Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 092 - Settembre 2006 - Anno Ottavo

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com
RM 091 ha diffuso 1089 copie e il 05/09/2006 per Google eravamo in 27600 pagine.

Scarsamente convinto dell'irrealizzabilità di alcune opere di M.C. Escher, ***Jos Leys*** ha deciso di riprodurne alcune con il Lego; questa, tratta da *Ascending and Descending* è, secondo noi, la migliore. Fortunatamente per il mondo, si occupa di programmazione e non di architettura.

1. Dalla Cella all'Infinito (via Rete)

Why does thou gaze upon the sky?
O that I were yon spangled sphere!
Then every star should be an eye
To wander o'er thy beauties here.
(Sir Thomas More)

Siamo pezzi di materia stellare raffreddatasi per accidente,
pezzi di stella andata a male.
(Sir Arthur Eddington)

Quanto è lungo un millennio?

La domanda è quasi inesistente, autoevidente, lapalissiana. Forse, più semplicemente, è domanda stupida. Un millennio dura – per definizione – mille anni esatti. Non un secondo di più, non uno di meno. Ciò non di meno, spesso accade che anche nelle cose estremamente semplici ed ovvie si possa celare qualche considerazione non del tutto banale. Ad esempio, si potrebbe discutere a lungo sul concetto di "anno", millesimo e unità cardinale del millennio in questione: come tutte le unità di misura moderne, la definizione di anno è assai meno evidente di quel che può sembrare a prima vista. I padri latini chiamavano "annus" il "giro", il "circolo"[1], e in questa maniera si riferivano al giro che il Sole completava lungo i segni dello Zodiaco. Ma oggi è necessario distinguere bene tra anno siderale, anno tropico, anno civile; per non parlare del fatto che ormai l'anno è sostanzialmente definito come un multiplo del secondo (e pertanto potrebbe anche disinteressarsi allegramente dei moti dei corpi celesti), e soprattutto che si sa ormai bene che è la Terra a girare attorno al Sole, e non viceversa.

Ma anche questa verità è un po' meno vera, al giorno d'oggi: la crisi dei riferimenti assoluti ha reso decisamente complicato stabilire con settecentesca sicurezza quale sia l'astro fermo e fisso nel cielo e quale quello che servilmente ruota attorno al primo. Si è ormai fatta strada una certa democrazia dei sistemi di riferimento, e il moderno copernicanesimo del terzo millennio è quello che certo continua a far dire ai propri figli piccoli: "Sì, la Terra gira attorno al Sole", ma con la riserva mentale di spiegare in tempi migliori che, alla fin fine, non è impossibile (anche se generalmente meno semplice) decidere di scegliere come fissa la Terra, e tornare a considerare il Sole in moto attorno ad essa.

Da un punto di vista più vicino alla biologia che all'astronomia, un millennio può essere invece letto come l'equivalente di un certo numero di generazioni. A differenza delle metriche scientifiche, che hanno talvolta il difetto di essere eccessivamente pignole[2], ma anche la virtuosa contropartita di essere sempre ben definite, un termine come "generazione" è assai variabile quando viene arbitrariamente usato come misura di tempo. In molti casi si tende a considerare equivalente ad una generazione il periodo di tempo grosso modo pari a venticinque anni[3]. Questo renderebbe il millennio equivalente a circa quaranta generazioni, e consentirebbe di mantenere una certa armonia nel ritmo della vita umana: supponendo infatti che la durata media della vita sia circa pari a settantacinque anni[4], la generazione di venticinque ben scandirebbe il ritmo vitale: in accordo con questa suddivisione il primo terzo della vita, da zero a venticinque anni, è il

[1] E ci sono almeno altre due o tre parole di uso comune che derivano direttamente dalla medesime radice. La più frequente è forse "anello" che significa proprio "piccolo cerchio".

[2] Provate a ricordarvi esattamente come è definito il secondo, se ne siete capaci…

[3] Inutile dire che il termine "generazione" senza alcuna qualifica ulteriore si intende riferito come "generazione umana".

[4] Valore accettabile nelle parti opulente del mondo di questo inizio di Terzo Millennio. Valore decisamente ottimistico, invece, in quasi tutti gli altri luoghi e tempi del pianeta.

periodo caratterizzato dallo status di generazione più "recente", che potremmo chiamare semplicemente "status di figlio". Dai venticinque ai cinquanta anni di età ci si troverebbe invece nella generazione di mezzo ("status di genitore"), mentre l'ultimo terzo, quello che va dal mezzo secolo ai settantacinque anni di età, dovrebbe essere quello allietato dalla presenza dei nipotini ("status di nonno"). Quando (e se) si arriva infine ad essere bisnonni, occorre incominciare seriamente a pensare al trapasso, che non dovrebbe – almeno statisticamente parlando – essere ormai troppo distante.

Ma le generazioni sono quanto più variabile, nell'ambito del regno animale; in fondo, l'uomo è un animale assai longevo e ragionevolmente tardivo per quel che riguarda la maturità sessuale; in altre parole, entrambi i fattori che regolamentano la durata generazionale sono numericamente elevati nell'essere umano.

Drosophila Melanogaster

Altri animali hanno una vita assai più breve e una precocissima maturità sessuale, e questo basta a renderli trisavoli nel giro di qualche mese. Si pensi ai celebri conigli che ispirarono una delle primissime applicazioni della serie di Fibonacci, tanto per fornire un esempio dotato di pedigree matematico; ma in realtà non è davvero difficile trovare esempi ancora più eclatanti. L'insetto prediletto dai biologi è probabilmente la Drosofila Melanogaster, nota anche con il meno pomposo nome di "moscerino della frutta": grazie al suo corredo cromosomico particolarmente semplice[5] e al brevissimo tempo necessario per rendersi abile alla riproduzione, questo dittero è diventato uno dei frequentatori più assidui dei laboratori di biologia. Senza neppure dover esaurire la pazienza di una vita intera sui vetrini del microscopio, un biologo può facilmente seguire ben più di quaranta generazioni (un millennio!) e verificare serenamente le evoluzioni biologiche della specie[6].

Per noi umani, quaranta generazioni sono decisamente più complesse da seguire e valutare; ma questo è vero essenzialmente perché sono soprattutto gli aspetti culturali ad interessarci, quando parliamo dell'Uomo, e solo marginalmente – con le sacre eccezioni degli specialisti del campo – ci interessiamo alle variazioni e alle evoluzioni del genotipo e fenotipo dell'Homo Sapiens Sapiens. E allora, da questo punto di vista, mille anni sono un intervallo di tempo tutt'altro che trascurabile.

---

[5] Solo otto cromosomi. La pancia nera che le regala il nome scientifico, invece, conta pochissimo ai fini sperimentali.

[6] Per gli amanti dei dati numerici precisi, è bene considerare che il tempo di sviluppo di una Drosofila varia largamente in funzione della temperatura ambientale, come sempre accade per gli animali a sangue freddo. Il tempo di sviluppo più rapido, dalle uova alla forma adulta, si ha a 28° centigradi ed è pari ad una settimana. Tempo che comunque varia molto, fino a toccare i cinquanta giorni nel caso di temperatura ambientale attorno ai 12°. Mediamente, il tempo di generazione del moscerino della frutta viene considerato pari a due settimane, anche se la femmina diventa ricettiva al corteggiamento dei maschi già 12 ore dopo il raggiungimento della forma adulta. Attenendoci a questi valori, le quaranta generazioni del millennio umano si liquidano in poco più di un anno e mezzo, e una onesta carriera da biologo lunga una trentina d'anni riesce a coprire delle evoluzioni biologiche significative.

Il residuo della supernova del 1006

L'anno di grazia 1006 deve essere stato abbastanza singolare, quantomeno se comparato ai suoi vicini di calendario. Mille anni fa esatti, probabilmente nella notte compresa tra l'ultimo giorno di Aprile e il primo giorno di Maggio, si accese infatti la stella più luminosa della storia. La supernova del 1006 esplose nella costellazione del Lupo, non troppo distante dalla più famosa costellazione del Centauro: e di conseguenza non brillò alta e gloriosa nei cieli d'Europa, perchè alle nostre latitudini, la brillantissima "stella ospite", come venivano chiamate nell'antichità, rimase visibile solo nei pressi dell'orizzonte senza mai sfolgorare allo zenit. Ma sono state proprio le osservazioni registrate dai monaci del monastero di San Gallo, in Svizzera, a consentire agli astronomi di ben posizionare, e di conseguenza valutare, le caratteristiche della tremenda esplosione stellare. Altre cronache riportano infatti commenti sulla stella del 1006: dall'Egitto all'Iraq e al Giappone, fino ai dati più completi sulla supernova lasciati dagli astronomi cinesi. Zhou Keming era probabilmente più un astrologo di corte che un astronomo nel senso moderno del termine, ma le sue descrizioni sulle dimensioni e sul colore della stella sono probabilmente le migliori giunte a noi.

La sua luminosità è valutata pari a circa metà di quella della Luna piena: per dirla con le parole di Frank Winkler[7], l'astronomo che ha condotto diversi studi sulla supernova del Lupo, "nella primavera del 1006 la gente probabilmente era in grado di leggere manoscritti in piena notte, grazie alla sua luce"[8].

Così come questo 2006 è assai vicino – su tempi storici – all'anno Duemila, così il 1006 è stato vicino, prossimo, adiacente quasi all'Anno Mille. Molto si è discusso su quanto di realmente drammatico ci sia poi stato nell'approssimarsi dello scadere del primo millennio dell'era cristiana. Gli storici non negano certo l'importanza "apocalittica" della scadenza, ma ultimamente si tende anche a ridimensionare il senso di tragedia millenaristica che spesso ha dipinto a tinte fosche questo particolarissimo periodo storico. Certo, da una parte esistono fonti che raccontano di come, in un'epoca nella quale il tema religioso era senz'altro quello più importante - se non l'unico – di tutta la vita culturale e sociale del popolo, un diffuso senso di panico e di predisposizione al giudizio finale pervadesse l'avvicinarsi dell'Anno Mille, con innumerevoli episodi di persone che

[7] Winkler è l'astronomo che in tempi recenti (dal 1987 al 2002) ha cercato di determinare la velocità angolare del tenue residuo osservabile dell'esplosione della supernova del Lupo. Tale residuo – per quanto assai meno spettacolare di quello della supernova del 1054, che ha originato la famosissima e bellissima Crab Nebula nella costellazione del Toro – sembra espandersi alla velocità di 0,28 secondi d'arco all'anno. La velocità lineare di espansione (2900 Km/s) era già nota per via spettroscopica, e avendo sia la velocità angolare che quella lineare è facile risalire alla distanza (circa 7100 anni luce) e da questa e dalle considerazioni storiche si riesce a valutare con buona approssimazione la magnitudine della stella più brillante della storia: qualcosa compreso tra -7 e -8, come dire una dozzina di volte più luminosa di Venere (le magnitudini negative sono assai più brillanti di quelle positive: gli astronomi sono gente originale). C'è la possibilità che alcuni filamenti di materia stellare nella costellazione della Vela si possano classificare anch'essi come residui di supernova: questi si trovano ad appena 1500 anni luce, e se fosse confermata, l'ipotesi che si potrebbe profilare è quella di una "stella ospite" di magnitudine -10, pari a quella della Luna piena. Ma, anche se così fosse, quella del Lupo rimarrebbe la stella più brillante della storia perché quella della Vela sarebbe in ogni caso stella non storica ma preistorica, essendo esplosa circa dodici millenni fa.

[8] Della supernova del 1006 (e un po' anche di quella del 1054) abbiamo parlato brevemente anche in "La prostituta del Diavolo", compleanno dedicato a Ostrogradski. (RM56, Settembre 2003). Allora non sapevamo ancora (ma per nostra colpa, non perché non fosse già noto) che i monaci benedettini di San Gallo avevano registrato l'osservazione della supernova, e dichiaravamo che nessuna traccia scritta delle supernove del 1006 e 1054 fosse rimasta in Occidente.

donavano ogni avere alla chiesa, si prostravano in penitenza e limitavano ogni attività alla pura attesa della fine del mondo. D'altra parte, non sembrano però così rari neanche i documenti che parlano di lasciti, progetti, organizzazioni che sostanzialmente proiettavano i loro intenti "oltre" lo scadere del millennio. È insomma possibile che qualche frammento di razionalità fosse ancora acceso; in ogni caso, basta sfogliare una qualsiasi cronologia per constatare quanto siano scarse le notizie – e forse anche gli eventi - di quel periodo in cui la Storia sembrò cedere al sonno: se si tralascia l'attacco di Srivijaya (regno di Sumatra) contro Giava, il 1006 lascia il segno solo perchè Rodolfo III, re d'Arles privo di figli, nomina suo erede l'imperatore Enrico II (quello che un paio d'anni prima aveva fatto fuori[9] Arduino d'Ivrea, re d'Italia). Eventi di importanza non trascendente: è insomma lecito immaginare che la Supernova del Lupo, per quanto assolutamente eccezionale dal punto di vista astronomico e maestosa dal punto di vista spettacolare, sia stata vista e vissuta in una sorta di indifferenza priva di curiosità o, peggio, in una sorta di terrore superstizioso. Non meno significativo è il fatto che, in Occidente, la sola istituzione che abbia ritenuto opportuno tenere traccia dell'evento fosse un monastero.

Per quanti sforzi si facciano, è davvero difficile riuscire a immedesimarsi appieno nel ritmo e nella visione del mondo di quel periodo. Per quanto si siano versati interi fiumi d'inchiostro allo scopo di mostrare che il Medioevo non fu poi così "buio" come una certa storiografia illuministica tendeva a dipingerlo, resta il fatto che nelle oscure notti dell'estate del 1006 erano probabilmente davvero in pochi ad essere realmente interessati a quella strepitosa nuova luce accesa nel cielo. Tutta la cultura occidentale era a malapena salvaguardata dai copisti dei monasteri: e fa quasi tenerezza immaginare il flebile alito della conoscenza dell'intero continente europeo affidato ad un paziente lavoro meccanico, ripetitivo, volutamente privo di valore aggiunto culturale. È il periodo in cui il lavoro dei monaci è più simile che mai a quello d'una lenta macchina fotocopiatrice. Non sarà sempre così: proprio perché ogni piccola luce culturale sopravvive a stento solo nei monasteri, per i secoli a venire la grandissima parte degli studiosi – anche quelli creativi e originali – proverrà proprio da quegli stessi monasteri. È impressionante registrare quanti siano i nomi famosi delle protoscienze che vestivano un saio, per tutta la durata del Medioevo e anche oltre, fino al XVII secolo e perfino, in parte, ai giorni nostri. Tra i molti nomi citabili, basti ricordare quello di Guglielmo da Occam (forma latinizzata di Ockham, cittadina del Surrey), che pur lottando acremente nelle dispute religiose da diligente francescano contro le ardite posizioni di papa Giovanni XXII sulla povertà di Cristo[10], trovò il tempo di formalizzare quella posizione di economia scientifica ("Entia non sunt multiplicanda praeter necessitate", non si devono introdurre nuove entità nel discorso senza una palese necessità) che è ancora comandamento validissimo nelle dimostrazioni scientifiche, ed è noto proprio con il nome di "rasoio di Occam".

Ma i nomi sono davvero moltissimi, così come gli ordini monastici occidentali, nel labirinto dei quali è davvero difficile orientarsi, almeno per i non addetti ai lavori. Si parte dai primi eremiti del V secolo, si passa attraverso la regola di San Benedetto, e si va poi avanti fino alla rivoluzione francescana: benedettini, francescani, cluniacensi, cistercensi, minori, ospitalieri, teutonici, templari, vallombrosani, brasiliani, certosini, clarisse, camaldolesi, carmelitani, paolini, trappisti[11], e i non nominati sono senz'altro molto più numerosi dei citati.

---

[9] Nel senso di "eliminato politicamente", non fisicamente. Il celebre marchese d'Ivrea morirà solo nel 1015, nell'abbazia di Fruttuaria.

[10] Disputa che fa da sfondo storico a tutta la trama de "Il Nome della Rosa" di Umberto Eco, in cui il nostro Guglielmo (da Occam) viene spesso citato come amico del protagonista Guglielmo (da Baskerville). Visto che questo è uno dei pochissimi libri italiani stampati in più di un milione di copie, riteniamo superfluo aggiungere ulteriori commenti…

[11] Noi di RM potremmo anche raccontarvi la storia misconosciuta dei frappisti, ordine che ha più o meno la stessa consistenza reale di Bourbaki. Ma è una storia un po' lunga, e, come siamo soliti dire, *hanc marginis exiguitas*…

Un ordine non troppo celebre è di derivazione francescana: così come i seguaci di Francesco d'Assisi venivano chiamati "minori" (quando non direttamente, con un po' di malcelato disprezzo, "fraticelli") per una sorta di modestia derivata dal loro essere ordine mendicante e d'ispirazione ben diversa da quella delle ricche abbazie medievali: coloro tra i francescani che non si contentavano della riduzione portata dal nome che è di per sé stesso un comparativo, decisero di passare direttamente al superlativo della modestia e fondarono i "Minimi". In realtà, il fondatore dell'Ordine dei Minimi è San Francesco da Paola, che stabilì nel 1436 la regola dell'ordine (che venne poi approvata in forma definitiva da papa Giulio II nel 1506), ma il senso del nome è davvero quello riportato: l'idea è quella di porsi come gli "ultimi", e sulla base di questa "modestia costituzionale" la

regola impone una costante disciplina e povertà sia nelle vesti che nell'alimentazione (una delle caratteristiche dell'ordine è, ad esempio, quella di mangiare sempre "cibo quaresimale", il che implica una dieta particolarmente povera e virtualmente priva di carne) e il costante dedicarsi alla preghiera, alla meditazione e allo studio. Nel luglio del 1611, entrò a far parte dei Minimi uno dei matematici migliori del diciassettesimo secolo: Marin Mersenne. Nato ad Oizé l'otto Settembre 1588 da famiglia povera e umile, Marin mostrò fin da bambino una elevatissima predisposizione allo studio, al punto che i genitori, nonostante la disastrosa situazione finanziaria, fecero in modo di fargli frequentare una scuola. Seguì pertanto le lezioni del Collège du Mans fino ai sedici anni, e passò poi alla scuola gesuita di La Fleche, che era una delle poche che accoglievano studenti meritevoli a prescindere dalle condizioni economiche; scuola che ebbe tra i suoi allievi anche Descartes. Completò poi i suoi studi a Parigi: durante i viaggi verso la capitale, Mersenne ricevette ospitalità da un convento di Minimi, e vi si trovò così bene che fu proprio a quest'ordine che si rivolse quando optò definitivamente per la vita monastica. Per quanto riguarda gli aspetti secolari della vita di Marin Mersenne, non c'è molto altro da aggiungere: in breve raggiunse il titolo di "superiore" nel suo convento di Place Royal a Parigi, e qui rimase per tutta la vita, fino alla morte che lo colse una settimana esatta prima del suo sessantesimo compleanno. Per l'intera durata della sua vita adulta, Mersenne si interessò di matematica: i suoi confratelli se ne accorsero ben presto, ed essendo lo studio uno dei cardini della regola dell'ordine, lo lasciarono serenamente dedicarsi ai suoi teoremi e alle sue congetture. Del resto, quantomeno dal punto di vista religioso la loro fiducia era ben riposta, visto che pur concentrandosi nello studio delle curve[12] e dei numeri, Marin non dimenticò di pubblicare anche testi pienamente religiosi come "*L'usage de la raison*" e "*L'analyse de la vie spirituelle*", dove – come i titoli espliciti già lasciano intuire, si dedica a fustigare i costumi atei e scettici che già prosperavano in Francia durante i suoi tempi. Per ragioni analoghe, anche se dirette questa volta soprattutto contro la superstizione e la magia in cui spesso cadevano persino i suoi colleghi monaci, pubblicò anche le "*Quaestiones celeberrime in genesim*". L'evoluzione di questo suo scritto è abbastanza curiosa: fu a causa sua che Mersenne conobbe Gassendi[13], che di lì a breve divenne il suo più grande amico e confidente; e nel contempo, fu proprio grazie alla lotta contro i maghi e gli stregoni che Mersenne inizialmente avversò fortemente Galileo, salvo poi ricredersi totalmente, rivalutarlo e abbracciare perfino il

[12] Fu lui, sembra, a scoprire la cicloide.

[13] Pierre Gassend (1592-1655), latinizzato in Gassendi, fu scienziato e filosofo nonché uno dei maggiori critici di Descartes (più che di Cartesio, era critico nei confronti del "Metodo"). Obiezioni che probabilmente derivavano dal fatto che Gassendi stesso era sacerdote, ed era turbato dal metodo razionalista di Cartesio. Il tema principale della critica gassendiana parte proprio dal concetto che Descartes introduce di "evidenza"; Gassendi afferma che Dio non è "evidente" nel senso cartesiano del termine, ma non per questo è meno vero o importante. Da vecchi e noiosi razionalisti quali ci riteniamo, non possiamo non respingere l'argomento sostanzialmente teologico di Gassendi, ma non possiamo neanche fare a meno di riconoscere che la definizione della parola "evidenza" è decisamente sdrucciolevole, sia in matematica che nel discorso comune.

copernicanesimo, cosa che non doveva essere troppo facile per un religioso cattolico del Seicento.

L'interesse verso le scienze non scemò mai durante la sua vita. Per quanto fosse essenzialmente un matematico, Mersenne si dimostrò aperto verso ogni aspetto della scienza, della filosofia o – per dirla con una terminologia un po' più adatta ai suoi tempi, alla "Filosofia Naturale" di newtoniana memoria. Uno dei suoi libri più famosi è quello che forse meglio rende merito al suo autore, perché contiene un'analisi scientifica pulita, serena e corretta di un fenomeno che è comunque parte della sfera emotiva dell'uomo.

Nel suo *"L'Harmonie Universelle"* Mersenne per primo analizza la matematica e la fisica delle corde vibranti. È però evidente anche dal titolo che il tentativo dello scienziato è quello di ritrovare una sorta di armonia trascendente attraverso le leggi numeriche dell'armonia, non a caso definita "universale".

Più ancora di queste sue ricerche a largo raggio, a caratterizzare il monaco francese è la sua predisposizione ai contatti con scienziati, filosofi, e cultori della conoscenza in generale. Pur non muovendosi molto dal suo convento (anche se comunque compì dei viaggi in Olanda e in Provenza, prevalentemente a scopo terapeutico), Mersenne riuscì a porsi come polo d'attrazione di un gruppo di eclatanti personalità: rimase in continuo contatto epistolare con Huygens e Galileo, di cui incoraggiò la pubblicazione delle opere in francese; ma i suoi corrispondenti erano moltissimi, e rappresentano un'ottima sintesi della cultura scientifica europea della prima metà del XVII secolo. Fermat, Pell, Torricelli; di tutti si trovarono lettere nella cella di Mersenne, dopo la sua morte. E molti contatti vennero invece tenuti di persona: fin dal 1623 cominciò ad assumere, più o meno consapevolmente, il ruolo di "concentratore" di conoscenza scientifica, attraverso i suoi innumerevoli contatti, che arrivavano da lontanissimo per incontrarlo nella cella del suo convento parigino. Oltre ai già citati, abbiamo tra i suoi regolari visitatori Roberval, Hobbes, Etienne e Blaise Pascal, e molti altri ancora. Da quegli "incontri della cella", che i suoi amici chiamavano confidenzialmente *"Academie Mersenne"* nasce la *Academie Parisiensis,* che è forse eccessivo definire progenitrice dell'Accademia di Francia, ma che senz'altro ne ha costituito un glorioso precedente.

Nel descrivere i monaci amanuensi che lentamente ricopiavano i manoscritti classici per perpetuarne le pagine, siamo ricorsi al paragone un po' ingeneroso di una macchina fotocopiatrice: per una sorta di nemesi storica, ci troviamo adesso a dover illustrare un evento che sembra rovesciare del tutto il paragone. Marin Mersenne era pur sempre monaco, e probabilmente si sentiva spiritualmente vicino ai benedettini che consumavano gli occhi sulle miniature: eppure il suo nome è ormai definitivamente legato ad un gigantesco programma che costantemente viene eseguito non da un computer, ma da qualcosa che è una sorta di evoluzione del computer stesso: l'immensa rete di computer che concorre al GIMPS. L'acronimo sta per "Great Internet Mersenne Prime Search", ovvero "grande ricerca in internet dei Primi di Mersenne", ed è uno dei progetti scientifici più intriganti, visto che è condotto in parallelo da migliaia – più probabilmente milioni – di personal computer privati. Nei loro tempi morti, questi elaboratori si mettono alla caccia dei "Primi di Mersenne" che, naturalmente, prendono il nome dal nostro frate di Parigi.

Nei suoi primi approcci alla teoria dei numeri, il nostro si accorse che la formula:

$$n = 2^p - 1 \text{ (con } p \text{ primo)}$$

sembrava essere in grado di generare numeri primi.

Nel 1644 Mersenne dichiarò che se l'esponente **p** è uguale a 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257, allora il numero **n** corrispondente risulta essere primo. Marin si sbagliava un po': né 67 né 257 conducono infatti ad un numero primo, mentre invece lo fanno gli esponenti 61, 89 e 107 che lui aveva bellamente eliminato dalla lista. Ciò non di meno, la sua formula è tuttora una buona "generatrice di primi", anche se tutt'altro che esaustiva, al punto che regolarmente la caccia al numero primo più grande è sempre guidata dai Primi di Mersenne[14].

È una piccola ricerca diretta verso l'infinito. Euclide ci ha insegnato da qualche millennio che il numero dei primi è infinito, e di conseguenza la ricerca di primi sempre più grandi non muove di un epsilon la nostra conoscenza percentuale della totalità dei primi, neanche se fossimo ancora fermi a 2 nell'elenco dei primi conosciuti. Ciononostante è bello immaginare che il PC sul quale archiviamo le foto della fidanzata e i conti di casa possa, quando noi non guardiamo, divertirsi a calcolare una sequenza lunghissima di cifre per scoprire il quarantatreesimo numero di Mersenne. L'ultimo scoperto è infatti il quarantaduesimo, vale

$$2^{25964951} - 1$$

ed è stato scoperto sul pentium del signor Martin Nowak (Germania) il 18 Febbraio 2005.

È sempre una festa e una occasione di gloria: ad ogni nuovo record fa seguito una celebrazione, quando non direttamente un premio.

Annulli postali e francobolli celebrano regolarmente l'evento, e qualche fondazione ha sempre in serbo dei premi in denaro per qualche record speciale. Ad esempio, il primo di Mersenne trovato dal dott. Nowak è composto "soltanto" da poco meno di otto milioni di cifre, e questo gli impedisce di battere cassa. Ma la Electronic Frontier Foundation è pronta a firmare un assegno di centomila dollari per il primo scopritore di un numero primo composto da più di dieci milioni di cifre.

Martin può comunque consolarsi con questo prezioso poster riprodotto qui a fianco: l'immagine forse non è perfettamente definita, ma non lo sarebbe neppure se ingrandissimo il poster fino alla grandezza naturale. Non è altro che il 40° Numero di Mersenne[15] stampato per esteso, con le cifre in corpo tipografico 1 (per riferimento, considerate che i caratteri che compongono quest'articolo sono in corpo 10).

Se vi è venuta la voglia di partecipare al GIMPS, non è davvero difficile soddisfarla: una ricerca in rete con parola chiave pari all'acronimo vi conduce in un battibaleno sul sito ufficiale[16], dove potrete scaricare gratuitamente il software necessario ad insegnare al vostro PC a non battere la fiacca quando non ci siete. Noi, notoriamente pigri (anche quando a lavorare in nostra vece sono i calcolatori di casa), rimaniamo pigramente sfaccendati, convinti come siamo che il numero primo più grande mai trovato dall'uomo sia quello raffigurato nell'ultima immagine di questo articolo[17].

---

[14] Infatti, conoscere il "numero primo più grande" è tuttora cosa ben diversa che "conoscere tutti i numeri primi da 2 al numero primo conosciuto più grande".

[15] Non sappiamo se per Nowak abbiano stampato anche il 42°: glielo auguriamo, anche se la differenza tra il 40° e il suo 42° Numero di Mersenne è di più di un milione e mezzo di cifre…

[16] Per i più pigri: www.mersenne.org/prime.html, ma anche www.moregimps.it per andare direttamente nel sito del Team Italiano del GIMPS.

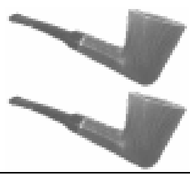
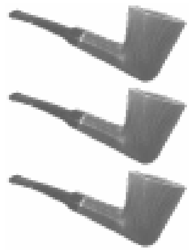
[17] Immagine presa da Matthew Harvey (www.utm.edu/~mharvey)

Marin Mersenne era in fondo un professionista dell'infinito (anzi, di diversi tipi di Infinito), ed era in grado di avvicinarcisi seriamente anche solo restando all'interno della sua piccola cella.

A noi, invece, l'infinito spaventa sempre un po'. Per questo continuiamo a scherzarci su.

Il numero primo più grande

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Missioni pericolose			
Visita allo zoo			

2.1 Missioni pericolose

Secca ammetterlo ma, come direbbe Doc, "*Quando ce vo', ce vo*".

Causa un comportamento non propriamente specchiato e impeccabile per quanto riguarda i compiti estivi, Alberto ("Ma non aveva finito la Terza Media?" "Infatti, i compiti glie li ha dati *il Liceo*. Avreste dovuto vedere com'era contento...") ha ricevuto una specie di punizione. Avendo impegnato buona parte del tempo in eterne partite di *Magic*, gli sono state sequestrate le carte migliori; in questo modo, si spera, il tempo di gioco verrà drasticamente abbreviato.

L'uscita di una nuova serie di carte (*Odissey*, o qualcosa del genere) ha però costretto il Nostro a cercare un accordo che gli permettesse di acquistarle; affrontato quindi il punto più cedevole dell'apparato legislativo (sarebbe Paola, la madre) è riuscito a strapparle la seguente ammissione: "Posso comprartele all'insaputa di Rudy, ma *paghi doppio*: i soldi in più te li spendiamo in libri che ti impegni a leggere."

L'ipotesi non solo di dover pagare doppio le carte, ma anche di dover leggere i libri non era per lui propriamente entusiasmante, e quindi ha provato a rivolgersi a Fred che, fiutando l'affare, ha immediatamente iniziato la stesura di un contratto capestro.

Fred sa benissimo quanti soldi Alberto ha intenzione di spendere, e sa anche benissimo che Alberto non si fida (a ragione) di lui; comunque, essendo per Alberto la scelta tra pagare doppio o pagare un pacchetto per ogni richiesta di acquisto, sta studiando se esista un modo per avere il massimo numero di pacchetti, possibilmente basandosi su "spedizioni" multiple; sa benissimo che Fred, almeno sin quando la cosa non si rivelerà vantaggiosa per lui, manterrà il patto e consegnerà i pacchetti, trattenendone uno solo: quando lo riterrà vantaggioso si terrà i pacchetti acquistati, ben sapendo che Alberto da quel momento non chiederà più il suo aiuto.

Per capirci: se Alberto può comprare un pacchetto, non vedrà nulla (in quanto sarebbe completamente consumato dalla commissione a Fred); ugualmente se potesse comprarne due, in quanto uno sarebbe in pagamento a Fred e questi, ben sapendo che Alberto non chiederà più servizi a lui, ruberà l'altro.

Il caso "quattro pacchetti" presenta diverse strategie ma, se teniamo presente che a parità di costo Alberto preferisce passare attraverso l'acquisto "via Paola", è facile accorgersi che anche in questi casi Fred ruberebbe comunque sempre.

Ma esiste un numero di pacchetti per cui, usando magari spedizioni multiple, sarebbe conveniente usare Fred?

Siccome questi due a matematica non sono una meraviglia e non hanno la minima intenzione di stare qui ad aspettare la vostra risposta, cercano di definire un protocollo tra di loro.

"Senti Fred, proviamo in questo modo. Decido quanti pacchetti dovrai comprare ad ogni uscita, e te lo dico subito. Se all'$n-esimo$ giro sarai stato onesto, avrai i soldi per l'$(n+1)-esimo$, anche se avessi la certezza che te le terrai; al primo caso di disonestà, chiederò alla mamma pagando doppio per tutti i soldi restanti".

"Alberto, non arrivo a dire di essere commosso, ma voglio fare anch'io una concessione: se per me il guadagno restando onesto sarà pari a quello che avrei fregandoti, sarò onesto. Ma non chiedermi di più".

Supponiamo Alberto possa acquistare 10 pacchetti; esiste un modo per organizzare le spedizioni di Fred in modo tale da spendere meno che attraverso la mamma?

E per 20? E per 50?

E come rispondereste a queste tre domande se Fred dichiarasse: "In caso di guadagno pari, non ti darò nulla"?

2.2 Visita allo Zoo

> *Questo è un classico, ma vorremmo vedere come ve la cavate. Lasciateci introdurlo con una nota polemica.*

Quando noi tre eravamo piccoli, Torino aveva uno zoo, e il massimo divertimento della parte più torinese della Redazione era quella di dar da mangiare le carote all'ippopotamo; purtroppo, la presenza di un sindaco che soffriva di un palese complesso di inferiorità (non nei confronti dei babbuini, che per lui rappresentavano un ideale inarrivabile: pensiamo piuttosto agli allocchi della voliera o alle meduse[18]) ha fatto sì che venisse chiuso: risultato dal punto di vista animalista zero, visto che tutti gli animali sono stati ceduti ad altri zoo, essendo totalmente inadatti alla vita selvaggia.

Comunque, da quel momento le uniche visite possibili sono state quelle ad un (peraltro bellissimo) zoo virtuale; il bello di questo luogo è che, molto più spesso degli zoo reali, presenta dei nuovi arrivi.

L'ultima volta, in cui mi sono trovato ad accompagnare un numero imprecisato di Pesti, erano per esempio esposti otto animali che stavano dormicchiando variamente arrotolati/appollaiati/seduti sulla stessa sbarra orizzontale; la didascalia diceva:

> *Fangagilis Chiockus*, maschio e femmina.
>
> *Spennavolus Morbidumumidus*, maschio e femmina.
>
> *Morpissus Spirdutus*, maschio e femmina.
>
> *Mascellodons Vulgaris*, maschio e femmina.

Ora, non era difficile associare i due rappresentanti della stessa specie, in quanto tra il maschio e la femmina c'era una decisa rassomiglianza; capire però a che specie appartenesse ciascuno, invece, era tutto un altro discorso; dopo una serie di ipotesi selvagge da parte dei giovani visitatori, ho lanciato una proposta.

---

[18] "Newton" di luglio 2006 sostiene che sono gli animali (multicellulari) con la minor quantità di cellule nervose deputate alla memorizzazione delle informazioni

"Sentite, prendete un pezzo di carta e ciascuno scriva sopra il proprio nome e quella che, secondo lui, è la sequenza degli animali; poi, cercheremo di capirci qualcosa."

Non che io ne sapessi qualcosa di più, ma avevo una possibilità; con i foglietti e la truppa al seguito, ci siamo recati dal guardiano, che conoscevo piuttosto bene.

"Scusi, signor Dogson[19], potrebbe aiutarci a mettere ordine qui in mezzo?"

Qualche secondo di silenzio...

"Beh, devo dire che questa è una cosa strana. Se prendo due liste a caso – ad esempio quella di Ivan e quella di Consuelo, l'animale che Ivan suppone essere l'animale che Consuelo suppone essere *il* Fangagile è l'animale che Consuelo suppone essere l'animale che Ivan suppone essere *la* Fangagile. Questo è vero per ogni coppia di liste e per tutte e quattro le specie."

"*Curioser and curioser!* Ogni ragazzo ritiene che *il* Fangagile sia l'animale che lui ritiene sia *il* Fangagile, ma per ogni ragazza quello che lei suppone *il* Fangagile è in realtà l'animale che da lei è supposto essere *la* Fangagile...

"No, scusi, ma qui non ho capito (tra il mio inglese e il suo italiano cominciavo a perdermi)... può farmi un esempio?"

"Certo. Ad esempio, l'animale che Consuelo chiama *il* Fangagile è in realtà *la* Morpissa, ma l'animale che lei chiama *la* Morpissa è in realtà *la* Fangagile... e questo per tutte le specie!"

Da tempo ormai non capivo più niente, ma la sua gentilentilezza mi imponeva di seguirlo in questo ragionamento...

"Mi sembra piuttosto complicato, ma certo è una coincidenza interessante..."

"Molto interessante... e non sarebbe potuta avvenire se aveste portato un numero maggiore di ragazzi, maschi o femmine".

Non ridete troppo alle mie spalle: adesso voglio sapere quanti maschi e quanti femmine c'erano tra le Pesti, se il vincitore della gara era maschio o femmina e quanti ne aveva azzeccati il vincitore.

3. Soluzioni e Note

Settembre. Ancora una volta, malgrado incidenti vari ed incovenienti molto poco virtuali, la più prestigiosa rivista di matematica è di nuovo sui vostri schermi.

Visto che già siamo in ritardo non vi annoiamo con questa parte introduttiva, che ci sono tante soluzioni di cui parlare, anche perché non abbiamo granché da raccontarvi: in agosto sembravano essere ancora tutti in vacanza, tranne noi e forse ***Riccardo***, che ha trovato la casa più stretta. Una casa larga un metro per dieci di altezza su tre piani, costruita a Madre de Deus, in Brasile. La casa è diventata meta turistica: Helenita, la proprietaria, guida i curiosi in un mini tour attraverso cucina, salone, camera da letto, bagno e ufficio. Ed è in programma la costruzione del quarto piano... molti più dettagli si trovano sul sito che ci ha indicato ***Riccardo***: http://www.repubblica.it/2006/05/gallerie/esteri/casa-stretta-brasile/8.html.

Vi diciamo questo per spirito di completezza, ma in realtà per noi di RM la *"Fetta di Polenta"* citata nel compleanno dello scorso mese è insuperabile, se non fosse per altro per

[19] ...e secondo voi come dovrebbe chiamarsi, il guardiano di un posto del genere?

un po' di sano campanilismo. Inoltre è fatto ovvio che la brasiliana sia costruita in cemento, mentre la FdP è di mattoni. Una rapida ricerca in internet riporta parecchie "case più strete del mondo" inclusa una ad Amsterdam; ma la nostra preferita, progettata da Alessandro Antonelli è alta 27 metri, lunga 27 metri su via Giulia Di Barolo, larga 5 metri su corso San Maurizio e 0,70 metri sul lato opposto. Un vero primato di tecnologia del suo tempo.

3.1 [088]

Della festa di RM si è detto molto, il mese scorso abbiamo pubblicato la soluzione di ***Cid***; ***Gnugnu*** ha ancora inviato un contributo, dopo in realtà essersi molto lamentato della frmulazione del problema. Anche per lui pubblichiamo a tutto margine; speriamo che prima di giungere all'ambito iscritto numero duemila saremo in grado di sapere a chi vanno più pasticcini.

3.1.1 Festa di RM, o meglio: Dove sono le vostre scatole?

<u>Premessa</u>

Il povero Piotr, cui è stato assegnato il numero 0, collabora all'estrazione di numerosi vassoi, ma non mangia alcun cioccolatino. Si guadagna l'eterna riconoscenza di tutti gli iscritti appartenenti al suo gruppo, mantiene la linea e…. crea un piccolo guaio: estrae un vassoio dalla scatola n.0, senza che alcuno dell'altro gruppo possa fare altrettanto, rendendo impossibile rispettare le condizioni del problema.

Da anni insegno che l'unica risposta logica ad un problema, scolastico, privo di soluzioni è dimostrarne l'impossibilità. Tuttavia i problemi di RM scolastici non sono ed inoltre si può comunicare con chi li formula ed ipotizzare correzioni che li rendano risolubili.

Quando però, com'è successo, ti rispondono che le tue sono solo questioni di lana caprina, ci si trova un po' spiazzati. Aspettare le soluzioni degli altri lettori per vedere come si doveva superare l'ostacolo? Riformulare arbitrariamente il problema? Cercare una certa quantità di varianti possibili? Dormirci sopra per verificare se, come dicono, la notte porta consiglio?

Cedere alla prima prospettiva è, specialmente alla fine dell'anno scolastico, comodo e facile. Poi, però, finiscono gli esami di maturità, e… torna la voglia di giocare; chissà cosa succede barando un po'?

Tre sono, a mio avviso, le più lievi variazioni che rendono possibile affrontare il problema:

a) eliminare la scatola numero zero;

b) sostituire nella condizione da rispettare cioccolatini al posto di vassoi;

c) riequilibrare il numero complessivo di vassoi estratti da ciascun gruppo facendo in modo che il gruppo cui non appartiene Piotr estragga un vassoio in più dell'altro dalla scatola numero due.

Ogni variante ha i suoi pregi e qualche difetto: la prima comporta la sparizione di una scatola espressamente prevista nel testo del problema; la seconda produce il non rispetto della condizione più importante (il gruppo di Piotr si ritroverà sempre con un vassoio in più dell'altro); l'ultima prevede due scatole 'sbilanciate' e, come vedremo, una soluzione lievemente meno semplice.

Fortunatamente le soluzioni non sono molto diverse fra loro, nei casi a e b è addirittura la stessa. Con sommo sprezzo del pericolo eliminiamo la scatola zero, tanto non conteneva cioccolatini, e procediamo.

<u>1</u>

Indichiamo con D e P i due gruppi (la scelta di nomi sarà chiara tra poco), Piotr è inserito nel gruppo D.

L'iscritto n.1 non può appartenere a *D*, altrimenti sarebbero i soli ad estrarre un vassoio dalla scatola n.1; questa scatola resterà intonsa.

Il n.2 deve appartenere a *D*, in questo modo dalla scatola n. 2, da cui il n.1 estrae un vassoio, ne verrà estratto un altro anche dalla coppia (0;2).

Il n.3 apparterrà invece a *P* e anche dalla scatola n. 3 non verrà toccata. Proseguendo in questo modo si vede che ogni iscritto di numero pari (2*m*) deve appartenere al gruppo cui non appartiene il numero (*m*) uguale alla sua metà, mentre ogni numero dispari (2*k* +1) deve essere sistemato nel gruppo dove non compare il numero (2*m*) immediatamente precedente. $D \equiv \left\{ 0, 2, 5, 6, 8, 11 \cdots \right\}; \quad P \equiv \left\{ 1, 3, 4, 7, 9, 10 \cdots \right\}$.

Utilizzando la numerazione in base 2, osservato che:

a) per raddoppiare un numero si deve aggiungere uno zero;

b) nel passare da qualsiasi numero pari al dispari successivo si perde uno zero;

possiamo riformulare la regola in maniera più concisa: "se la quantità degli zeri presenti nella scrittura, in base 2, del numero è dispari, questo dovrà essere inserito nel gruppo *D*, altrimenti (se è pari), nel gruppo *P*".

La regola funziona, ma la dimostrazione, per induzione, che sono riuscito a trovare non mi soddisfa affatto – mi pare troppo contorta e farraginosa. Probabilmente c'è di meglio.

1.1

Dato un numero qualsiasi *n* di iscritti e, di conseguenza, di scatole (la scatola n.0 è stata eliminata), supponiamo (ipotesi adatta ad ipergolosi) che tutti appartengano al gruppo *D*. Ogni iscritto preleverà, allora, da solo o in coppia, $v(i) = n + 1 - i$ vassoi, dove i è il numero di iscrizione, Piotr ne preleverà invece $v(0) = n$.

Da ciascun vassoio l'iscritto i mangerà una *dose* pari a *i* cioccolatini, a meno che la scatola da cui proviene il vassoio sia quella di numero 2*i*; in questo caso l'iscritto mangerà due dosi.

Il numero di dosi mangiate da ciascun iscritto risulta, percio:

$$d(0) = n \quad e \quad d(i) = \begin{cases} v(i) + 1 = n + 2 - i & 0 < i \le n/2 \\ v(i) = n + 1 - i & i > n/2 \end{cases}$$

Data una distribuzione qualsiasi degli iscritti nei due gruppi, il trasferimento dell'iscritto i da un gruppo (*A*) all'altro (*B*) produce una diminuzione (eventualmente nulla) del numero di vassoi complessivamente estratti dagli appartenenti al primo gruppo *V(A)* e un aumento (eventualmente nullo) del numero di vassoi complessivo per l'altro *V(B)*.

Siano $\Delta_{v0} = V_0(B) - V_0(A) \quad e \quad \Delta_{v1} = V_1(B) - V_1(A)$ le differenze fra i vassoi estratti complessivamente dagli appartenenti ai due gruppi rispettivamente prima e dopo il trasferimento. Sarà allora:

$$\Delta_{v1} = \Delta_{v0} + d(i) \qquad \texttt{[Lemma 1]}$$

Ogni partner con cui veniva estratto un vassoio quando tutti gli iscritti appartenevano allo stesso gruppo si troverà, necessariamente, in uno dei due gruppi e la somma dei partner perduti in *A* con quelli ritrovati in *B* non può che essere uguale al numero di vassoi estratti in compagnia nel caso goloso. Per quanto riguarda, poi, l'eventuale vassoio estratto dalla scatola 2*i*, questo porterà alla diminuzione di 1 vassoio per il gruppo *A* e all'aumento di 1 per il gruppo *B*, con una variazione esattamente uguale alle 2 dosi corrispondenti.

1.2

Ogni distribuzione degli n iscritti che porti all'estrazione da ciascuna scatola dello stesso numero di vassoi per i due gruppi, produce anche l'estrazione del medesimo numero di vassoi complessivamente per ciascun gruppo. Deve, pertanto, essere:

$$\Delta_v = V(P) - V(D) = 0$$

e, visto che nel caso goloso $\Delta_v = V(P) - V(D) = 0 - \frac{1}{2}\sum_0^n d(i) = -\frac{1}{2}\sum_0^n d(i)$, sarà per l'applicazione iterata del lemma 1:

$$\sum_{i \in P} d(i) = \sum_{i \in D} d(i) = \frac{1}{2}\sum_0^n d(i) \qquad \texttt{[Lemma 2]}$$

1.3

Siamo ora in grado di dimostrare, per induzione, la regola di formazione dei due gruppi, abbiamo già visto che per n<4 produce gruppi soddisfacenti le condizioni richieste, supponiamo allora di aver costruito secondo la regola i gruppi contenti complessivamente n-1 iscritti e determiniamo in quale dei due gruppi dovrà essere inserito il numero n, distinguendo due casi

1.3.1 n è pari:

gli n-1 iscritti sono distribuiti n/2 in P e n/2 (contando Piotr) in D, infatti ogni coppia di numeri pari/dispari successivi viene ripartita tra i due gruppi. L'aggiunta della scatola n incrementa di 1 tutti i *d(i)* tranne *d(n/2)* che risulterà aumentato di 2. Affinché continui a valere il risultato del lemma 2, l'iscritto n con *d(n)*=1 non potrà che essere inserito nel gruppo non contenente n/2, che avrà perciò un elemento in più dell'altro.

1.3.2 n è dispari

come abbiamo appena visto uno dei due gruppi, quello contente n-1, ha la stessa $\sum d(i)$, ma anche un elemento in più dell'altro. L'aggiunta della scatola n produce, questa volta senza eccezioni, l'incremento di 1 di tutti i *d(i)*. Sempre per il lemma 2, l'iscritto n con *d(n)*=1 dovrà essere inserito nel gruppo che difetta di un elemento, cioè in quello che non contiene n-1.

1.4

Optando per la variante b la soluzione sarebbe identica, in ogni scatola ciascun vassoio contiene, infatti la stessa quantità di cioccolatini e il vassoio in più, estratto dal gruppo D dalla scatola zero non ne contiene alcuno.

Se, invece, scegliamo la correzione c basterà scambiare fra i due gruppi l'iscritto n.1 e Piotr; questa volta i due gruppi estrarranno con n>2 la medesima quantità di vassoi, ma il gruppo P mangerà sempre complessivamente due cioccolatini in meno dell'altro.

1.5

La prima domanda può trovare ora una facile risposta. Visto che $2001_{dieci} = 11111010001_{due}$ ha una scrittura in base 2 contenente un numero pari di zeri, l'iscritto n.2001 non godrà della compagnia di Piotr. Non so se sia una questione di simpatia, ma sono certo che la sistemazione non gli risulterà molto gradita a meno che detesti il cioccolato (alla faccia dei tutti soddisfatti).

Al contrario sarebbe, almeno in parte, accontentato se avessimo scelto l'opzione c.

CHI MANGIA DI PIÙ?

2

Per determinare il numero di cioccolatini fagocitati da ciascun iscritto, osserviamo che ognuno estrarrà vassoi con tutti i compagni tali che la somma dei due numeri risulti non maggiore di n, il massimo numero presente sulle scatole.

Quando il numero i dell'iscritto ed n sono di parità diversa non ci sono problemi, la regola di costruzione divide ogni coppia di numeri consecutivi pari/dispari fra i due gruppi e quindi nel gruppo cui appartiene i si troveranno $(n - i + 1)/2$ iscritti con cui condividere un vassoio. Per eliminare la fastidiosa divisione per due consideriamo il doppio dei cioccolatini mangiati.

L'iscritto i si mangerà, perciò metà di $(n - i + 1)i$ cioccolatini se $2i$ è maggiore di n, $(n - i + 2)i$ altrimenti, a causa della doppia dose dal vassoio 2i.

Un po' più complicata è la situazione quando la differenza fra n ed i è pari; in questo caso, se i ed $n - i$ appartengono al medesimo gruppo, i mangerà metà di $(n - i + 2)i$ cioccolatini più l'eventuale doppia dose, in caso contrario dovrà accontentarsi di $(n - i)i$ sempre con il possibile raddoppio.

Prima di affrontare la ricerca del più fortunato iscritto (fortunato, forse, non è molto corretto: anch'io, nonostante la mia eccezionale golosità, avrei qualche problema a mangiare tonnellate di cioccolato), vediamo di ricapitolare i risultati in una tabella.

Doppio del numero di cioccolatini	$n-i$ *dispari*	$n-i$ *pari*	
		$i, n-i \in A$	$i \in A \quad \wedge \quad n-i \notin A$
$2i \le n$	$(n+3)i - i^2$	$(n+4)i - i^2$	$(n+2)i - i^2$
$2i > n$	$(n+1)i - i^2$	$(n+2)i - i^2$	$n \cdot i - i^2$

Per ogni n i grafici delle funzioni trovate sono delle parabole con la loro brava concavità rivolta verso il basso, quindi, per ognuna di esse, il valore di i migliore sarà quello il più possibile vicino all'ascissa del vertice. I concorrenti che si ritrovano nell'ultima riga e/o nell'ultima colonna possono avere qualche speranza di vittoria solo per n<16 e, esaminando i singoli casi, uno di loro mangia effettivamente il più grande numero di cioccolatini solo con n<4.

2.1

Escludendo i più piccoli valori di n possiamo, perciò, limitarci ai concorrenti il cui numero di iscrizione i non sia maggiore della metà di n.

Fra questi, quelli con i di parità diversa da quella di n hanno un vincitore di categoria immediatamente determinabile: si trovano tutti sulla medesima parabola a sinistra del vertice, quindi il più grande valore possibile di i si mangerà anche il maggior numero di cioccolatini.

Chiamando facili (f) questi iscritti, indicando con mf il più fortunato di loro e scritto n nella forma $n = 4t + k \quad 0 \le k \le 3$ avremo:

$$mf = \begin{cases} \dfrac{n-2}{2} = 2t - 1 & k = 0 \\ \dfrac{n-1}{2} = 2t & k = 1 \\ \dfrac{n}{2} = 2t + 1 & k = 2 \\ \dfrac{n-3}{2} = 2t & k = 3 \end{cases}$$

Decisamente più rompiscatole (r) risultano gli iscritti con $n - r$ pari, a causa dei cioccolatini della scatola n che riescono a mangiare solo se $n - r$ appartiene al loro gruppo. Determinare mr, quello di loro che mangia il maggior numero di cioccolatini, appare complicato, ma possiamo evitare di calcolarlo, infatti mr risulta interessante solo se mangia non meno cioccolatini di mf.

Nuovamente gli r che non ritrovano il partner $n - r$ nel loro gruppo possono risultare vincitori solo per piccoli valori di n (n<12) e vincono effettivamente solo per n<4; i restanti si ritrovano tutti sulla medesima parabola a sinistra del vertice.

Possiamo allora procedere in questo modo:

a) poniamo ur uguale al più grande r possibile, $ur = \begin{cases} \dfrac{n}{2} = 2t & k = 0 \\ \dfrac{n-3}{2} = 2t-1 & k = 1 \\ \dfrac{n-2}{2} = 2t & k = 2 \\ \dfrac{n-1}{2} = 2t+1 & k = 3 \end{cases}$

b) controlliamo se $(n+4)*ur - ur^2 < (n+3)mf - mf^2$, in caso affermativo mf è il vincitore;

c) controlliamo se ur e $n - ur$ appartengono allo stesso gruppo, in caso affermativo ur è (a pari merito con mf se $(n+4)*ur - ur^2 = (n+3)mf - mf^2$) il vincitore;

d) diminuiamo ur di 2 e torniamo al punto b.

L'algoritmo termina in ogni caso o in b o in c e, solo in quest'ultimo caso, individua anche mr.

3

Giocherellando con una sua implementazione in Derive ho notato, con notevole sorpresa che, quando il vincitore è mr, le differenze fra il valore iniziale di ur e mr stesso non sono, come davo implicitamente per scontato, numeri pari qualsiasi, ma compaiono solo nella forma: $0, \quad 2^j, \quad 3 \cdot 2^j \quad (j > 0)$.

Questa osservazione, se, da un lato, può portare ad una drastica riduzione dei tentativi necessari per completare l'algoritmo precedente, dall'altro, mi ha permesso, durante le 'elucubrazioni' per dimostrarla, di trovare un altro algoritmo, decisamente più soddisfacente, che si basa unicamente sulla manipolazione delle cifre della scrittura binaria (ancora meglio in base quattro) di n.

Implementato l'algoritmo in Derive, ho deciso di provarci anche con Excel, evitando assolutamente le macro e riducendo al massimo i SE. Anziché tediare gli eventuali lettori e la redazione con pagine di descrizione e dimostrazioni degli algoritmi vi allego il foglio di Excel, (…)[20].

4

Per finire alcune osservazioni con congetture, alcune verificate altre che restano tali.

1. Al crescere di n le vittorie di mf diventano sempre più rare. Esisterà un nr dopo il quale la vittoria apparterrà sempre ad un r?

[20] *Abbiamo tagliato la spiegazione del foglio excel, lo sapete che siamo cattivissimi con queste cose. Speriamo che* ***Gnugnu*** *ci perdoni. (AR)*

2. La differenza fra n e il doppio del vincitore assume, sporadicamente, valori notevolmente elevati. Esiste una limitazione superiore di tale valore?
3. I casi di pareggio sono abbastanza rari e paiono limitarsi a piccoli valori di n. In tabella riporto quelli che ho trovato; ne esistono altri?
4. Dalle scatole n.1, 3, 5 e 9 non viene estratto alcun vassoio. Ne esistono altre?

n	mf	mr	Cioccolatini
1	0	1	0
2	1	2	2
3	2	1	2
13	6	5	30
42	21	18	252
49	24	21	336
154	77	70	3080

Le mie congetture comportano una risposta negativa a ciascuna domanda, ma solo per le prime due ho trovato una dimostrazione.

3.2 [091]

Forse vi sembreremo un po' criptici questo mese, ma ad agosto in Svizzera ha piovuto e fatto abbastanza freddo, ed Alice risiede proprio in quei luoghi. E non è ancora andata in vacanza. E scrive le Soluzioni & Note. E si è persa una rubrica, quando torna il Capo la fucila.

3.2.1 Calzini al contrario

Il problema dei calzini è piaciuto moltissimo. Soluzioni sono giunte dal nostro inesauribile ***Cid***, ***Nello Sagra Ardiles***, ***Augusto***, ***Zar***, il ***Panurgo***, ***BR1***. Quest'ultimo manca dalle pagine di RM ormai da molti mesi, ma è tornato alla grande con una soluzione divertentissima, a quanto pare il Nostro ha pensato di verificare i risultati dei sui calcoli empiricamente:

> (...) E così, anche stavolta siete riusciti a rovinarmi le vacanze, e per di più senza neanche la soddisfazione di trovare la soluzione completa del problema dei calzini… E dire che mi ero preparato bene: il giorno prima della partenza avevo saccheggiato alcune mercerie nei dintorni di casa, facendo incetta di tutti i calzini rossi, blu e verdi che ero riuscito a trovare: svariate centinaia di paia, in varie fogge e modelli, taluni decorati con ricamini artistici. Da segnalare che mia moglie ha dovuto raggiungere il luogo delle ferie in treno, con la cagnetta, perché ovviamente lo spazio in auto era quel che era, e i calzini non si sono dimostrati in grado di prendere il treno da soli.
>
> 
>
> Giunto al camping cui eravamo diretti, scaricati i bagagli (e i calzini), montato tutto il montabile (inclusi numerosi fili da biancheria, di tipo particolarmente adatto a stendere i calzini), prendo carta e penna, e finalmente affronto il problema in versione ridotta, quella senza calzini verdi.
>
> (...) Opto per una verifica sperimentale in grande stile, ed alle 4 di notte allestisco nel cofano dell'auto un agglomerato di 96 calzini rossi e 94 blu; per rimescolarli ben bene, infilo due o tre polpette fra i calzini, e chiamo la cagnotta… Quella salta dentro, e dopo un paio di minuti esce fuori leccandosi i baffi, e lasciando i calzini un po' unti sì, ma distribuiti nel cofano in modo totalmente aleatorio…(...)

Fino a qui vi abbiamo dato solo un assaggio dell'azione di ***BR1***. I risultati ve li lasciamo leggere da altri solutori, ma le sue conclusioni sono assolutamente avanzate:

> Comunque, il dare per scontato che i calzini siano ambidestri (cioè, a parità di colore, interscambiabili) semplifica di molto le potenzialità del problema… Supponiamo che, per ciascuna delle tre tinte, esistano due tipi distinti di calzini (ad esempio, potremmo chiamarli *destro* e *sinistro*, oppure *diritto* e *rivoltato*; o anche, *calzino* e *anti-calzino*…). Se assumiamo che gli *anti-calzini* siano dotati di *anti-*

colori, anziché di colori ordinari, possiamo dire che una coppia di calzini omogenea (*calzino verde* + *anti-calzino anti-verde*) è come se formasse un oggetto di colore neutro, cioè bianco. Lo stesso può dirsi di una terna di calzini, uno rosso, uno verde ed uno blu (uno o due dei tre necessariamente anti-colorato); tali tinte, se composte, formano infatti in teoria un indistinto conglomerato bianchiccio, da lavarsi immediatamente con schiuma frenata, a mano o in lavatrice.

Gli esperimenti sopra descritti hanno evidenziato risultati sorprendenti: grazie al rimescolamento dovuto alle polpette e principalmente alla cagnetta, tutti i calzini nel baule hanno mostrato una tendenza spontanea a formare coppie o, più spesso, trittici! Ciò ha mandato all'aria tutte le teorie sopraesposte, ed ha costretto ad una profonda rivisitazione dei concetti probabilistici: si è osservato che due calzini di colori diversi, abbinati ad un anti-calzino del terzo colore, formavano un composto quasi stabile, a vita media quasi eterna; essendo stati notati per primi, sono stati denominati *proto-calzini*. Probabilmente per la reciproca repulsione dovuta al cattivo odore, due o più *proto-calzini* mostravano una inquietante tendenza a respingersi a vicenda.
Invece due anti-calzini, ancora di colore diverso, ed abbinati ad un calzino non rivoltato, formavano un composto ancora bianchiccio, ma di comportamento neutro, privo di attrazioni o repulsioni sia verso oggetti similari sia verso i proto-calzini: questi oggetti li abbiamo chiamati *neutro-calzini*. Essi esibivano la inquietante caratteristica di esplodere, circa un quarto d'ora dopo la loro formazione, lasciando come residui un proto-calzino ed un piccolissimo batuffolo di lana o cotone non meglio identificato al momento.

Notevole che si formassero poi gruppi di *proto-calzini* e di *neutro-calzini* permanentemente stabili: i più grossi notati contenevano fino a 92 *proto-calzini* e 143 o 146 *neutro-calzini*. Non sapendo cosa farne, questi ultimi li abbiamo spediti in Iran, da cui proveniva grande richiesta.

Ultima bizzarria osservata: alla trentottesima immersione fra calzini e polpette, dal baule dell'auto anziché la cagnetta è saltato fuori un gatto: risponde al nome di Schrödinger e rifiuta in ogni maniera di rientrare nel baule, pur avendo noi tentato di sedurlo sostituendo alcune aringhe alle polpette.

La soluzione la facciamo dare ad ***Augusto***, alla sua prima comparsa su RM (Benvenuto!):

Detto n il numero di calzini rossi, e detto m il numero di calzini blu ($n>m$), siano a e b due numeri interi assegnati ($a<b$). Se estraendo due calzini a caso la probabilità che siano entrambi rossi è $\frac{1}{a}$, e che siano entrambi blu è $\frac{1}{b}$, allora sussistono le seguenti relazioni:

$$\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}=\frac{1}{a} \qquad \textbf{[1]} \qquad\qquad \frac{m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}=\frac{1}{b} \qquad \textbf{[2]}$$

Mettendo a sistema le due relazioni, si ricava $an(n-1)=bm(m-1)$, che si può scrivere nella forma $\frac{a}{b}=\frac{m(m-1)}{n(n-1)}$. Deve essere allora $m^2-m=ax$, nonché $n^2-n=bx$, da cui si traggono le equazioni parametriche di n e di m in funzione di x:

$$n=\frac{1+\sqrt{1+4bx}}{2}\ ;\ m=\frac{1+\sqrt{1+4ax}}{2} \qquad \textbf{[3]}$$

Se n, m soddisfano le condizioni assegnate, allora deve esistere un valore x tale che n, m siano dati dalle equazioni **[3]**. Facendo variare il parametro x, possiamo prendere in esame solamente le coppie di numeri n,m forniti dalle equazioni `[3]` che risultino entrambi interi. Se tali numeri verificano anche la `[1]`, allora essi evidentemente coincidono con quelli cercati.

Al pratico, detto d il massimo comun divisore fra i numeri $4b$ e $4a$, e pòsto $x=\frac{k}{d}$, quando k descrive gli interi positivi, allora x descrive tutti i valori che rendono entrambe intere le quantità $4bx$ e $4ax$. Se risultano entrambi interi anche i valori dei due radicali, si procede alla determinazione di m, n, e infine si verifica la sussistenza della `[1]`.

Il metodo appena descritto fornisce nei tre casi richiesti, le seguenti soluzioni:

1. Quando a=3 e b=6 riesce n=21 e m=15
2. Quando a=2 e b=12 riesce n=85 e m=35
3. Quando a=2 e b=14 riesce n=15 e m=6

Con l'aggiunta di un certo numero p di calzini verdi, le relazioni `[1]` e `[2]` diventano rispettivamente

$$\frac{n(n-1)}{(n+m+p)(n+m+p-1)}=\frac{1}{a} \quad [4] \qquad \frac{m(m-1)}{(n+m+p)(n+m+p-1)}=\frac{1}{b} \quad [5]$$

E' del tutto evidente che, a partire da queste, si ritrovano le stesse equazioni parametriche `[3]`, grazie alle quali si possono ricercare tutte le potenziali coppie di interi n, m che (insieme a un terzo numero p), potrebbero verificare la `[4]`, dando soluzione al problema.

La `[4]` può essere vista come una equazione di secondo grado nell'incognita p, noti m, n: $p^2+(2n+2m-1)p+(n+m)(n+m-1)-an(n-1)=0$

Ebbene, se tale equazione ammette soluzioni intere, quella positiva rappresenta proprio il numero p di calzini verdi aggiunti, che insieme ai numeri n, m costituisce la soluzione cercata.

Questo secondo metodo fornisce, nei quattro casi richiesti, le seguenti soluzioni:

1. Quando a=3 e b=15 riesce n=6 m=3 p=1
2. Quando a=5 e b=15 riesce n=3 m=2 p=1
3. Quando a=6 e b=12 riesce n=4 m=3 p=2
4. Quando a=8 e b=12 riesce n=6 m=5 p=5

Il Nostro dimostra anche l'unicità delle soluzioni, nel caso di calzini rossi e blu, ma abbiamo dovuto ridurre per i soliti motivi di spazio.

3.2.2 Simmetrie Zurighesi, ovvero il Geomag di Neanderthal

Soluzioni a questo problema sono giunte da ***Marco il Senese***, ***PMP***, ***Zar***, ***Cid***, ***Nello Sagra Ardiles***. Per dare il benvenuto a ***Nello*** tra i nostri solutori pubblichiamo la sua soluzione per prima cosa.

> A parte i miei dubbi sull'abbinamento antico-moderno realizzato infilando prodotti elettronici su solidi platonici (per quanto zurighesi), ecco ciò a cui sono giunto e come, purtroppo senza l'ausilio di geomag o altri sussidi visuali e svizzeri del genere. Prima di tutto, riassumo in una tabella le proprietà fondamentali dei cinque solidi in questione.

poliedro	vertici (v)	spigoli	facce	C_v^2	C_v^3
Tetraedro	4	6	4	6	4
Esaedro	8	12	6	28	56
Ottaedro	6	12	8	15	20
Dodecaedro	20	30	12	190	1140
Icosaedro	12	30	20	66	220

Nelle due ultime colonne ho indicato le combinazioni senza ripetizione di, rispettivamente 2 e 3 elementi sui v vertici, che rappresentano il numero totale di possibili scelte di, sempre rispettivamente, 2 o 3 vertici dei v che il poliedro ha. Quindi le possibili forme dei, ancora rispettivamente, 2 o 3 LED sul poliedro, senza contare le simmetrie. Queste ultime, sostanzialmente, classificano tutte le possibili combinazioni in categorie, che io ho riferito alla distanza reciproca dei dueotre punti rispetto a distanze fisse fornite dal poliedro. Questo perché le simmetrie sono isometrie e lasciano invariate le distanze reciproche tra due punti, oltre che gli angoli. Per quanto riguarda i 2 LED, bastano le distanze. Invece, con i 3 LED sono importanti anche gli angoli: siccome 3 LED formano sempre un triangolo e un criterio di congruenza dei triangoli afferma che due triangoli sono congruenti se hanno i lati ordinatamente congruenti, basterà evidenziare le tre distanze reciproche dei tre punti per avere caratterizzati completamente i triangoli formati dai vertici e avere così degli invarianti per simmetrie.

Ad esempio:

TETRAEDRO

2 LED:

Ci sono 6 modi di scegliere 2 vertici su 4. Poiché nel tetraedro ogni vertice è connesso a ogni altro tramite uno spigolo, 2 vertici saranno comunque consecutivi rispetto a uno spigolo (il numero di spigoli è appropriatamente 6). L'unica distanza fissa fornita dal tetraedro è la lunghezza di uno spigolo (*s*), e 2 vertici, comunque presi, saranno a tale distanza.

Classi:

1. spigolo (*s*): numero combinazioni relative: 6

3 LED:

Ci sono solo 4 modi di scegliere 3 vertici su quattro. Per le stesse considerazioni fatte prima, 3 vertici, comunque scelti, delimiteranno una faccia, lasciando vuoto il vertice non complanare. Le distanze relative saranno comunque sss, e siccome il numero di facce è convenientemente 4, questo esaurisce tutte le possibili combinazioni.

Classi:

1. spigolo-spigolo-spigolo (*sss*) comb.: 4

ESAEDRO

2 LED:

Le distanze possibili sono: il lato (*l*), la diagonale di faccia (*f*) e la diagonale di solido (*d*). Due LED possono essere a distanza *l* e precisamente quando sono connessi da uno spigolo (12 spigoli, dunque 12 scelte), a distanza *f* e precisamente quando appartengono alla stessa faccia ma non sono connessi da spigoli (2 casi per faccia, totale 12 combinazioni) e a distanza d quando sono "diametralmente" opposti, o simmetrici rispetto a un intuitivo "centro" del poliedro (in totale 4 diagonali). 12+12+4 fanno esattamente i 28 casi previsti combinatoriamente.

Classi:

1. *s* comb: 12
2. *f* comb: 12
3. *d* comb: 4

3 LED:

Si tratta di combinare le classi appena viste:

ssf saranno tre vertici appartenenti alla stessa faccia (4 scelte per faccia, 24 totali)

sfd due vertici lungo uno spigolo, il terzo su una faccia confinante a distanza di una diagonale di faccia (2 scelte per spigolo, 24 totali)

fff tre spigoli connessi da tre diagonali di faccia (3 scelte per spigolo, diviso 3 per la simmetria del triangolo equilatero risultante, 8 totali)

Classi:

1. *ssf* comb: 24
2. *sfd* comb: 24
3. *fff* comb: 8

OTTAEDRO

2 LED

Le distanze fornite dal solido sono lo spigolo *s* e la diagonale *d* che congiunge due vertici che non sono consecutivi lungo uno spigolo. Gli spigoli sono 12, le diagonali 3. Quindi le classi sono:

Classi:

1. *s* comb: 12
2. *d* comb: 3

3 LED

Possono essere scelti su una stessa faccia (distanze relative *sss*) oppure no (distanze relative *ssd*, 12 possibili scelte di spigolo, per due possibili diagonali, diviso 2 per la simmetria: 12 casi).

Classi:

1. *sss* comb: 8
2. *ssd* comb: 12

DODECAEDRO

2 LED

Qui le possibilità sono tante. Le distanze possibili sono lo spigolo *s* (totale 30 coppie), la "diagonale di faccia" *f* che collega due vertici non consecutivi della stessa faccia (5 diagonali per faccia, 12 facce, totale 60), una diagonale *d* che collega due vertici la cui distanza più breve sulla superficie è data da uno spigolo più una diagonale *f* (da ogni vertice partono 3 spigoli, da ogni vertice d'arrivo 2 diagonali utili, per 20 vertici iniziali diviso 2 perché lo stesso percorso può essere ottenuto partendo anche dall'arrivo: totale 60), una diagonale *w* che collega due vertici la cui distanza più breve sulla superficie è data da due diagonali *f* (per ogni vertice sono solo 3 i punti raggiungibili tramite due diagonali *f* e non anche da percorsi più brevi, diviso 2 per simmetria, totale 30) e una diagonale o che collega due vertici simmetrici rispetto al centro (questa è la distanza tra un punto e il suo simmetrico rispetto al centro: 1 per ogni vertice diviso 2 per simmetria: totale 10).

Classi:

1. *s* comb: 30
2. *f* comb: 60
3. *d* comb: 60
4. *w* comb: 30
5. *o* comb: 10

3 LED

I 3 led possono essere sistemati:

- lungo due spigoli consecutivi di una stessa faccia (*ssf*, in totale 60 possibilità, 5 per ogni faccia)
- a formare un triangolo isoscele su una stessa faccia (*sff*, in totale 60 possibilità, 2 per ogni spigolo)
- *sfd*, in totale 120 possibilità, 4 per ogni spigolo
- *sdd*, un triangolo isoscele che prende una faccia e uno spigolo (in totale 60 possibilità, 2 per ogni spigolo)
- *sdw*, in totale 120 possibilità, 4 per ogni spigolo
- *swo*, in totale 60 possibilità, 2 per ogni spigolo
- *fff*, un triangolo equilatero intorno a un vertice "libero" (1 per ogni vertice libero, 20 in totale)
- *ffd*, 4 per ognuna delle 60 diagonali *f*, diviso due per simmetria: 120
- *ffw*, 2 per ognuna delle 60 diagonali *f*, diviso due per simmetria: 60
- *fdd*, 1 per ognuna delle 60 diagonali *f*: 60
- *fww*, 1 per ognuna delle 60 diagonali *f*: 60
- *fdo*, 2 per ognuna delle 60 diagonali *f*: 120
- *fdw*, 2 per ognuna delle 60 diagonali *f*: 120
- *ddd*, un triangolone equilatero, 2 per ognuna delle 60 diagonali *d*, diviso 3 per simmetria: 40
- *ddw*, 2 per ognuna delle 60 diagonali *d*, diviso 2 per simmetria: 60

Classi:

1. *ssf* comb: 60
2. *sff* comb: 60
3. *sfd* comb: 120
4. *sdd* comb: 60
5. *sdw* comb: 120
6. *swo* comb: 60
7. *fff* comb: 20
8. *ffd* comb: 120

9. *ffw* comb: 60
10. *fdd* comb: 60
11. *fww* comb: 60
12. *fdo* comb: 120
13. *fdw* comb: 120
14. *ddd* comb: 40
15. *ddw* comb: 60

ICOSAEDRO

2 LED

Le possibili distanze sono: lo spigolo *s* (30), la diagonale *f* che collega due vertici che possono essere raggiunti come distanza minima da due spigoli (ogni vertice ne ha 5 a questa distanza, diviso due per simmetria: 30), e la diagonale *d* che collega due vertici simmetrici rispetto al centro (ogni vertice ha un simmetrico, diviso due per simmetria: 6).

Classi:

1. *s* comb: 30
2. *f* comb: 30
3. *d* comb: 6

3 LED

Possono essere posizionati su una faccia (*sss*, 20 possibilità), su un triangolo isoscele con lati *ssf* (2 possibilità per ognuna delle 30 diagonali *f*: totale 60), su un triangolo isoscele con lati *sff* (2 possibilità ogni spigolo, totale 60), su un triangolo con lati *sfd* (2 possibilità ogni spigolo, totale 60) o su un triangolo equilatero *fff* (2 per ognuna delle 30 diagonali *f*, diviso 3 per simmetria, totale 20).

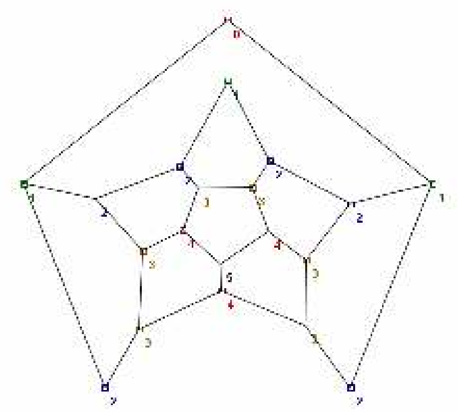
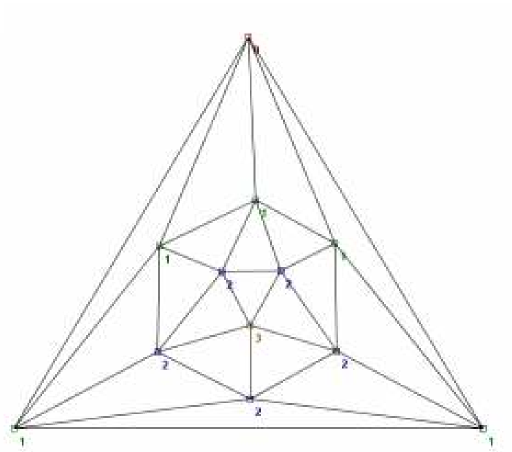
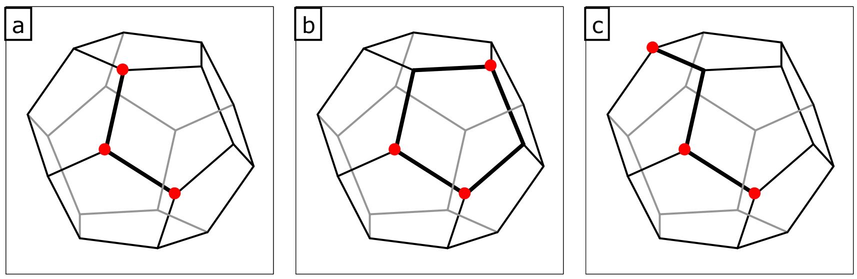
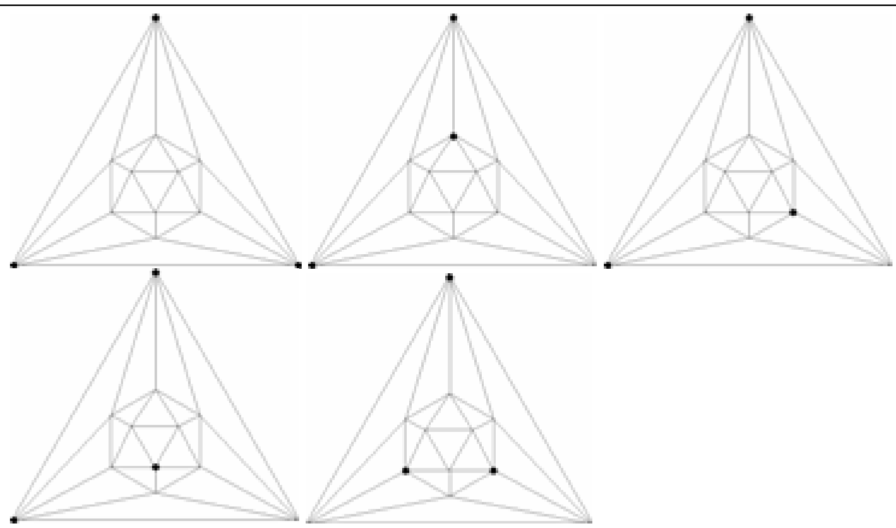
Classi:

1. *sss* comb: 20
2. *ssf* comb: 60
3. *sff* comb: 60
4. *sfd* comb: 60
5. *fff* comb: 20

Riassumendo qui i numeri di classi per ogni poliedro, si ottiene la tabella qui a destra.

poliedro	Classi con 2 LED	Classi con 3 LED
Tetraedro	1	1
Esaedro	3	3
Ottaedro	2	2
Dodecaedro	5	15
Icosaedro	3	5

Il premio per la soluzione più bella lo vince questo mese decisamente ***Marco***, che è riuscito a fare dodecaedri in excel che ruotano. Perfino il Capo è rimasto allibito, in Redazione abbiamo trovato il tutto talmente bello che ce lo teniamo per noi (anche perché Alice non sapeva come impaginarlo). Vi lasciamo intravedere però ancora qualcuno dei disegni che sono arrivati, per dare merito ai nostri lettori più accaniti che non si sono lasciati intimidire dalle difficoltà tridimensionali.

Il dodecaedro e l'icosaedro di ***PMP***	 
I dodecaedri in excel di ***Marco*** di Siena	
Icosaedro di ***Zar***	

... e questo è solo parte di quello che abbiamo raccolto...

Buon Settembre!

4. Quick & Dirty

Alberto e Fred hanno eternamente dei problemi con gli orologi: sono attaccatissimi ai loro vecchi "Swatch" e non li lascerebbero mai.

Il primo guaio è che quello di Alberto è 10 minuti indietro, anche se Alberto è convinto che sia 5 minuti avanti.

Il secondo guaio è che quello di Fred è 5 minuti avanti, mentre lui è convinto che sia 10 minuti indietro.

Il terzo guaio è che, contrariamente all'Augusto Genitore, odiano aspettare.

"Dobbiamo prendere il treno delle 6".

Chi aspetta chi, e per quanto tempo?

> *Fred arriva primo e si incavola da matti quando il treno parte prima che arrivi Alberto.*
>
> *Infatti Alberto calcola* 5 *minuti in più con il suo orologio, ma quando questo segna le* 06:05 *in realtà sono le* 06:15.
>
> *Fred, che è arrivato alle* 05:50 *secondo il suo orologio, aspetta il treno dalle* 05:45 *sino alle 06:15*..

5. Zugzwang!

5.1 Secondi scivolosi

È nostra ferma opinione che ***Peter Schell***, inventore di questo gioco, sia simpaticamente matto come una capra.

Vi servono tre amici (nel senso che dovete essere in quattro) e un mazzo da 52 carte: si gioca da soli, nel senso che non si formano coppie.

Le carte vengono distribuite tutte e si inizia a giocare (direzione: quella che preferite); il primo che gioca impone "il seme", e tutti devono giocare in quel seme o (se non hanno nulla di appropriato) giocano la carta che vogliono, ma non vale nulla; prende la mano chi ha giocato la carta più alta nel seme imposto.

Attenzione però perché dal momento che qualcuno gioca in un seme diverso da quello imposto, ***quel seme diventa l'atout***: una carta di quel seme (giocata in assenza di carte del seme imposto) prende; nel momento stesso in cui qualcuno decide invece di giocare un seme ancora diverso (sia dall'imposto che dall'atout), questo diventerà l'atout.

I punti sono il valore delle carte, con il Fante che vale 11, la Donna 12, il Re 13; l'Asso, anche se può prendere ogni altra carta, quando conteremo i punti varrà 1..

Quando finisce la partita, ***che va giocata il più velocemente possibile***, possibilmente con urla e incitamenti da parte degli avversari, si contano i punti, pari ai valori delle carte (non conta più se sono semi imposti, atout, scartine o chissacosa: ricordatevi dell'Asso). Segna i punti realizzati solo chi vince il giro. La partita, di solito, si conclude quando qualcuno arriva a 364 o lo supera (preghiamo notare che è il "valore totale" di un mazzo).

"Scusa Rudy, ma che differenza c'è rispetto a briscola, tresette, whist e compagnia giocando?"

Semplice: il giro lo vince il ***secondo*** arrivato, non chi fa più punti...

6. Paraphernalia Mathematica

Questa volta, i ringraziamenti li inseriamo all'inizio.

Tanto per cominciare, ***Li WeiXi***: ha creato, ai tempi in cui questa rivista muoveva i suoi primi passi, un interessante sito dedicato alla Teoria Combinatoria dei Giochi; va detto che il piano di Li era di fare un aggeggio decisamente completo, ma o ha perso l'entusiasmo per strada o si è laureato e ha abbandonato il sito; l'ultimo aggiornamento risale infatti all'altro millennio. Li, se leggi queste pagine, sappi che c'è ancora qualcuno in trepida attesa delle ultime due puntate!

Quindi, i ***Validi Assistenti di Laboratorio***; mettendo una volta tanto da parte lo spirito competitivo che li contraddistingue, hanno accettato di giocare buona parte dei giochi, ben sapendo che per ciascuno di questi esisteva, quasi sicuramente, una strategia; inoltre, ci hanno graziosamente permesso di utilizzare, al posto degli ormai consunti "A" e "B", i loro nomi; quindi nei vari giochi che analizzeremo vi ritroverete, come giocatori, sempre ***Alberto*** e ***Fred***. Orgoglioso del fatto di essere sempre il primo giocatore, Alberto si è anche arrogato il compito di verificare che le traduzioni delle regole da parte dell'augusto genitore fossero corrette.

Siccome la nostra speranza è che proviate anche voi a giocarne qualcuno prima di andarvi a vedere la strategia, usiamo un formato un po' particolare; il nome del gioco è evidenziato e le regole sono indentate rispetto al testo normale; spiegazioni, considerazioni e deduzioni, invece, in testo normale.

Infine, una comunicazione di servizio: se vi risulta che ci siano un po' troppe serie di PM in sospeso, avete perfettamente ragione; tranquilli, le intrecceremo allegramente con questa, quindi non aspettatevi che finisca a breve.

Si va ad incominciare.

6.1 Rien ne va plus [001] – Take it Easy

Cominciamo con un gioco piuttosto semplice:

Quadrare il Numero.

> Iniziando con un intero positivo (diciamo 75), Alberto e Fred alternativamente sottraggono un *quadrato* dall'intero (1 è ammesso), fornendo il resto all'all'altro giocatore. Chi ottiene 0, rendendo impossibile il turno all'altro giocatore, ha vinto.

Per capirci, vediamo una tipica partita:

Alberto	Ha	75		46		5		0
	Sottrae	25		16		1		☹
Fred	Ha		50		30		4	☺
	Sottrae		4		25		4	

Quadrare un numero

Si vede che, in questo gioco, Fred vince in quanto Alberto non ha più mosse legali da effettuare. Qui nasce il sospetto che uno (o tutti e due) i giocatori non abbiano giocato saggiamente: se entrambi avessero giocato bene, chi avrebbe vinto?

Se supponiamo che il gioco inizi con un generico numero positivo n, abbiamo due possibili risultati:

1. Alberto ha a disposizione una mossa cruciale che gli permette di vincere
2. Alberto non ha a disposizione questa mossa, e quindi vince Fred

Se vale (1), allora diciamo che n è un ***numero vincente***; se vale (2), al contrario, diciamo che n è un ***numero perdente***.

Non è difficile ricavare un paio di regole, in merito:

1. 0 è sicuramente un numero perdente, in quanto non permette nessuna mossa
2. Tutti i quadrati sono numeri vincenti, in quanto chi li riceve può immediatamente restituire uno 0 sottraendo il medesimo quadrato.

Con ragionamenti elementari, si ricava che, se vi ritrovate i numeri indicati in prima riga della tabella, il risultato per voi sarà quello indicato in seconda riga di ***Tabella 1***.

0	1	2	3	4	5
☹	☺	☹	☺	☺	☹

Tabella 1 – Vincenti e perdenti

Possiamo approfondire la nostra analisi ristatuendo le nostre due regole indicate sopra in un modo più generale:

1. Se Alberto può fare una mossa che renda il risultato un numero perdente, allora n è un numero vincente
2. Se Alberto può fare solo mosse che rendono il risultato un numero vincente, allora n è un numero perdente.

La cosa, se ci pensate, è abbastanza ovvia: Alberto vuole far perdere Fred e quindi, essendo il primo giocatore, intende lasciargli un numero perdente; se non è possibile, Alberto perderà in quanto qualsiasi numero fornisca a Fred sarà un numero vincente.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹	☺	☺	☹

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺

Tabella 2 – Analisi espansa

Per capire come funziona questa strategia, possiamo continuare la nostra analisi: trovate i risultati in ***Tabella 2***, sino ad $n = 21$.

Per chiarire operativamente come funziona il calcolo, proviamo a esplicitare il caso successivo, per $n = 22$; partendo da questo valore, potete sottrarre solo i quadrati compresi nell'insieme $\{1,4,9,16\}$, ottenendo rispettivamente i risultati $\{21,18,13,6\}$; però, se controllate nella tabella precedente, vi accorgete che tutti questi numeri sono numeri vincenti; quindi in questo momento, se tocca a voi, non avete una mossa che fornisca al vostro avversario un numero perdente; quindi, 22 è un *numero perdente*.

Va detto che spesso (anzi, sempre) non basta sapere se un numero è vincente o perdente; quello che ci interesserebbe sapere è anche fare delle *buone* mosse, in modo tale da vincere quando si sia in condizione vantaggiosa e non regalare la vittoria all'avversario per una distrazione. Proviamo con un paio di esempi.

Esempio 1: Alberto è con $n = 19$, che mossa deve fare?

Risposta 1: Dalla ***Tabella 2***, abbiamo che 19 è un numero vincente, il che è una buona notizia. Le possibilità che abbiamo sono di lasciare a Fred $n = 18,15,10,3$; volendo vincere, Alberto dovrebbe lasciare a Fred un numero perdente, quindi gli restano le opzioni $n = 10,15$.

Esempio 2: Avendo $n = 18$, Alberto decide di sottrarre 4, lasciando $n = 14$. Cosa succederà?

Risposta 2: Sempre dalla ***Tabella 2***, vediamo che 14 è un numero vincente, quindi non è stata una mossa saggia. Fred adesso può sottrarre 4, lasciando ad Alberto 10 che è un numero perdente.

Di seguito, descriveremo un algoritmo decisamente più efficiente per verificare se un dato numero è vincente o perdente; il metodo ha un'interessante similitudine con il Crivello di Eratostene, che ci permette di trovare tutti i primi in un certo intervallo.

Supponiamo di voler verificare se i numeri sino a 17 siano vincenti o perdenti; quello che sappiamo per certo è che 0 è un ***perdente***, e quindi lo scriviamo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☹																	

Aggiungendo un quadrato a 0 otteniamo $1,4,9,16$; questi sono numeri ***vincenti*** (in quanto Alberto può immediatamente lasciare a Fred un numero perdente), e quindi lo scriviamo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☹	☺			☺					☺							☺	

A questo punto sappiamo che il primo numero non etichettato deve essere ***perdente***, in quanto l'unica cosa che Alberto può fare con questo numero è lasciare a Fred un numero vincente, e quindi lo scriviamo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☹	☺	☹		☺					☺							☺	

Ma se 2 è perdente, Alberto dovrebbe lasciarlo a Fred, e quindi qualsiasi quadrato sommato a 2 è un numero ***vincente***, e quindi lo scriviamo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☹	☺	☹	☺	☺		☺			☺		☺					☺	

Il prossimo non etichettato (5) deve essere un ***perdente***... Procedendo come sopra, otteniamo alla fine:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹

Certe volte, comunque, le cose vogliono proprio andare storte...

Esempio 3: Alberto è rimasto con $n = 17$, che è perdente; niente da fare, vero?

Risposta 3: "Don't panic". Anche se in teoria la posizione è perdente, Alberto può sempre sperare che Fred non conosca la strategia vincente; quindi, la prossima mossa di Alberto dovrebbe servire a *confondere il più possibile Fred*; in questo caso, sarebbe poco saggio sottrarre 1, in quanto questo lascerebbe Fred con 16 che è in modo troppo evidente un numero vincente. In breve, per avere qualche speranza di vincere, Alberto dovrebbe giocare un numero *il più distante possibile dall'obiettivo*.

Possiamo definire la ***distanza*** di un numero n come:

1. Se $n = 0$, la distanza è, per definizione, pari a 0.
2. Se n è un numero ***vincente***, allora la sua distanza è *uno più della distanza minima tra tutte le possibili mosse verso le posizioni* **perdenti**.

3. Se n è un numero ***perdente***, allora la sua distanza è *uno più della distanza massima tra tutte le possibili mosse.*

La definizione qui sopra nasce dal fatto che, se ad Alberto è fornito un numero vincente, cercherà di vincere nel più breve tempo possibile; al contrario, se si ritrova con un numero perdente, cercherà di rendere la sconfitta la più remota possibile, sperando che Fred nel frattempo commetta un errore. Da cui la regola aurea:

Vinci alla svelta, perdi con calma

Per vedere come si calcola la distanza, supponiamo di aver calcolato i valori di distanza sino a 16 e di volerla calcolare per 17:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹	☺	☺	☹	☺	☹
0	1	2	3	1	2	3	4	5	1	4	3	6	7	3	4	1	

Ci sono 4 possibili mosse per $n = 17$, che portano ai valori $n = 16, 13, 8, 1$; i rispettivi valori di distanza sono $1, 7, 5, 1$, e quindi la distanza di 17 è maggiore di 1 rispetto al massimo tra questi valori, ossia vale 8. Quindi, la risposta alla nostra domanda è che comunque conviene muovere sul 13, che tra i possibili è quello con la distanza massima. Infine, notiamo che ai valori *dispari* della distanza corrispondono i numeri *vincenti*, mentre ai valori *pari* corrispondono i numeri *perdenti*.

La Donna di Wythoff

Due spiegazioni al prezzo di una! Di solito la prima versione si chiama semplicemente il ***Gioco di Wythoff***:

> Questa volta forniamo ad Alberto 2 interi positivi (che possono essere uguali tra di loro o distinti); prima di passarli a Fred, può scegliere tra due diverse mosse:
>
> 1. Sottrarre un intero positivo da uno dei due, oppure
> 2. sottrarre lo stesso intero positivo da entrambi
>
> Come prima, il primo che non può muovere, ossia che si ritrova con $(0,0)$, perde.

Se preferite giocarlo su una scacchiera, esiste un'interessante equivalenza con la ***Regina di Wythoff***:

> Una Regina è posizionata sulla scacchiera nella posizione (m,n); ogni giocatore, al suo turno, muovere la Regina in una delle tre direzioni verso la Casa $(0,0)$; il giocatore che arriva alla Casa vince.

Questa equivalenza ci permette di analizzare piuttosto facilmente il gioco: è infatti immediato che $(0,0)$ è ***perdente***, mentre i numeri della forma $(m,0),(0,m)$ e (m,m), permettendo di portare con una sola mossa alla Casa, sono ***vincenti***.

In particolare, se $(2,0),(0,1)$ e $(1,1)$ sono vincenti, allora $(2,1)$, dovendo forzatamente muovere in uno dei primi tre, sarà sicuramente ***perdente***; per simmetria, lo sarà anche $(1,2)$ A questo punto, tutti i valori che portano in una mossa a questo valore sono ***vincenti***: la loro forma è una delle $(m,1),(m,2),(m,m-1)$ con $m \geq 3$ per il primo valore, e i valori simmetrici per il secondo.

A questo punto, i punti liberi che possono solo portare a situazioni vincenti sono $(5,3)$ e $(3,5)$, che quindi saranno ***perdenti***; con lo stesso metodo si individuano quindi i vincenti che portano a questi valori, e avanti in questo modo

10	☺	☺	☺	☺					☺	☺	☺
9	☺	☺	☺	☺				☺	☺	☺	☺
8	☺	☺	☺	☺			☺	☺	☺	☺	☺
7	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	
6	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		
5	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺			
4	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺				
3	☺	☺	☺	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺
2	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
1	☺	☺	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
0	☹	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tabella 3: la Regina di Wythoff

La cosa è rappresentata nella ***Tabella 3***, almeno sino a questo punto: continuando nella stessa maniera, si vede che le posizioni perdenti sono $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,5)$, $(4,7)$, $(6,10)$, $(8,13)$... e simmetriche; in generale, per trovare la $i+1-esima$ posizione perdente, cercheremo il più piccolo intero k che non è ancora comparso nella sequenza (in prima o in seconda posizione); la posizione cercata avrà allora la forma $(k, k+i)$.

La prossima volta, guardiamo un film.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms