m-1})+ F(0,2^{m-1}) =$

$= 2\cdot F(2,2^{m-1})+2\cdot F(1,2^{m-1}) = 2\cdot(m-1)\cdot 2^{m-1}+2\cdot 2^{m-1} =$

$= (m-1)\cdot 2^m+2^m = m\cdot 2^m$

per $k < 2^{m-1}$

$$F(k,2^m)=\sum_{i+j=k}(F(i,2^{m-1})+F(j,2^{m-1}))=\sum_{i+j=k}(P_{i-1}(m-1)\cdot 2^{m-1}+P_{j-1}(m-1)\cdot 2^{m-1})=$$
$$=2^{m-1}\cdot\sum_{i+j=k}(P_{i-1}(m-1)+P_{j-1}(m-1))=2^{m-1}\cdot 2\cdot\sum_{1\le i\le k}P_{i-1}(m-1)=2^m\cdot P_k(m)$$

Quindi F(k,n) dovrebbe essere dell'ordine $n\cdot(\log_2 n)^k$.

Un'altra interessante proprietà della funzione F che si può dimostrare è una forma di simmetria:

F(k,n)= F(n+1–k,n)

Ancora non so però se si possa calcolare F(k,2k–1).

Fabrizio

1) Si vuole determinare il circuito con il minimo numero di interruttori tale che sia possibile accendere una lampadina quando una maggioranza di almeno 3 persone su 5 votanti è d'accordo su una mozione.

La funzione booleana non ottima che soddisfa tale requisito è composta da $\binom{5}{3}=10$ termini additivi (or) ciascuno costituito dal prodotto (and) di 3 variabili (che rappresentano le decisioni dei votanti) scelte in modo tale che l'insieme di tutte le terne della funzione rappresenti tutti i modi in cui si possono scegliere le decisioni di 3 votanti su 5 senza badare all'ordine all'interno della singola terna:

$$Z=X_1\cdot X_2\cdot X_3+X_1\cdot X_2\cdot X_4+X_1\cdot X_2\cdot X_5+X_1\cdot X_3\cdot X_4+X_1\cdot X_3\cdot X_5+X_1\cdot X_4\cdot X_5 \quad (1)$$
$$+X_2\cdot X_3\cdot X_4+X_2\cdot X_3\cdot X_5+X_2\cdot X_4\cdot X_5+X_3\cdot X_4\cdot X_5$$

Operando in modo algebrico e mettendo in evidenza i vari termini in modo da ridurre il più possibile (sic!) il numero di elementi che figurano nella funzione si perviene alla funzione equivalente alla (1):

$$Z=X_1\cdot X_2\cdot(X_3+X_4+X_5)+X_4\cdot X_5\cdot(X_1+X_2+X_3)+X_3\cdot(X_4+X_5)\cdot(X_1+X_2) \quad (2)$$

il cui relativo schema circuitale utilizzante al più 14 interruttori è nella prima illustrazione.

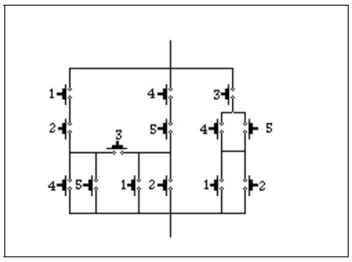


Illustrazione 1: Majority Voter con 5 variabili di ingresso

2) Si vuole determinare il circuito con il minimo numero di interruttori tale che sia possibile accendere una lampadina quando una maggioranza di almeno 4 persone su 7 votanti è d'accordo su una mozione.

La funzione booleana non ottima che soddisfa tale requisito è composta da $\binom{7}{4}=35$ termini additivi (or) ciascuno costituito dal prodotto (and) di 4 variabili (le decisioni dei votanti) scelte in modo tale che l'insieme di tutte le quaterne della funzione rappresenti tutti i modi in cui si possono scegliere le decisioni di 4 votanti su 7 senza badare all'ordine all'interno della singola quaterna:

$$Z=X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_4+X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_5+X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_6+X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_7+X_1\cdot X_2\cdot X_4\cdot X_5+\ldots$$

Operando in modo algebrico e mettendo in evidenza i vari termini in modo da ridurre il più possibile il numero di elementi che figurano nella funzione si perviene a:

$$\begin{aligned}Z=&(X_4\cdot(X_5+X_6+X_7)+X_5\cdot(X_6+X_7)+X_6\cdot X_7)\cdot(X_1\cdot(X_2+X_3)+X_2\cdot X_3)\\&+(X_4\cdot(X_5\cdot(X_6+X_7)+X_6\cdot X_7)\cdot(X_1+X_2+X_3))\\&+X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot(X_4+X_5+X_6+X_7)+X_5\cdot X_6\cdot X_7\cdot(X_1+X_2+X_3+X_4)\end{aligned}$$

il cui equivalente circuitale utilizzante al più 35 interruttori è nella seconda illustrazione.

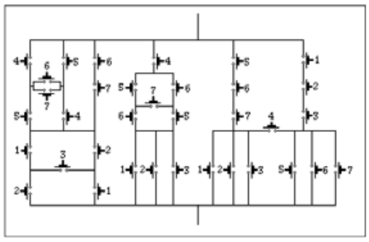


Illustrazione 2: Majority Voter con 7 variabili di ingresso

Abbiamo provato a dare spazio un po' a tutti, e non esiteremo a riprendere in mano questo problema, se se ne presentasse l'occasione.

4.1.2 (Quasi) Il compleanno di Fred

Riassumiamo anche qui il problema:

> *Le solite n pesti hanno una maglietta numerata da 1 a n. Disporle intorno ad un tavolo rotondo per massimizzare il numero totale di pasticcini da dividersi, sapendo che è calcolato come somma di tutti i prodotti del numero di maglietta di ogni peste con quello della sua peste di sinistra. Si sa inoltre che la soluzione permette ai teppisti di avere lo steso numero (intero) a testa. Qual è il numero dei pasticcini e delle pesti?*

Con, per buona misura, una seconda parte:

> *Come si dovrebbero disporre le stesse pesti per ottenere con le stesse regole il numero minore possibile di tartine al cavolfiore?*

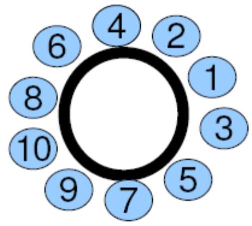
Tra le soluzioni ricevute, quelle di ***Husband***, ***Millenium Bug***, ***Cid***, ***Franco57***, ***Bobbin Threadbare***. Come sapete ci piace lasciar spazio ai nuovi solutori, e per questo per primo pubblichiamo la soluzione di ***Husband***, anche perché ha dato una buona giustificazione al suo soprannome:

> Mia moglie dice che è inutile provarci e che non c'è soluzione equa al problema: ci sarà sempre chi piangerà per il proprio numero di maglia e vorrà cambiarlo, ci sarà sempre il bulletto che picchierà il vicino per rubargli i suoi (parte o tutti) pasticcini o per rifilargli le tartine, ecc. ecc. ecc.
>
> Le ho detto: "Facciamo finta che i bambini siano dei bambolotti silenziosi e che tocca a noi sistemarli."
>
> Mi ha detto che andava bene e che solo in questa ipotesi potevo provarci.

Beh, ci è sembrato giusto. Vediamo la soluzione della prima parte:

Quale che sia il numero di partecipanti l'idea base è quella che di tenere vicini i numeri più alti in modo da sfruttare al massimo il loro effetto nelle moltiplicazioni.

E così n sarà seduto tra n–1 ed n–2. Poi n–3 si siederà vicino ad n–1 e n–4 vicino ad n–2, e così via tutti i numeri in ordine decrescente verranno disposti uno a destra ed uno a sinistra di n fino ad arrivare a 1 (vedi figura[23]). Con questa disposizione, quale che sia il valore di n, si ottengono il massimo dei pasticcini. Ovviamente il risultato è equivalente se l'ordine dei numeri è orario o antiorario.



7 *La figura di **Husband**.*

Adesso bisogna individuare il numero n che mi permette di ottenere un numero di pasticcini la cui divisione per n non dia alcun resto.

Il problema non prevede un numero minimo di bambini, ma mi sembra opportuno trascurare il numero 2 (per il quale avrei 2 bambini e 4 pasticcini totali con 2 pasticcini per ciascun bambino), che a rigore rappresenterebbe una soluzione del problema e andare avanti.

Per comodità ed evitare di fare molti disegni indicherò le posizioni con un elenco in cui il primo elemento coincide con l'ultimo, tale da avere una rappresentazione del tavolo.

Indico con n il numero di bambini e con np il numero di pasticcini.

n=3: 3 – 2 – 1– 3 np = **3x2** + 2x1 + 1x3 = 6 + 2 + 3 = 11

n=4: 3 – 4x2 – 1 – 3 np = **3x4** + **4x2** + 2x1 + 1x3 = 12 + 8 + 2 + 3 = 25

(rispetto a n=3 tolgo 3x2 e aggiungo 3x4 e 4x2 quindi aggiungo 14)

n=4: 3 – 4x2 – 1– 3 np = **3x4** + 4x2 + 2x1 + 1x3 = 12 + 8 + 2 + 3 = 25

n=5: 3 – 5x4x2 – 1– 3 np = **3x5** + **5x4** + 4x2 + 2x1 + 1x3 = 15 + 20 + 8 + 2 + 3 = 48

(rispetto a n=4 tolgo 3x4 e aggiungo 3x5 e 5x4 quindi aggiungo 23)

Ogni volta che n aumenta di 1 unità, il numero di pasticcini aumentano di $n^2–2$

Allora posso scrivere una regola per cui np= $\Sigma\, i^2 – 2n + 3$ con i che varia da 1 a n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
np	0	4	11	25	48	82	129	191	270	368	487	629	796	990	1.213	1.467	1.754	2.076	2.435	2.833
Pasticcini per bambino	0	2	3	6	9	13	18	23	30	36	44	52	61	70	80	91	103	115	128	141
Pasticcini di resto	0	0	2	1	3	4	3	7	0	8	3	5	3	10	13	11	3	6	3	13

Allora i Bambini sono 9 e i pasticcini 270. Ho costruito un foglio di calcolo con n che va fino a 50.000 e non ho trovato altri risultati. Però ho osservato una ricorsività sui resti, di cui proverò a scrivere qualcosa più tardi o domani.

E per la seconda parte:

Questa volta la strategia diventa quella di mettere vicini tra loro i numeri più alti e quelli più bassi per limitare l'effetto dei numeri alti e allora:

1 Passaggio: 1 – 9 – 2

2 Passaggio: 8 – 1 – 9 – 2 – 7

3 Passaggio: 3 – 8 – 1 – 9 – 2 – 7 – 4

4 Passaggio: 6 – 3 – 8 – 1 – 9 – 2 – 7 – 4 – 5 – 6

con nt = 6x3 + 3x8 + 8x1 + 1x9 + 9x2 + 2x7 + 7x4 + 4x5 + 5x6

[23] ***Husband*** aveva in realtà due figure con i numeri in ordine orario o antiorario (NdA).

nt = 18 + 24 + 8 + 9 + 18 + 14 + 28 + 20 + 30 = 169

Ma la cosa non va perché 169 non è multiplo di 9.

Devo arrivare a 161 che corrisponde a 19 tartine per ciascun bambino.

Per fare ciò basta partire dalla configurazione 169, invertire le seguenti coppie di numeri: 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5, 5 e 6, 6 e 7, 7 e 8 e si ottengono le seguenti combinazioni:

6 – 2 – 8 – 1 – 9 – 3 – 7 – 4 – 5 – 6

6 – 4 – 8 – 1 – 9 – 2 – 7 – 3 – 5 – 6

6 – 3 – 8 – 1 – 9 – 2 – 7 – 5 – 4 – 6

5 – 3 – 8 – 1 – 9 – 2 – 7 – 4 – 6 – 5

7 – 3 – 8 – 1 – 9 – 2 – 6 – 4 – 5 – 7

6 – 3 – 7 – 1 – 9 – 2 – 8 – 4 – 5 – 6

A questo punto ci piacerebbe pubblicare anche altre versioni, ma abbiamo lasciato così tanto spazio al primo problema che non ci stiamo più con i tempi... vi auguriamo un ottimo febbraio!

5. Quick & Dirty

Quanti zeri ci sono al fondo di 100! ?

6. Pagina 46

Consideriamo i seguenti numeri:

$$Z_1 = 9$$

$$Z_2 = 9^{Z_1} = (10-1)^{Z_1} = 10^{Z_1} - \binom{Z_1}{1} 10^{Z_1-1} + \ldots + \binom{Z_1}{1} 10 - 1$$

In cui gli interi non esplicitati nella somma sono ovviamente divisibili per 100.

Ora, $\binom{Z_1}{1} = 9$, e quindi le due cifre finali di Z_2 sono le stesse di $9 \cdot 10 - 1 = 89$.

Nello stesso modo,

$$\begin{aligned} Z_3 &= 9^{Z_2} = (10-1)^{Z_2} \\ &= 10^{Z_2} - \binom{Z_2}{1} 10^{Z_2-1} + \ldots - \binom{Z_2}{2} 10^2 + \binom{Z_2}{1} 10 - 1. \end{aligned}$$

Abbiamo visto che Z_2 termina con 89, e quindi (la sopralineatura indica che si tratta di numero unico):

$$\binom{Z_2}{2} = \frac{Z_2(Z_2-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\overline{\ldots 89} \cdot \overline{\ldots 88}}{2}$$

Deve essere un numero che termina con la cifra 6.

Quindi, le ultime tre cifre di Z_3 devono essere $-600 + 890 = 289$.

Abbiamo ora che:

$$\begin{aligned} Z_4 &= 9^{Z_{32}} = (10-1)^{Z_{32}} \\ &= 10^{Z_{32}} - \binom{Z_3}{1}10^{Z_3-1} + \ldots + \binom{Z_3}{3}10^3 - \binom{Z_3}{2}10^2 + \binom{Z_3}{1}10 - 1. \end{aligned}$$

Poiché le ultime cifre di Z_3 sono $\overline{\ldots 289}$, si ha:

$$\binom{Z_3}{2} = \frac{Z_3(Z_3-1)}{1\cdot 2} = \frac{\overline{\ldots 289}\cdot\overline{\ldots 288}}{2}$$

e quindi termina con 16, mentre

$$\binom{Z_3}{3} = \frac{Z_3(Z_3-1)(Z_3-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\overline{\ldots 289}\cdot\overline{\ldots 288}\cdot\overline{\ldots 287}}{6}$$

Termina con la cifra 4. Quindi possiamo ricavare che le quattro cifre finali di Z_4 sono $4000-1600+2890-1=5289$. Ora,

$$\begin{aligned} Z_5 &= 9^{Z_4} = (10-1)^{Z_4} \\ &= 10^{Z_4} - \binom{Z_4}{1}10^{Z_4-1} + \ldots - \binom{Z_4}{4}10^4 + \binom{Z_4}{3}10^3 - \binom{Z_4}{2}10^2 + \binom{Z_4}{1}10 - 1 \end{aligned}$$

Note le cifre finali di Z_4, si ha:

$$\binom{Z_4}{2} = \frac{Z_4(Z_4-1)}{1\cdot 2} = \frac{\overline{\ldots 5289}\cdot\overline{\ldots 5288}}{2}$$

che termina con 116;

$$\binom{Z_4}{3} = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\overline{\ldots 5289}\cdot\overline{\ldots 5288}\cdot\overline{\ldots 5287}}{6}$$

che termina con 64, e

$$\binom{Z_4}{4} = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)(Z_4-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{\overline{\ldots 5289}\cdot\overline{\ldots 5288}\cdot\overline{\ldots 5287}\cdot\overline{\ldots 5286}}{24}$$

che termina con la cifra 6. Quindi le ultime cinque cifre di Z_5 sono $-60000+64000-11600+52890-1=45289$. Siccome le quattro cifre finali di Z_5 coincidono con le quattro cifre finali di Z_4, si ha che le cinque cifre finali di $Z_6 = 9^{Z_5} = (10-1)^{Z_5}$ coincideranno con le cinque cifre finali di Z_5; esattamente nello stesso modo si può dimostrare che tutti i numeri della sequenza:

$$Z_5; Z_6 = 9^{Z_5}; Z_7 = 9^{Z_6}; \ldots; Z_{1000} = 9^{Z_{999}}; Z_{1001} = 9^{Z_{1000}}$$

terminano con le stesse cinque cifre; essendo $Z_{1001} = N$, si ha che le cifre finali del numero dato sono 45289.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Sangaku

Il sole sta dissipando la nebbia:
la ragazza sale i gradini del tempio,
si inchina e torna a casa. Sullo stipite, una tavoletta di legno.

La tavoletta lasciata dalla ragazza non è l'invocazione alla pioggia della figlia di un contadino o la preghiera di guarigione per un genitore malato; è un teorema di matematica.

La matematica sviluppata durante il periodo Edo in Giappone è la cosiddetta *wasan*; le sue origini si possono far risalire alla matematica cinese portata in Giappone quando Hideyoshi invase la penisola coreana; negli anni successivi, principalmente per opera di Takakazu Seki, la matematica cinese viene sviluppata arrivando a rispettabili livelli quali la soluzione di sistemi di equazioni.

Sono due, sostanzialmente, gli strumenti che accelerano lo sviluppo della matematica giapponese in questo periodo di isolamento: uno è l'*idai*, ossia l'abitudine di inserire problemi particolarmente difficili alla fine dei libri di *wasan*[24]; lo sviluppo di Seki all'algebra nasce, giustappunto, dal tentativo di risolvere un *idai*.

Il secondo strumento è più interessante dal nostro punto di vista: si tratta dei *sangaku*, letteralmente le "tavolette del tempio": quando qualcuno trovava una proprietà matematica interessante o riusciva a risolvere un problema, lo faceva incidere su una tavola di legno e lo dedicava ad un altare o a un tempio, i cui sacerdoti lo appendevano alle travi del soffitto.

Con l'era Meiji (1868-1912) e con l'apertura all'occidente, il *wasan* inizia il suo veloce declino, e i *sangaku* vengono dimenticati; inizia l'era della *yosan*, la matematica occidentale. Dalle registrazioni dei templi sappiamo che durante il periodo Edo furono offerte 2625 tavolette; oggi sono definiti Tesoro Nazionale in Giappone e accuratamente conservate, ma il *Catalogo Nazionale* registra solo trecento sopravvissuti, di cui buona parte è disponibile in rete[25]. L'origine di questi oggetti era comunque legata ad offerte votive; a scelta, potevate offrire una tavoletta o un cavallo, e sicuramente la tavoletta aveva un costo materiale minore.

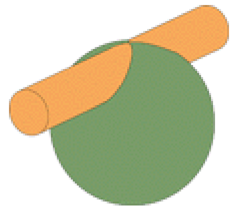
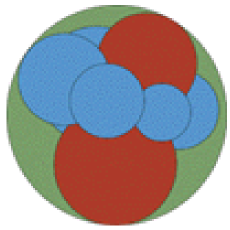
Per la maggior parte i *sangaku* trattano argomenti di geometria euclidea, ma i problemi trattati sono differenti da quelli che siamo abituati a vedere nella geometria *yosan*: cerchi ed ellissi inscritti l'uno nell'altro la fanno da padrone, unitamente a settori circolari (rappresentati come ventagli); alcuni dei problemi sono ragionevolmente semplici mentre altri sembrano quasi impossibili e risolubili solo attraverso il calcolo differenziale.

Infatti, nella maggior parte dei *sangaku*, vengono forniti solo il problema e il risultato, lasciandoci quindi nella completa ignoranza rispetto al metodo utilizzato per risolverlo: di seguito trovate due esempi, e la sfida è di risolverli senza utilizzare il calcolo differenziale[26].

[24] No, la soluzione non compariva nel numero successivo; quando un matematico giapponese pubblicava un libro, pubblicava al termine del libro la sua soluzione a qualche famoso *idai* e ne proponeva altri.

[25] Rudy (in rete) ne ha trovati duecentonovanta; solo le immagini, di traduzione evidentemente non se ne parla.

[26] "…e perché non li metti tra i problemi?" Semplice: ho la soluzione, ma è in *giapponese*. Anzi peggio, come vedremo tra breve.

Un cilindro intercetta una sfera in modo tale che la superficie esterna del cilindro è tangente all'interno della sfera; qual è la superficie della parte di cilindro contenuta nella sfera? (1825, luogo sconosciuto)	
Le due sfere rosse sono tangenti sia tra di loro che internamente alla sfera verde; le sfere blu, tutte di raggio diverso, formano un anello attorno al punto di tangenza delle due sfere rosse. Quante sfere blu ci sono, e come sono legati tra di loro i loro raggi? (1822, Prefettura di Kanagawa)	

Con l'epoca Meiji e la riapertura delle frontiere ai commerci e alla cultura occidentale, i metodi del *wasan* rischiavano di perdersi; fortunatamente, una trentina di anni fa, **Hidetoshi Fukagawa**, insegnante di scuola superiore ad Aichi, si imbattè in una citazione relativa ai *sangaku* e decise di approfondire il tema; l'impresa non era facile, in quanto tutti i lavori scientifici dell'epoca Edo erano scritti in *kambun*, una versione del giapponese più strettamente legata al cinese rispetto alla lingua moderna; quasi l'equivalente per noi occidentali del latino. Purtroppo all'epoca erano rimaste pochissime persone in grado di leggere agilmente il *kambun*, ma il Nostro non si è perso d'animo: lo ha studiato e oggi viene considerato il massimo esperto nel ramo: non solo, ma la pubblicazione da parte sua nel 1989 di un libro ha rilanciato l'uso dei *sangaku* in una versione moderna, come potete vedere da quelli raffigurati qui a fianco.

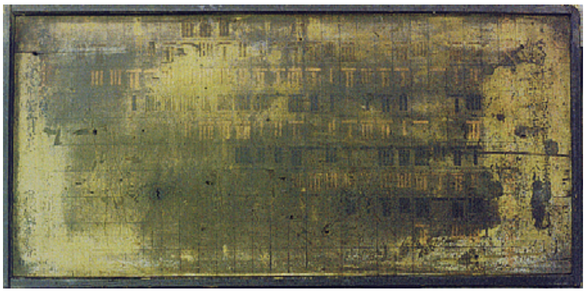
8 *Yosan Sangaku? – Prefettura di Yamanashi, Tempio di Takeda*


9 *Prefettura di Nara, Tempio di Koninji*

Ora, l'idea di risolvere un problema di geometria, inciderlo su una tavoletta e portarlo al tempio in un periodo storico turbolento come quello del Giappone nel periodo Edo tenderemo ad attribuirla ad un nobile che non abbia niente di meglio da fare e dotato di una robusta guardia del corpo, ma la cosa non è assolutamente vera: Fukagawa ha trovato un *sangaku* nella prefettura di Mie che porta come autore un *chonin*, mentre tra quelle che portano l'età dell'autore se ne trovano alcune di ragazze dodicenni; non solo, ma dai diari di Sen Sakuma risulta che questi, verso la fine del diciannovesimo secolo, abbia insegnato il *wasan* nella prefettura di Fukushima a più di duemila contadini.

Il guaio, con i *sangaku* e con il *wasan* in generale, è che come dicevamo altrove quella è una matematica tutta autarchica: i metodi utilizzati sono *i loro*, e capirli non sempre è facilissimo; ad esempio, qui di fianco trovate un *sangaku* dalla prefettura di Nara (tempio di Kohninji): si tratta della soluzione di una radice quadrata, ma sono alcuni anni che Rudy sta cercando di capire il metodo utilizzato; non solo, se fate un salto sino alla prefettura di Yamagata, nel tempio di Oga trovate (molto malconcia) la soluzione di un'equazione di secondo grado.

7.2 Il primo di Nagano

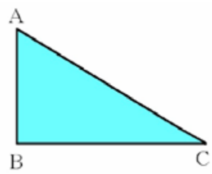


10 *Questa è più dura (Prefettura di Yamagata, tempio di Oga)*

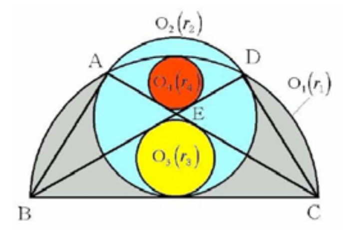
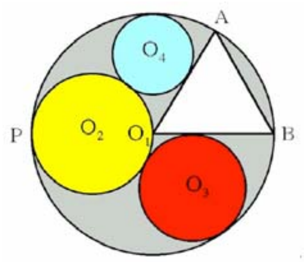
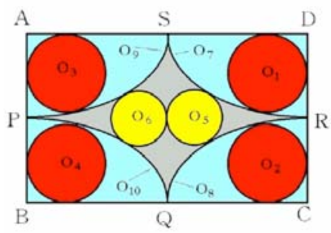
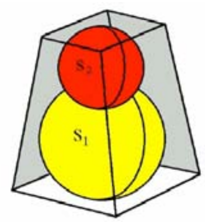
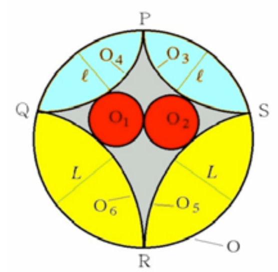
E adesso, chiuso il discorso teorico, avrete probabilmente intenzione di misurarvi con il *wasan*. Siamo riusciti a trovare alcuni *sangaku* della prefettura di Nagano *completi di soluzione*. Per questo tipo di problemi riteniamo imprescindibile la presentazione dell'originale, nella speranza che la nostra linotype non si arrabbi per la necessità dell'alta definizione. Fateci sapere se vi interessano, le altre tavolette potrebbero diventare un buon *Summer Contest*[27].

11 *Il primo sangaku di Nagano*

Un'ultima nota: se volete sbirciare la soluzione, il primo è quello sulla *destra*.

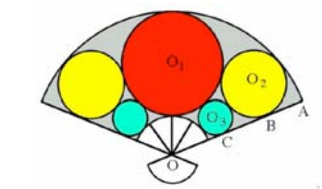
Il triangolo ABC è rettangolo in B, con $AB \times BC = a$ e $AC \times BC = b$. Trovate AB in funzione di a e b.	

[27] Per chi si trovasse a passare da quelle parti, in cambio della promessa di un *reportage* siamo disposti a fornire ulteriori dettagli sulla loro posizione. E, se ne trovate qualcun altro fuori Nagano *completo di soluzione*, potremmo addirittura pubblicarvelo.

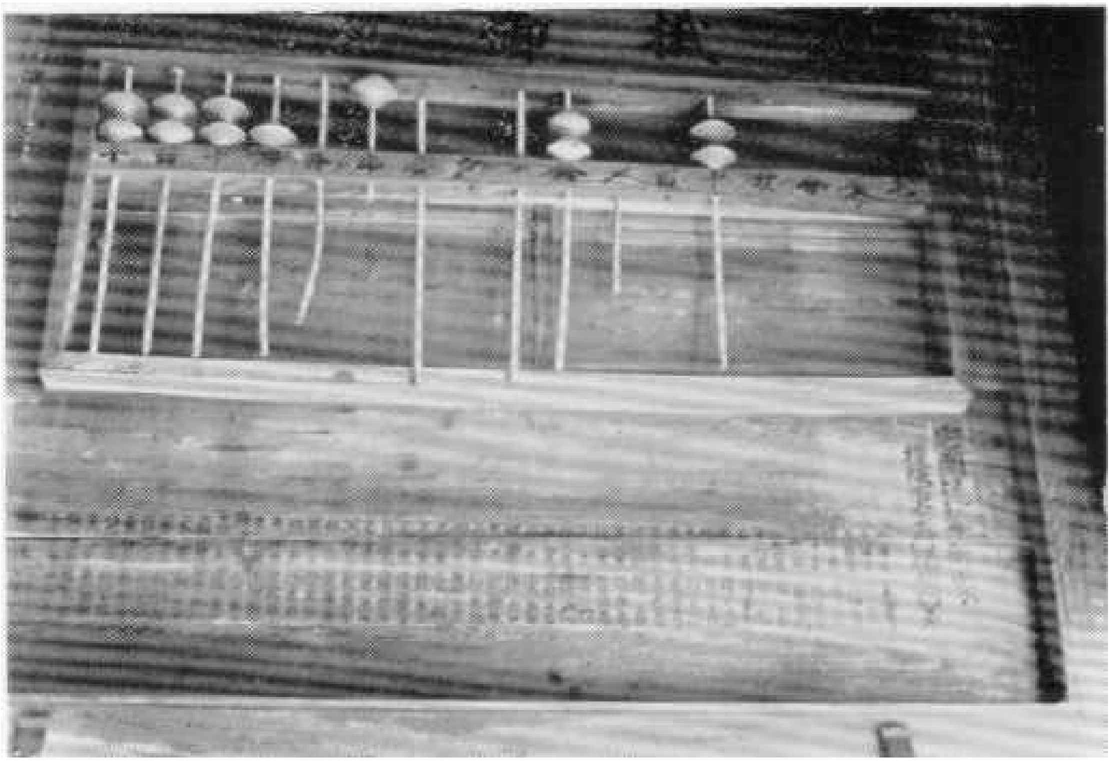
BC è il diametro del semicerchio $O_1(r_1)$, *A* e *D* sono sul semicerchio O_1. *AB* e *CD* sono le tangenti in *A* e in *D* al cerchio $O_2(r_2)$, che è anche tangente a *BC*. Il cerchio $O_3(r_3)$ è inscritto nel triangolo *BCE*, e il cerchio $O_4(r_4)$ è tangente ad *AC* e a *BD*. O_4 è tangente a O_1 internamente. Se gli angoli *ABC* e *BCD* valgono 60°, trovate r_2 in funzione di r_1.	
$O_1(r_1)$è un cerchio di diametro *BP* e di centro O_1; i cerchi $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$ e $O_4(r_4)$, tangenti l'uno con l'altro, sono internamente tangenti a $O_1(r_1)$. Il triangolo ABO_1 è equilatero; trovate r_3 in funzione di r_2.	
ABCD è un rettangolo in cui $AD = 2AB = 2a$; *P*, *Q*, *R* e *S* sono i punti medi dei lati. $O_1(r)$, $O_2(r)$, $O_3(r)$ e $O_4(r)$ sono tangenti internamente ai lati del rettangolo e a $O_7(r_2)$, $O_8(r_2)$, $O_9(r_2)$ e $O_{10}(r_2)$; questi ultimi sono parti di cerchi di ugual raggio. *P* e *R* sono i punti di tangenza tra $[O_9(r_2), O_{10}(r_2)]$ e $[O_7(r_2), O_8(r_2)]$ rispettivamente. $O_5(r_1)$ e $O_6(r_1)$ sono esternamente tangenti tra di loro e a $O_7(r)$, $O_8(r)$, $O_9(r)$ e $O_{10}(r)$, come mostrato[28]. Trovate *r* in funzione di *a*.	
Le sfere $S_1(r_1)$ e $S_2(r_2)$ sono tangenti [*esternamente*] l'una all'altra e internamente a tutte le facce [*e basi*] della piramide quadrangolare troncata. I lati delle basi superiore e inferiore sono, rispettivamente, *a* e *b*. Trovate r_2 in funzione di *b*	
P, *Q*, *R* e *S* giacciono sulla circonferenza $O(r)$ e sono i punti di tangenza di $O_3(r_2)$, $O_4(r_2)$, $O_5(r_3)$ e $O_6(r_3)$, come mostrato. $O_1(r_1)$ e $O_2(r_1)$ sono tangenti tra loro e sono tangenti a $O_3(r_2)$, $O_4(r_2)$, $O_5(r_3)$ e $O_6(r_3)$, come mostrato. Trovate r_1 in funzione di ℓ e *L*.	

[28] Abbiamo mantenuto la notazione presente nel *sangaku*, ma secondo noi qui ci sono dei problemi con i pedici, "2" in particolare.

La figura è simmetrica. $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ e $O_3(r_3)$ giacciono all'interno dei cerchi centrati in *O*, come mostrato; sono tangenti esternamente e inoltre $O_2(r_2)$ e $O_3(r_3)$ sono tangenti ad $AO = a$. Trovate r_2 in funzione di *a* e di r_1.



Tutti conoscono il "*Noli tangere circulos meos!*" detto da Archimede. Ad un oscuro matematico di Osaka negli anni Quaranta le bombe non hanno lasciato il tempo di dirlo, ma il suo *soroban* è diventato un *sangaku*, parte del Tesoro Nazionale giapponese.



12 *Prefettura di Osaka, tempio di Kumata*

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms