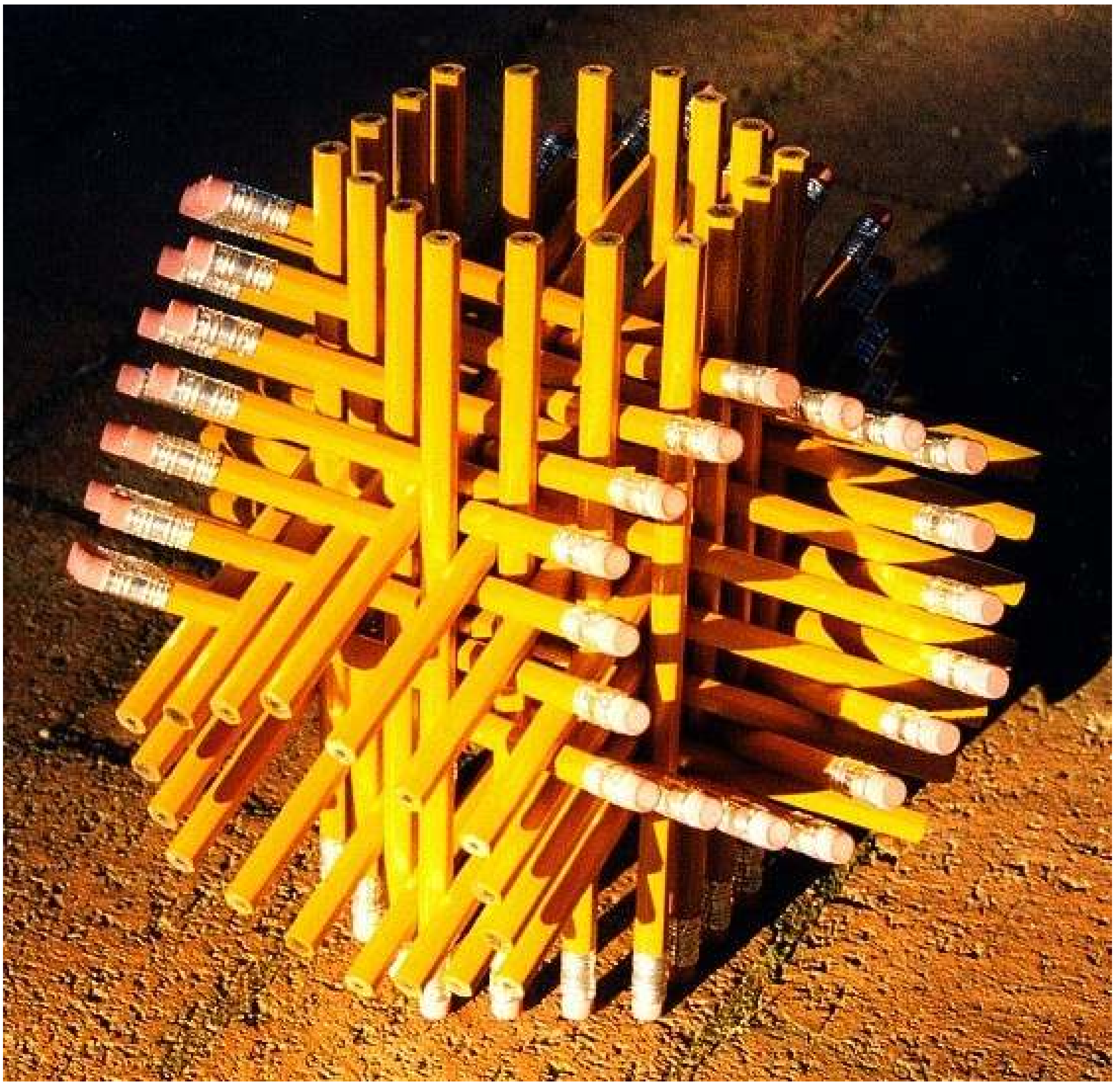
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 091 - Agosto 2006 - Anno Ottavo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 090 ha diffuso ***1073*** copie e il **31/07/2006** per Google eravamo in **19300** pagine.

George Hart, prima di diventare piuttosto monotono assemblando CD-ROM opportunamente tagliuzzati, aveva effettuato interessanti ricerche nell'ambito delle forme geometriche; ***72 Pencils***, prodotto in 25 esemplari, è una di queste: le 72 matite (esagonali) suddivise in gruppi (esagonali) si intersecano formando un reticolo difficilmente visualizzabile. La cavità al centro è un dodecaedro rombico, ossia una figura formata da 12 facce romboidali.

Pagando, è possibile richiedere all'autore un'edizione "dedicata" eseguita con matite di vostra scelta; l'unica richiesta è che siano a sezione esagonale e nuove.

1. Polenta d'estate

Cubum autem in duos cubos,
aut quadratoquadratorum in duos quadratoquadratos,
et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum
potestatem in duos euisdem nominis fas est dividere
cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi.
Hanc marginis exiguitas non caperet.
(Appunto a margine d'un libretto di aritmetica)

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet
(Motto d'una prestigiosa rivista
italiana di matematica ricreativa)

No, è proprio impossibile.

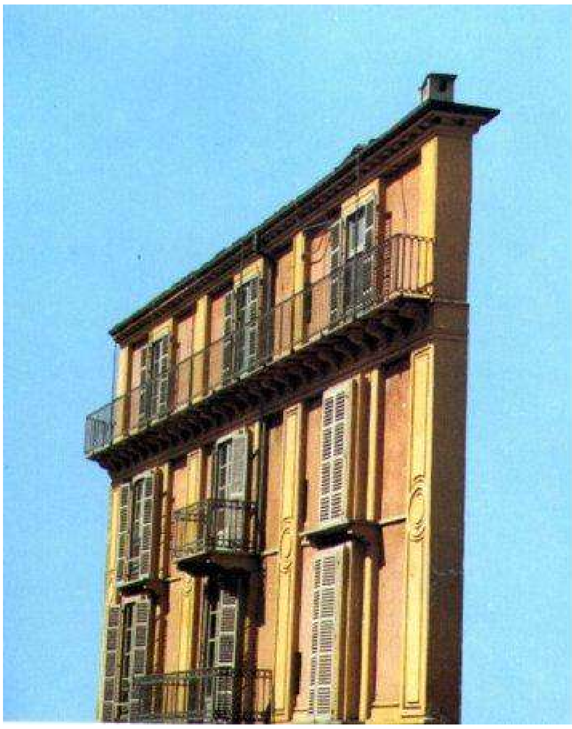
E per di più si tratta di autentica contraddizione in termini, e come tale senza alcuna speranza che la situazione possa cambiare in futuro, trasformandosi in "possibile". No, non è questione di metodo o di probabilità: è proprio che non si può. Non è dato spiegare come si possa ottenere una sorpresa; quantomeno, una sorpresa da vivere sulla propria pelle. La si può certo organizzare per altri: la si può provocare, la si può perfino imbastire come una trappola (anzi, è inevitabile che sia così: una trappola funziona solamente se scatta di sorpresa); ma non si può in alcun modo "spiegare" una sorpresa a qualcuno e sperare di salvaguardare l'effetto sorpresa proprio per quel qualcuno. "Fai questo, fai quello, guarda qui e poi gira di là – ecco che proverai la sorpresa!". No, niente da fare, è proprio impossibile. Se uno si aspetta una sorpresa, non prova mai una vera sorpresa.

Certo, se volessimo davvero tentare l'impresa, allora la prima raccomandazione sarebbe quella di percorrere la via da nord a sud, e non viceversa. È di importanza fondamentale, questo: lo spettacolo si può godere anche andando da mezzogiorno verso settentrione, certo, ma la sorpresa urticante e inebetente è possibile provarla solo scendendo da nord. La stessa direzione presa dai barbari che si apprestavano al sacco di Roma; la stessa strada diritta e tesa della bora e della tramontana; lo stesso percorso ardito del marinaio che snobba l'ago colorato della bussola e continua, imperterrito, a lasciarsi guidare solo dalla parte non dipinta dello strumento. Verso sud. E l'ideale sarebbe, naturalmente, farlo come se non ci fosse alcuna vera ragione per farlo; come se fosse una passeggiata casuale, non richiesta, tutt'altro che necessaria. Certo, alla fin fine la via da percorrere deve per forza essere Via Giulia di Barolo, e la città deve per forza essere Torino; ma tutto il resto viene meglio se non è torinese. Perché i torinesi si sorprendono raramente. Trovate una fotografia d'un piemontese con la bocca aperta dallo stupore, se ne siete capaci; mostrateci la mascella caduta di proprietà d'un sabaudo, o gli occhi dilatati ed esplosi di stupore d'un ventenne a Piazza San Carlo, se ci riuscite. Sono merce rarissima. La sorpresa stupefacente, a queste latitudini, ha la stessa statura e dimensione delle risate di Nero Wolfe, per il quale un'impercettibile piegatura dell'angolo della bocca equivaleva a grassa risata a squarciagola. Il torinese medio lascia vibrare il sopracciglio sinistro per una frazione di secondo, quando è percorso dall'emozione d'una sorpresa sconvolgente. E non si lascerà certo irretire da una sorpresa telefonata, delegata, insomma de-sorpresizzata, come quella trasportata da queste parole scritte.

E allora è meglio se a percorrere via Giulia di Barolo (da nord a sud) sia un non-torinese. Anche perché poi, tanto, i torinesi lo sanno benissimo cosa aspettarsi da quella via, e la sorpresa non sarebbe più neanche desorpresizzata, sarebbe solo inesistente. Un non-torinese, invece potrebbe davvero essere diretto per qualche ragione dal gasometro di Corso Regina[1] verso il centro della città. Potrebbe vagolare lentamente in direzione di Via

[1] Il Capo interferisce sempre e ci fa sapere che il gasometro è stato smontato. Ma il risultato non cambia.

Po, con l'intenzione di intercettarla a mezza altezza, o meglio ancora dalle parti di Piazza Vittorio. E potrebbe decidere di percorrere a piedi proprio via Giulia di Barolo, invece che via Vanchiglia o via Bava. Senza pensarci, passeggiando lentamente, magari diretto verso Palazzo Nuovo, trionfale obbrobrio architettonico d'una città che si meriterebbe un edificio migliore, per ospitare le facoltà umanistiche della sua nobile Università. Oppure no; l'ideale è forse un altro, forse è diverso. L'ideale è quello d'un turista fermamente deciso a visitare il Museo del Cinema nonché il più celebre edificio torinese che tutto lo contiene, la Mole Antonelliana. Questa sarebbe invero la situazione perfetta! Perché la sorpresa che cerchiamo di narrare – per quanto sia dimostrato che una sorpresa è per definizione inenarrabile – ha qualcosa il comune con il cinema del Museo del Cinema, e anche qualcosa in comune con la Mole dell'Antonelli. E allora sia questa la situazione al contorno: un turista solitario, in una mattina d'Agosto, che a piedi percorre via Giulia di Barolo diretto alla Mole Antonelliana. Con la verticalità della guglia già negli occhi, con la magia delle lanterne magiche e della finzione degli schermi già nel cuore. Pronto a immaginare edifici svettanti e fondali di cartapesta, vestiti di lustrini e giochi di ombre e di luci. Sarà allora davvero possibile, forse quasi probabile che, in prossimità dell'incrocio di corso San Maurizio, il nostro eroe cerchi di sbirciare fra i tetti per vedere la punta della Mole, ormai vicinissima. E potrebbe certo aver qualche difficoltà nel riuscirci, perché la via è stretta, gli edifici sono alti, e la porzione di cielo che si riesce a vedere non è poi così vasta. Anche e soprattutto per quell'enorme fondale cinematografico che toglie la visuale, parete gialla e rossa senza spessore, certo messa qui proprio a pubblicizzare il cinema, il suo museo, la sua finzione.



Ed è più o meno a questo punto, dopo aver partorito un pensiero frettoloso e inevitabilmente sbagliato, che la sorpresa dovrebbe esplodere. Ed esploderebbe davvero, se vi trovaste non a leggere un resoconto artificioso, ma in carne ed ossa in quella via e con il giusto stato d'animo. Perché una parte del cervello avrà certo registrato la visione del fondale da set cinematografico, ma un'altra parte, quella più lenta e meno emotiva, starà comunque cercando di comunicarvi che no, non ha proprio senso un "fondale" nel centro di Torino, neanche se si sta andando al Museo del Cinema, neanche se tutto intorno aleggia lo spirito d'Antonelli. E, come direbbe Sherlock Holmes, una volta appurato che il fondale non è un fondale, resta una sola possibilità, e cioè che il fondale sia un palazzo.

E lo è, infatti. E voi avete appena fatto la conoscenza dell'edificio più folle di Torino: la Fetta di Polenta. Non che alla Mole dispiacerà troppo cedere questo primato che spesso le viene frettolosamente attribuito; anch'essa è abbastanza strana e insolita[2], ma certo non così arditamente schizofrenica:

[2] Una delle cose più complicate, per il torinese che ospita parenti e amici in visita turistica, è spiegare cosa la Mole sia o non sia. La maggior parte dei visitatori suppone che si tratti d'una chiesa, una basilica, o qualcosa del genere, e per di più se la figura immancabilmente al centro d'una vasta piazza. In Italia non esistono poi tanti edifici monumentali che non siano chiese o rovine romane, e quindi la Mole è di difficile collocazione mentale e spaziale (anche perché invece si trova in una via abbastanza stretta). Comunque, la Mole nasce proprio come tempio religioso (israelitico), ma molto prima del completamento della costruzione la commessa decade, perché l'Antonelli vuole arrivare assai più in alto di quanto la comunità ebraica sia disposta a fare con

palazzo senza interno, facciata senza corpo, grattacielo ante- litteram e senza spessore. Quanto basta a finire di diritto nel Guinness degli edifici impossibili. Poi, in fondo, la Fetta di Polenta è pur sempre sorella della Mole, disegnata ed inventata dalla stessa mente coraggiosa e un po' temeraria: quella di Alessandro Antonelli. Più tardi, ad altre latitudini, ci sarebbero state perversioni architettoniche come il "facciatismo", o meglio il "façadisme" che in città come Bruxelles riuscirono a incollare facciate antiche e nobili, uniche sopravissute al tempo, attaccandole in maniera davvero posticcia a corpi di edifici moderni: archi romanici che danno la via a discoteche in vetro e acciaio, e così via, di male in peggio. Un critico d'arte al quale apparisse improvvisa e ignota la Fetta di Polenta potrebbe certo pensare a qualcosa del genere, un "façadisme" ancora incompleto, già pronto ad accogliere un corpo ipermoderno dietro la facciata ottocentesca. Ma invece no, non è solo facciata: è corpo sottile, certo; niente più d'una leggera vela in mattoni. Ma è anche contenitore, casa, focolare.

La storia (che si tramanda ormai quasi fosse leggenda) racconta del borgo Vanchiglia[3] di Torino quasi come fosse stata una vera "mosquito coast", subito fuori dal centro della vecchia città. Vi abbondavano solo le zanzare e i terreni paludosi, insomma; finché un bel giorno alcuni benemeriti cittadini vollero provare ad organizzare una bonifica, una riabilitazione della zona, costituendosi nella Società dei Costruttori che aveva l'intenzione di edificare quell'area malsana. Era il 1830, e Alessandro Antonelli era uno dei soci (anzi, in sostanza era il fondatore) della suddetta Società. I terreni del borgo erano stati a suo tempo divisi in lotti, e l'Antonelli ne possedeva due. Su uno, il più grande, costruì subito "casa Antonelli"[4], edificando una palazzina con portici in quello che sarebbe poi diventato corso San Maurizio; ma l'altro lotto era troppo piccolo e malformato per poter costruirci qualcosa. Era una specie di triangolo lungo e stretto, neanche buono per disegnarci un'aiuola: e allora l'architetto si mise alla ricerca di lotti contigui da acquistare. Ma, per quanto fosse socio benemerito e architetto già noto, nessuno volle vendergli della terra adiacente al suo lotto. Forse per dispetto, forse per invidia: forse solo per assenza di interesse, chissà. Di certo, il nostro interpreta quei rifiuti come un'offesa personale: si infuria e promette reprimende, ma alla fin fine si ritrova pur sempre con questa striscia di terreno del tutto inutile. A ben vederla, non la si può considerare neppure un vero triangolo, perché di fatto è un trapezio rettangolo molto allungato: l'altezza misura 25 metri, la base maggiore ("maggiore" per modo di dire) non più di cinque. La base minore, piccolissima, è di appena settanta centimetri.

la sua cupola. Viene infine completata come "*Monumento a Vittorio Emanuele II*", solo dopo che la proprietà dell'edificio giunge alla Città di Torino: ma non c'è nessuno, nemmeno tra le guide, che osi chiamarla così.

[3] Vanchiglia, nel 1700-1800, si chiamava "*'l moschin*" (il moscerino).

[4] Ci abitò anche Francesco Crispi.

Ci sono dei momenti in cui è inevitabile arrendersi di fronte alle difficoltà della vita. Solo alcuni spiriti indomiti continuano (spesso a torto) a combattere una battaglia ormai persa. Solo i geni e i pazzi, in certe condizioni, decidono invece addirittura di raddoppiare la posta in gioco. In quella striscia oblunga d'una settantina di metri quadri sarebbe stato comunque un trionfo costruire una stretta baracca, e invece l'architetto torinese sfida i colleghi, affermando che vi costruirà un edificio di sei piani. In questo ventunesimo secolo popolato di grattacieli alti centinaia di metri l'idea di costruire una casa di sei piani può non sembrare eccezionale, ma nella prima metà dell'Ottocento è quasi follia. Specie su un'area così piccola e ridicola, dove persino incastrare non certo un moderno ascensore, ma anche solo una semplicissima scala è impresa quasi impossibile. Ma ad Alessandro piace andare in alto, e piace farlo con il senso della sfida. Prima di ascendere, però, discende: scava le fondamenta, e scava tanto, tanto: va in profondità, così tanto in profondità come nessuno aveva ancora fatto prima, in città. E solo dopo aver fissato delle fondamenta profondissime che inizia finalmente l'ascesa. La casa impossibile comincia ad alzarsi in borgo Vanchiglia, su, su, sempre più su. Raggiunge infine i sei piani promessi, toccando i 27 metri di altezza; e rimane così, sottile e gialla come una fetta di polenta, ma in diritta in piedi, a differenza delle vere fette di polenta che si adagiano docili sul piatto. Anche a vederla oggi, dal lato "lungo", quello che dà su corso San Maurizio, sembra un edificio scherzoso, finto antico, tenuto su da cemento armato e non da calcoli di statica ottocentesca. Allora, nella prima metà di quel secolo tutto sommato razionalista, sembrava ancora e semplicemente una casa stregata, illogica, pericolosa. "Il primo serio vento delle Alpi la farà gonfiare come una vela e poi cadere in uno schianto di mattoni" - pensavano tutti: e nessuno osò andarci ad abitare. "Casa fatta con l'aiuto del diavolo, al solo scopo di vincere una scommessa, non certo per ospitare il focolare di gente per bene" - dicevano; e si guardavano bene anche solo di passarci vicino. Al punto che fu la stessa famiglia Antonelli che infine vi ci si trasferì, nei piani più alti e pericolosi, per mostrare che l'edificio era solido, sicuro e niente affatto stregato. E la casa in via Giulia di Barolo 9 prese infine proprio il nome della moglie di Antonelli, e divenne "Casa Scaccabarozzi".

A guardarla oggi, fa ancora impressione pensare che vi abbia abitato qualcuno[5], che qualcuno ancora vi abiti: la canna fumaria è incastrata nel lato corto, quello di settanta centimetri, mentre una scala a chiocciola piccolissima e ripida riesce a trovar spazio all'interno solo occupando la base più larga dell'edificio, quella larga ben cinque metri. Osservando le finestre, si nota subito che sono finestre strane, come se non fossero parte reale del muro, ma proiettate verso l'esterno, quasi appoggiate sulla parete: e hanno infatti un complesso sistema di carrucole, a guidarle, perché all'Antonelli non sfuggiva il fatto che i mobili non sarebbero mai riusciti ad entrare normalmente dalle porte ascendendo la scala a chiocciola, e doveva pertanto predisporre le finestre anche a quell'uopo[6]. Ma, anche se rimaneva presente una certa artificiosità nel disegno generale della casa, l'edificio era solido per davvero. Le sue fondamenta lo ancorano possentemente al pianeta, al punto che nel 1851, quando il Polverificio di Borgo Dora esplode, sono moltissime le case lesionate a Vanchiglia, ma la Fetta di Polenta non è tra queste. Altro che refoli di vento: nel 1887 il quartiere è quasi raso al suolo da un terremoto violentissimo, ma Casa Scaccabarozzi non ne risente, come non risentirà neppure dei bombardamenti della Seconda Guerra Mondiale. La Fetta di Polenta rimane lì, a sorvegliare il cantiere della Mole, che nascerà dopo di lei. E tutti coloro che l'avevano vista nascere non si stupirono per niente nel vedere l'altra costruzione dell'Antonelli crescere, crescere, crescere, mattone dopo mattone, fino a diventare l'edificio in muratura più alto del mondo. Era certo uno spettacolo di modernità e di audacia, quella guglia alta 165 metri, ma restava pur sempre meno strana della sorellina che si ergeva tra via Giulia di Barolo e corso san Maurizio.

---

[5] E vi abitarono nomi illustri, non solo l'Antonelli. Fu residenza di Niccolò Tommaseo, ad esempio, e una targa ancora ricorda l'evento e l'autore del primo dizionario italiano.

[6] …e all'uopo inverso: la mamma del Capo ricorda ancora lo svolgimento di un funerale alla Fetta di Polenta, con utilizzo del medesimo sistema di carrucole per far arrivare in strada il catafalco (RdA).

Per un certo periodo di tempo sono andati di moda dei giochi verbali abbastanza sciocchi, tutti catalogabili sotto il programmatico nome di "Se fosse…". Giochi probabilmente troppo liberi e privi di regole per essere realmente giocabili, per non parlare del fatto che, essendo totalmente opinabili, era sempre difficilissimo interpretarli a dovere. Nella loro forma più naturale, consistevano nel cercare di individuare un personaggio famoso dichiarando qualche tipo di libera associazione. Ad esempio, se il personaggio da indovinare fosse Napoleone, il Concorrente A potrebbe chiedere "Se fosse un fiore?", al che il povero Concorrente B dovrebbe dire il nome d'un fiore che, in qualche modo, possa ricordare il generale corso. Ovviamente, la risposta può essere totalmente variabile e imprevedibile[7], il che fa in modo che occorra una discreta dose di fantasia per giungere a conclusioni degne del senso comune. Se, perversione per perversione – visto che il periodo estivo ispira giochi leggeri e la temperatura abominevole è buona complice delle sciocchezze – decidessimo di associare in qualche modo edifici famosi a non meno famosi teoremi di matematica, quali associazioni potrebbe generare questo temerario "se fosse"?

Bisognerebbe forse partire dal Teorema di Pitagora: è senza dubbio il teorema più noto e più usato, oltre che di antichissima origine. Viene applicato così estensivamente che potrebbe essere ben rappresentato solo da edifici che siano ad un tempo nobili, antichi, e naturalmente squadrati: niente docili curve, solo solidi rettangoli o triangoli, per un teorema così dichiaratamente ortodosso e ortogonale. La scelta, insomma, non sembra essere troppo difficile: o si opta addirittura per una non-scelta, dichiarando che il teorema di Pitagora è brillantemente rappresentato da tutta l'edilizia del mondo, che dall'inizio dei tempi ne ha fatto larghissimo uso, oppure ci si deve dirigere ineluttabilmente sugli edifici più antichi, più colossali, più squadrati della storia dell'uomo: le Piramidi egizie. La Grande Piramide di Cheope potrebbe davvero essere una buona risposta alla domanda "Se fosse un edificio, che edificio sarebbe il Teorema di Pitagora?".

Ma non è sempre così facile, inventare una risposta. La dimostrazione di Euclide sull'infinità dei Numeri Primi è di una bellezza difficilmente raggiungibile: classico, antico, ma al tempo stesso sublime, sottile e rigoroso. E, come succede solo alle grandi costruzioni del pensiero, tale da lasciare con la sensazione che sia ancora più profondo di quanto già non appaia. Come si può sperare di trovare qualcosa, nell'architettura del mondo, che abbia tutte queste caratteristiche?

È forse impossibile; per forza, per necessità, occorre rinunciare a qualche aspetto pur di conservarne altri. Ed è in questa scelta che si perde l'oggettività del gioco, riducendo tutto a pura scelta soggettiva. Ad esempio, il tentativo di rappresentazione di chi scrive prova, in questo caso specifico, a

[7] Nel caso in esempio si potrebbe forse scegliere la rosa, perché Napoleone è stato re e la rosa è spesso definita regina dei fiori. Ma magari potrebbe andar bene anche un nontiscordardimé, perché è piccolo e Bonaparte era celebre per non essere un gigante. O forse la scelta potrebbe cadere sul giglio, visto che è stato a lungo il simbolo della monarchia francese, la quale, in qualche modo, è stata restaurata dal nostro. E così via, quasi all'infinito…

privilegiare la complessità del risultato del teorema (ma sacrificando così la celebrazione della divina semplicità del procedimento logico); a ricordarne l'antichità (ma perdendo così il senso di attualità che ancora possiede); ad esaltarne l'estensione (ma abbandonando così il senso intenso – certo profondo - della necessità logica).

In altre parole, il Teorema sui Primi di Euclide può (per il sottoscritto) essere ben rappresentato da Angkor Vat, ma sono davvero centinaia le alternative possibili. L'elemento cruciale della scelta, il grano che fa finalmente pendere la bilancia verso uno dei due piatti non più in equilibrio, è il modo in cui i templi di Angkor sono legati alla terra, invasi dalla giungla, ormai testimoni pienamente simbiotici tra vegetazione e pietra. Questo ricorda un po' la connessione sempre presente tra la realtà dei numeri che conosciamo e il loro decollo verso l'infinito; questa sorta di natura duplice – ma non ambigua - che solo loro riescono ad indossare senza imbarazzo. Il numero, specie il numero primo, è un "qui-ora" chiaro e lampante, ma è al tempo stesso un pezzo di infinito: come le pietre dei diecimila templi di Angkor, che sono certo pezzi di umana manifattura, ma ormai già coniugate e integrate nella giungla e nel tessuto del pianeta stesso.

Ma non tutti i teoremi sono così evocativi, e non vanno presi – né loro né le controparti architettoniche – con eccessiva serietà. In fondo, è sempre sufficiente una scusa qualsiasi, per giustificare un accoppiamento del genere: e la ricerca delle scuse e delle ragioni (più o meno realistiche) è la parte più divertente del gioco, che è infinito e ripetibile (e perfino più economico della Settimana Enigmistica). Il Teorema di Gödel mira ad eliminare le fondamenta stesse della matematica, con la dimostrazione di Incompletezza? Associamolo allora ad una casa che fondamenta non abbia, o che almeno sembri non averle.

Potrebbe andare bene la Casa sulla Cascata, di Frank Lloyd Wright? Quantomeno, il secolo di costruzione è lo stesso, sia per il teorema che per la casa; ma è altrettanto palese che un qualsiasi celebre edificio "incompiuto", o non più integro (come il Colosseo, per citare qualcosa di famoso) possono facilmente essere accettati come rappresentanti della gödeliana incompletezza matematica.

Il gioco è poi reversibile: ci si può interrogare non solo alla ricerca del miglior edificio in grado di "ospitare" il teorema (cosa potrebbe riprodurre la magica duplicazione delle sfere di Banach-Tarski? Quale sublime edificio potrebbe racchiudere la Formula di Eulero? In che modo potrebbe riconoscersi nei mattoni e nelle pietre l'Assioma della Scelta?), ma anche fare l'esatto contrario: dato un edificio notevole, quale teorema matematico ne viene più facilmente evocato?

Mettetevi alla prova con l'eleganza ingegneristica e ottocentesca della Tour Eiffel, che strappa vocali di ammirazioni ai turisti, ma che – come lo stesso Eiffel ammise – ha sostanzialmente il solo scopo di fornire alla bandiera francese un asta alta trecento metri. Riuscite a trovare un teorema che sia parimenti elevato, ben costruito, e comunque virtualmente privo di applicazioni? Oppure considerate il bianco e colossale splendore del Taj Mahal, eretto forse solo per amore di una donna; potrebbe bastare a ricordare l'Ipotesi di Riemann, o per tale gigantesca costruzione dell'umano ingegno bisogna tornare indietro, fino ai cerchi misteriosi (e mai spiegati) di Stonehenge? Il materiale per il gioco è quasi infinito: sono moltissime le costruzioni dell'uomo in grado di evocare visioni, e ancora di più i teoremi (soprattutto se contiamo anche quelli non ancora scoperti) che in qualche modo possono esservi ricondotti. Ciò non di meno, il gioco non deve necessariamente mirare a coinvolgere solo monumenti di fama universale. Ognuno di noi ha i propri luoghi (dell'animo e del pianeta), e il suo proprio giudizio insindacabile: e di solito, a cotanto potere di insindacabile e kantiano giudizio si accoppia anche una vigorosa faccia di bronzo. Facendo appello ad entrambe queste umane caratteristiche, non esiterò ad associare la Fetta di Polenta descritta nelle pagine precedenti a quello che è forse il teorema più popolare della storia della matematica: il Teorema di Fermat.

Con la dicitura generica di "Teorema di Fermat" intendiamo naturalmente quello che più propriamente è detto "Ultimo Teorema di Fermat[8]", e che solo da una manciata di anni può legalmente fregiarsi del titolo di "teorema". Per diversi secoli è rimasto relegato al mero grado di congettura. E, nonostante l'ottimo lavoro di Wiles che ha finalmente regalato all'UTF la dignità d'una dimostrazione, è forse proprio per il suo essere così a lungo congetturato e non dimostrato che possiede una smaccata somiglianza con la torinese Fetta di Polenta[9]. Tornate a guardare la prima foto della FdP, quella in cui più sembra un fondale cinematografico: vi sembra davvero un edificio completo (e quindi – a rigor di metafora – dimostrato) o solo una congettura edilizia? Non sembra piuttosto uno scherzo, una sfida, una presa in giro? E allora, ritornando di nuovo all'UTF, non vi è forse un senso di scherzo, di sfida, di presa in giro anche nella celebre nota a margine vergata dal francese?

Il libro dai margini troppo stretti è l'Arithmetica di Diofanto, e la nota è quella riportata in testa a questo articolo. Detto in termini più immediati, Fermat appunta che l'espressione

$$\mathbf{A^n = B^n + C^n}$$

non ha soluzioni intere per n>2 (…*nullam in infinitum ultra quadratum potestatem...).* L'osservazione è acuta e pregnante, ma è pura matematica. Non sarebbe mai diventata così travolgentemente celebre senza l'ingrediente più squisitamente umano, quello basato sul mistero e sulla sfida. Se anche coloro che mai hanno sopportato le lezioni di geometria conoscono il nome di Fermat, questo non è a causa di quell'espressione, ma solo per la misteriosa promessa veicolata dalle ultime parole dell'appunto: "*... cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."* Ovvero, come si direbbe oggi: "Di questo ho trovato una dimostrazione bellissima. Ma l'esiguità di questo margine è tale che non può contenerla".

Un guanto gettato in faccia al lettore, una sfida, insomma; e solo nel migliore dei casi. Perché nel peggiore, rischia di essere una feroce presa in giro. Per molto tempo, dopo che le migliori menti matematiche della storia avevano provato senza successo a trovare la fermattiana "demonstrationem mirabilem", è serpeggiato il sospetto che la mirabile dimostrazione non esistesse affatto, che la congettura fosse destinata a rimanere tale, grigiamente indimostrata, e che Fermat fosse un buontempone, per dirla con grande esercizio di eufemismo. In compenso, dopo il 1930 e la scoperta, grazie a Gödel, del concetto di indecidibilità di alcune espressioni matematiche, molti furono coloro che supposero che l'UTF potesse essere proprio un nobilissimo e vetusto esempio di asserzione indecidibile.

Quel che è tuttora fuori da ogni dubbio è che la dimostrazione che Andrew Wiles ottiene il 19 settembre 1994[10] del teorema più famoso del mondo è lontanissima dall'essere

[8] Talvolta abbreviato, dagli aficionados, con la sigla UTF.

[9] Che a questo punto, per puro spirito di imitazione, abbrevieremo con FdP. E faremo finta di non notare che è PdF allo specchio.

[10] In maniera definitiva: il primo tentativo, non perfettamente riuscito ma già chiaramente determinante, fu illustrato pubblicamente il 23 Giugno 1993.

contenibile in un margine, anche nel caso di margini belli larghi. È insomma così elaborata e complessa che è quasi più probabile che si possa scrivere tutta l'Arithmetica di Diofanto in margine alla dimostrazione di Wiles, piuttosto che il viceversa. Quindi, sicuramente, la "dimostrazione" di Fermat non è quella di Wiles (e non solo per mere questioni di spazio marginale, ma soprattutto per la qualità della matematica usata da Wiles), e pertanto la possibilità dell'errore, della presa in giro, continua a sussistere. Era davvero un teorema, per Fermat, l'Ultimo Teorema di Fermat? Era davvero una casa, per Antonelli, la sua impossibile casa Scaccabarozzi?

Difficile dirlo con certezza. Quel che è più facile asserire è che Pierre de Fermat nasce a Beaumont de Lomagne il 17 Agosto 1601. La città non è distante da Tolosa, ed è soprattutto quest'ultima città che celebra Fermat come uno dei suoi figli migliori. All'interno del suo famoso "Capitole" la statua del matematico (dove nostro viene rappresentato mentre viene stranamente vezzeggiato da una allegoria interpretata da una signorina non troppo vestita), recita: "Fermat, inventore del calcolo differenziale". Per quanto la diatriba sulla priorità della scoperta del calcolo sia solitamente limitata ai nomi di Newton e Leibnitz, bisogna riconoscere che oltre all'inglese e al tedesco, anche il francese ha qualche diritto da avanzare nella contesa. In ogni caso, è bene subito chiarire che Pierre Fermat[11] non fu matematico professionista: il suo titolo accademico è in giurisprudenza, e a Tolosa eserciterà proprio il mestiere di avvocato e di uomo politico. Siccome era certo uomo di intelligenza straordinaria, salì con nonchalance tutti i gradini della carriera professionale: eletto prima nella camera bassa, poi in quella alta del parlamento, giunse infine a presiedere la Corte di Giustizia criminale.

Ciò non di meno, è per la matematica che il suo nome è immortale: cominciò ad interessarsene in merito alla caduta dei gravi, perché riteneva di aver scoperto delle inesattezze nei lavori di Galileo: ne parlò con amici matematici professionisti, come Beaugrand, Carcavi e anche Mersenne. Nonostante l'inizio molto caratterizzato dalla matematica applicata, quest'ultima non affascinava Fermat in modo particolare, che si mise in evidenza subito dopo commentando un testo (puramente teorico, stavolta) di Apollonio sulle spirali. È nello studio di curve come queste che Fermat si mostra come matematico di estremo valore: né Mersenne né altri riescono a comprendere come riuscisse a risolvere problemi apparentemente insolubili, e Fermat mostrò agli amici dei metodi risolutivi estremamente vicini a ciò che oggi chiamiamo calcolo differenziale[12].

[11] Il suo nome originale: solo dopo l'assunzione di cariche pubbliche muterà il nome da "Pierre Fermat" passando al più nobile "Pierre de Fermat" (rinunciando così ad una bellissima coppia di iniziali per ottenerne in cambio una terna che sembra un logo della moderna pubblicista informatica. Pessimo affare.)

[12] Rivide il testo di Apollonio "Plane Loci" e intitolò il lavoro "Metodo per determinare i massimi, i minimi e le tangenti delle linee curve". Non si può dire che il titolo non sia indicativo, in merito alle disquisizioni sulla priorità della scoperta del calcolo.

Un dilettante, si diceva. Ma un dilettante che metteva in crisi Cartesio, segnalandogli inesattezze logiche nelle leggi della diffrazione da lui scoperte; e il padre della geometria analitica non fece fatica a capire che il lavoro su "Massimi e Minimi" di Fermat era un pericolosissimo concorrente della sua "Geometria" e perfino del suo "Discorso sul Metodo". Questo portò ad una inimicizia lunga e penosa tra i due geni francesi, e a lungo Descartes continuò a denigrare il lavoro del "dilettante". Come venne notato in seguito dal Boyer[13], non fu solo l'inimicizia di Cartesio ad offuscare la fama di Fermat: una delle ragioni per le quali Pierre venne quasi dimenticato e poi "riscoperto" diverso tempo dopo la sua dipartita fu la notazione che si ostinava ad usare. Era la notazione di Viete, a Fermat molto cara anche perchè era la più efficiente nella disciplina che il tolosano più amava: la Teoria dei Numeri. La cosa curiosa, e forse anche un po' triste, è che nel periodo in cui visse, la Teoria dei Numeri era considerata assai poco interessante. E così tutti i matematici contemporanei si guardarono bene dal trattarla, lasciando il dilettante di Tolosa solo nelle sue ricerche. Ma erano ricerche comunque fruttuose; una delle ragioni per le quali l'Ultimo Teorema è rimasto vivo nella mente dei matematici per quasi quattro secoli, anziché essere semplicemente accantonato come il delirio di un dilettante è che, con impressionante regolarità, si dimostrava che le congetture (ed erano molte) avanzate da Fermat erano quasi sempre sorprendentemente esatte. E allora non si poteva passare sotto silenzio un appunto come quello scritto in margine all'Arithmetica di Diofanto. Non si poteva lasciare passare sotto silenzio quasi nulla, di ciò che scriveva Pierre de Fermat.

Oggi, anche se la dimostrazione dell'UTF è parte della storia della matematica, resta il mistero assoluto su quale potesse essere la vera "dimostrazione del margine". Con ogni probabilità era una dimostrazione sbagliata: i geni più grandi della matematica, da Eulero in avanti, si sono cimentati[14] con la ricerca d'una dimostrazione "alla maniera di Fermat", e nulla che potesse essere scritta in *poco-più-d'un-margine* è stato trovato. Ma il teorema è comunque tale, e resta aperto anche il compito del nostro gioco estivo, quello di trovare un edificio che degnamente lo rappresenti. Finchè restava una congettura, poteva davvero andare bene la Fetta di Polenta, solida come una casa senza avere l'aspetto d'una casa; ma adesso che l'UTF è dimostrato, è ancora accettabile, l'ardito accoppiamento?

Forse sì. La forza della Fetta di Polenta è nelle sue fondamenta, e lo stesso vale per l'UTF. Fondamenta profonde, per sorreggere una parte esterna curiosa e stravagante.

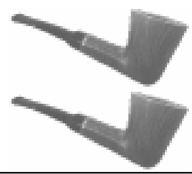
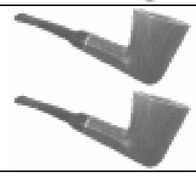
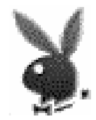
Ma solidissima.

[13] Carl B. Boyer, "Storia della Matematica" – Mondadori, Euro 15,00.

[14] E non solo i grandi: due lettori di RM – che è però assai riduttivo denominare solo in base al fatto di essere lettori di RM – sono stati protagonisti di quella che poteva essere un gran bel numero speciale della rivista. Il ***Dr.Oss*** è noto non solo in rete per aver pubblicato una dimostrazione "euleriana" dell'Ultimo Teorema di Fermat: il suo nome fuor d'allonimo è Andrea Ossicini, e la sua funzione speciale SHIN – necessaria per l'approccio alla sua dimostrazione euleriana dell'UTF, ha ormai raggiunto la dignità di pubblicazione accademica:
http://elib.mi.sanu.ac.yu/pages/browse_issue.php?PHPSESSID=e6e2115eaa43e86b95ba84f562650822&cs=000002&sv=00006

Parallelamente, il nostro ***Mistral*** (il cui nome vero è Roberto Volpe: lo sveliamo solo perché, al pari di quello del Dr.Oss, è facilmente deducibile seguendo i link riportai) a suo tempo analizzò con perizia la dimostrazione del Dr.Oss, fino a redigere un documento interessante che oggi è possibile trovare a questa url: www.matematicamente.it/numeri/ultimo%20teorema%20di%20fermat.pdf

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Calzini al Contrario			
Simmetrie Zurighesi, ovvero il Geomag di Neanderthal			

2.1 Calzini al contrario

Uno dei nostri "Quick & Dirty" preferiti non è mai stato pubblicato, in quanto è arcinoto nel mondo della ricreazione matematica:

> *In un cassetto ci sono un certo numero di calzini blu e un certo numero di calzini rossi; voi siete al buio, e vorreste uscire di casa con i calzini dello stesso colore. Quanti ne estraete dal cassetto per essere sicuri che almeno due siano uguali?*

Se non lo conoscete, per punizione provate a risolverlo.

Comunque, il problema è un altro: infatti un mattacchione, qualche tempo fa, ha "girato al contrario" la cosa. Quanti calzini (rossi e blu) ci sono come minimo, nel cassetto se, estraendone due a caso:

1. La probabilità che siano entrambi rossi è 1/3 e la probabilità che siano entrambi blu è 1/6
2. La probabilità che siano entrambi rossi è 1/2 e la probabilità che siano entrambi blu è 1/12
3. La probabilità che siano entrambi rossi è 1/2 e la probabilità che siano entrambi blu è 1/14

Non solo, ma qualche tempo dopo aggiungete un certo numero di calzini verdi; indipendentemente dalle nostre considerazioni sul vostro pessimo gusto nella scelta dei colori, quanti calzini (rossi, verdi e blu) ci sono nel cassetto (sempre come minimo) se, estraendone due a caso:

1. La probabilità che siano entrambi rossi è 1/3 e la probabilità che siano entrambi blu è 1/15
2. La probabilità che siano entrambi rossi è 1/5 e la probabilità che siano entrambi blu è 1/15
3. La probabilità che siano entrambi rossi è 1/6 e la probabilità che siano entrambi blu è 1/12
4. La probabilità che siano entrambi rossi è 1/8 e la probabilità che siano entrambi blu è 1/12

Se volete divertirvi, potreste provare a vedere quanti calzini per tipo ci sarebbero se, genericamente, le probabilità di estrazione fossero $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$, sempre per entrambi i casi.

...e poi la gente si chiede perché tutti i miei calzini sono bianchi...

2.2 Simmetrie Zurighesi, ovvero il Geomag di Neanderthal

Come raccontiamo probabilmente in altre parti della rivista[15], in quel di Zurigo si è svolto il Comitato di Redazione di una prestigiosa rivista di matematica ricreativa; abbiamo mangiato, bevuto, discusso di cosa *non* mettere in RM prossimamente (alcuni redattori non riescono a pensare positivo, e Rudy è troppo buono...) e abbiamo trovato abbastanza tempo da visitare il Museo dei Giocattoli (se passate da quelle parti vale la pena: è in Fortunagasse, ed è gratuito) e un negozio sullo stesso tema ("Rien ne va plus": per l'indirizzo chiedete ad Alice).

"...E a noi?" Beh, Rudy ha fatto acquisti (anche perché doveva un favore a Fred), e ha trovato l'antenato del Geomag!

Il kit è formato da una serie di tubicini di ottone, filo di ottone e filo "normale", e risponde al nome di "Platonische Korpen"; l'idea è quella di montare i solidi platonici (e non solo) usando i tubicini tenuti assieme dal filo di ottone, simulando poi eventualmente le sezioni con il filo normale; l'idea di Rudy (non sappiamo ancora quella di Fred) è che valga decisamente la spesa (non si dice: è un regalo!); unico guaio, il manualetto (una ventina di pagine) in tedesco, ma con abbastanza figure da capire chi è l'assassino.

Prima comunque vi consigliamo di decidere dove li metterete, una volta costruiti: gli oggetti tridimensionali hanno la pessima abitudine di occupare molto più spazio delle loro componenti monodimensionali disassemblate. Rudy, in merito, sta pensando di riciclarli per la nuova casa[16] come lampadari, e la cosa ha fatto sì che si ponesse un interessante problema.

Supponiamo di avere a disposizione alcuni LED (con le lampadine diventa pericoloso) e di volerli mettere sui vertici dei nostri aggeggi per costruire dei lampadari; decidiamo di metterne ***tre*** per ogni solido platonico, quando ci poniamo il problema di *come mettere i LED*.

Almeno per Rudy, questo problema (come tutti quelli che finiscono con la frase "a meno di rotazioni e riflessioni"), porta brutti ricordi (il calcolo clamorosamente sbagliato del numero delle partite di *filetto*, casomai vi interessasse) e quindi ha il cervello che tende a spegnersi, in questi casi; più che un approccio *forza bruta* non gli viene in mente.

Ma secondo voi, con tre LED, quante configurazioni diverse ("a meno di..." eccetera) si possono ottenere su un solido platonico?

Conoscendo il vostro amore per le estensioni e l'abilità di Rudy nei lavori manuali, abbiamo la ragionevole certezza che presto i LED si ridurranno a ***due***; in questo caso, quante sono le configurazioni?

Purtroppo, questi tubicini non funzionano per dimensioni superiore al tre; altrimenti c'era da ridere, coi calcoli...

---

[15] Solita frase per farvela leggere tutta. A margine: quanti di voi hanno capito che voto ha preso Alberto all'esame? Lo ammettiamo, era molto ben nascosto. Rudy è convinto che si poteva fare meglio (Alberto, non noi).

[16] Siamo in fase di ricerca: restiamo a Torino, cambiamo solo zona. Giusto per raccontarvi come andrà a finire, segue dialogo tra Rudy e Paola (sua moglie):

Paola: "Ho visto un appartamento molto carino"
Rudy: "Egoisticamente, c'è una camera utilizzabile come studio?"
Paola: "Non proprio..."
Rudy: "Uno sgabuzzino riciclabile?"
Paola: "È piccolo..."
Rudy: "Insomma, un loculo"
Paola: "Solo se stai rannicchiato"

3. Bungee Jumpers

Provare che i due polinomi:

$$x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + 6x^{2216} + \ldots + 2218x^4 + 2220x^2 + 2222, \qquad [3.1]$$

$$x^{250} + x^{249} + \ldots + x^2 + x + 1 \qquad [3.2]$$

non possono essere scritti come il prodotto di due polinomi a coefficienti interi.

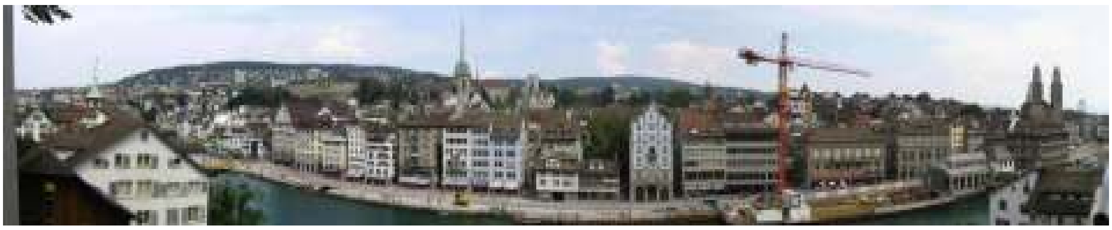
La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Se leggete queste righe significa che ancora il mondo non è crollato e RM di agosto 2006 è riuscito ad arrivare nelle vostre mailbox e in rete. Secondo noi questo è decisamente un risultato non da poco, visto che il mese di luglio ha visto un certo numero di eventi assolutamente unici e imprevedibili.

In primo luogo a luglio si sono svolti e conclusi i mondiali. Evento notoriamente poco matematico, ma vissuto pericolosamente anche da noi della Redazione: in particolare il Capo ha pensato di trovarsi proprio in Francia durante la finale con i transalpini, e mentre il maggiore dei Validi Assistenti di Laboratorio scopriva le delizie delle giovani francesi, il temerario genitore salvava il resto della famiglia *[in realtà anche Alberto necessitava di salvataggio: dalla nonna della bella Audrey (RdA)]* da linciaggio prima dei rigori.

Secondariamente, la Redazione si è riunita, e non solo, si è riunita in trasferta per un intero fine-settimana in quel di Zurigo. Foto di repertorio sono state scattate, ve ne forniamo una sola per mostrarvi il numero più grande possibile dei luoghi della visita:



Come potete facilmente immaginare, l'imprevedibile Redazione ha visitato tutti i negozi di giochi in città, *[Anche qui, per farvi leggere proprio tutto, vi diciamo che se ne parla in altra parte della rivista, ma vi anticipiamo che di negozi di giochi per i grandi ce ne sono parecchi, a Zurigo (RdA)]*, il museo del giocattolo e un certo numero di luoghi per la rivendita di alcolici. Considerando che la Redazione non si incontrava in carne e ossa da gennaio, c'è da stupirsi che a Zurigo si trovi ancora della birra

Se speravate di vedere i loschi figuri e vi aspettate ora di sentirvi dire che sono dietro la macchina fotografica, preparatevi ad un'ulteriore sorpresa. Ebbene sì, i tre sono apparsi in foto su una secondaria rivista di astronomia[17], foto appunto scattata durante lo scorso CdR[18]. Il Doc aveva improvvidamente inviato la foto ad amici e parenti, con la conseguenza che adesso le bellissime foto pubblicate sul nostro sito non sono più le uniche in circolazione della Redazione.

[17] Per definizione, esiste una sola rivista "primaria", che è RM. Tutte le altre sono al massimo secondarie, se non direttamente terziarie, quaternarie, etc. Quella in questione è "Coelum", a cui facciamo il complimento di essere seconda solo ad RM anche in quanto gli uomini di RM vi contribuiscono con un'intera pagina in ogni numero. E nel numero di luglio, con addirittura due interventi…. E foto della non-consenziente Alice.

[18] Vi ricordate? Ne abbiamo parlato a febbraio, essendo avvenuto a gennaio...

Per una questione di giustizia (e perché il nostro Capo è vanitoso e vuole assolutamente farlo) vi lasciamo quindi intravedere la foto di repertorio in questione. Da sinistra a destra, Alice, il Capo con faccia da lisergico[19], il Doc.

La triade redazionale al completo appare per la prima volta ufficialmente su RM *[In realtà il Capo è gia comparso in RM, ma non lo troverete mai (RdA)]*, solo perché ci sembra estorsione farvi comprare l'altra rivista per poterci vedere, ma se siete interessati al genere, potreste in questo modo marginalmente contribuire anche alla tragica situazione finanziaria dei poveracci in foto.

Sì, lo sappiamo, siete ancora tutti in vacanza, e RM è l'unica rivista che esce nel mese di canicola... beh, avremo almeno qualche merito, a parte essere gratuiti! Per esempio contribuiamo ogni mese a farvi scoprire nuove frontiere non solo della matematica, ma anche di etimologia. ***ElBeppe*** ha colto la sfida nell'ultimo compleanno sui "Palmenti":

> Rileggendo l'editoriale del numero 90, ho incontrato, in una nota, una curiosità da soddisfare, se siete interessati. Ebbene, nella nota menzionata si chiedevano spiegazioni sul fatto che si dicesse "Mangiare a quattro palmenti", e su cosa fossero questi palmenti.
>
> Cominciamo proprio da quest'ultimi: "palmento" ha la stessa radice di pavimento, ed un significato simile. Il palmento è il suolo di terra battuta, dove generalmente si camminava, e, per somiglianza, il terreno sul quale rotolava la macina del mulino. Per estensione il palmento è giunto ad indicare il mulino stesso.
>
> Da qui arriviamo al detto: originariamente era "mangiare a DUE palmenti", col significato di abbuffarsi all'inverosimile, ovvero di approfittarsi avidamente e ingordamente delle situazioni. Come spesso accade, passando di bocca in bocca, il detto ha subito la modifica che avete riportato nella nota, ma il significato rimane lo stesso.
>
> Curiosamente, gli etimologi considerano i due palmenti menzionati non come mulini, quindi fonte di cibo, ma come i lati della bocca, il che fa assumere al detto il significato di mangiare con la bocca piena (e non a bocconi piccoli come ci dice sempre la mamma :-)).

Il Doc, che è senza dubbio il nostro esperto del ramo, ha sentenziato:

> (...) ci sentiamo di confermare ogni parola. Poi, a bene vedere, il passaggio di significati (palmento-pavimento-pavimento del mulino-mulino) abbisogna solo di due ulteriori passaggi elementari (... - mulino - macina del mulino - bocca ingorda che macina ogni cosa), perché è frequente il parallelo tra la bocca mai ferma di un masticatore e una macina di mulino.
>
> Sul DUE, è abbastanza chiaro il senso: così come dice, di coloro che vivono troppo in fretta, che "bruciano la candela da due lati", i due palmenti erano le macine che attaccavano il cibo una da una parte e una dall'altra.
>
> L'ultimo passaggio, da "due" a "quattro", credo sia un'ulteriore esagerazione, magari immaginata da qualcuno che si figura il cibo mangiato non solo "a sinistra" e "a destra", ma contemporaneamente anche da "sopra" e da "sotto".

[19] *Non è una faccia da lisergico, è da ciccione sdraiato sul braccio rotto! (RdA)*

Nel nostro piccolo, in RM abbiamo due mangiatori professionisti e uno che non mangia quasi mai, ma quando lo fa raggiunge forme epiche: il Capo. No, non nel senso che mangia molto, ma che è talmente poco abituato a farlo, che straparla. Nell'ultima occasione citava a memoria parti del *Gargantua e Pantagruele* di *Rabelais*, che (ve l'avevamo detto di quanto è vanitoso?) lui ha letto direttamente in Francese Medievale, ma qui vi passiamo nella meravigliosa traduzione di Bonfantini. Ebbene sì, una piccola citazione dal nostro CdR estivo, così capite di cosa si è parlato...

> *"(...) Un altro lo vidi accompagnato da un gran numero di donne in due bande: l'una di giovani ragazzette, visparelle, tenerelle, biondinette e graziosine e di buona volontà, a quanto pareva; l'altra di vecchie sdentate, cispose, rugose, nerastre, cadaveriche. E fu detto a Pantagruele che quello rifondeva le vecchie, facendole così ringiovanire e divenire coll'arte sua tali quali erano le ragazzette là presenti, che egli aveva appunto quel giorno rifuse e interamente rimesse in quella beltà, forma, eleganza, grandezza e proporzione di membra, come erano sull'età dai quindici ai sedici anni: eccettuati soltanto i talloni, i quali restavan loro troppo più corti di quanto li avevano avuti nella loro prima gioventù. E ciò era causa che d'ora in avanti, ad ogni incontro d'uomo, sarebbero state molto soggette e facili a cascare all'indietro. (...)"*

Di più non vi diciamo, che ci siamo già abbastanza sbottonati.

4.1 [088]

Finalmente in questo capitolo la soluzione di ***Cid*** in tutte le sue parti. Per motivi di spazio la pubblichiamo a tutto margine, e ci aspettiamo i vostri commenti per il prossimo numero....

4.1.1 Festa di RM, o meglio: Dove sono le vostre scatole?

Premessa

Il numero di soluzioni valide è molto elevato, pertanto avevo inizialmente pensato di esporre almeno tre soluzioni differenti e mostrarne le caratteristiche che permettono di generalizzare la soluzione ad un differente numero di abbonati. Per problemi di tempo, mi devo invece limitare a presentarvi una sola soluzione (accennerò solo di sfuggita ad altre soluzioni possibili).

Dopo avervi mostrato come generalizzare la soluzione, vi spiegherò anche perché tra le tante possibili soluzioni ho scelto proprio questa.

Soluzione

Una soluzione valida è la seguente:

- nel primo gruppo metto oltre a Piotr (numero d'iscrizione 0) e al lettore con numero d'iscrizione uguale a 3, anche tutti i lettori aventi numero d'iscrizione maggiore di 3 e tale che il numero d'iscrizione scritto in base 2 si scriva con un numero dispari di zeri.
- nel secondo gruppo metto oltre al lettore con numero d'iscrizione uguale a 1 e al lettore con numero d'iscrizione uguale a 2, anche tutti i lettori aventi numero d'iscrizione maggiore di 3 e tale che il numero d'iscrizione scritto in base 2 si scriva con un numero pari di zeri.

N.B. La presenza del numero 3 nel primo gruppo e del numero 2 nel secondo gruppo pare anomala, ma vedremo successivamente la ragione di questa anomalia.

Con tale soluzione, abbiamo che:

- io avendo numero d'iscrizione uguale a 274 non appartengo al gruppo di Piotr, (274 in base 2 si scrive così: 100010010, ed ha quindi un numero pari di zeri).

- Ultimo (#2001) appartiene al mio stesso gruppo (2001 in base 2 si scrive così: 11111010001, ed ha quindi un numero pari di zeri)
- Il numero #1000 mangia più pasticcini di tutti gli altri,

Vediamo perché: chiaramente se un numero pari appartiene a un gruppo, il numero dispari successivo appartiene all'altro gruppo in quanto sommare 1 in base 2 equivale a cambiare l'ultimo 0 con un 1 e quindi a cambiare la parità del numero di zeri. Pertanto ciò significa che vi sono altri 500 lettori che appartengono al gruppo del numero #1000 che hanno un numero d'iscrizione minore di 1000.

Il numero #1000 mangia 1000 pasticcini per ognuno di questi 500 lettori in quanto la somma dei numeri risulta minore di 2000, inoltre mangia 2000 pasticcini della scatola 2000 in quanto 1000 è la metà di 2000.

In totale si mangia 502000 pasticcini, e risulta piuttosto semplice verificare che nessun altro lettore riesce a mangiare un numero simile di pasticcini.

In generale, il numero di pasticcini che mangia il lettore con numero d'iscrizione N si calcola così:

se N<1001 e N è un numero pari, (oppure è un numero dispari e (2001-N) appartiene allo stesso gruppo di N)

$$2 * N + N * \left(1000 - Int\left(\frac{N}{2}\right)\right)$$

se N<1001 e N è un numero dispari e (2001-N) non appartiene allo stesso gruppo di N

$$2 * N + N * \left(999 - Int\left(\frac{N}{2}\right)\right)$$

se N>1000 e N è un numero pari, (oppure è un numero dispari e (2001-N) appartiene allo stesso gruppo di N)

$$N * \left(1001 - Int\left(\frac{N}{2}\right)\right)$$

se N>1000 e N è un numero dispari e (2001-N) non appartiene allo stesso gruppo di N

$$N * \left(1000 - Int\left(\frac{N}{2}\right)\right)$$

Tutte queste formule risultano facilmente generalizzabili per un numero differente di abbonati, purché sia un numero dispari e maggiore di 5.

Ed è proprio questa una ragione per cui ho scelto proprio questa soluzione tra le tante possibili. Un'altra ragione è il fatto che in tal modo i due gruppi non solo estrarranno dalle scatole lo stesso numero di vassoi, ma mangeranno anche lo stesso numero di pasticcini. La dimostrazione di ciò ve la scrivo con la descrizione della generalizzazione.

Generalizzazione

Una soluzione generale è la seguente (valida nel caso in cui il totale dei lettori sia un numero dispari e maggiore di 5):

- nel primo gruppo metto oltre a Piotr (numero d'iscrizione 0) e al lettore con numero d'iscrizione uguale a 3, anche tutti i lettori aventi numero d'iscrizione maggiore di 3 e tale che il numero d'iscrizione scritto in base 2 si scriva con un numero dispari di zeri.

- nel secondo gruppo metto oltre al lettore con numero d'iscrizione uguale a 1 e al lettore con numero d'iscrizione uguale a 2, anche tutti i lettori aventi numero d'iscrizione maggiore di 3 e tale che il numero d'iscrizione scritto in base 2 si scriva con un numero pari di zeri.

(N.B. Se il numero di lettori non fosse maggiore di 5, non esisterebbe la scatola numero 6 e quindi il lettore #3 non potrebbe estrarre dalla scatola numero 6 il vassoio con 6 pasticcini)

Dimostrazione

Cominciamo con il verificare cosa succede senza l'anomalia dello scambio di gruppo tra il 2 e il 3.

Chiamo D un generico numero dispari del primo gruppo.

Chiamo P un generico numero pari del primo gruppo.

Risulta facile verificare che entrambi i gruppi mangiano lo stesso numero di pasticcini, in quanto:

per ogni vassoio contenente un numero dispari di pasticcini

alla coppia (D,P) del primo gruppo corrisponde la coppia (D-1,P+1) dell'altro gruppo

Infatti, togliere 1 ad un numero dispari (in base 2 cambia la parità del suo numero di zeri); mentre aggiungere 1 ad un numero pari (in base 2 cambia la parità del suo numero di zeri).

per ogni vassoio contenente un numero pari di pasticcini

chiamo A il gruppo a cui appartiene k e chiamo B l'altro gruppo

Caso 1) k è un numero pari

per avere un totale di 2•k comincio con il provare con la coppia (k-1, k+1) essendo k un numero pari che appartiene al gruppo A, allora k+1 appartiene al gruppo B; quindi o appartengono entrambi al gruppo B e si mangiano insieme 2•k pasticcini oppure uno appartiene al gruppo A e l'altro appartiene al gruppo B.

se k-1 appartiene al gruppo A, allora essendo k-1 dispari abbiamo che k-2 appartiene al gruppo B e quindi o (k-2) e (k+2) appartengono entrambi al gruppo B e si mangiano insieme 2•k pasticcini oppure uno appartiene al gruppo A e l'altro appartiene al gruppo B

E ripetendo questo ragionamento dimostro l'alternarsi dei gruppi, ora per dimostrare che i 2 gruppi mangiano lo stesso numero di pasticcini devo dimostrare anche che l'ultima coppia con somma uguale a 2•k appartiene al gruppo B.

Noto che (in base 2) moltiplicare un numero per 2 significa aggiungere uno zero in fondo e quindi cambiare la parità del numero di zeri; per cui se k non appartiene al gruppo di Piotr allora (2•k) appartiene al gruppo di Piotr e insieme a Piotr si prende il vassoio con 2•k pasticcini, se invece k appartiene al gruppo di Piotr, allora 2•k non appartiene al gruppo di Piotr, e l'ultimo vassoio viene quindi preso o da 2•k-1 insieme al numero 1 o da un'altra coppia che non appartiene al gruppo di Piotr in quanto con ragionamento analogo a quanto gia esposto sopra ad ogni incremento di un pari o decremento di un dispari vi è sempre almeno un elemento della coppia che non appartiene al gruppo di Piotr.

Caso 2) k è un numero dispari

È analogo al caso 1

Non so se tutto ciò vi risulta abbastanza chiaro, comunque io vado avanti e spiego l'anomalia dello scambio tra il 2 e il 3.

Se uso la soluzione appena descritta ho che i due gruppi mangiano lo stesso numero di pasticcini, ma siccome quel "dispettoso" di Piotr estrae anche un vassoio contenente 0 pasticcini, il gruppo di Piotr estrae un vassoio in più.

Ora, cosa succede scambiando di posto il 2 e il 3; chiamando T il totale dei lettori, il numero di pasticcini che mangia il lettore con numero d'iscrizione N vale:

se N<(T+1)/2 e N è un numero pari, (oppure N è un numero dispari e (T-N) appartiene allo stesso gruppo di N)

$$2 * N + N * \left(\frac{T-1}{2} - Int\left(\frac{N}{2} \right) \right)$$

se N<(T+1)/2 e N è un numero dispari e (T-N) non appartiene allo stesso gruppo di N

$$2 * N + N * \left(\frac{T-3}{2} - Int\left(\frac{N}{2} \right) \right)$$

se N>(T-1)/2 e N è un numero pari, (oppure è un numero dispari e (T-N) appartiene allo stesso gruppo di N)

$$N * \left(\frac{T+1}{2} - Int\left(\frac{N}{2} \right) \right)$$

se N>(T-1)/2 e N è un numero dispari e (T-N) non appartiene allo stesso gruppo di N

$$N * \left(\frac{T-1}{2} - Int\left(\frac{N}{2} \right) \right)$$

Da queste formule è facile vedere che i due gruppi dopo lo scambio del 2 con il 3 continuano a mangiare lo stesso numero di pasticcini, ma il gruppo in cui finisce il 3 lo fa estraendo un vassoio in meno; ma occorre notare che il numero 3 finisce nel gruppo di Piotr per cui questo vassoio in meno si compenserà con quel vassoio in più estratto da quel "dispettoso" di Piotr. (...)

In generale, per costruire delle soluzioni valide per un numero T di lettori, se ne può cercare una per un numero basso di lettori e poì utilizzare il seguente teorema:

Teorema

Ho scoperto che vale la seguente regola se il totale dei lettori è un numero dispari:

se ho una soluzione valida per M lettori, allora una soluzione valida con (M+2) lettori è la seguente: aggiungo il lettore con numero (M+2) al gruppo a cui appartiene $\frac{M+1}{2}$ ed aggiungo il lettore con numero (M+1) all'altro gruppo.

Dimostrazione

Consideriamo di avere una soluzione valida per M lettori (con M dispari), affinché la soluzione sia valida anche con (M+2) lettori occorre che:

1) il totale delle coppie dei due gruppi che diano somma uguale a (M+2) sia uguale nei 2 gruppi

2) il totale delle coppie aventi somma uguale a (M+1) nel gruppo in cui è presente il numero $\frac{M+1}{2}$ sia inferiore di 1 al totale delle coppie aventi somma uguale a (M+1)

nell'altro gruppo in quanto l'elemento $\frac{M+1}{2}$ si prende da solo un vassoio contenente (M+1) pasticcini.

Risulta facile notare che la regola 1 risulta sempre rispettata comunque siano formati i gruppi, infatti tra 0 e (M+2) vi sono $\frac{M+3}{2}$ coppie aventi somma uguale a (M+2) cioé tutti i numeri dei due gruppi fanno potenzialmente parte di una coppia. Se in uno dei 2 gruppi vi sono K elementi che non hanno il loro complemento a (M+2) all'interno del gruppo, ciò significa che tale elemento mancante si trova nell'altro gruppo e quindi anche l'altro gruppo ha K elementi che non formano una coppia avente somma uguale a (M+2). Da cui si ricava che il numero di coppie aventi somma uguale a (M+2) è uguale nei 2 gruppi.

Per la regola 2 conviene notare che non esiste alcun elemento che possa avere somma uguale a (M+1) se viene sommato a (M+2), pertanto conviene mettere (M+2) nel gruppo in cui si trova $\frac{M+1}{2}$ in modo tale che se k elementi dell'altro gruppo non hanno il loro complemento a (M+1) all'interno del loro gruppo, nel gruppo di $\frac{M+1}{2}$ gli elementi che non formano una coppia saranno in numero uguale a: k + (l'elemento $\frac{M+1}{2}$) + (l'elemento (M+2)) = k + 2

pertanto l'altro gruppo avrà una coppia in più compensata dal fatto che $\frac{M+1}{2}$ si prende da solo un vassoio contenente (M+1) pasticcini.

Quindi risulta dimostrato che assegnando (M+2) al gruppo di $\frac{M+1}{2}$ e (M+1) all'altro gruppo ottengo una soluzione valida con (M+2) lettori.

Considerazioni finali

Mi pare interessante notare che se il testo del problema fosse stato:

"[...] *quel perfido di Rudy ha definito i gruppi in modo tale che data una scatola, ogni gruppo in totale estragga da quella scatola lo stesso numero di **pasticcini***".

allora la soluzione del problema sarebbe stata particolarmente interessante.

(forse il Gran Capo nella sua correzione al testo del problema voleva appunto mettere la parola *pasticcini* e non la parola *vassoi*, infatti lo stesso numero di vassoi non può essere estratto nei due gruppi dalla scatola con numero uguale a 0, nel gruppo di Piotr avremo che Piotr estrae da questa scatola un vassoio con 0 pasticcini e nell'altro gruppo contenente solo numeri positivi non ci sarà nessuno che potrà estrarre vassoi dalla scatola con numero 0).

Se ogni gruppo deve estrarre da ogni scatola lo stesso numero di pasticcini, si ricava dal teorema appena dimostrato che per ogni elemento positivo con valore uguale a m, l'elemento con valore uguale a $(2 \cdot m)$ dovrà appartenere all'altro gruppo e l'elemento $(2 \cdot m + 1)$ dovrà appartenere allo stesso gruppo.

Da cui, notando che in base 2 moltiplicare per 2 equivale ad aggiungere uno zero in fondo al numero si ottiene che:

- il gruppo di Piotr conterrebbe tutti i numeri che si scrivono in base 2 con un numero dispari di zeri,

- l'altro gruppo conterrebbe tutti i numeri che si scrivono in base 2 con un numero pari di zeri.

(La soluzione assomiglia molto a quella del problema originario, ma con il vantaggio di non presentare anomalie e di essere unica; la soluzione da me trovata per il problema originario è solo una delle molte soluzioni possibili.)

4.2 [090]

E va bene, lo sappiamo che siete in spiaggia, ma potevate pensarci e scriverci...

4.2.1 Un problema diverso

Hanno mandato soluzioni a questo problema solo ***PMP***, ***Flo&Giuliano*** (insieme) e ***Cid***. ***PMP***, con la grazia che lo contraddistingue, ci ha anche mandato una soluzione scherzosa, e noi che siamo perfidi pubblichiamo solo quella:

> Il numero medio di pasticcini aspettato è evidentemente 0. Dimostrazione: per la legge di Murphy del panino imburrato, ogni volta che si lancia un cubetto questo cadrà con una faccia sporca per terra. Inoltre, per un corollario della legge di cui sopra, un cubetto "preso a caso" avrà necessariamente almeno una faccia sporca, visto che M "è ragionevolmente basso". Ma nessuno dei cubetti (tranne il caso in cui N=1, che però viene eliminato dal fatto che $2<=M<N^3$ per le condizioni al contorno) può avere due facce opposte sporche, ne consegue che apparirà sempre una faccia pulita. QED.

Diamo un po' di spazio a ***Flo e Giuliano***, che ***Cid*** ha già scritto tutto il precedente capitolo:

> A quanto pare ci troviamo di fronte a una specie di cubo di Rubik NxNxN, con l'unica differenza che non gira (cosa non da poco per un cubo di Rubik). Smontandolo, ci troveremo di fronte a 4 tipi diversi di cubetti, che (con animo da naturalista settecentesco) possiamo catalogare in 4 specie:
>
> - cubetti d'angolo (o "*Cubellus superappiccicosus*"), con 3 lati sporchi;
> - cubetti degli spigoli (o "*Cubellus moderate appiccicosus*"), con solo 2 lati sporchi;
> - cubetti delle facce (o "*Cubellus semi-pulitus*"), con un'unico lato sporco;
> - cubetti centrali (i " *Cubellus pulitus*"), senza alcun lato sporco.
>
> A questo punto potremmo andare alla ricerca del numero di esemplari per ogni specie, per poi moltiplicare ciascuno di questi numeri per la probabilità di ottenere una faccia appiccicosa rivolta verso l'alto usando un dado di quella specie. Ma potremmo anche evitarci tutto questo lavoro, e pensare semplicemente che - dal momento che anche la tipologia del dado viene scelta casualmente - non ha importanza sapere quale tipo di dado si getta, ma solo quante sono le facce sporche rispetto a quelle pulite (e quindi tutta la classificazione sulle differenti tipologie potevamo risparmiarvela, ma volevamo metterla lo stesso). Pertanto la probabilità di estrarre un faccia appiccicosa sarà data dal numero di facce appiccicose (ovvero la superficie del cubo) fratto il numero di facce totali (ovvero il numero di cubetti x 6):
>
> $$P=(6\ N^2)/(6\ N^3)= 1/N$$
>
> Il che è un risultato interessante, anche perché è facile estenderlo a dadi quadridimensioni o simili, anche se viene spontaneo chiedersi: "ma dove o 'quando' lo lancio un cubo a 4D?" (nota: Flo ha risposto semplicemente "in un ipermercato", ma tale risposta è stata ignotata da Giuliano).
>
> Comunque vada, conoscendo la probabilità, si calcola il valore atteso come

$$v.a.=M \cdot P=M/N.$$

E a questo punto la domanda sorge spontanea: è mai possibile che venga assegnato un problema risolubile in un unico, singolo, breve, banale passaggio (e che questo venga poi anche catalogato dalla bravissima Alice come un "tre-birre")[20]? No, ovviamente! Ci siamo interrogati a lungo sulle possibili ragioni di un tale paradosso, e siamo giunti alle seguenti possibilità:

a) Non abbiamo capito la dinamica del problema. Il che è più che probabile, visto che il caldo flagella anche "fisica beach" e il cervello ad alte temperature corre il serio rischio di ingripparsi.

b) Non abbiamo valutato tutte le variabili in gioco (come, ad esempio, la parziale redistribuzione dello sporco all'interno del sacchetto).

c) Avete scritto questo problema pensando che i vostri lettori si sarebbero chiesti, come è accaduto a noi: ma un cubo cosparso di cioccolato e coca-cola (e dunque assolutamente appiccicaticcio e difficile da maneggiare, come ci suggerisce la nostra esperienza in fatto di feste e consimili) rotola come un dado normale? Ovviamente no, perché tenderà ad attaccarsi al terreno (o al tavolo) proprio in corrispondenza delle facce sporche, con grave penalizzazione per i poveri ragazzi in gioco (che potrebbero anche accusarvi di volerli imbrogliare... e in tal caso, inutile appellarsi all'incapacità di intendere e di volere, tanto sappiamo benissimo che nel vostro caso "non regge"!). Ma se facce appiccicaticce e facce pulite non sono equiprobabili, come abbiamo supposto, allora occorrerebbe studiare una seria "trattazione teorica per la dinamica del dado colloso", in modo da riuscire a calcolare le probabilità esatte. Purtroppo in questo momento di esami è un po' difficile per noi intraprendere un progetto così gravido di teorie e applicazioni pratiche, ma promettiamo solennemente fin da ora che ci studieremo. Anzi, ci rendiamo disponibili a intraprendere una collaborazione con chiunque voglia affiancarci in questa fondamentale ricerca[21]. ... Coraggio ragazzi, il premio Ig-Nobel è dietro l'angolo! :)

Ovviamente, conoscendo la vostra lungimiranza, abbiamo optato per la terza ipotesi. E quindi vogliamo aggiungere un commento: siete delle menti davvero diaboliche.

Certo.

4.2.2 Quanto dura la memoria

Qui solo ***PMP*** si è veramente cimentato. Uno dei nostri lettori più enigmista, ***Giorgio***, ci ha ricordato le regole di Memory e ci ha raccontato di un problema simile proposto ai Giochi Matematici di Milano qualche anno fa.

Vi diamo qui solo lo spunto di ***PMP***, così magari per il mese prossimo ci mandate più contributi...

(...) per il problema della memoria, ci ho lavorato un po' su mentre tu e i tuoi pari andavate a piantare casino stanotte: purtroppo non ho una bella forma chiusa, ma in linea di principio la soluzione si trova, come direbbe il GC, a colpi di excel.

Magari poi mi metto a scrivere un programmino perl che dia la soluzione.

Definiamo M(p,q) come il valore atteso del numero di coppie che si riesce a vincere se si hanno ancora 2p carte, e conosciamo il valore di q di esse (quindi le carte di cui non si sa niente sono 2p-q).

[20] La risposta a questo quesito è nota: trattasi di problema con puzza di probabilità, Alice storce il naso, dice "Questo lo risolvete voi, vero?" e piazza le solite tre birre.

[21] Flo&Giuliano, Riddle, Silverbrahms & d'Alembert: "Cinematics of sticky dice in a high-viscosity media". Tenete d'occhio ArXiv, non si sa mai. (RdA)

Avendo i giocatori memoria perfetta, si ha p<=q; inoltre M(p,p)=p, visto che il giocatore potrà fare shopping girando via via le carte ancora sconosciute e prendendo quella corrispondente. Per gli altri valori, si lavora ricorsivamente.

* Con probabilità q/(2p-q) pescherò una carta già vista: quindi faccio coppia, tocca di nuovo a me con una coppia in meno e una carta nota in meno, e il valore atteso è dunque 1+M(p-1,q-1).

* Con probabilità 2(p-q)/(2p-q) sceglierò una carta che non conosco; a questo punto provo a scoprirne un'altra ignota. Ci sono tre sotto casi.

** Ho il culo di Lippi: con probabilità 1/(2p-q-1) trovo la carta compagna, e tocca a me con una coppia in meno ma lo stesso numero di carte note, e il valore atteso è 1+M(p-1,q)

** Ho sfiga, e trovo una carta già nota, con probabilità q/(2p-q-1). Il mio avversario farà immediatamente la coppia, e continuerà a giocare con una coppia in meno e lo stesso numero di carte note (ne ha tolta una, ma io gliene avevo data un'altra); quindi il *suo* valore atteso è 1+M(p-1,q). Il *mio* valore atteso sarà quello che manca per arrivare a 1+p, cioè p-1-M(p-1,q).

** Ho una sfiga diversa, e trovo un'altra carta non nota, con probabilità 2(p-q-1)/(2p-q-1). Il mio avversario avrà come valore atteso M(p,q+2), e quindi il mio valore atteso sarà p-M(p,q+2).

Il valore atteso complessivo è dato dalla somma pesata dei vari valori, con una formulaccia che non mi metto nemmeno a scrivere.

A noi piace soprattutto la retorica, di ***PMP***. Valete.

5. Quick & Dirty

Alberto e Fred hanno eternamente dei problemi con gli orologi: sono attaccatissimi ai loro vecchi "Swatch" e non li lascerebbero mai.

Il primo guaio è che quello di Alberto è 10 minuti indietro, anche se Alberto è convinto che sia 5 minuti avanti.

Il secondo guaio è che quello di Fred è 5 minuti avanti, mentre lui è convinto che sia 10 minuti indietro.

Il terzo guaio è che, contrariamente all'Augusto Genitore, odiano aspettare.

"Dobbiamo prendere il treno delle 6".

Chi aspetta chi, e per quanto tempo?

6. Pagina 46

[3.1]

Per assurdo, supponiamo sia:

$$\sum_{i=0}^{1111} 2ix^{2(1111-i)} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right), \qquad \textbf{[6.1]}$$

con $m+n=2222$.

Deve allora essere $a_0 b_0 = 2222$ e quindi (non essendo questo numero divisibile per 4), uno dei due termini sarà pari e l'altro dispari. Supponiamo sia a_0 pari: vogliamo mostrare che, in questo caso, tutti i coefficienti a_i sono pari.

Infatti, supponiamo a_k sia il coefficiente dispari di minor grado; allora, il coefficiente x^k nel prodotto **[6.1]** sarà pari a:

$$a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \ldots + a_0 b_k \qquad \textbf{[6.2]}$$

(per il caso $k > m$, la somma termina con $a_{k-m} b_m$).

Questo coefficiente deve essere uguale al corrispondente coefficiente di x^k nel polinomio iniziale, ossia deve valere 0 se k è dispari e deve essere pari se k è pari (in quanto lo sono tutti i coefficienti del polinomio tranne il primo, e deve essere $k \leq n < 2222$).

Siccome però per l'assunto tutti i numeri $a_{k-1}, a_{k-2}, a_{k-3}, \ldots, a_0$ sono pari, allora nella somma **[6.2]** tutti i termini tranne il primo devono essere pari, e quindi lo sarà anche $a_k b_0$; il che non può essere, in quanto entrambi questi termini sono dispari.

Allora tutti i coefficienti di $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ devono essere pari, il che contraddice l'ipotesi che $a_n b_n$ debba essere pari a 1.

Il che prova l'assunto.

[3.2]

Ponendo $x = y + 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&x^{250} + x^{249} + \ldots + x + 1 \\
&= (y+1)^{250} + (y+1)^{249} + \ldots + (y+1) + 1 \\
&= \frac{(y+1)^{251}}{(y+1)-1} = \frac{1}{y}\left[(y+1)^{251} - 1\right] \\
&= y^{250} + 251 y^{249} + C_{251}^{2} y^{248} + C_{251}^{3} y^{247} + \ldots + C_{251}^{250} y + 251
\end{aligned}$$

I diversi coefficienti (con l'eccezione del primo) sono esprimibili nella forma:

$$C_{251}^{k} = \frac{251 \cdot 250 \cdot 249 \cdot \ldots \cdot (251 - k - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

e sono quindi tutti divisibili per 251, che è primo.

Inoltre, essendo il termine costante non divisibile per 251^2, possiamo costruire un ragionamento perfettamente identico a quello del caso precedente, semplicemente sostituendo al criterio di divisibilità per 2 (pari o dispari) il criterio di divisibilità per 251.

La conclusione risulta essere che condizione necessaria per l'espressione del polinomio dato come prodotto di due fattori (a coefficienti interi) è che tutti i coefficienti di uno dei fattori siano divisibili per 251. Ma questo è impossibile, in quanto il primo coefficiente del polinomio vale 1.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 In teoria, è un gioco [003]

Crediamo di aver dimostrato abbastanza chiaramente che, quando un po' di gente si mette a prendere decisioni logiche, ne succedono di tutti i colori; bene, se oltretutto questi cercano anche di mettersi d'accordo, oltre a succedere le cose più strane ci si ritrova anche a fare un mucchio di calcoli. Per prima cosa, come al solito, un po' di dizionario.

Presumiamo vi troviate meglio a possedere una macchina, piuttosto che a non possederne nessuna; e, supponendo vi siate comprati una scassatissima utilitaria in grado sì e no di portarvi in ufficio, quando si avvicina l'estate forse vi farebbe comodo un bel macchinone station-wagon su cui caricare moglie, figli, suocera, salvagente a paperella e liquido antisquali per andare al mare in località esotiche (ad esempio, le Olimpiadi di Cesenatico).

Ma vale la pena, di comprare una seconda macchina?

In economia si definisce ***Guadagno Marginale*** quello che guadagnate vendendo "un pezzo in più" della vostra mercanzia (nello stesso modo si definiscono la spesa e il ricavo marginali, ma ci pare immediato). Ora, la variazione del Guadagno Marginale riveste una certa importanza nel momento stesso nel quale c'è la possibilità di vendere più di un oggetto e, soprattutto, se vogliamo fare in modo che entrambe le parti (acquirente e venditore) raggiungano la massima soddisfazione. Approfittiamo di alcuni recenti avvenimenti che hanno coinvolto i Validi Assistenti di Laboratorio per capire cosa succede.

> *Resi pubblici i (più o meno) soddisfacenti risultati scolastici conseguiti, Alberto e Fred hanno ricevuto alcuni regali da parenti e amici; qualche giorno fa, ad esempio, Fred è riuscito ad estorcere* **cinque** *pacchetti di carte per Magic*[22]*, mentre Alberto era felice possessore di* **ventidue** *Euro; a seguito di una complessa discussione, sono arrivati a decidere che in funzione del numero dei pacchetti venduto sarebbe dovuto variare il prezzo; dopo alcune considerazioni degne di un mercante di cammelli, sono arrivati all'accordo rappresentato in* **Tabella 1**. *Secondo voi, come è andata a finire?*

Fred			Alberto		
pacch. venduti	Beneficio		pacch. acquist.	Beneficio	
	Totale	Marginale		Totale	Marginale
1	10	10	1	9	9
2	15	5	2	13	4
3	18	3	3	15	2
4	21	3	4	16	1
5	22	1	5	16	0

Tabella 1 – Cui bono?

Sembra abbastanza evidente che Fred può fornire $0,1,2,3,4$ o 5 pacchetti di figurine, mentre Alberto può pagare qualsiasi cifra tra 0 e 22 Euro; è evidente che la scelta $(0,0)$ è la scelta del Dilemma del Prigioniero, ma qui vogliamo trattare dei giochi *cooperativi*, e quindi presupporremo che i due loschi figuri formino una *coalizione* (composta da entrambi) finalizzata allo scambio Euro-figurine.

Forse è meglio se cerchiamo di definire per prima cosa che cosa sia ottimale in genere: questo concetto, in Teoria dei Giochi, è noto come il ***Core*** (o "Nucleo": una volta tanto, preferiamo l'inglese) della transazione: in pratica,

Si definisce ***Core*** l'insieme di tutte quelle strategie coordinate per cui:

1) Nessuna persona può migliorare la propria posizione abbandonando la coalizione e

[22] Non chiedeteci le regole: hanno provato a spiegarcele, ma non abbiamo capito nulla.

2) La coalizione non può fare di meglio coordinando in modo diverso le proprie strategie.

Per capire cosa succede, proviamo un attimo ad andare per tentativi.

In prima ipotesi, potremmo supporre che Fred proponga ad Alberto l'acquisto di un pacchetto di figurine per 10 Euro; Alberto molto probabilmente rifiuterà, visto che per lui l'acquisto di un pacchetto rappresenta un guadagno marginale di soli 9 Euro; quindi, Fred modifica la propria offerta, proponendo la vendita di un pacchetto per 5 Euro, e qui si rendono necessari alcuni conti.

Alberto avrà un beneficio pari a $22-5+9=26$ (cifra iniziale meno cifra pagata più beneficio del pacchetto), mentre Fred avrà un beneficio pari a $5+21=26$ (guadagno dalla vendita più valutazione dei pacchetti restanti[23]); tutti e due stanno decisamente meglio di prima e quindi questa transazione potrebbe essere considerata accettabile.

È però facile vedere che si può fare di meglio; infatti, se Fred vende ad Alberto un altro pacchetto per 3.50 Euro, vediamo che il beneficio per Fred risulta $18+8.50=26.50$, mentre per Alberto abbiamo $13+22-8.50=26.50$; in questo caso, il beneficio totale (somma dei due benefici) aumenta di un intero Euro!

Questo è un punto piuttosto importante; fermo restando che ciascuno dei due cercherà di trarre un profitto, lo scopo di entrambi (essendo il gioco cooperativo) è quello di *massimizzare il profitto totale*; a questo punto, cerchiamo di calcolare quali siano le transazioni convenienti. Trovate il tutto in ***Tabella 2***, a seguire la spiegazione.

	Beneficio dai pacchetti venduti			
Pacchetti venduti	per Alberto	per Fred	Moneta	Totale
0	0	22	22	44
1	9	21	22	52
2	13	18	22	53
3	15	15	22	52
4	16	10	22	48
5	16	0	22	38

Tabella 2 – Logica di mercato

La prima colonna rappresenta il numero di pacchetti di figurine che si scambiano; essendocene in circolazione 5, più che quelli non possono vendere.

La seconda colonna l'abbiamo già trovata in Tabella 1; è la valutazione di Alberto del beneficio ricevuto dal possesso di un certo numero di pacchetti.

La terza colonna (anche lei già presente in Tabella 1, ma al contrario) rappresenta il beneficio di Fred nel vendere un determinato numero di pacchetti.

La quarta colonna rappresenta il totale di moneta circolante (al momento tutta proprietà di Alberto); evidentemente, il valore è fisso, e vale 22.

La quinta colonna rappresenta il beneficio totale: somma delle precedenti tre colonne. Questo è il valore che ci interessa massimizzare.

Si vede facilmente che, in questo caso, *la vendita di due pacchetti massimizza il beneficio*.

"Già, ma *a che prezzo* vengono venduti?". Buona domanda. Proviamo a fare un po' di conti, fermo restando che quello che ci interessa è sempre massimizzare il beneficio totale.

In ***Tabella 3*** abbiamo alcuni risultati; supponendo di vendere due pacchetti di figurine ad un determinato prezzo unitario (e quindi ad un determinato prezzo totale), Alberto avrà il beneficio dei soldi (i 22 Euro originali meno il pagato) più il beneficio di due

[23] La valutazione dei pacchetti restanti è fatta rispondendo alla domanda "Se trovo un altro pollo e gli vendo tutti i pacchetti in blocco, qual è il mio beneficio?" Infatti, alla riga "Pacchetti venduti = 4" della tabella precedente, trovate che il beneficio totale è pari a 21 Euro.

pacchetti di figurine (che, ricorderete, lui valuta in 13 Euro), mentre Fred avrà il beneficio dei tre pacchetti rimastigli (che lui valuta a 18 Euro, sempre con il metodo visto sopra) più il guadagno della vendita.

Prezzo unitario	Pagamento totale	Benefici per	
		Fred	Alberto
2	4	18+4=22	22-4+13=31
3	6	18+6=24	22-6+13=29
4	8	18+8=26	22-8+13=27
5	10	18+10=28	22-10+13=25
6	12	18+12=30	22-12+13=23

Tabella 3 – Associazione a delinquere

"Viene sempre 53, in totale!" Infatti, e tutti questi sono (in teoria) prezzi di vendita accettabili; non solo, ma (come abbiamo visto prima) siamo anche sicuri che entrambi stanno meglio di prima e, scambiandosi un numero diverso di pacchetti di figurine, ciascuno dei due starebbe peggio di come sta scambiandosene due; l'unica regola che abbiamo imposto a questi due pescecani della finanza è che nessuno dei due abbia un beneficio minore di 22 Euro, il che significa che tutte queste transazioni sono nel Core.

Nessuno ha però detto che ci si debba limitare agli interi, come prezzo di vendita; in realtà, fermo restando il vincolo visto qui sopra, tutte le soluzioni per cui il beneficio di Alberto è pari a 53 meno il beneficio di Fred sono ammesse; e questo non è bello, in quanto sono troppe soluzioni e va a finire che litigano. Trovate il tutto rappresentato in ***Figura 1***.

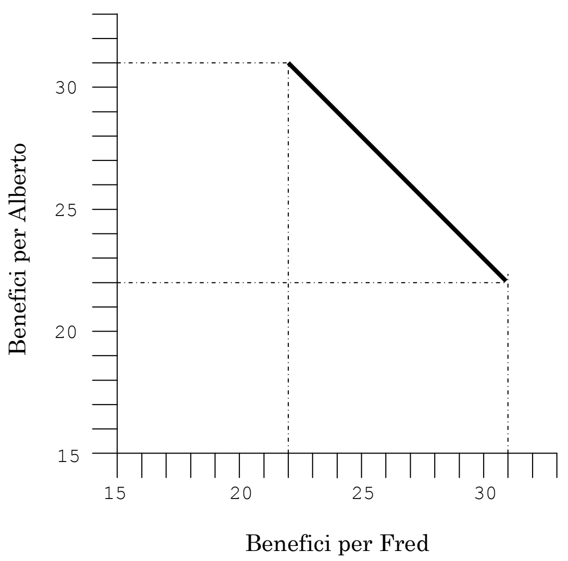


Figura 1 – Qui si litiga

Forse, da maldigerite spiegazioni di economia, a qualcuno di voi è rimasto in testa che sin quando si tratta di monopolisti queste situazioni sono all'ordine del giorno, ma quando comincia un po' di sana e libera concorrenza le cose migliorano. Proviamo a dare un'occhiata in questa direzione.

Consideriamo un sistema economico (votato al disastro, almeno secondo noi) formato da ***due Alberti*** e ***due Fred***; essendo cloni degli originali, hanno le stesse opinioni e gli stessi beni degli originali (li abbiamo clonati vestiti, con soldi e figurine in tasca); essendo intenzionati a scambiarsi le figurine, questi come faranno?

La situazione si complica in misura notevole; infatti, sono possibili ***diverse coalizioni***:

1. Ognuno se ne sta per conto suo: equivalente alla soluzione non-cooperativa, ma va comunque tenuta in conto.
2. Ogni Alberto forma la sua "piccola coalizione" con un Fred; è, in sostanza, una duplicazione del caso già esaminato.
3. Gli Alberti (e/o i Fred) si coalizzano tra loro; qui non succede niente, in quanto non avrebbero nulla da scambiarsi
4. Un Alberto fa una coalizione con i due Fred
5. Un Fred fa una coalizione con i due Alberti.

Come dicevamo, lasciamo da parte le considerazioni etiche e morali; il fatto che negli ultimi due casi rispettivamente un Alberto e un Fred "stiano dai vetri" (come ama dire la loro mamma), ossia non partecipino a questa sana competizione finanziaria, non deve importarci: infatti, abbiamo detto che *una transazione è nel nucleo se fa stare meglio i* **membri della coalizione**.

Abbiamo visto prima che 12 Euro per 2 pacchetti di figurine è nel Core; se applichiamo la stessa transazione al secondo caso (due coalizioni di un Alberto e un Fred ciascuna), ogni Alberto ha un beneficio di 23 Euro e ogni Fred di 30; però, se supponiamo una coalizione in cui un Fred si associa con due Alberti (quinto caso visto sopra), vediamo che diventa possibile che il Fred venda un pacchetto ciascuno ai due Alberti; in questo caso, il Fred ha un beneficio totale di $18+7+7=32$, mentre ognuno degli Alberti viene ad avere un beneficio $22-7+9=24$, e quindi *stanno tutti meglio*. Tecnicamente, questo viene espresso come il fatto che *questa coalizione* ***domina*** *la precedente*.

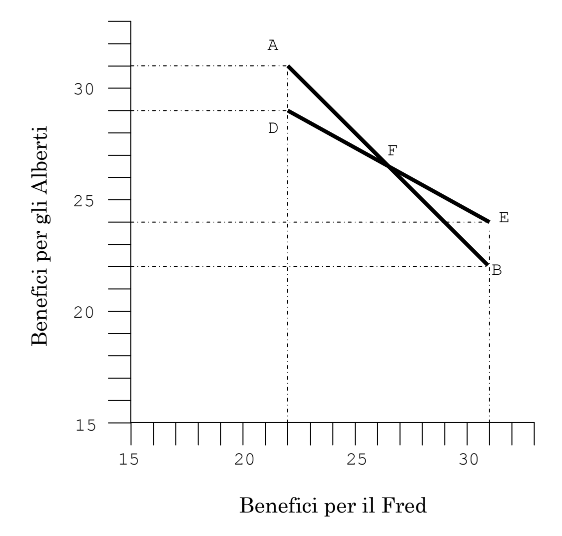


Figura 2 – Fornitore monopolista

I calcoli in questo caso sono perfettamente identici ai precedenti (e altrettanto noiosi, quindi ve li risparmiamo); la situazione è sintetizzata in ***Figura 2***: $\overline{DE}$ rappresenta la nuova situazione di equilibrio per la coalizione indicata.

Come al solito, quando due linee si incontrano succede qualcosa: infatti, se ci troviamo nella zona $\overline{FB}$ in assenza di coalizioni, il formare la coalizione permette di passare alla zona $\overline{FE}$; ma allora, la parte $\overline{FB}$ *non è più nel Core!*

Avete l'aria scarsamente convinta; vediamo anche l'ultimo caso?

Supponiamo la coalizione sia ora tra un Alberto e i due Fred, ossia il quarto caso visto sopra; qui, vediamo che è sicuramente nel Core l'acquisto da parte dell'Alberto di un pacchetto verso ognuno dei Fred per 2.40 Euro; infatti, il beneficio dell'Alberto diventa 30.20 mentre quello di ogni Fred diventa 23.40, e questi ve li calcolate voi; la situazione finale ve la mostriamo in ***Figura 3***: e se vi sembra complicata, tranquilli che è l'ultima.

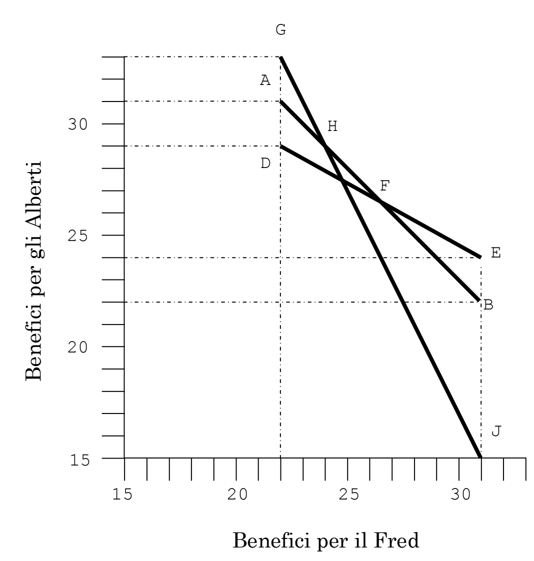


Figura 3 – Unico acquirente

"OK, ma dove è finito il Core?" Semplice: è il segmento $\overline{HF}$: infatti, in questa zona nessuno può migliorare la propria situazione cambiando coalizione senza peggiorare quella degli altri.

È interessante notare che *il Core del gioco a quattro persone è un* **sottoinsieme** *del gioco a due persone*; ossia, all'aumentare dei partecipanti, il Core si ridurrà sempre di più.

Se (ma ve lo fate voi) effettuate lo stesso esame per tre Fred e tre Alberti, scoprite che dopo aver esaminato tutti i casi il Core si riduce ad ***un unico punto***, quello in cui c'è un beneficio di 29 Euro per Alberto e di 24 Euro per Fred (non abbiamo messo gli articoli perché dovreste ricordarvi che questo punto deve anche essere sulla coalizione uno a uno), e quindi (l'avevamo già calcolata) la vendita di 2 pacchetti di carte al prezzo di 3 Euro ciascuna; e, se fate i calcoli per un numero maggiore di giocatori, vi accorgete che da lì non si schioda: conviene sempre quella.

Insomma, riassumendo: abbiamo trovato una situazione in cui tutti sono contenti, nessuno può fare di meglio cambiando coalizione e trattasi di un punto solo: probabilmente è il caso di trovargli un nome, ad una situazione così interessante.

La situazione in cui il Core è ridotto ad un unico punto è definita ***Equilibrio di Mercato***. O, se preferite una formulazione più da economista, "La competizione limita il potere dei monopoli".

Ma per adesso basta; preparatevi, perché la prossima volta saremo senza C(u)ore: si torna a litigare in coda!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms