Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 087 - Aprile 2006 - Anno Ottavo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 086 ha diffuso **942** copie e il **28/03/2006** alle **15:20** per Google eravamo in **998** pagine.

Richard (Dick) Thermes ha probabilmente deciso che i suoi quadri erano troppo piatti, ed ha iniziato a dipingere sulle *sfere*. In copertina, "Which Way", disegnato su una sfera da 13 pollici: per effetto dei ***sei*** punti di fuga, le trenta forme romboedriche delimitano (dal punto di vista dei personaggi) delle "stanze" cubiche. Tutta la sua pittura è basata su questi oggetti che (con indubbio sforzo di fantasia) ha definito ***Termespheres***. Ma forse è meglio se la prendiamo più alla lontana...

1. Assolutamente e Completamente Determinato

"È conoscibile la conoscenza?
E se non lo è,
come facciamo a saperlo?

(Woody Allen)

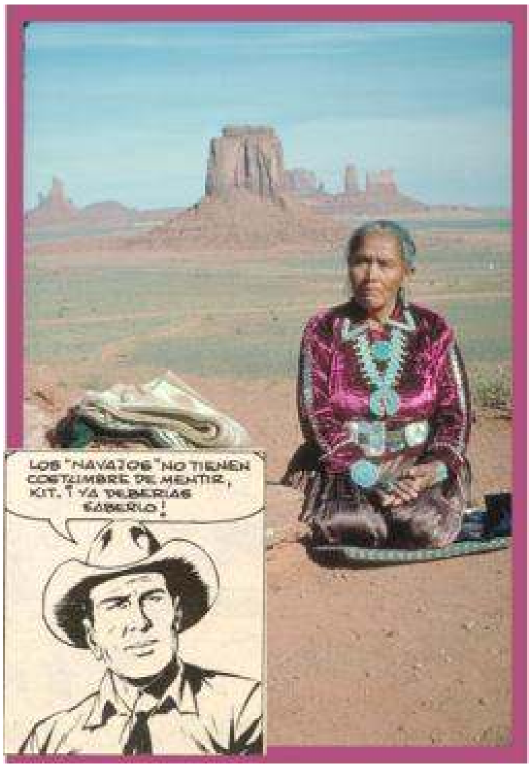
È perfino banale asserire che questi nostri tempi sono caratterizzati dalla molteplicità delle informazioni che assorbiamo continuamente e dalle loro interazioni reciproche, per quanto imprevedibili queste possano essere. I canali tramite i quale riceviamo notizie sono così vari e numerosi che è ormai difficile ricordare quali fossero i tempi e i modi che veicolavano l'informazione anche soltanto un secolo e mezzo fa, quando l'Europa del 1850 era certo all'avanguardia nel settore. Giornali, libri, ampie pubblicazioni e piccole comunicazioni private venivano trasportate da navi, treni, corrieri, telegrafo; un londinese della media borghesia riusciva senza sforzo ad essere una persona ragionevolmente bene informata, come mostrano e raccontano cronache e romanzi dell'epoca. Ciò non di meno, il confronto sul grado di informazione ricevuto dal più attento uomo europeo del 1850 e quello d'un distratto abitatore di alcune delle zone meno fortunate del pianeta del 2000 è comunque decisamente spostato a favore di quest'ultimo, se non altro per quanto riguarda la mera quantità dell'informazione. Perché dal punto di vista quantitativo un'ora di trasmissione televisiva riversa più informazione della lettura del Times, e due ore in un cinema trasmettono una quantità di dati audiovisivi molto maggiore di quella che si ottiene leggendo per ore il romanzo da cui è tratto il film corrispondente. Certo la lettura del romanzo stimola assai di più la fantasia, la creatività e la capacità di visualizzare mentalmente una storia, ma questo è tutto un altro discorso.

Dal punto di vista della qualità dell'informazione, invece, il discorso è decisamente più complesso. È probabile che la visione retroattiva che abbiamo oggi di quel che accadeva centocinquanta anni fa sia eccessivamente positiva, edulcorata com'è dall'immagine un po' romantica che si tende ad avere dei tempi andati; resta però il fatto che ci si immagina che la cultura del dotto uomo ottocentesco prendesse forma tramite libri meditati e articoli di riviste e quotidiani autorevoli; in altre parole, che le fonti informative del nostro fossero – quasi per definizione – un accorto e controllato distillato di dati incontrovertibili e di opinioni affidabili (per quanto questo aggettivo possa avere senso). Questa certezza è invece per noi ormai totalmente andata distrutta[1], e una delle domande più preoccupanti della attuale sociologia è (o almeno dovrebbe essere) come si possano ragionevolmente filtrare le informazioni utili e necessarie dal loglio creato dalla spaventosa quantità di cretinate pseudo-informative che quotidianamente raggiungono i nostri organi di senso. Non è necessario tornare troppo indietro nel tempo per ritrovarci in situazioni in cui valevano alcuni principi chiave, quali "Se lo dicono i giornali e la TV è senz'altro vero" o "Leggere è fondamentale per l'educazione del fanciullo", e altre cose del genere. Non che queste asserzioni siano diventate integralmente false; però è indubbio che in questo ventunesimo secolo si rende necessario arricchirle con specifiche e dettagliate istruzioni per l'uso. Innanzitutto "la TV" si è pluralizzata, diventando "le TV"; inoltre, alcune informazioni da queste veicolate rientrano facilmente nelle sottocategorie "errori preterintenzionali" (quando si è fortunati) o "falsità intenzionali" (quando lo si è meno), cosa che si ritrova del resto anche nell'escussione dei giornali. E così come era a suo tempo necessario "imparare a leggere un giornale", oggidì è parimenti indispensabile "imparare a guardare una televisione". E questo vale anche a prescindere dalla connotazione politica delle reti: basta guardare i sommari dei TG che spesso portano nei

[1] Questo articolo è stato scritto durante una arroventata campagna elettorale, e la tendenza a riconoscere come "affidabili" le informazioni che vengono scagliate verso il pubblico elettore è ormai virtualmente nulla. Il discorso ci sembra comunque avere una validità generale, non vincolata al momento specifico particolarmente esasperato.

titoli, oltre alle notizie su guerre, rivoluzioni, cronache e terremoti, anche gli sviluppi intriganti del reality-show che seguirà nel palinsesto della rete di appartenenza, lasciando così migliaia di genitori alle prese con le domande spietate dei figli in età preadolescenziale: "Per partecipare alle presidenziali americane bisogna prima ottenere la nomination all'Isola dei Famosi?". Il difficile non è rispondere negativamente alla domanda, ma piuttosto spiegare perché entrambe le notizie si meritino il privilegio di entrare nel sommario degli eventi importanti del giorno.

L'intenzione non è comunque quella di scrivere un lamentoso articolo sullo stato dell'affidabilità del media, nazionali o internazionali, antichi o contemporanei che siano; non intendiamo passare per cassandre[2] massmediologiche infiltratesi all'interno della redazione d'una prestigiosa e-zine di matematica ricreativa; anzi, tutt'altro. L'importanza di applicare degli opportuni filtri di selezione ci sembra interessante soprattutto perché è dannatamente difficile capire quando, se e come applicarli. C'è stato ad esempio un tempo (non remoto) in cui ai genitori spettava il ruolo di "sterminatori di fumetti", perché per definizione il fumetto non poteva essere veicolo di cultura ma solo di diseducativa distrazione; ma in seguito il fumetto è stato perfino elevato a rango di opera d'arte, almeno nei suoi rappresentanti di maggior prestigio. Così, il dubbio permane: è lecito far alternare agli esercizi di analisi logica anche la lettura di un albo di "Monster Allergy"? Può il giovane virgulto saltare senza soluzione di continuità dallo studio del genitivo sassone alle brume inglesi disegnate nelle ristampe dei primi numeri di Dylan Dog? Da rappresentanti d'una generazione che è cresciuta sui giornalini, siamo tenuti a mantenere una critica obiettività sugli effetti che tali oggetti hanno sulla formazione culturale dei fruitori. Non ci si può permettere il lusso – consentito alle generazioni di genitori di mezzo secolo fa – di definire indistintamente "porcherie diseducative" ogni tipo di fumetto; ma non si può neppure, in una sorta di acritico revisionismo storico, passare al giudizio diametralmente opposto che vede solo nei fumetti e nella narrativa e cinematografia popolare l'unica reale cultura contemporanea. Si rende insomma necessaria un'analisi obiettiva, per quanto necessariamente frettolosa, degli impatti mnemonici ancora in atto sulla mente di una cavia come lo scrivente.



Quanti italiani sanno che nei territori intorno alla Monument Valley esiste una tribù di nativi americani denominata Navajos? Un numero decisamente alto. Quanti di questi conoscerebbero l'esistenza di tale tribù se non l'avessero scoperta frequentando le pagine in bianco e nero di Tex Willer? Un numero vergognosamente basso. Certo, una nozione così isolata può lasciare il tempo che trova (soprattutto se si pensa che di solito viaggia anche con la convinzione che tutti i pellerossa

[2] Questo per molte ragioni: innanzitutto, perché la povera Cassandra è passata alla storia come evocatrice di sventure (che in italiano corrente si traduce con il termine "portasfiga"), quando la sua propria maledizione era di tutt'altra natura: era condannata a prevedere correttamente il futuro ma a non essere mai creduta. Insomma, anche se avesse previsto le cose più belle del mondo, parenti e amici non le avrebbero concesso un soldo di fiducia. Noi in quanto a previsioni siamo messi molto peggio, e da parte vostra il non prestarci troppa fede è leggibile come sano scetticismo scientifico. Ma è soprattutto un altro elemento a marcare definitivamente la differenza: Cassandra era una fanciulla di straordinaria bellezza. Figuriamoci se possiamo competere…

dicano "Whoah!" e che l'unità di misura ufficiale per le bistecche siano le dita – minimo tre), ma occorre anche ricordare che la concorrenza può essere costituita dalla "televisione del pomeriggio", densa di gare di ballo e di aggiornamenti sui comportamenti adulterini di attori e di principi ereditari, il tutto condito da televendite di padelle e di disperate lusinghe ai tronisti[3].

In ogni caso, non è tanto il mero nozionismo ad essere al centro dell'attenzione, quanto alcuni punti essenziali di autentica formazione culturale e critica che si formano attraverso quelli che sono comunemente considerati solo veicoli di "intrattenimento". Per molti è scioccante scoprire che la celebre frase "*Domani è un altro giorno*" non è riportata nell'Antico Testamento e neppure negli almanacchi dei proverbi popolari, ma che più semplicemente è la battuta di chiusura di "Via con Vento". Persone più giovani che si sentono fare "*un'offerta che non possono rifiutare*" forse non realizzano che il modo di dire non ha una anzianità medievale, ma solo quella de "Il Padrino" di Francis Ford Coppola. E forse, irritati da tanta prosopopea, possono ripromettersi di resistere e combattere, perché "*quando il gioco si fa duro, i duri cominciano a giocare*" – e forse non sanno neppure di rendere così omaggio a John Belushi.

Se il cinema induce facilmente alla citazione letterale delle battute, magari anche a prescindere dal contesto e dal significato (si pensi alla forza evocativa di "*Ho visto cose che voi umani non potreste immaginarvi. Navi da combattimento in fiamme al largo dei bastioni di Orione; e ho visto i raggi B balenare nel buio vicino alle porte di Tannhauser. E tutti questi momenti andranno perduti nel tempo, come lacrime nella pioggia*", che viene citata a prescindere dal contesto, forse anche grazie al genio del traduttore italiano che ha tradotto con l'inusuale "bastioni di Orione" l'originale "spalla di Orione"[4]), capita che i fumetti possano lasciare invece tracce formative meno letterali, ma forse non meno consistenti.

Quando Charlie Brown risponde con insolita sicumera a Linus al riguardo di una sua convinzione affermando "*Sono sempre sicuro delle cose opinabili*", spalanca con una sola e rapida battuta l'equivalente di un intero testo di critica sociologica sulla crisi dei valori del mondo occidentale. Una gran quantità di tesissime battaglie intellettuali e discussioni anche scientifiche appaiono improvvisamente sotto una luce nuova e rivelatrice, se ci si ricorda di tenere a mente la confessione di Charlie Brown. Sono delle

[3] Questa nota a piè di pagina è un'esca. Serve a verificare se il lettore medio di RM conosce o non conosce il neologismo "tronista": chi scrive sopravviveva nella sua dotta ignoranza in merito fino a qualche giorno fa, quando in una trasmissione radio una gentile signora disse che avrebbe voluto una campagna elettorale in cui i politici mostravano di conoscere il "paese reale", e cioè quello composto anche di ragazze e ragazzi che sognano di diventare "tronisti". Una rapida ricerca in rete ha tolto a chi scrive la verginità intellettuale in merito: se ancora ignorate il significato della parola, seguite il nostro consiglio: conservatevi l'ignoranza.

[4] "*I've seen things you people wouldn't believe. Attack ships on fire off the shoulder of Orion. I watched C-beams glitter in the dark near the Tannhauser gate. All those moments will be lost in time, like tears in rain*". La versione originale parla della "spalla di Orione" che è riferimento tutto sommato preciso perché Orione è costellazione nella quale si legge bene la figura umana del mitico cacciatore, e una delle sue stelle più brillanti, Betelgeuse, è proprio conosciuta come "la spalla di Orione"; l'etimologia del nome è araba ("yad al Jauza"), e fa riferimento alla "mano di Jauza", misteriosa donna della mitologia orientale. Mitologia a parte, il tutto si traduce insomma con un "al largo di Betelgeuse", che è un riferimento spaziale non precisissimo ma neanche vago, nell'economia di un film di fantascienza. I "bastioni di Orione" spostano invece radicalmente l'attenzione dalle coordinate spaziali all'evocazione puramente poetica, perché Orione, in quanto costellazione, è luogo solo apparente e non reale. Ma una frase che richiama perfino il wagneriano Tannhauser senza interrogarsi troppo sul ruolo che può avere quel nome in quel contesto siderale e che termina con la struggente immagine di lacrime perdute perchè indistinguibili dalle gocce di pioggia, può senza dubbio ben contenere i "bastioni di Orione", qualunque cosa essi possano essere.

autentiche Weltanschauung che si dischiudono nel breve volgere d'una striscia, e si rischia di riconoscerle solo anni dopo, quando in una serata nostalgica si tornano a sfogliare i sacri testi disegnati dell'adolescenza. E ci si può riconoscere in atteggiamenti privati e estetici (come quando si riscopre che è stato Nando, il fratellino di Mafalda, ad averci suggerito nella notte dei tempi di pettinarci passando con i capelli bagnati sotto le tende del salotto, all'urlo di: "*Il pettine punge le idee!*"), ma anche in profondissime convinzioni filosofiche. Non sarà forse un'indicazione da trasmettere religiosamente ai figli, ma nell'intimo è assai difficile negare che un imperativo categorico della vita fin qui condotta da chi scrive sia stato il "*Non esiste ostacolo così grande da non potergli girare attorno*" del sommo Linus Van Pelt.

Se molte di queste rivelazioni rimangono comunque strettamente private e personali (nel senso che le "illuminazioni" date da una battuta particolarmente efficace non sempre sono trasmissibili a chi quella illuminazione non prova), altre assurgono rapidamente ad oggettive verità condivise. Quando era già abbastanza famoso come attore e regista comico ma non ancora osannato come indiscusso "maitre à penser " della cinematografia del ventesimo secolo, uscirono in Italia due libri di Woody Allen: "Citarsi addosso" e "Saperla lunga". In quest'ultimo si trova la celebre battuta sulla conoscenza riportata in testa a quest'articolo: a differenza di altre celebri divertenti citazioni, la natura di questa è stranamente ambigua. Woody Allen l'avrà certamente coniata soprattutto per suscitare l'ilarità e il divertimento del lettore, ma ciononostante la frase resiste indomita anche a tutte le analisi "serie". In altre parole, la battuta fa ridere e non è certo un reato sbellicarsi quando la si ascolta per la prima volta, ma questo non toglie che essa – con relativo punto di domanda – resti interrogativo reale e serissimo. Ciò e ben dimostrato da una consolidata abitudine degli esperti del settore, gli epistemologi; visto che ogni volta che un giornalista li intervista sono costretti a spiegare in cosa consista la loro disciplina, dacché il nome non basta a chiarire le idee a chi l'epistemologia non conosce, questi violano bassamente il copyright di Woody Allen, citano la battuta e chiudono con una frase del tipo: "Ecco, questo è più o meno cosa si chiede un epistemologo…", costruendosi la nomea di persone spiritose e risparmiandosi nel contempo una tediosa spiegazione tecnica.

Resta l'interrogativo, dicevamo: come si fa a sapere se l'Universo è davvero conoscibile? Come si fa ad essere certi – e qui risiede sia la vis comica dell'osservazione sia il detonatore epistemologico della questione – che una risposta alla domanda precedente esista e sia davvero alla portata della logica umana? Senza avere alcuna intenzione di parafrasare uno dei più celebri scritti[5] di Freud, il tentativo di comprendere perché la frase di Allen sia giudicata divertente può perfino aiutare a comprendere il reale rapporto tra l'epistemologia e "l'uomo della strada". Ad esempio, appare evidente che il paradosso che rende divertente la frase richieda una sorta di implicito principio aristotelico del terzo escluso: vale (P) oppure vale (Non P), senza ulteriori vie di mezzo. E se vale (Non P) e P è la "conoscibilità", tutto quanto è relativo alla conoscibilità perde di senso, e diventa di conseguenza "buffo". Non occorre essere dei logici esperti per rendersi conto di quanto siano sdrucciolevoli le basi logiche di quest'analisi: si sta applicando un principio della logica classica (il terzo escluso) ad un concetto autoreferente (la conoscibilità) e il fantasma di Frege già comincia a rivoltarsi nel suo studiolo dell'aldilà, sentendo già l'odore del tabacco da pipa di Bertrand Russell e del suo paradosso. E forse per questo la battuta di Allen mantiene viva la sua duplice natura: è "divertente" per chi ha una mentalità aristotelica, è "inquietante" per chi sa che la logica aristotelica ha già passato qualche bel momento di crisi.

Se siete curiosi di sapere a quale scuola di pensiero appartenete voi, fate questo piccolissimo test. Se state leggendo questo articolo siete certamente esseri viventi nei

[5] Sigmund Freud, "Il motto di spirito e la sua relazione con l'inconscio"; GTE Newton Compton, Euro 5,00; pagine 256, ISBN 8881836467.

primi anni del Ventunesimo Secolo[6] e siete, in qualche forma e misura, interessati ad alcuni aspetti della matematica o della logica[7]. Forti di queste banali constatazioni, tornate a leggere il titolo di questo articolo. Ripassatelo serenamente nella mente, associatelo alla vostra opinione sulla natura della Scienza e sul ruolo che ha o dovrebbe avere nella società umana, e poi addirittura nella vostra propria vita. Cercate di capire se quelle tre parole "Assolutamente e Completamente Determinato" tranquillizzano il vostro essere, se ben descrivono il vostro rapporto con la conoscenza in generale, e se in qualche misura dipingono bene la vostra fiducia nel pensiero scientifico. Se la risposta è un placido e sicuro "sì", siete quasi certamente degli aristotelici. Se è un sofferto e rassegnato "no", siete probabilmente rappresentanti dei lacerati intellettuali scientifici del XXI secolo.

I primi trenta anni del Novecento hanno visto nascere e svilupparsi almeno tre idee scientifiche con un forte impatto sulla filosofia della conoscenza: si tratta di una Teoria, di un Principio e di un Teorema, e sono tutti caratterizzati da parole che hanno il significato esattamente opposto a quello delle tre parole del titolo. "Assolutamente" sembra ormai essere diventato il servo avverbio dei nobili monosillabi "Sì" e "No"; per molto tempo le due brevi parole hanno mantenuto intatto e chiaro il loro significato senza bisogno di alcun rafforzativo, ma ormai è virtualmente impossibile trovarli senza l'accompagnamento esasillabico e ingombrante dell'avverbio "assolutamente". Ma se vi procurate un "Dizionario dei Sinonimi e dei Contrari" e cercate la voce relativa, non vi troverete traccia di quest'uso recente dell'avverbio. In compenso, sotto la sezione "contrario" vi troverete infallibilmente la parola "relativo", e il Ventesimo Secolo ha presto generato la Teoria della Relatività. Gli impatti sulla filosofia della conoscenza scatenati dalla Relatività sono assai forti, probabilmente più elevati di quanto lo stesso Einstein credesse, e quasi certamente pubblicizzati e discussi in misura anche molto maggiore di quanto sarebbe stato lecito aspettarsi. In parte, secondo alcuni, è proprio la scelta del nome "Relatività" ad aver contribuito alla notorietà della teoria. È un nome a detta di alcuni sbagliato, perché tende a rafforzare l'idea ingenua che "tutto è relativo", mentre in ultima analisi la Relatività si pone a caccia delle invarianti, e quindi proprio di ciò che "relativo" non è. Ma è quel nome che ha avuto un insospettato impatto sul grande pubblico, e l'attuale diatriba filosofico-religioso-scientifica sul "relativismo" non risparmia certo analisi e critiche su alcuni aspetti della teoria einsteniana. Senza voler entrare nella diatriba menzionata, è comunque naturale aspettarsi da una mente aperta, scientifica e ragionevolmente post-aristotelica quantomeno un'interrogativa alzata di sopracciglio al sentir nominare l'aggettivo "assoluto", più che un senso di rassicurazione causato da esso.

Non troppo diverso il destino del termine "determinato". I predecessori e i colleghi di James Clerk Maxwell sono stati tra gli ultimi uomini di scienza a potersi permettere di cullare l'illusione di vivere in un mondo retto da un placido determinismo. Quali fossero le implicazioni filosofiche di una visione pianamente positivista della natura è ormai cosa difficile da comprendere appieno, ma la sensazione di fondo è che l'Ignoto, a quei tempi, fosse considerato semplicemente come un "Ancora Ignoto", e niente di più. Avendo il tempo sufficiente (magari assolutamente maggiore di quello messoci a disposizione da madre natura, ma questo qualitativamente non conta) e conoscendo il numero opportuno di condizioni iniziali, tutto l'Ignoto sarebbe stato serenamente promosso a Conosciuto.

[6] Non si accettano contestazioni retroattive ("Ho inventato la macchina del tempo e ho fatto leggere l'articolo a Dante Alighieri") per banale scetticismo tecnologico; non si accettano neppure quelle proiettate nel futuro ("Potrebbe leggerlo qualcuno fra cento anni") non per falsa modestia, ma per ancor più banale senso comune.

[7] Se leggete questa rivista siete abbonati a RM, e quindi "in qualche misura" interessati alla matematica (Q.E.D.). Se non siete abbonati e la state leggendo per caso, arrivare a pagina 6 è comunque indice che "in qualche forma" siete interessati all'articolo, che almeno formalmente resta un articolo di storia della matematica (Q.E.D.). Se sostenete di stare casualmente leggendo solo questa nota a piè di pagina senza aver letto il testo allora siete dei bugiardi, e i bugiardi sono i mattoni costituenti di migliaia di indovinelli logici (Q.E.D.).

Questo perché l'universo, se anche non si poteva definire pienamente Determinato, certo era nella sua natura totalmente Determinabile.

Che piaccia o meno, l'avvento del Principio di Indeterminazione di Heisenberg cambia radicalmente le cose. Anche questo principio ha fatto versare i proverbiali fiumi di inchiostro, ma in questo caso l'impatto nell'epistemologia sembra effettivamente devastante. Anche se nato nell'ambito della Meccanica Quantistica, e conseguentemente all'interno dell'indagine del microcosmo del quasi infinitamente piccolo, il Principio rimbalza alto e catastrofico in tutto l'edificio della teoria della conoscenza. Non è più questione di disponibilità di tempo, non è più questione di impossibilità umana di conoscere tutti gli elementi necessari al fine di determinare compiutamente il comportamento dell'Universo: no, è proprio l'Universo che si rivela inconoscibile, oltre un preciso limite.

La fiducia nel determinismo aveva vacillato anche solo per l'insolubilità del problema dei Tre Corpi dimostrata da Poincaré; bastava un numero davvero irrisorio di variabili per frustrare le velleità conoscitive della mente umana… eppure, anche in quel caso, la "non conoscibilità" sembrava causata più dall'impossibilità di superare le elevatissime complessità del calcolo più che dalla natura stessa degli oggetti osservati. Con il Principio di Indeterminazione di Heisenberg assistiamo invece al crollo strutturale delle ambizioni conoscitive: come in un vera allegoria della "coperta troppo corta", la natura sembra lasciare indagare senza limiti una grandezza, ma solo a patto di avere sempre più sfumata, sempre più "indeterminata" la corrispondente grandezza coniugata. Non c'è tempo a disposizione o variabili al contorno che tengano: la coperta è troppo corta , e non c'è niente da fare. La Fisica ha ristabilito crudelmente le distanze dall'Uomo. Ci sono certo ancora un'infinità di cose che attendono di essere scoperte, ma per la prima volta si toccano i confini oltre i quali non sembra possibile andare. Una classica metafora della ricerca scientifica è quella dell'uomo che vaga in una pianura brumosa con una fiaccola in mano, in grado di illuminare solo un piccolo spazio intorno a sé mentre la nebbia gli nasconde ancora quasi per intero il mare della conoscenza. La nebbia è sempre lì, vastissima, ma si potrebbe dire che l'Uomo ha trovato, nel suo vagabondare nella bruma, anche qualche muro invalicabile, che non credeva proprio che esistesse.

C'è di buono che la Fisica è solo la Fisica. È la regina delle scienze naturali, ma ha pur sempre il dovere di confrontarsi con l'esterno, con la natura e con l'universo. Non esiste forse qualche tipo di conoscenza che non ha simili vincoli da rispettare? Non esiste una scienza che sia figlia solo del pensiero, che possa serenamente infischiarsene di come si mostra essere il mondo? Certo che c'è: è la Matematica. E non vi è dubbio che la matematica possa restare al sicuro nella sua protettiva intangibilità, protetta dalle tempeste esterne dalla sua stessa consistenza puramente mentale. O no?

Un secolo esatto fa nasceva, il 28 Aprile 1906, nel rigoglioso Impero Austro-Ungarico (e più precisamente nella città di Brünn[8]), l'assassino dell'aristotelico Principio del Terzo Escluso. A dire il vero, più che "assassino" si limitò ad essere colui che sparò il decisivo colpo di grazia alla tempia d'un moribondo già crivellato di colpi, ma è indubbio che la prova finale del

[8] La Brünn dell'Austria Ungheria è l'attuale Brno della Repubblica Ceca. Se vi è capitato di chiedervi per quale ragione, al momento della pacifica scissione della Cecoslovacchia, la regione che fa capo a Bratislava si sia chiamata Slovacchia mentre quella di Praga non ha risfoderato dalle pieghe della storia il bellissimo nome evocativo di Boemia, la risposta è: perché la Repubblica Ceca non comprende solo la Boemia, ma anche la Moravia. E la città più importante della Moravia è proprio Brno.

guanto di paraffina lo inchioderebbe alle sue responsabilità. Stiamo parlando di Kurt Gödel, il più grande logico del secolo scorso e ben piazzato anche nella classifica generale di tutti i tempi. Ci attendiamo che la comunità matematica e la sua patria festeggino degnamente il centenario, anche se al momento non è che si noti un particolare fervore celebrativo.

Nato pochi mesi dopo la Teoria della Relatività, Gödel non è uno di quei geni che vengono portati ad esempio per consolare gli studenti che non ottengono brillanti risultati scolastici[9]: ultimo rampollo d'una benestante famiglia senza particolari ascendenze accademiche, Kurt mostra subito di non essere uno studente normale. È bravo oltre misura in tutte le materia: in Latino non ha mai preso un voto che non fosse il massimo possibile, e per tutta la carriera liceale si mormora che non sia mai incappato in un solo errore di grammatica. E per quanto riguarda la matematica, beh… a fine Ginnasio possedeva già quella che si insegna nelle Università, e compagni e professore rimanevano tristemente esterrefatti di fronte alle lezioni di Kurt. Se dovete confrontarvi quotidianamente con le sofferenze dell'algebra o con un adolescente restio a comprendere il Teorema di Pitagora, evitate però di invidiare il nostro genio cecoslovacco: la genialità precoce unita ad una indubitabile predisposizione per il pensiero logico rischia di provocare danni collaterali.

Da bambino Gödel è affetto da febbri reumatiche, malattia seria ma che riesce a superare senza conseguenze. Ciononostante, ad otto anni di età comincia a leggere libri di medicina per raccogliere informazioni sul morbo che lo ha colpito, e scopre così che in alcuni casi le febbre reumatiche possono portare ad una fragilità cardiaca. Non era il caso del nostro ottenne, ma Gödel la pensa diversamente: decide di avere dei problemi di cuore, e questa convinzione non lo abbandonerà mai più. Rudolf, il suo fratello maggiore, da grande intraprenderà proprio la carriera medica, e in qualche occasione visiterà il fratello cronicamente convinto d'essere malato. "*Mio fratello ha sempre avuto opinioni precise e decise al riguardo di qualsiasi cosa"* scrive Rudolf quando entrambi sono ormai anziani, *"ed è davvero difficile convincerlo a cambiarle. Sfortunatamente, per tutta la vita è rimasto di convinto di avere sempre ragione, non solo per ciò che riguarda la matematica, ma anche per quanto concerne la medicina, il che lo rende un paziente davvero difficile per i medici: ad esempio, dopo aver sanguinato a causa di un'ulcera duodenale, si è imposto per tutto il resto della vita una severissima dieta (probabilmente troppo severa) che gli fa lentamente perdere peso…*"

Se questo vi da la sensazione di aver a che fare con un carattere difficile, beh, probabilmente la sensazione è quella giusta. A giudicare dagli aneddoti che costellano alcune delle decisioni cruciali della sua esistenza, ad esempio, non si può non notare una pervicace determinazione continua e ripetuta, anche in eventi che lo riguardavano solo in piccola parte. Forte della padronanza mostrata nelle materie scientifiche, quando lascia Brno e si presenta all'Università di Vienna è inizialmente incerto se iscriversi a Fisica Teorica o a Matematica. Segue le lezioni di molti illustri docenti, come Hahn e Furtwängler, e probabilmente arriva finalmente a scegliere Matematica proprio grazie al fascino carismatico di quest'ultimo. Era senza dubbio un ottimo insegnante e dottissimo teorico, ma ciò che più sorprendeva l'uditorio era il vederlo paralizzato dal collo in giù. Teneva lezione parlando da una sedia a rotelle con l'ausilio di assistenti che scrivevano in

[9] "Anche Einstein è stato bocciato in matematica!" – frase falsa, almeno finché riferita alla matematica, ma ripetuta spesso come un mantra per motivare una salutare reazione di fronte ai cattivi voti d'un compito in classe.

sua vece alla lavagna. Vedere fin dove un vero malato riusciva ad arrivare era cosa certamente densa di fascino, per un malato immaginario come Kurt.

A soli 25 anni di età, nel 1931,Gödel presenta al Circolo di Vienna quello che rimarrà il suo capolavoro: il Teorema di Incompletezza, che chiude la terna delle "parole contrarie" al titolo di questo articolo e che soprattutto impone dei limiti conoscitivi anche alla matematica. È curioso notare come questo Teorema fu il risultato cui Gödel arrivo in risposta alla sollecitazione che David Hilbert indirizzò durante il Congresso di Bologna del 1928: Hilbert chiedeva che venisse descritta una sorta di "macchina logica" in grado di dimostrare tutte le verità matematiche e nel contempo anche dimostrare che il ragionamento matematico è affidabile. Il Teorema di Incompletezza di Gödel mostra che una tale macchina non può esistere. Sono molte le esposizioni "divulgative" che tentano di chiudere i concetti del Teorema di Gödel in una formula semplice. Qualcuno, rimasto anonimo, sintetizzò il tutto con la felice battuta "*Gödel ha dato una dimostrazione formale dell'inconsistenza delle dimostrazioni formali*", e non si può dire che la frase non sia efficace. Gödel stesso, in riferimento all'origine storica del suo teorema, che si riferiva appunto ad una "macchina logica", usò la più poetica forma "*O la matematica è troppo grande per la mente umana, o la mente umana è più di una macchina*". Il punto centrale resta che non è possibile avere in matematica un sistema che sia al tempo stesso consistente e completo. Facendo a pezzi il rigore formale, potremmo provare a dire che inevitabilmente un "sistema matematico completo" deve prendere forza da qualcosa (assiomi) esterno a sé stesso, mentre – rovesciando i termini – un sistema accuratamente costruito in modo di essere autoconsistente risulta inevitabilmente incompleto. Detto in questa forma, il Teorema di Gödel ricorda in maniera imbarazzante l'aspetto formale del Principio di Indeterminazione di Heisenberg e la metafora della coperta troppo corta. Naturalmente, questo dipende soprattutto dalla maniera in cui abbiamo scelto di raccontarlo, e non da una "evidente corrispondenza" tra i due concetti; però è indubbio che essi siano uniti proprio da questo insolito aspetto della conoscenza, che è proprio dato dal "limitare la conoscibilità", e non dall'estenderla.

La vita di Kurt Gödel continuò fruttuosa ben oltre la stesura del Teorema[10]; e continuò ad essere caratterizzata da atteggiamenti originali. L'ascesa del nazismo in seguito all'Anschluss non lo turbò eccessivamente, perché non si interessava che minimamente di politica. Curiosamente, pur non essendolo affatto, veniva scambiato spesso per ebreo, forse anche perché molti degli amici che frequentava lo erano. Volente o nolente, però, alla fine gli avvenimenti di quell'infuocato decennio che furono gli Anni Trenta austriaci lo travolsero. Rimase particolarmente colpito dall'assassinio di Moritz Schlick, il logico del Circolo di Vienna che gli rese affascinante la logica coi suoi brillanti seminari, che fu ucciso mentre si recava a far lezione all'Università da uno studente filonazista[11]. Questo provocò la prima seria crisi nervosa in Kurt, che poco tempo dopo ricevette il primo invito a recarsi negli Stati Uniti. Visitò una prima volta Princeton, si sposò nel 1938, e infine, quando la guerra era ormai scoppiata, si decise a trasferirsi definitivamente negli USA, anche per evitare di essere arruolato nell'esercito austriaco.

Il resto della sua esistenza fu ragionevolmente pacifico:

[10] Che, sia detto per inciso e risparmiandoci ulteriori dettagli, sono in realtà DUE teoremi.

[11] I tempi confusi generano eventi confusi. Lo studente che uccise Schlick era Johann Nelbock, che divenne solo successivamente un riverito membro del Partito Nazista Austriaco. E per quanto Schlick non fosse ebreo, ciononostante il processo salì alla ribalta della vita pubblica austriaca proprio come evento catalizzante del sentimento antiebraico che si stava sviluppando nella capitale austriaca.

si stabilì all'Institute for Advanced Studies di Princeton, e divenne cittadino statunitense nel 1948. Fu condotto a giurare la sua fedeltà agli Stati Uniti dai due migliori amici che si era fatto a Princeton: Albert Einstein e John Von Neumann.

È passata alla storia la sua conversazione col giudice che gli chiedeva di giurare fedeltà alla costituzione americana: nonostante i suoi amici lo avessero supplicato di evitare commenti e chiacchiere inutili in un momento così importante per il suo futuro di cittadino americano, Gödel non esitò a spiegare al giudice che aveva accuratamente studiato la Costituzione, trovando al suo interno una falla logica che poteva consentire l'instaurazione di una tirannia. Persone meno famose e meno folli avevano visto negarsi la cittadinanza per molto meno, ma fortunatamente per Gödel il giudice decise di non dare troppo peso alle sottili argomentazioni del maggiore logico del mondo.

Mentre i logici e i matematici di tutto il mondo studiavano le conseguenze dei suoi Teoremi di Incompletezza, Gödel continuò a produrre scritti e teoremi: per quanto non famosi quanto il teorema eponimo, le sue conclusioni sull'Ipotesi del Continuo e sull'Assioma della Scelta[12] basterebbero a consegnare il suo nome alla Storia della Matematica. Un po' sul serio e un po' per gioco, formalizzò anche la "Prova dell'esistenza di Dio" di Anselmo d'Aosta, anche se questo suo esercizio ha subito più travisamenti del Teorema di Incompletezza stesso.

Ax 1.	$\bullet\ \forall x\{[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)] \wedge P(\varphi)] \rightarrow P(\Psi)$
Ax 2.	$P(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg P(\varphi)$
Th 1.	$P(\varphi) \rightarrow \Diamond\, \exists x\, [\varphi(x)]$
Df 1.	$G(x) \leftrightarrow \forall\varphi[P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)]$
Ax 3.	$P(G)$
Th 2.	$\Diamond\, \exists x\, G(x)$
Df 2.	$\varphi \text{ ess } x \leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall\psi\{\psi(x) \rightarrow \bullet\ \forall x[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]\}$
Ax 4	$P(\varphi) \rightarrow \bullet\ P(\varphi)$
Th 3.	$G(x) \rightarrow G \text{ ess } x$
Df 3.	$E(x) \leftrightarrow \forall\varphi[\varphi \text{ ess } x \rightarrow \bullet\, \exists x\ \varphi(x)]$
Ax 5.	$P(E)$
Th 4.	$\bullet\ \exists x\, G(x)$

La prova dell'Esistenza di Dio secondo Gödel

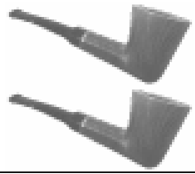
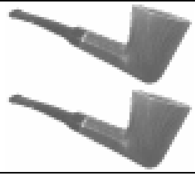
Alla fine di tutto, quel che ci resta in mano è una nuova certezza, è cioè che non esiste solo il Vero e il Falso, ma anche l'Indecidibile. È in questo senso che il principio aristotelico del Terzo escluso subisce un serio attentato alla sopravvivenza: si potrebbe continuare a scherzare rimandando chi legge alla foto in cui si vede Gödel anziano e magro, e chiedere: "Sono bianchi, i suoi capelli?". Neanche il peggiore degli studenti di Aristotele cadrebbe nel trucco, ciò nondimeno può essere d'effetto notare che, in una specie di sberleffo finale, i capelli di Gödel in quella foto non sono né bianchi né "non-bianchi". Il suo Teorema di Incompletezza è cosa estremamente più seria di questi piccoli giochi di parole, ma potrebbe comunque essere positivo sdrammatizzare tutta la tensione conoscitiva ed epistemologica che attorno ad esso si è venuta a creare. In fondo, che la Scienza non riesca, strutturalmente, a rispondere a tutte le domande possibili è fatto che dovrebbe preoccupare solo coloro che vivevano nell'illusione deterministica, quelli che ancora oggi, cento anni dopo Einstein, Heisenberg e Gödel, non si rassegnano all'idea che possano esserci degli autentici limiti alla conoscenza. Ma la stessa consapevolezza può invece essere quasi consolatoria, a ben vedere, perché riesce a togliere alla Scienza una sorta di arroganza che non le è propria.

Esistono cose che non riusciremo mai a conoscere, d'accordo. Anche questa è una conoscenza importante, specialmente tenendo conto di quante sono quelle che potremo ancora scoprire. E se Woody Allen ci si ripresenta chiedendoci se sia davvero conoscibile la conoscenza, potremo mostrare tutta la nostra cultura e saggezza rispondendo fieri: "Non ne ho la più pallida idea".

---

[12] Dimostrò l'indipendenza dell'Assioma e dell'Ipotesi rispetto ad un sistema matematico come quello dei Principia Mathematica di Russell e Whitehead.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Compleanno di Alice!			
Compleanno di Doc!			

Rudy vuole approfittare di questo spazio per ringraziare tutti quelli che si sono ricordati di fargli gli auguri; un lettore, addirittura, è riuscito a fargli arrivare un regalo: mettiamo qui i ringraziamenti, ma (trattandosi di un tool per la soluzione di un problema) ne parliamo in altra parte.

2.1 Compleanno di Alice!

Come sanno tutti gli attenti lettori del Calendario allegato ad una prestigiosa rivista di matematica ricreativa, questo mese, la nostra Redazione Estera (vi ricordate che sta in Svizzera, sì?) compie gli anni; ora, in un momento di annebbiamento delle capacità intellettive degli altri due Redattori, Alice è riuscita a strappare loro la promessa che prima o poi andranno a trovarla.

Siccome però questo mese non se ne parla neanche e il prossimo men che meno, per gentilezza maschilista abbiamo deciso di rinviare il suo compleanno, così resta un anno più giovane ancora per un po'.

Vivendo nella Svizzera Tedesca, con precisione teutonica la nostra Treccia preferita ha cominciato a pianificare la festa, cercando di calcolare il numero di pasticcini necessari.

Alice sa che Rudy ha una specie di blocco pavloviano oltre un certo numero *[Vero: per una forma di imprinting infantile, ho alcune remore oltre il terzo... Comunque, con gli anni ho imparato a zittire il senso di colpa (RdA)]*, mentre Doc può essere fermato ad un valore ragionevole cominciando ad alludere a colesterolo e trigliceridi; infine, conoscendo i propri limiti, non è stato difficile per lei arrivare ad un valore ben preciso.

Recatasi in pasticceria (come si chiamano? *Delikatessen*?), gestita evidentemente da un pasticciere teutonicamente preciso, ha scoperto che sono disponibili vassoi da ***6***, ***9*** e ***20*** pasticcini, e il nostro pasticciere ha sviluppato una strategia per cui, oltre un certo numero di pasticcini, riesce sempre a fornire una combinazione di vassoi per cui questi sono pieni; immaginatevi la sua disperazione, quando Alice gli chiede proprio *quel numero lì...*

Quanti pasticcini mangeremo, quel giorno?

2.2 Compleanno di Doc!

Qui, ci portiamo avanti con i lavori... Siccome sarebbe il mese prossimo, tiriamola un po' lunga: il problema è il *secondo*.

Chiunque abbia visto di recente Doc (e abbia avuto il coraggio di misurare la sua circonferenza addominale) non dovrebbe avere grossi problemi ad intuire che mostra un certo apprezzamento per la pasticceria ipercalorica... Rudy e Alice hanno in programma di fargli uno scherzetto.

Vi ricordate il "problema di Marilyn (vos Savant)"? Ne abbiamo parlato quando abbiamo introdotto la rubrica dei "Bungee Jumpers": il concetto, approssimativamente, era questo:

> Siete davanti a tre scatole: una ha dentro un numero abnorme di pasticcini, le altre due sono vuote: ne scegliete una e quei due perfidi di vostri amici prendono una delle scatole che *non* avete scelto e vi fanno vedere che è vuota: a questo punto, vi pongono davanti all'alternativa: se volete, potete cambiare scelta e passare alla terza scatola. Che fate, cambiate o no?

Sempre carino, ma siccome Doc conosce la soluzione di questo giochetto (e volevamo rendergli la decisione più facile) abbiamo cercato di semplificarlo (e *questo* è il problema).

Abbiamo messo due scatole davanti a Doc: una conteneva un terzo dei pasticcini, l'altra i restanti due terzi. Dopo avergliele messe davanti e averlo costretto a sceglierne una (senza sbirciare dentro!) gli abbiamo ricordato il problema qui sopra e gli abbiamo chiesto: "Che fai, scambi?". Il ragionamento del Nostro è stato un qualcosa di questo genere: "Se quello che ho scelto ha x pasticcini, allora ci sono il **50%** di probabilità che l'altro ne abbia $x/2$ e il **50%** di probabilità che ne abbia $2x$. Quindi, il valore atteso risulta:

$$E[x]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+2x\right)=\frac{5}{4}x$$

e quindi sembra vantaggioso... Doc però non vuole rischiare troppo, e quindi si chiede se qualcuno di voi (prima del suo compleanno) riesce a dirgli se scambiare o no e, possibilmente, perché comportarsi così.

3. Bungee Jumpers

Non esiste un generatore polinomiale infinito di primi.

Dimostratelo

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Rudy è un Fondamentalista Dialettico Pigro.

Da un po' di tempo, riceviamo una mucchio di lettere da alcuni lettori che potrebbero intitolarsi tutte "Per-Quale-Motivo-Non-Avete-Parlato-Di-Quello", con innumerevoli varizioni sul tema.

Semplice. il Grande Capo ha posto il veto. Assoluto, Imperativo e Categorico.

Tutto nasce, presumibilmente, da un tiro mancino di Doc. Era intenzione di Rudy essere il primo a pubblicare una foto di Mammifero Scarsamente Vestito su RM, ed era addirittura riuscito a trovare il motivo per la pubblicazione in un PM. Ma, come ama dire lui, *gira, buta, gava e tôira* (lett.: "mescola, aggiungi, togli e rigira"; fuor di metafora, avendo trovato di meglio[13]), la cosa si è fatta aspettare talmente che Doc ha avuto il tempo di anticiparlo in un Compleanno (e se non vi ricordate quale vuol dire che non solo non li leggete, ma non guardate neanche le figure[14]).

Avendo un'idea collegata all'Innominabile Argomento (e felice di riuscire, in questo modo, a risparmiare una serie di pensate e ricerche su temi e argomenti *[da cui: Pigro (AR & PRS]*), ha deciso dittatorialmente di tenere il campo libero; essendo però anche dialettico

[13] Quantomeno dal punto di vista matematico: ne è uscita fuori la serie sul paradosso di Banach-Tarski. Dal punto di vista estetico abbiamo dei dubbi, visto che il soggetto da pubblicare era la Venere di Milo.

[14] PNT (Piccola Nota di Tigna):...e non era neanche Giocasta, nel quadro! *[RdA]*

e tollerante *[solo nei confronti di sè stesso (AR & PRS)]*, ha seminato alcuni indizi (molto trasversali) nei numeri passati.

La cosa, comunque, andrà a chiarimento a breve. Tranquilli *[La parte restante della Redazione esprime i suoi dubbi sull'ultima parola con un punto interrogativo a testa (AR & PRS)]*.

Va detto che, questo mese meglio lasciarlo stare, il Capo: era tutto contento di avervi raccontato di *Tôjo* (la sua macchina), che... Ma lo lasciamo raccontare a lui

> Io ho una macchina (*Tôjo*).
> Assicurata contro il furto (valutazione di Quattroruote).
> In questi giorni ho rinnovato l'assicurazione.
> Se me la rubano, con i soldi che mi danno ci compro un iPod (bello).

Per motivi che non ci sono chiari, esprime tutta la sua solidarietà a PMP; non vogliamo indagare cosa accomuni questi due loschi figuri, ma la cosa ci lascia quantomeno perplessi.

Successo altro? Sì, un paio di cose *[Quando rudy dice così, ne sono successe di sicuro più di due (AR & PRS)]*.

Un nostro affezionato lettore (di cui non vi diamo neanche l'allonimo) ha pubblicato un articolo di matematica sulla "Funzione Speciale SHIN" e, probabilmente, ne pubblicherà un altro entro l'estate. Siccome tra noi e Martin Gardner c'è lo stesso rapporto che c'è tra il verduriere all'angolo e Gauss, ***non*** pubblicheremo un articolo sin quando qualcuno (e non ci riferiamo all'autore) non renderà la cosa un filino più terra-terra, comprensibile anche alle nostre semplici menti; se qualcuno è interessato, comunque, possiamo fornire gli estremi. Qui ci limitiamo a notare che SHIN è la tredicesima lettera dell'alfabeto arabo: Windows XP ha una quantità incredibile di font (sette sono indiani dell'India...) ma nel set standard non ne ha nessuno arabo, quindi (anche se sappiamo come è fatta) non ve la riproduciamo.

Questo mese da queste parti ci sono le elezioni; ***Lucia_δF*** (l'allonimo lo attribuiamo noi, sperando che non fosse un differenziale esatto) chiede di parlarne. Rimandiamo tutti gli interessati alla serie di PM relativi alla Matematica delle Elezioni (che dovrebbe essere anche in Bookshelf); se già non siamo d'accordo sui metodi su cui tutti sono d'accordo, figuratevi cosa pensiamo di un metodo su cui nessuno è d'accordo...

Inoltre, un mucchio di lettori DM (che sta per "Decisamente Maggiorenni") è riuscita ad individuare l'autore della citazione proposta da Doc nella Newsletter (*"...Primavera non bussa, / Lei entra sicura...* [F. DeAndré: "Un Chimico", da "Non al denaro, non all'amore, né al cielo"]). Siamo solo un pochino delusi dal fatto che il Nostro Chimico Preferito non abbia risposto; o è di un'altra generazione (lasciamo aperti entrambi gli intervalli) o si è accorto che il premio era una "sola".

Parliamo d'altro, che è meglio.

4.1 [085]

4.1.1 Non sono sicuro...

A quanto pare, ipotesi condivisa da un mucchio di gente meno due.

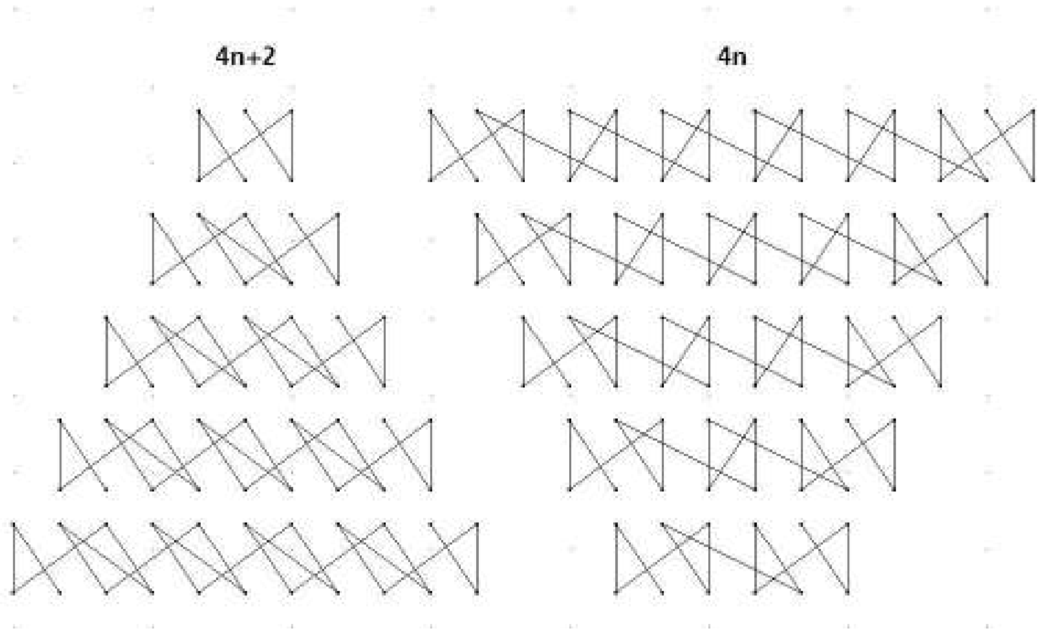
La prima "roba" (chiamarla soluzione ci sembra eccessivo...) è arrivata da una New Entry che, sfoggiando la sua conoscenza del piemontese, sceglie come allonimo ***Gnugnu***; conosciamo il suo mestiere (è lo stesso di ***Zar***) e quindi ci permettiamo di dubitare, ma se lo dice lui... Non solo, ma ci fornisce (logicamente attraverso un problema) anche numero di telefono e CAP. Comunque, quello che ci invia è un aggeggio di questo genere:

4n+2																				
(3)	2	-1	3																	
	-2	1																		
(5)	2	-1	3	4	5															
	-2	1	-3	-4																
(7)	2	-1	3	-6	5	-4	7													
	-2	1	-3	6	-5	4														
(9)	2	-1	3	-6	5	-4	7	8	9											
	-2	1	-3	6	-5	4	-7	-8												
(11)	2	-1	3	-6	5	-4	7	-10	9	-8	11									
	-2	1	-3	6	-5	4	-7	10	-9	8										
----																				
(999)	2	-1	3	-6	5	-4	7	-10	9	-8	11	……	-994	993	-992	995	-998	997	-996	999
	-2	1	-3	6	-5	4	-7	10	-9	8	-11	……	994	-993	992	-995	998	-997	996	

8n+4																				
(6)	2	-1	3	5	-4	6														
	-2	1	-3	-5	4															
(10)	2	-1	3	-6	5	-4	7	9	-8	10										
	-2	1	-3	6	-5	4	-7	-9	8											

8n																				
(4)	2	-1	4	-2	3	1	-3		ed altre tre; nessuna simmetrica.											
(8)	2	-1	3	-5	4	-6	-7	8												
	-2	1	-3	5	-4	6	7													
(12)	2	-1	3	-6	5	-4	7	-9	8	-10	-11	12								
	-2	1	-3	6	-5	4	-7	9	-8	10	11									

La cosa, effettivamente, non è che rappresentasse la quintessenza della chiarezza; figuratevi poi quando ci sono arrivati i "disegnini"; noi siamo dei grandi apprezzatori dei disegnini esplicativi, ma ci farebbe piacere tenessero anche fede alla seconda parte della definizione. Comunque, trovate l'esplicazione nella figura che segue.



...Il primo che dice "Tutto più chiaro" gli tiriamo il Bielstein in testa (visto che parlavamo di chimici...).

Non solo, ma durante il mese il Nostro se n'è uscito con la frase:

> ...nel frattempo il tipo simpatico, quello con il numero 2, ha deciso, novello Ulisse, di agire d'astuzia e ha fatto al tizio che decide questo ragionamento: "Con il metodo che ha deciso Vossignoria si liberano troppe persone; perché non complichiamo un po' le cose mettendo nel cerchio anche Lei? Naturalmente, Lei non avrà alcun biglietto e, se la conta la designerà, tutti i non liberati torneranno in carcere"

Beh...

Fortunatamente, è arrivato in nostro soccorso ***CID***, con due parti *[in realtà, con* **tre***; la terza parte rappresenta un generatore di alcuni dei casi in Excel, decorato dal logo di RM e dalla scritta "***Buon Compleanno, Rudy***". Rudy ringrazia sentitamente]* ; cominciamo dalla soluzione (e dalla dimostrazione), poi ci facciamo raccontare la storia e, sperabilmente, qualcosa sarà più chiaro.

Se N=6 la sequenza dei numeri liberati è: 2, 5, 3, 1, 4, 6

Se N=8 la sequenza dei numeri liberati è: 2, 7, 4, 6, 3, 1, 5, 8

Se N=10 la sequenza dei numeri liberati è: 2, 1, 6, 7, 5, 3, 4, 9, 8, 10

Se N=12 la sequenza dei numeri liberati è: 2, 5, 3, 1, 4, 6, 8, 11, 9, 7, 10, 12

Se N=14 la sequenza dei numeri liberati è: 2, 1, 10, 5, 8, 3, 7, 11, 6, 9, 4, 13, 12, 14

Se N>14 sono possibili i seguenti 3 casi:

A) Con (N mod 8) = 2

Nella sequenza dei numeri liberati, dopo $S_1=2$ pongo $S_2=(N-3)$; successivamente alterno numeri pari e dispari, (passando da un numero pari al successivo numero pari e da un numero dispari al precedente numero dispari); tutto ciò fino a che arrivo a $\frac{3*N-2}{4}$, giunto qui al posto di $\frac{3*N-2}{4}$ metto il numero 1. Successivamente metto $\frac{3*N-6}{4}$ seguito dal numero $\frac{N+10}{4}$ poi proseguo sempre alternando numeri pari e dispari (ma ora passando da un numero pari al precedente numero pari e da un numero dispari al successivo numero dispari)

quando giungo a $\frac{N}{2}$ prima di questo numero metto il numero $\frac{3*N-2}{4}$ per i numeri successivi a $S_{\frac{N}{2}}$, seguo questa regola di simmetria: $S_{N-k} = N - S_k$ e per concludere ho $S_N = N$

B) Con (N mod 8) = 6

Nella sequenza dei numeri liberati, dopo $S_1=2$ pongo $S_2=(N-3)$; successivamente alterno numeri pari e dispari, (passando da un numero pari al successivo numero pari e da un numero dispari al precedente numero dispari); tutto ciò fino a che arrivo a $\frac{3*N+2}{4}$, giunto qui al posto di $\frac{3*N+2}{4}$ metto il numero 1. Successivamente metto $\frac{3*N-2}{4}$ seguito dal numero $\frac{N+6}{4}$ poi proseguo sempre alternando numeri pari e dispari (ma ora passando da un numero pari al precedente numero pari e da un numero dispari al successivo numero dispari); quando giungo a $\frac{N}{2}$ prima di questo numero metto il numero $\frac{N-2}{4}$; per i numeri successivi a $S_{\frac{N}{2}}$, seguo questa regola di simmetria: $S_{N-k} = N - S_k$ e per concludere ho $S_N = N$

C) Con (N mod 4) = 0

Comincio con il notare che essendo N divisibile per 4, $\frac{N}{2}$ è pari.

Quindi per prima cosa cerco una soluzione valida con un numero di elementi uguali a $\frac{N}{2}$

Ora prendo la soluzione valida per $\frac{N}{2}$ e per i valori successivi applico la regola

$$S_{N-k} = N - S_k$$

Dimostrazione

Comincio con la dimostrazione del punto C) in quanto mi pare interessante il fatto che conoscendo una soluzione valida con N elementi sia possibile trovare immediatamente una soluzione valida con un numero di elementi uguale a (2*N).

Per cominciare, noto che se S_1, S_2, ..., S_{n-1}, S_n è una valida sequenza di numeri liberati allora anche S_{n-1}, ... ,S_2 , S_1, S_n è una valida sequenza di numeri liberati.

Infatti, rispetta le due condizioni necessarie per essere una sequenza valida.

La prima condizione necessaria per essere una sequenza valida è quella di contenere tutti i valori compresi tra 1 e N, e questa condizione è rispettata se la prima sequenza è una sequenza valida, in quanto la seconda sequenza è una permutazione della prima sequenza.

La seconda condizione è quella di passare per tutti i punti del cerchio (e passarci una volta sola)

Siccome la seconda sequenza ripercorre a ritroso sul cerchio il tragitto della prima sequenza, rispetta sicuramente anche la seconda condizione se la prima sequenza la rispettava.

A questo punto, noto che se prendo una soluzione valida per $\frac{N}{2}$ e la uso su N elementi, i primi $\frac{N}{2}$ valori sono tali che nessuna somma parziale di elementi consecutivi della sequenza possa essere uguale a $\frac{N}{2}$, pertanto sul cerchio di N elementi ho che i primi $\frac{N}{2}$ sicuramente occupano posizioni tutte distinte tra loro e la posizione diametralmente opposta ad ognuno di questi valori rimane sicuramente libera.

Applicando la regola $S_{N-k} = N - S_k$ per i valori successivi ai primi $\frac{N}{2}$, prendo sicuramente tutti valori distinti tra loro e maggiori dei primi $\frac{N}{2}$ e pertanto la prima condizione è rispettata.

Inoltre, siccome abbiamo visto poco sopra che una sequenza a ritroso è una sequenza valida, sono certo di rispettare anche la seconda condizione e di passare pertanto per tutti gli $\frac{N}{2}$ punti diametralmente opposti ai primi $\frac{N}{2}$.

Risulta pertanto dimostrato che se conosco una sequenza valida per $\frac{N}{2}$ elementi posso ricavare immediatamente una soluzione valida con un numero di elementi uguale a N mediante l'applicazione della regola: $S_{N-k} = N - S_k$.

Dimostro ora il caso B)

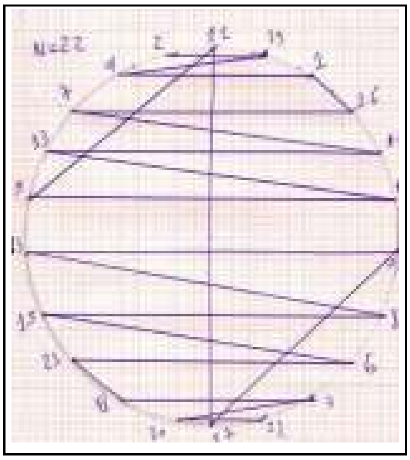
Comincio con il dimostrare che con questo metodo ottengo una sequenza di numeri liberati che contiene tutti i valori compresi tra 1 e N

Sicuramente tale sequenza contiene tutti i numeri pari, in quanto nei primi $\frac{N}{2}$ elementi ho che la metà dei numeri sono pari, il 1° numero pari è il 2 ed il k° numero pari della sequenza è uguale a (2*k) o a (N-2*k), la successiva applicazione della regola: $S_{N-k} = N - S_k$ mi garantisce di aver inserito tutti i numeri pari.

Tale sequenza contiene anche tutti i numeri dispari, in quanto nei primi $\frac{N}{2}$ elementi ho che la metà dei numeri sono dispari e la disposizione dei numeri è analoga a quella dei numeri pari con una sola differenza, lo spostamento del numero $\frac{N-2}{4}$ al penultimo posto e l'inserimento al suo posto del numero 1. Pertanto sono sicuro che la sequenza contenga anche tutti i numeri dispari.

Dimostro ora che con questo metodo occupo tutte le posizioni del cerchio:

Con questo metodo mi sposto inizialmente in senso orario di 2 posizioni, poi in senso antiorario di 3 posizioni e proseguo cosi creando un arco di posizioni occupate sempre più ampio in cui ogni nuova posizione occupata è sempre esterna alla penultima precedente, finché arrivato ad un certo valore invece che tornare indietro avanzo in senso orario di 1 posto, poì proseguo retrocedendo in senso antiorario fino alla posizione immediatamente precedente a quella occupata dal secondultimo valore. Proseguo in tal modo andando avanti e indietro fino a giungere al penultimo dei primi $\frac{N}{2}$ elementi, a questo punto mi sposto nella posizione immediatamente successiva al primo valore ed ora che ho completato il primo semicerchio mi sposto nella posizione diametralmente opposta e completo la sequenza in modo simmetrico a quanto fatto con i primi $\frac{N}{2}$ elementi, utilizzando la regola di simmetria: $S_{N-k} = N - S_k$



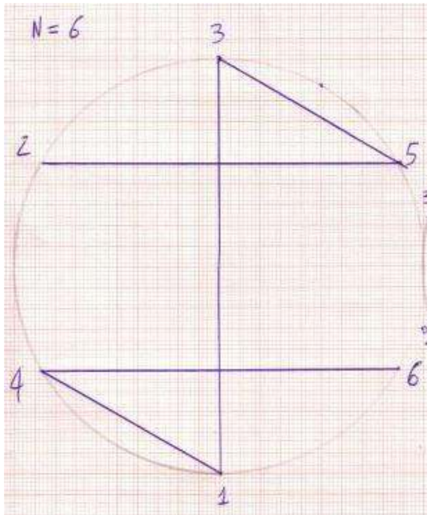
Esempio (N=22) *[lo trovate in figura qui di fianco; e non dite che non vi ricorda nulla (RdA)]*:

Il caso A) è analogo al caso B), con la sola differenza che: il numero che metto al penultimo posto dei primi $\frac{N}{2}$ elementi diventa il numero $\frac{3*N-2}{4}$ e dal penultimo elemento invece che trasferirmi nella posizione immediatamente successiva al primo elemento, mi sposto nella posizione diametralmente opposta a quella successiva al 1° elemento.

Conclusioni

A questo punto, con un metodo analogo si possono ottenere le sequenze valide a partire dal numero 3 (e a dire il vero io l'ho fatto).

Allo stesso modo si potrebbero cercare soluzioni a partire da altri valori iniziali; ma la vera sfida è riuscire a trovare un metodo che permetta di trovare una sequenza valida a partire da qualsiasi valore m<N (e diverso da $\frac{N}{2}$).



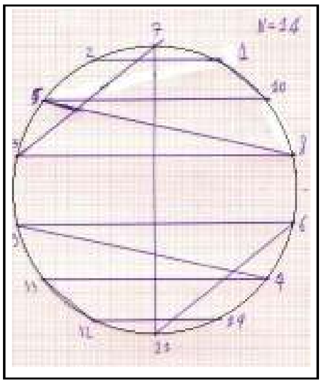
Inoltre potrebbe essere interessante cercare altri modi per approfondire lo studio di questo problema (Ma tutto ciò sarebbe molto impegnativo e manca ormai assai poco alla primavera, meglio mettere da parte l'argomento per riprenderlo poì al prossimo inverno)

...e adesso, come promesso, la storia della soluzione.

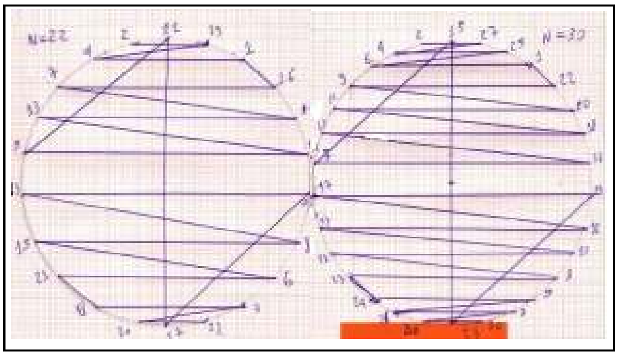
Tutto ebbe inizio quando provai a disegnare con il compasso la soluzione per N=6 *[qui a lato]*; la perfetta simmetria della soluzione mi fece immaginare che questa potesse essere la chiave per giungere alla soluzione del problema per N=1998.

Decisi di disegnare con il compasso le soluzioni che rispettassero la seguente regola di simmetria:

$$S_{N-k} = N - S_k$$

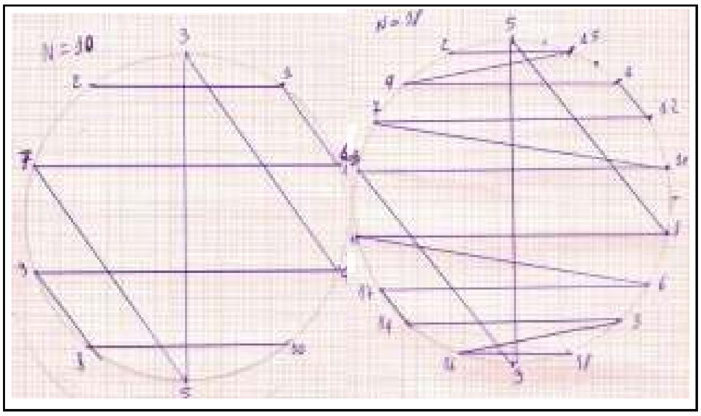


(in questa formula, S_k rappresenta il k-esimo numero della sequenza dei numeri liberati). Feci quindi generare al computer varie soluzioni che rispettassero questa regola di simmetria per valori di N compresi tra 6 e 64; disegnando le soluzioni con il compasso, la prima che catturò la mia attenzione fu la seguente *[figura a fianco]*: cercai allora se ci fossero altre soluzioni in cui i segmenti di lunghezza pari fossero tutti orizzontali ed i segmenti di lunghezza dispari seguissero un andamento analogo al caso N=14. Trovai i seguenti risultati *[N=22 e N=32, figure qui sotto]*.



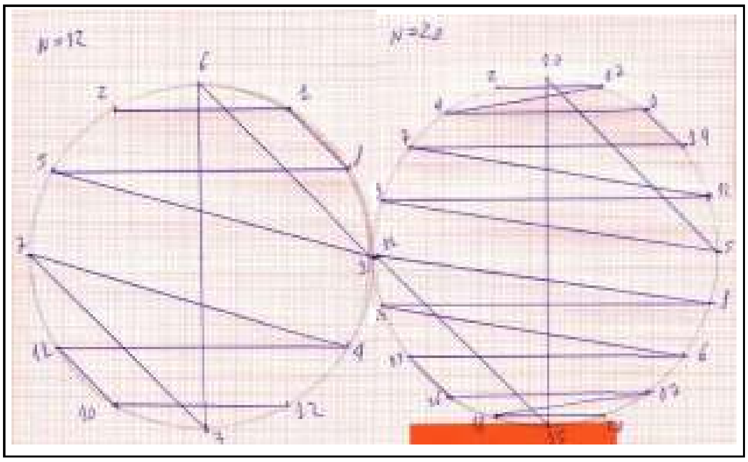
A questo punto compresi il metodo per risolverlo, e mi resi conto che valeva per (N Mod 8)=6 e quindi anche per N=1998, in quel momento i salti di gioia li ho fatti io (era la sera di sabato 25 febbraio).

Il metodo è semplice, siccome la soluzione rispetta la regola $S_{N-k} = N - S_k$ se riempiamo con la prima metà dei numeri il semicerchio superiore siamo sicuri che anche il semicerchio inferiore andrà bene in quanto è simmetrico rispetto al centro; ebbene nel semicerchio superiore i segmenti di lunghezza pari sono tutti paralleli tra loro e quindi assumono tutte le lunghezze pari possibili. Per quanto riguarda i numeri dispari abbiamo che le lunghezze dei segmenti sono di valore crescente a partire da 3 fino a $\frac{N}{2}$ con due eccezioni, siccome mi serve un segmento di lunghezza $\frac{N-2}{4}$ per unire l'ultimo segmento di lunghezza pari al vertice del semicerchio superiore, i due segmenti che sarebbero stati uniti dal segmento di lunghezza $\frac{N-2}{4}$, li unisco invece mantenendomi dallo stesso lato del semicerchio con un segmento di lunghezza 1 . Successivamente provai a modificare la regola per studiare il caso (N Mod 8)=2 Osservai le soluzioni per N=10 e N=18 *[qui sopra]; m*i risultò facile notare che potevo applicare un metodo analogo, la variazione principale è che giunto al segmento pari più grande mi dovevo trasferire al vertice del semicerchio inferiore (invece che al vertice del semicerchio superiore, mantenendo cosi un valore dispari per la distanza tra il segmento pari ed il vertice).



Provai poi a studiare il caso (N Mod 8)=4. Questi furono i primi risultati *[sempre qui sotto]*, Ma purtroppo questo metodo non risultava adatto per i numeri divisibili per 8.

Fortunatamente, ad inizio marzo, mi venne in mente la seguente idea: se io disegno una soluzione valida sul cerchio e partendo dall'ultimo segmento mi muovo a ritroso fino al primo segmento, quella che trovo è una soluzione valida.



Ciò è vero in quanto percorro tutti i punti sul cerchio con segmenti aventi tutte le lunghezze possibili.

Allora pensai: "cosa succede se io utilizzo una sequenza valida per N elementi su un cerchio di (2*N) elementi?"

La risposta che mi diedi fu che sicuramente i punti avrebbero occupato posizioni tutte distinte tra loro in quanto la somma modulo N non si ripete e la stessa posizione la si incontra ogni (2*N) elementi; per la medesima ragione, anche tutte

> le posizioni diametralmente opposte alle posizioni occupate sarebbero rimaste libere in quanto distavano N da una posizione occupata.
>
> Pertanto come soluzione per N Mod 4 = 0 si può prendere una soluzione valida per un numero di elementi uguali a $\frac{N}{2}$, utilizzare tale sequenza per i primi $\frac{N}{2}$ elementi e per i valori successivi applicare la regola di simmetria: $S_{N-k} = N - S_k$

Dunque, qui il problema si fa complesso, qualunque significato vogliate dare al termine.

Abbiamo ricevuto un link da parte di due lettori ad un sito di una prestigiosa istituzione di matematica (e una volta tanto parliamo sul serio) in cui è presente un articolo di *quattordici* pagine relativo al problema in oggetto, con un programma per verificare le soluzioni.

"E perché non pubblicate?" Per una serie di motivi:

1. L'articolo è una cosa decisamente seria (oltrechè lunga), scritto in TEX (che riusciamo a leggere ma non a scrivere) e ha tutta l'aria di essere quasi pronto per la pubblicazione in riviste serie ("quasi" in quanto ci sono alcuni punti in cui c'è scritto "Dimostrazione: XXXXXXXXXXXXXXXX"); non solo, ma compaiono i "nomi di qua" dei solutori, che non ci hanno ancora detto se vogliono essere resi pubblici o no; quindi, non pubblichiamo neppure gli allonimi.
2. Il programma occupa (scritto piccolo) *ventotto* pagine e ha mandato in crisi Doc e in sollucchero Rudy: giusto per fornirvi un esempio:

```
/* starting from n compute a new sequence that is m*n long using
* a technique similar to that used for triplication
* WARNING: se m e` pari non funziona
*/
int paniepesci(int sigma[], int tau[], uint n, uint ceste)
{
...
fprintf(stderr,"WARNING: paniepesci requires an antisymmetric tau\n");
...
```

Ora, se a voi (come a Rudy) piacciono certe cose, l'unica cosa che possiamo sperare è che i nostri due timidoni ci permettano di farli uscire dall'anonimato; tranquilli, un quarto dell'articolo è in italiano; il resto è in greco, nel senso che sono variabili...

Fermate le rotative! Abbiamo ricevuto il permesso. Trovate il programma, l'articolo e quant'altro all'indirizzo http://dmf.unicatt.it/~paolini/rudimathematici/NSS/ Il consiglio di Rudy è di procurarvi una scatola (da un etto) di tabacco e vedere se finisce prima quella o se capite prima l'articolo.

Se volete sapere come va a finire, dopo ***sedici mail***, l'ultima frase che abbiamo sentito da loro suona circa così: "...ora la questione è capire se la teoria precedentemente ottenuta può essere interessante in qualche modo oppure no."

4.2 [086]

Sembra il secondo sia piaciuto a pochi...

4.2.1 Venerdì 17

Qui, la prima soluzione ci è arrivata da ***PMP*** che, come al solito, fornisce un mucchio di cose interessanti e risolve pocopoco:

> Negli anni non bisestili, la mnemonica per ricordarsi il primo giorno del mese è data dalle cifre ***144 025 036 146*** (tre quadrati e il primo numero più due).
>
> *Spiegone*: per il XX secolo si sommava AnnoDelSecolo, int(AnnoDelSecolo/4), mnemonica, GiornoDelMese; si shakerava tutto modulo 7 e si contava da sabato=0.

Per il XXI secolo, abbiamo venerdí=0 e quindi oggi abbiamo

```
6+int(6/4)+mnemonica(3)+20=69+17+0+20=5 mod 7
```

e infatti oggi è mercoledì *[la mail ci è arrivata il primo marzo]*.

Per gli anni bisestili, la mnemonica è ***034 025 036 146***. La cifra che appare di più è ***4*** nel primo caso e ***0*** nel secondo, ciascuna con ***3*** occorrenze; quindi al massimo si possono avere tre venerdì 17 in un anno, come stavolta con febbraio marzo e novembre; una seconda possibilità è avere un anno bisestile, con gennaio, aprile e luglio.

Per vedere l periodo più lungo senza venerdì 17, occorre considerare le coppie di anni consecutivi di tre tipi (***NN***, ***NB***, ***BN***, dove ***B*** è bisestile e ***N*** non bisestile); non ho voglia di scrivere tutti i numeri, ma posso dirti che se in un anno prebisestile si ha venerdì 17b agosto, i superstiziosi possono dormire in pace fino a venerdì 17 ottobre dell'anno successivo: quattordici mesi!

Per vedere se è più facile che un anno inizi per sabato o per domenica, bisogna considerare il ciclo di ***400*** anni che stranamente è sempre costante con il calendario gregoriano e fare i conti, ma non ne ho voglia: sono un matematico *[...e qui ci sta bene la citazione di Doc su cosa fargli da piccoli, ai matematici...]*.

Il Nostro si salva in extremis ricordandoci una delle nostre gioie della gioventù: Churchy LaFemme (cercatelo in Wikipedia, se non sapete chi è: alla voce "Pogo"); certo, per lui (come per molti americani) il giorno pericoloso era venerdì 13; lo era anche nel problema originale, ma per far andare male le cose, un giorno vale l'altro...

Soluzione più articolata da parte di ***CID***, secondo le stesse linee; piuttosto che basarsi sulla mnemonica, il Nostro considera che se assegniamo ai giorni della settimana un numero progressivo (modulo ***7***) a partire dal ***17*** gennaio, otteniamo

0, 3, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5 (per i 17 del mese degli anni non bisestili)

0, 3, 4, 0, 2, 5, 0, 3, 6, 1, 4, 6 (per i 17 del mese degli anni bisestili).

Da cui si vede che negli anni non bisestili il numero più frequente è il ***3***, che si ripete ***3*** volte, per cui se al numero ***3*** corrisponde il venerdì abbiamo un venerdì ***17*** nei mesi di febbraio, marzo e novembre (questo è il caso del 2002).

Negli anni bisestili, invece, il numero che si ripete più di frequente è lo ***0***, per cui se ad esso corrisponde un venerdì abbiamo venerdì ***17*** nei mesi di gennaio, aprile e luglio (caso del 2020).

Per il calcolo dei massimi e minimi periodi di libertà (dal venerdì 17), vengono considerati tre casi di sequenze:

A) Due anni non bisestili;

B) Un anno non bisestile seguito da un anno bisestile;

C) Un anno bisestile seguito da un anno non bisestile.

Questo permette di generare la seguente tabella delle corrispondenze, per quanto riguarda i ***17*** dei mesi:

	G	**F**	**M**	**A**	**M**	**G**	**L**	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**	**G**	**F**	**M**	**A**	**M**	**G**	**L**	**A**	**S**	**O**	**N**	**D**
A)	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
B)	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
C)	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0

Da cui, le lunghezze possibili dei periodi di libertà sono le seguenti:

1 mese: da febbraio a marzo di un Anno non bisestile.

3 mesi: da aprile a luglio, da settembre a dicembre o da gennaio ad aprile di un anno non bisestile, oppure da dicembre a marzo dell'anno dopo

6 mesi: da febbraio ad agosto o da novembre a maggio dell'anno dopo o da ottobre ad aprile o da dicembre a giugno dell'anno dopo

8 mesi: da marzo a novembre, da maggio a gennaio, da giugno a febbraio

9 mesi: da gennaio ad ottobre di un anno non bisestile, da agosto a maggio di un anno non bisestile, da novembre ad agosto di un anno non bisestile

11 mesi: da luglio a giugno dell'anno dopoo da ottobre a settembre dell'anno dopo

14 mesi: da luglio a settembre dell'anno dopo o da agosto a settembre dell'anno dopo.

Soluzione simile arriva da ***Celeste***, quello che ci è piaciuto della sua soluzione (che procede sulla stessa linea di quelle viste sopra) è che la tabellina che utilizza non ha solo tre entry, come quelle viste qui sopra, ma esamina *tutti e ventotto i casi possibili*. in effetti anche noi (nel nostro inguaribile ottimismo) usiamo per la definiizone del Calendario una tabella di questo tipo.

> *[Noterete che non vi abbiamo spiegato cosa ci sta a fare il* **28**. *Se avete dei problemi, accendete il computer e calcolate setteperquattro (RdA)]*

Tutti i ragionamenti sono correttissimi, ma apprezziamo lo sforzo in più fatto da ***Celeste***; la sua soluzione ha il merito di rendere molto chiaro il fatto che si stanno proprio esaminando tutti i casi. Inoltre facilitano il calcolo in giorni della distanza tra due venerdì 17; il Nostro trova infatti i valori:

29, 91, 120, 121, 123, 153, 181, 182, 183, 184, 212, 243, 245, 273, 304, 334, 336, 427, 457

e, se vi sembrano in numero diverso da quelli calcolati da altri, ricordatevi che qui sono *giorni*; il bisestile sballa i conti. Ci ha particolarmente impressionato la sequenza ***181, 182, 183, 184***; ci stanno antipatici i numerologi, ma qui c'è da pensarci due volte...

A leggere le prime due pagine, ci risulta difficile chiamare "soluzione" quella di ***BR1***; interessanti, comunque, le polemiche che cerca di scatenare: seguono alcune citazioni

> "...supponiamo il calendario sia quello Gregoriano..."
>
> "...l'anno terrestre, misurato in giorni, si assottiglia sempre di più..."
>
> "...i segni zodiacali sono ***13*** e non ***12***..."
>
> "...buffa, sorprendente, aperiodica e bizzarra convenzione dell'introdurre un taglio modulo ***7***..."
>
> "puzzle astrale che una intelligenza extraterrestre di levatura sufficiente riterrebbe veramente affascinante..."

E avanti di questo passo, riaprendo anche la diatriba sull'inizio del millennio; quella che ci ha comunque lasciati veramente perplessi è la

> "...devo dichiararmi d'accordo con Antonino Zichichi..."

Invitiamo tutti i suoi amici che ci leggono a prendere una ferma posizione in merito[15], chiedendogli se non si vergogna.

Comunque, a questa introduzione segue un'analisi decisamente interessante:

> Per prima cosa definiamo due indicatori, che possono tornare utili:

[15] Il punto del contendere è se esista o no una "regola del 4000", oltre a quella del 4, del 100 e del 400, per i bisestili; la cosa è risolta (presumiamo con dispiacere di Celeste e Antonino) grazie ai secondi introdotti artatamente ogni tanto a Capodanno.

G$_M$: numero progressivo di un giorno del mese, da 1 a 31;

G$_S$: numero progressivo di un giorno della settimana, da 0 a 6.

Secondo il suddetto *Calendario Gregoriano*, esistono due *tipi di anni*; quelli bisestili e quelli no; allora partiamo dalla tabellina che segue, che ci dice quali siano i giorni della settimana (da Lunedì a Domenica) per tutti i giorni di ciascun mese *[la trovate qui a fianco].*

	Non-B	**B**
Gennaio	0	0
Febbraio	3	3
Marzo	3	4
Aprile	6	0
Maggio	1	2
Giugno	4	5
Luglio	6	0
Agosto	2	3
Settembre	5	6
Ottobre	0	1
Novembre	3	4
Dicembre	5	6

Come funziona la tabellina? Provo a spiegare; dato un qualsiasi **G**$_S$ per un qualunque **G**$_M$ di Gennaio (con **0** = QualcheDì, **1** = IlGiornoDopo, fino al settimo che vale **6**), per i mesi successivi si trovano i **G**$_S$ corrispondenti. Per esempio; poniamo che il 17 Gennaio sia un Martedì (posto pari a **0** nella colonna di un anno Non Bisestile), allora in Febbraio il 17 capita nel giorno **3**, che vuol dire 3 giorni dopo Martedì, cioè Venerdì. Quindi se tutti gli **0** sono Martedì, allora tutti gli **1** sono Mercoledì e via discorrendo… Per cui, continuando con l'esempio, anche il 17 Marzo sarà Venerdì, il 17 Aprile (6 giorni dopo Martedì) un Lunedì, il 17 Maggio Mercoledì, e così via…

La tabellina è ricavata per via empirica; e non potrebbe essere altrimenti, vista la storia travagliata che il *Calendario* ha dietro di sé; nessuna regola logica, nessun raziocinio ordinatore. Solo il frammischiare convenzioni, consuetudini, usi, tradizioni, postulati religiosi, abitudini, dogmi.

Comunque, la prima cosa importante è che, qualunque sia il significato dello **0** (da Lunedì a Domenica), in entrambe le colonne (Non Bisestile e Bisestile) **appaiono tutti e 7 i valori da 0 a 6**; questo vuol dire che, per un qualsiasi **G**$_M$ in Gennaio, *sicuramente* nello stesso anno (sia bisestile che no) lo stesso **G**$_M$ capiterà in un qualche mese successivo a Gennaio con **tutti** gli altri possibili valori di **G**$_S$. Cioè se per un dato anno il 3 Gennaio (poniamo) capita di Giovedì, esiste almeno un mese nello stesso anno in cui il 3 (**G**$_M$) cade di Lunedì, Martedì, Mercoledì, Venerdì, Sabato o Domenica.

Da ciò si deduce il **Teorema 1**:

In ciascun anno, bisestile o no, esiste almeno un mese in cui il giorno G$_M$ del mese cade nel giorno G$_S$ della settimana.

Quindi, siamo certi che nel 2062 (poniamo a caso…) il giorno 23 (in Gennaio, Giugno o Novembre, chissà…) capiterà certamente almeno una volta di Giovedì.

E siamo altrettanto certi che il giorno 17 (quello che maggiormente ci interessa) capiterà in ogni anno inevitabilmente almeno una volta di Venerdì.

Quante volte può capitare, al massimo? Torniamo alla tabellina di cui sopra; per entrambe i casi (Bisestile e Non Bisestile), c'è almeno una occorrenza del **G**$_S$ che appare 3 volte, e non più di 3. Il numero 3 per gli anni Non Bisestili, lo 0 per i Bisestili. Allora, se ad esempio il 4 Gennaio di un anno a caso fosse una Domenica, in un anno Non Bisestile potremmo essere certi che in Febbraio, Marzo e Novembre il giorno 4 sarebbe Mercoledì (3 volte); e in un anno Bisestile, lo stesso Gennaio, con Aprile e Luglio, avrebbe il giorno 4 individuato come Domenica (ancora 3 volte). Possiamo quindi declamare il **Teorema 2**:

In ciascun anno, bisestile o no, esiste un giorno G$_M$ del mese che cade nel medesimo giorno G$_S$ della settimana per 3 volte, e non più.

Il resto, è pura elaborazione; assodata la irrazionalità del *Calendario*, resta solo da snocciolare i dati che ne vengono fuori, provando a spremerlo (il *Calendario* stesso) in varie maniere, e fissando come **GM** di interesse il 17 e come **GS** il Venerdì.

Gli intervalli possibili, in termini di giorni, fra una coppia **GM-GS** e la successiva sono 7; 27 giorni "sfiga-free", oppure 90, 181, 244, 272, 335 e 426 (escludendo dal computo il Venerdì 17 stesso). Vi risparmio la casistica completa (cioè il dettagliare che 27 giorni di requie corrisponde al fatto che era il 17 marzo rispetto al 17 febbraio, come quest'anno, ecc…).

Gennaio	57
Febbraio	58
Marzo	56
Aprile	58
Maggio	57
Giugno	58
Luglio	58
Agosto	59
Settembre	56
Ottobre	57
Novembre	56
Dicembre	56

Nell'arco dei 400 anni del *Periodo* vi sono sempre 686 *Venerdì 17*, e 685 intervalli, ovvio. E sui 400 anni i giorni *sfigati* capitano nei vari mesi come segue *[tabella a lato]*.

Interessante notare che si respira un po' fra Settembre e Gennaio, dove è meno probabile beccarsi un *Venerdì 17*, mentre fra Febbraio ed Agosto il destino si incattivisce; Agosto in particolare sembra veramente nefasto. C'è quasi il 15% di probabilità di farsi cogliere da un *Venerdì 17*; saranno le vacanze che fanno male?

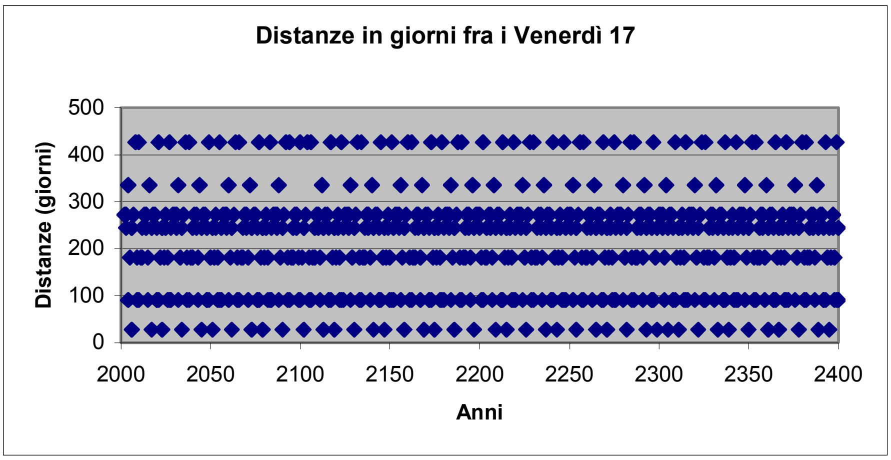
Nel complesso, vi sono 686 eventi su 400 anni; cioè 1,72 per anno circa; ci chiediamo adesso se, per una qualche diversa interpretazione del Destino, il *giorno nefasto* fosse stato un altro, chessò, il Giovedì 23 o il Martedì 11: si scopre che, nell'arco solito di 400 anni, qualunque sia il *giorno nefasto* prescelto, esso capita sempre 686, o 688 o 670 volte. Mai in diversa quantità. E quindi possiamo dirci fortunati che quello canonico (il mitico *Venerdì 17*) abbia solo 686 occorrenze; potevano capitarcene 2 o 4 in più…

Intervallo	**Occorrenze**
27	43
90	141
181	115
244	171
272	130
335	28
426	57

Le varie distanze fra le *date nere*, in termini di giorni, fra un giorno sfigato ed il successivo, non sono parimenti probabili nell'arco dei 400 anni; cadono invece come segue *[tabella a lato]*.

Cioè nei famosi 400 anni capita 57 volte che vi siano periodi di respiro "sfiga-free" di ben 426 giorni, ma di converso troviamo 43 casi in cui (come in quest'anno nefasto), la maledizione si abbatte su di noi col breve respiro di 27 giorni…

Infine, un grafico tanto per ingigantire il file; mostra quanto distano i famosi *Venerdì 17* fra loro nei 400 anni del *Periodo*:



...tutto più chiaro, adesso, sì?

Comunque, per saperne di più sugli anni, andate a cercarvi la FAQ di Tondering o, se preferite, un certo qual PM intitolato "Il Giorno del Giudizio".

4.2.2 Sempre a proposito di superstizione...

Anche qui ***Celeste*** ha colpito; speriamo di riuscire ad inserire la tabella, decisamente interessante.

Partiamo da un caso particolare, ad esempio quello dei *numeri fortunati* di 6 cifre, in cui la somma delle prime 3 (e quindi anche quella delle ultime 3) sia 8; per sapere quanti sono, bisogna calcolare in quanti modi si può esprimere la somma 8 con 3 addendi; o ciò che è lo stesso, si deve trovare il numero di modi in cui si possono sistemare 8 palline in 3 barattoli (tenendo conto che si possono anche disporre tutte le palline in un solo barattolo); questo numero è dato dal numero di *combinazioni con ripetizione* di ordine 3 e classe 8:

$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,k}$; per n = 3, k = 8: $C^*_{3,8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10.9}{2!} = 45$.

Poiché ognuno di questi modi relativo alle prime 3 cifre si può abbinare ad un altro modo, uguale o diverso, relativo alle ultime 3 cifre, il totale dei *numeri fortunati* con somma 8 + 8 delle cifre è di $45^2 = 2025$.

Le somme dei gruppi di 3 cifre possono variare da 0 (0 + 0 + 0) a 27 (9 + 9 + 9) assumendo tutti i valori intermedi; il totale dei *numeri fortunati* di 6 cifre sarà dato quindi dal totale dei quadrati dei modi relativi ad ognuna di queste somme.

Il procedimento di calcolo suddetto funziona fino alla somma 9; oltre, bisogna sottrarre i modi che fanno intervenire addendi uguali o superiori al 10. Consideriamo ad esempio la somma *s* = 14; i modi da sottrarre sono quelli del tipo 10 + 4 + 0, 10 + 3 + 1, 10 + 2 + 2 ecc., che corrispondono in sostanza al numero di modi della somma 4, ognuno associato all'addendo 10 che può occupare $\binom{3}{1} = 3$ posizioni diverse nella somma; in altri termini bisogna sottrarre $3.C^*_{3,4} = 3.15 = 45$. Analogamente, per la somma, poniamo, di 23, da $C^*_{3,23}$ bisogna sottrarre sia tutti i modi della somma di 13 a cui abbiniamo in $\binom{3}{1}$ posizioni diverse un addendo 10, sia tutti i modi della somma 3 a cui abbiniamo o 2 addendi 10 in $\binom{3}{1}$ posizioni diverse o 1 addendo 20 in $\binom{3}{2}$ posizioni diverse, cioè in totale con $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2} = 6$ abbinamenti possibili.

Si ottiene la tabella *[martoriata da noi... cerchiamo di farla stare da qualche parte]*:

s	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
t(modi)	1	3	6	10	15	21	28
t^2	1	9	36	100	225	441	784

s	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**

t(modi)	36	45	55	63	69	73	75
t^2	1296	2025	3025	3969	4761	5329	5625

s	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
t(modi)	75	73	69	63	55	45	36
t^2	5625	5329	4761	3969	3025	2025	1296

s	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
t(modi)	28	21	15	10	6	3	1
t^2	784	441	225	100	36	9	1

in cui i valori di *t* crescono da 1 ad un massimo per poi decrescere simmetricamente fino ad 1. Il totale dei *numeri fortunati* di 6 cifre è, come detto, dato da $\sum t_i^2 = 55.252$.

Con analogo ragionamento si ottengono i risultati per i *numeri fortunati* di 8 e 10 cifre. Le somme possibili vanno rispettivamente da 0 a 36, e da 0 a 45. Riportiamo le formule generali:

$$2n = 6:\ t = C^*_{3,s} - \binom{3}{1}C^*_{3,s-10} - \binom{4}{2}C^*_{3,s-20}$$

$$2n = 8:\ t = C^*_{4,s} - \binom{4}{1}C^*_{4,s-10} - \binom{5}{2}C^*_{4,s-20} - \binom{6}{3}C^*_{4,s-30} \quad \sum t_i^2 = 4.816.030$$

$$2n = 10:\ t = C^*_{5,s} - \binom{5}{1}C^*_{5,s-10} - \binom{6}{2}C^*_{5,s-20} - \binom{7}{3}C^*_{5,s-30} - \binom{8}{4}C^*_{5,s-40}$$

$$\sum t_i^2 = 432.457.640.$$

Se la base dei numeri, anziché 10, è *m*, il procedimento non cambia nelle sue linee generali, salvo per il fatto che i simboli indicanti le cifre sono in numero di *m*, e che le somme da considerare variano da 0 a *n(m – 1).*

Interessante anche la soluzione di ***Jacopo***:

Ordunque, inizio con qualche considerazione generale:

Un numero fortunato di 2n cifre (in una generica base b) sarà composto da due n-ple di cifre di valore compreso tra 0 e b-1.

Per ottenere il numero delle possibili n-ple di cifre in base b basta calcolare il numero di disposizioni con ripetizione di b elementi presi ad n ad n:

$$D^R(b,n) = b^r$$

Come ci dice la definizione stessa di numero fortunato la somma delle cifre della prima n-pla deve essere uguale alla somma delle cifre della seconda; per risolvere il problema è quindi sufficiente calcolare il numero delle possibili disposizioni con ripetizione di b^n n-ple prese a 2 a 2 introducendo però il vincolo che le 2 n-ple abbiamo sempre somma uguale.

Dopo aver passato un sacco di tempo sopra i miei vecchi appunti di calcolo combinatorio mi rendo conto che il problema non è poi così immediato e banale, per cui provo a scomporlo in problemi più semplici.

Visto che risulta alquanto difficile ragionare per una generica somma di n cifre anziché una fissata decido di riflettere prima su quali siano le possibili somme che interessano le mie n-ple: una qualsiasi somma s di n cifre sarà sicuramente un numero compreso tra 0 (n-pla tutta nulla) ed n(b-1) (n-pla interamente composta dalla ripetizione della cifra più alta in base b).

Ad esempio nel caso di n=3 e b=10 le n-ple andranno da 000 a 999 ed s apparterrà all'intervallo [0,27].

Posso quindi esprimere N(2n) (ovvero la quantità di numeri fortunati a 2n cifre) come la sommatoria di tutte le possibili disposizioni con ripetizione di n-ple prese a 2 a 2 aventi somma delle cifre pari ad un numero s fissato che va da 0 a smax = n(b-1):

$$N(2\mathbf{n}) = \sum_{s=0}^{smax} S^2(n,s)$$

Con S(n,s) intenderò d'ora in poi il numero di disposizioni con ripetizione di b cifre prese ad n ad n la cui somma sia s.

Così facendo posso trovare un risultato parziale per ogni s; sommando poi i vari contributi arrivo a trovare il risultato complessivo che cercavo.

[Prima di proseguire, un piccola digressione: per generalizzare ancora di più il problema perché non definire già che ci siamo anche numeri più-che-fortunati composti da m*n cifre? Sarebbero cioè numeri formati da m n-ple di cifre a somma uguale. Per fare ciò sarebbe sufficiente elevare S(n,s) alla m anziché alla 2...]

Arrivati a questo punto il problema si riduce a trovare un modo soddisfacente per definire questo fantomatico numero S(n,s) che ho introdotto nella formula precedente... problema anch'esso tutt'altro che immediato, per quanto mi riguarda.

Alla fine sono arrivato a definire S(n,s) per induzione in questa maniera:

Se n=1,
S(1,s)= 1, s < b
0, s>=b

Banalmente, il numero di possibili somme di 1-ple di cifre può essere 1 se s è un numero composto da un'unica cifra in base b oppure 0 se s è un numero troppo grande e non può essere espresso da un'unica cifra.

Se n>1,

$$S(n,s) = \sum_{k=0}^{cmax} S(n-\mathbf{1}, s-k)$$

Per spiegare questa definizione è necessario ragionare in questa maniera: una n-pla di cifre in base b sarà composta da una prima cifra k e da una (n-1)-pla di altre cifre; se k=0 è ovvio che la somma s dovrà essere calcolata sulla base delle rimanenti n-1 cifre; quindi S(n,s) per le n-ple aventi prima cifra =0 sarà uguale ad S(n-1,s).

Analogamente se la prima cifra k sarà =1 le restanti n-1 cifre dovranno avere somma s-1; possiamo quindi dire che S(n,s) per le n-ple aventi prima cifra =1 sarà uguale ad S(n-1,s-1)

Possiamo applicare lo stesso ragionamento per un qualsiasi valore attribuibile alla prima cifra k, generalizzando il valore di S(n,s) per le n-ple con prima cifra k uguale a S(n-1,s-k).

Di conseguenza per ottenere S(n,s) per una qualsiasi n-pla di cifre è sufficiente applicare ricorsivamente la sommatoria espressa sopra per k che va da 0 a cmax, che è il valore minimo tra s e b-1.

[Altra considerazione: valutare k scegliendo come valore limite superiore cmax= min(s, b-1) è la scelta ottimale in quanto ci permette di escludere quei casi in cui k potrebbe eccedere il valore della cifra massima oppure il valore della somma s stessa. Potremmo più semplicemente porre cmax=b-1, il che ci fornirebbe un risultato comunque corretto ma con più passaggi inutili... ma credo che queste osservazioni siano più che altro "zucchero algebrico"]

In conclusione la quantità di numeri fortunati di 2n cifre in base b è data dalla formula

$$N(2\mathbf{n}) = \sum_{s=0}^{smax} S^2(n,s)$$

dove S(n,s) è calcolabile seguendone la definizione per induzione che ho esposto sopra.

Purtroppo questa soluzione da me inventata richiede una quantità fastidiosa di calcoli anche per n piuttosto piccoli, ma sono convinto che sia possibile trovare una soluzione più agile.. perlomeno per il calcolo di S(n,s).

Anche qui, ***CID*** ha detto la sua; come sempre, in due parti *[o meglio, come sempre, tre. Programmino!]*. E ha anche scoperto qualcosa che non sapeva.

In base 10

A) Se si accetta che il numero di 2*n* cifre possa iniziare con la cifra 0,

i numeri fortunati di	6 cifre sono:	55252
i numeri fortunati di	8 cifre sono:	4816030
i numeri fortunati di	10 cifre sono:	432457640

B) Se non si accetta che il numero di 2*n* cifre possa iniziare con la cifra 0,

i numeri fortunati di	6 cifre sono:	50412
i numeri fortunati di	8 cifre sono:	4379055
i numeri fortunati di	10 cifre sono:	392406145

I numeri fortunati di 2*n* cifre (in base 2) si calcolano cosi:

A) Se si accetta che il numero di 2*n* cifre possa iniziare con la cifra 0,

i numeri fortunati di 2*n* cifre sono: $\dfrac{(2*n)!}{n!*n!}$

B) Se non si accetta che il numero di 2*n* cifre possa iniziare con la cifra 0,

i numeri fortunati di 2*n* cifre sono: $\dfrac{(2*n-1)!}{n!*(n-1)!}$

I numeri fortunati di 2*n* cifre (in base *m*) si calcolano cosi:

si costruisce una tabella T(k,j) in questo modo: T(0,0)=1 e per i valori di j maggiori di 0, si procede cosi:

- se k è compreso tra 0 e (m-1) allora

$$T(k,j) = \frac{(k+j-1)!}{k!*(j-1)!}$$

- se k è maggiore di (m-1) allora

$$T(k,j) = \sum_{i=k-m+1}^{k} T(i, j-1)$$

A) Se si accetta che il numero di 2*n* cifre possa iniziare con la cifra 0, i numeri fortunati sono: T(m*n-n, 2*n)

B) Se non si accetta che il numero di 2*n* cifre possa iniziare con la cifra 0, i numeri fortunati sono: T(m*n-n, 2*n) - T(m*n-n, 2*n-1)

Dimostrazione

Il numero totale di "numeri fortunati" è uguale a $\sum_{i=0}^{(m*n)-n} \left(S_{i,n}\right)^2$, se si accetta 0 come cifra iniziale, dove S_i è il numero di combinazioni di *n* cifre aventi somma uguale a *i*.

Ciò risulta evidente dal fatto che ogni valore possibile della somma delle prime *n* cifre viene moltiplicato per tutte le combinazioni possibili delle restanti *n* cifre che diano come somma lo stesso valore; per cui se la somma si ripete per *i* numeri, viene sommata i^2 volte.

Noto anche che il numero totale di numeri di *n* cifre aventi somma uguale a k è uguale al numero totale di numeri aventi somma uguale a: $((m-1)*n)-k$, (per evidenti ragioni di simmetria.)

Infatti, basta notare che (*m*-1) è la cifra massima in base *m,* e dunque ((*m*-1)*n) è il più grande tra i numeri di *n* cifre.

Quindi, il numero totale di "numeri fortunati" è uguale a: $S_{m*n-n,2*n}$ e se non si accetta lo 0 come cifra iniziale è uguale a: $S_{m*n-n,2*n} - S_{(m*n-n),(2*n-1)}$ in quanto, in tal caso, non è ammesso ottenere (*m*n-n*) utilizzando solo le ultime (2*n*-1) cifre.

Quindi in base 2, se si accetta 0 come cifra iniziale, i numeri fortunati sono tutte le combinazioni possibili di "*n*" zeri e "*n*" 1, cioè:

$$\binom{2*n}{n} = \frac{(2*n)!}{n!*n!}$$

e se non si accetta lo zero come cifra iniziale:

$$\binom{2*n}{n} - \binom{2*n-1}{n-1} = \binom{2*n-1}{n-1} = \frac{(2*n-1)!}{(n-1)!*n!}$$

Dalla soluzione valida se si accetta 0 come cifra iniziale

$$\sum_{i=0}^{(2*n)-n}\left(S_{i,n}\right)^2=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!*(n-i)!}\right)^2=\binom{2*n}{n}=\frac{(2*n)!}{n!*n!}$$

Cosi ho scoperto una proprietà (che ignoravo), del Triangolo di Tartaglia:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!*(n-i)!}\right)^2=\frac{(2*n)!}{n!*n!}$$

Consideriamo ora la costruzione della tabella per il caso di base di numerazione uguale a m: (naturalmente, se m è uguale a 2 questa tabella genera il Triangolo di Tartaglia)

- se k è compreso tra 0 e $(m-1)$ allora:

$$T(k,j)=\frac{(k+j-1)!}{k!*(j-1)!}$$

se scriviamo ogni cifra diversa da 0 come una sequenza di 1, (esempio: 3 = 1 1 1) la cifra 0 non la scriviamo e tra una cifra e la successiva poniamo uno 0 per separare, (esempio: 3102 = 111010011) allora abbiamo che un numero di *j* cifre avente somma delle cifre uguale a *k* si scrive con (*k* + *j* -1) simboli; quindi il numero di combinazioni di *j* cifre aventi somma uguale a *k* è: $\frac{(k+j-1)!}{k!*(j-1)!}$ (se *k* non supera la base di numerazione)

- se k è maggiore di $(m-1)$ allora

$$T(k,j)=\sum_{i=k-m+1}^{k}T(i,j-1)$$

Infatti per ogni valore *h* dell'ultima cifra devo considerare tutte le possibili combinazioni delle restanti (*j*-1) cifre che abbiano una somma uguale a $(k-h)$; ed *h* varia da 0 a $(m-1)$

Per cui,

A) se si accetta che il numero di 2*n* cifre possa iniziare con la cifra 0, i numeri fortunati sono: T(m*n-n, 2*n) cioè al numero di combinazioni di 2*n* cifre aventi somma uguale a *n**(*m*-1)

B) se invece non si accetta che il numero di 2n cifre possa iniziare con la cifra 0, i numeri fortunati sono: T(m*n-n, 2*n) - T(m*n-n, 2*n-1) cioè al numero di combinazioni di 2n cifre aventi somma uguale a n*(m-1) meno il numero di combinazioni di (2n-1) cifre aventi somma uguale a n*(m-1).

5. Quick & Dirty

Probabilmente lo conoscete, ma c'è un preciso motivo…

Su una scacchiera $N\times N$ sono posizionati N^2 cavalli; questi cavalli vengono "alzati" contemporaneamente e ognuno di esso atterra sulla scacchiera dopo una mossa regolare di cavallo.

Per quali valori di *N* la cosa è possibile?.

6. Pagina 46

Questo teorema è stato dimostrato da Eulero[16]; non solo, ma vengono attribuiti a lui anche alcuni *divertissement* in merito; ad esempio, il polinomio

$$P(x) = x^2 - 79x + 1601$$

genera primi per $x = 0,\ldots,79$. Oltre, però, non va...

Ristatuiamo il problema dimostrando che non esiste un polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

tale che $P(0), P(1), P(2),\ldots$ siano tutti primi.

Sia ***N*** un intero, e sia $P(N) = M$. Per un qualsiasi intero ***k***,

$$P(N + kM) - P(N) = a_0\left[(n + kM)^n - N^n\right] + a_1\left[(n + kM)^{n-1} - N^{n-1}\right] + \\ + \ldots + a_{n-1}\left[(n + kM) - N\right]$$

è divisibile per kM, in quanto $(N + kM)^l - N^l$ è divisibile per $[(N + kM) - N] = kM$ e quindi lo è anche per ***M***.

Quindi, per qualsiasi intero ***k***, $P(N + kM)$ è divisibile per ***M***.

Allora, se riusciamo a provare che tra gli interi $P(N + kM)\,(k = 1,2,\ldots)$ esistono degli interi *distinti* da $\pm M$, allora avremo provato che non tutti possono essere primi.

Ma un polinomio $P(x)$ di grado ***n*** assume il valore ***A*** al più per ***n*** valori di ***x*** (in caso contrario, $P(x) - A = 0$ avrebbe più di ***n*** radici).

Quindi, tra i primi ***2n+1*** valori di $P(N + kM)\,(k = 0,1,2,\ldots 2n)$ deve essercene almeno una distinta da $\pm M$.

[16] Tanto per cambiare...

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Guardiamola da un altro punto di vista

Questa volta la prendiamo decisamente più da vicino: infatti, partiamo da uno dei Validi Assistenti di Laboratorio di RM (Alberto, per la precisione).

Crediamo di avervi già detto che disegna ragionevolmente bene (almeno quando ne ha voglia); questo fatto ha sempre *[sì, sempre. Disegnava bene anche in tenera età (RdA)]* suscitato l'invidia dell'Augusto Genitore, che comunque considerava magra consolazione il fatto che il Nostro in matematica fosse una discreta scarpa.

Qualche giorno fa però sembrava fosse arrivata la dolce vendetta: "Papà, mi spieghi come funziona 'sta roba?" - "Tzè...Hmmm... Ne parliamo domani, va bene?"

No, seriamente, quali sono le regole che stanno dietro la prospettiva? Riuscite ad andare oltre un biascicato "C'è un punto di fuga all'infinito (ogni tanto due), poi c'è una linea di orizzonte..."? Di solito, a questo punto l'interrogato vorrebbe essere dalle parti del suddetto punto (o due) o quantomeno ben oltre la summenzionata linea. Comunque, un rapido giretto in rete ha permesso di scoprire alcune cose interessanti; prendiamola calma, che a complicare possiamo sempre pensarci in un'ulteriore puntata.

Il concetto base è quello di riuscire ad effettuare una ***proiezione*** di un oggetto tridimensionale su di una superficie bidimensionale (che sarebbe il foglio); per il momento non preoccupiamoci troppo del realismo, in favore della semplicità: richiediamo, come primo caso, che *le rette parallele tra loro nell'oggetto restino parallele nel disegno* (attenzione che abbiamo parlato solo di rette parallele tra loro: le perpendicolari o le oblique possono andare dove vogliono); sotto questa regola, la proiezione più elementare è la cosiddetta ***elevazione***; in sostanza, se (x, y, z) sono le coordinate di un punto nello spazio, l'elevazione si ottiene come:

$$\begin{aligned} F_{fronte}(x,y,z) &= (x,z) \\ F_{lato}(x,y,z) &= (y,z) \\ F_{alto}(x,y,z) &= (x,y) \end{aligned} \qquad \text{[7.1]}$$

Spero non sia complicato capire che si tratta di tre elevazioni diverse, che rappresentano le tre viste. Se volete complicare la cosa mantenendo lo stesso significato, dovrebbe essere ragionevolmente immediato il capire che la prima, ad esempio, se vi ricordate come si moltiplicano le matrici potete anche scriverla come

$$F_{fronte}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{[7.2]}$$

dove non siamo stati troppo a formalizzarci sulla notazione: le altre sono immediate (basta spostare un uno), quindi ve le potete scrivere da soli.

Insomma, le perpendicolari al foglio da disegno degenerano in un punto; e se noi volessimo vederle?

Semplice, ci inventiamo un'altra proiezione. Sempre per restare nel semplice, si può usare la proiezione obliqua (o proiezione di ***Cavalieri***: se trovate "cavaliera", chi ha scritto il libro è, per dirla con Doc, un "ageometretos"): qui teniamo non distorta la fronte dell'oggetto (che resta identica quindi all'elevazione), ma spostiamo le sezioni lungo l'asse ***y*** verso l'alto e verso destra in funzione del valore di ***y***; più il punto è lontano, più lo spostiamo.

Forse è il caso di cominciare a usare un oggetto e a fare qualche disegnino; in ***Figura 1*** vedete una graziosa casetta con tanto di comignolo in proiezione di Cavalieri: $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$ sono i due assi davanti, $\boldsymbol{y}$ è la profondità.

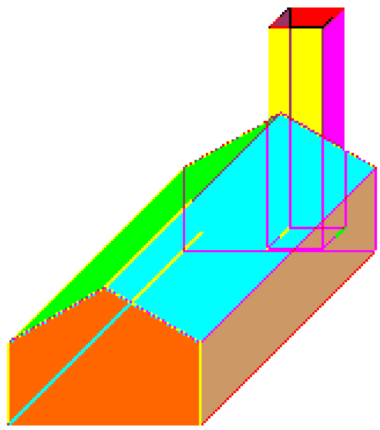


Figura 1 – Proiezione di Cavalieri

Probabilmente, adesso vi ponete due domande:

"Ma davvero disegni così male?" Spiacente, non sono io: è il programma (in *MAPLE*) di Treibergs (che insegna matematica all'Università dello Utah e se gli dite che disegna male vi risponde di tornare il prossimo trimestre).

"Perché viene tutta storta?" È esattamente lo scopo del gioco: non sarà una rappresentazione molto realistica, ma presenta alcuni vantaggi: oltre a mantenere parallele tra loro le parallele, *mantiene anche le distanze*: se misurate il tetto nella figura, è proprio lungo così.

Nessuno che si preoccupi di quanto spostiamo i piani $\boldsymbol{y}$? Comunque, non è un problema: per comodità (e anche perché una volta vendevano i fogli apposta) di solito si usa un'inclinazione di 45° e via andare[17]. Mettiamola in formula, che magari viene più comprensibile: dovendo mantenere le dimensioni sull'asse $\boldsymbol{y}$ dovremo moltiplicare per un vettore *unitario* e volendo inclinare il tutto di 45° dovremo avere per quanto riguarda la nostra matrice che le componenti che lavorano sull'asse $\boldsymbol{y}$ devono essere $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, mentre per quanto riguarda $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$ restano invariati. In pratica, se $\boldsymbol{w}$ è il nostro vettore unitario, il calcolo diventa una cosa del tipo:

$$F_{Cavalieri}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + y\vec{w} = \begin{pmatrix} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \\ z + \frac{\sqrt{2}}{2} y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{[7.3]}$$

che possiamo mettere in forma più canonica:

$$F_{Cavalieri}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{[7.4]}$$

che, per confronto con la **[7.4]**, dovrebbe essere di ragionevole comprensione.

Fermiamoci un attimo a prendere fiato.

> Cavalieri era sicuramente un tipo simpatico (sul suo Principio –quello che permette di calcolare l'area del parallelogramma– si basa una bellissima dimostrazione del teorema di Pitagora), ma se vogliamo essere onesti sembra che la sua proiezione non l'abbia inventata lui; infatti Rudy nella sua enciclopedica biblioteca ha trovato

[17] Più raramente si usa 60°, e anche di questa misura esisteva la carta apposita: se volete fare la figura degli archeologi, entrate dal cartolaio e chiedete un foglio di carta isometrica: è quella (e serve anche per risolvere alcuni problemini simpatici).

la riproduzione di una copia di epoca Sung del(la) *Lo Shen* ("La ninfa del fiume Lo") di Ku K'ai-chih, attivo verso la fine del 500 (senza l'uno davanti) che la utilizza; in effetti questa forma di prospettiva era molto diffusa nella Cina classica, anche se pochi quadri ne permettevano l'utilizzo: dal punto di vista artistico, la motivazione di questa scelta pare sia stata il fatto che qualunque zona del quadro è presentata attraverso la medesima prospettiva, e quindi se srotolate scorrendo con lo sguardo un rotolo che rappresenta ad esempio un panorama, si ha una rudimentale rappresentazione "cinematografica" della scena. Paradossalmente, in Cina il massimo utilizzatore di questa tecnica è stato un occidentale: il gesuita Giuseppe Castiglione, noto da quelle parti come Lang Shih-ning.

Più prosaicamente, se siete appassionati di *mistery* potreste provare a cercare in bancarella qualche vecchio "Longanesi" di Robert vanGulik della serie del giudice Dee; praticamente tutti i disegni (opera dell'autore) sono scene di interni, e quindi questa prospettiva si spreca. Qui ci sarebbe da discutere sul fatto che un personaggio vissuto nell'epoca T'ang usi dei vestiti dell'epoca Ming, ma sorvoliamo...

[Siamo riusciti a bloccarlo, tranquilli. Le sue crisi cinesi non sono pericolose; dovreste vedere quando si accenna al Giappone...(AR & PRS)]

Torniamo seri.

Un'ulteriore possibilità è quella di cercare di mantenere il più simile possibile alla realtà il piano ***xy*** (insomma, il pavimento), ruotandolo opportunamente; questa prospettiva è nota come ***militare***, anche se non abbiamo trovato da nessuna parte il motivo di questo nome: l'ipotesi (poco seria) di Rudy è che se progetti un bastione così si capisce subito se la bombarda ci sta o no (non ridete: chiedete alla moglie di Rudy cos'è successo con il Teatro Anatomico dell'Ospedale S.Giovanni a Torino[18], in merito: lei ci ha fatto la tesi...). In ***Figura 2*** vedete la casetta secondo una proiezione di questo tipo: notate che il pavimento, seppur ruotato, non subisce distorsioni (e quindi si vede subito se ci sta l'obeso obice).

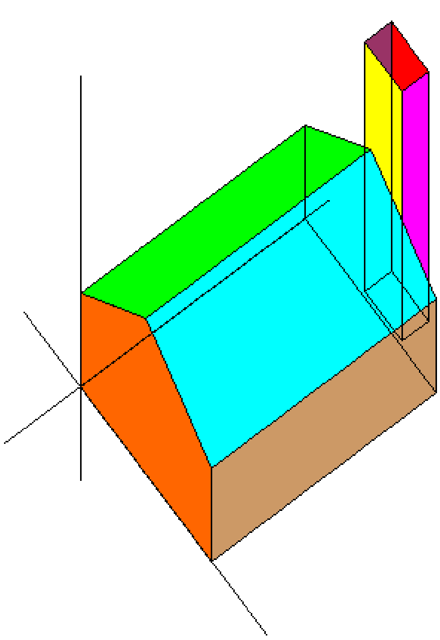


Figura 2 – Proiezione militare

C'è altro? Sì, la richiesta più generale sembra quella che una sfera proiettata resti una sfera, senza degenerare in un ellisse; questo dà origine alla proiezione ***isometrica***; anche qui si possono ruotare i vettori come si vuole, ma la più comune prevede l'utilizzo di una rotazione di 30° per l'asse ***x*** e il posizionamento dell'asse ***y*** a 150° (o, se preferite, una rotazione di -30°), mentre l'asse verticale resta dov'è; questo significa in sostanza che il nostro versore dovrà avere componenti pari ai seni e ai coseni di angoli -30°, 30°, 90°; quindi, la nostra matrice diventa:

[18] All'angolo tra le Contrade dell'Esagono e di "San Pellagio" (no, non è un typo: prosegue col nome di Contrada del Cannon d'Oro). Leggenda vuole che abbia acconsentito al matrimonio in seguito alla profferta non di un mazzo di fiori, ma di una mappa dell'epoca della zona interessata.

$$F_{fronte}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{[7.4]}$$

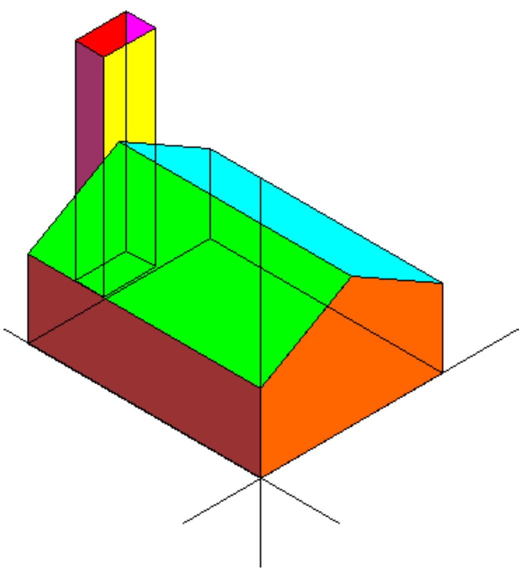


Figura 3 – Proiezione isometrica

e il risultato di una proiezione isometrica dovreste vederlo qui di fianco, in ***Figura 3***.

E, dopo quattro pagine di introduzione, arriviamo finalmente all'oggetto del contendere.

Quello di cui intendeva parlare Alberto erano le ***Trasformazioni Prospettiche***. Queste sono la composizione di un moto rigido (che sposta l'oggetto nello spazio per farlo arrivare "sul piano del foglio") seguito dalla trasformazione prospettica vera e propria, che ce lo spiccica sopra. Per definire queste trasformazioni ci servono due oggetti: il ***punto di vista*** dove si trova l'occhio, di coordinate (x_e, y_e, z_e) e il ***punto centrale*** verso il quale stiamo guardando, di coordinate (x_c, y_c, z_c); la traslazione la effettuiamo attraverso una funzione $\boldsymbol{T}$ che sposti il punto di vista nell'origine; questo si effettua attraverso la:

$$T(x, y, z) = (x - x_e, y - y_e, z - z_e,).$$

Successivamente, dobbiamo ruotare l'oggetto; se ricordate quando abbiamo parlato della Meccanica Lagrangiana, abbiamo introdotto il concetto dei tre ***Angoli di Eulero***, per descrivere le rotazioni nello spazio; qui in realtà ce ne bastano due, quindi introduciamo due rotazioni (successive: prima sull'asse $\boldsymbol{x}$, poi sull'asse $\boldsymbol{y}$; se indichiamo con $\boldsymbol{R}$ (e pedice 1) e $\boldsymbol{S}$ (e pedice ***2***) rispettivamente queste rotazioni, non è difficile (solo un pochino noioso) vedere che in fin della fiera risulta:

$$S\left(R\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{pmatrix}, \qquad \text{[7.5]}$$

e questa bestia ve la sviluppate voi, che viene pure brutta. Comunque, il risultato è una proiezione ***ortogonale*** che vedete, sempre applicata alla casetta, in ***Figura 4***; il puntino al centro è il punto verso cui guardano i vostri occhi (quello con coordinate con pedice $\boldsymbol{c}$). Se guardate bene il disegno (o la formula, fate voi) vi accorgete che le rette parallele restano parallele.

Andiamo avanti: siccome (Einstein permettendo) la luce procede in linea retta, quello che dobbiamo fare è prendere le rette dei punti dell'oggetto, tirare delle linee sino al nostro occhio (supposto unico) e vedere dove queste linee incrociano il nostro foglio da disegno; facendo i conti, si ottiene, per la proiezione di ***prospettiva***, la formula:

$$F(x, y, z) = \frac{c_1(x - x_e) - s_1(y - y_e) - s_1 s_2(x - x_e) - c_1 s_2(y - y_e) + c_2(z - z_e)}{s_1 c_2(x - x_e) + c_1 c_2(x - x_e) + s_2(z - z_e)}, \qquad \text{[7.6]}$$

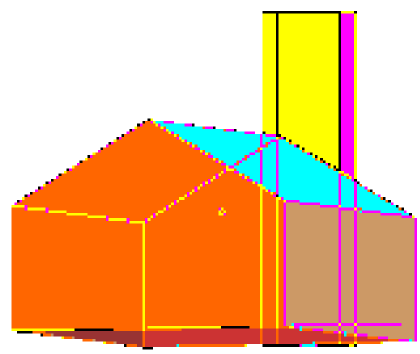


Figura 4 – Proiezione ortogonale

che è brutta forte... Comunque, cerchiamo di analizzarla; se guardate bene e se vi ricordate che la profondità è rappresentata dall'asse ***y***, vi accorgete che non è altro che una *proiezione ortogonale divisa per la profondità*; ossia prendete un punto, lo rappresentate in proporzione ortogonale e poi lo "abbassate" proporzionalmente a quanto è lontano.

E qui casca l'asino.

Supponiamo due linee parallele (in tre dimensioni) e due punti in grado di scorrere su di loro; questi punti saranno sempre alla stessa distanza tra di loro; ma, quando trasferiamo il tutto sul nostro piano di disegno, la distanza tra i due punti viene, come abbiamo detto, *divisa per la profondità*, e quindi più i punti nel 3D saranno lontani dal punto di vista, maggiore sarà il divisore nella formula di trasferimento e quindi minore la distanza tra di loro nel disegno. Quindi, da qualche parte (nel disegno) ci sarà un punto (il ***punto di fuga***) nel quale si mapperanno entrambi i punti ormai a distanza infinita.

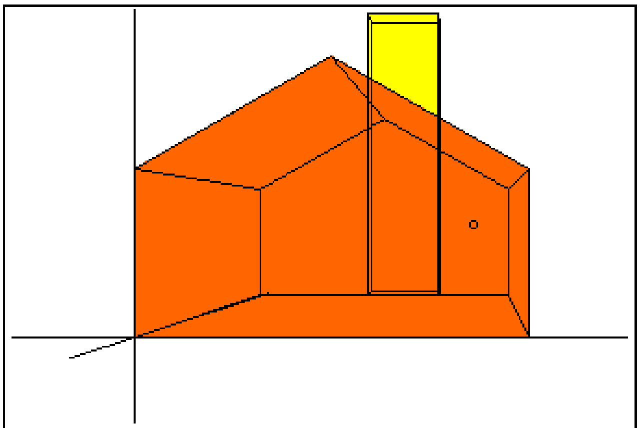


Figura 5 – Prospettiva (a un punto di fuga)

Supponiamo, per semplicità, di avere una parte del nostro oggetto (la facciata della casetta, ad esempio) parallela al piano del disegno; il risultato della trasformazione lo trovate in ***Figura 5*** e, se tracciate le opportune prosecuzioni delle linee parallele tra di loro (ma non parallele al piano di disegno) vedete che si incontrano da qualche parte.

Il Grande Problema, quindi, è trovare questo punto... E forse qui è meglio trattarlo dal punto di vista storico.

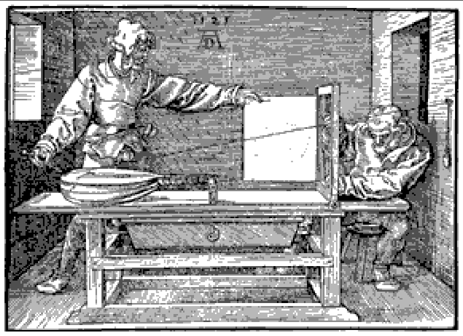


Figura 6 – Il metodo di Dürer

Un primo modo molto simpatico anche se piuttosto brutale per risolvere il problema lo troviamo in ***Albrecht Dürer***, nell'incisione qui in ***Figura 6***; i due artisti tirano il filo da un punto fisso sul muro (che è il *punto di vista*) a un punto dello strumento che intendono disegnare, poi tolgono il filo tenendo il segno sul piano della cornice (descritta dall'Autore come "la finestra attraverso la quale vedo il mondo") dove può essere messo il foglio e quindi tracciano il punto sul foglio; avanti così sin quando non avete l'intero disegno[19].

Carino, niente da eccepire, ma noi vorremmo un filino più di regole...

[19] Rudy, che ha sempre in mente il paradosso di Russell, si chiede *come abbia fatto* D. a disegnare questo in prospettiva...

Per fortuna, ci viene in soccorso ***Leon Battista Alberti***, con una soluzione decisamente ingegnosa; per spiegarci come funziona il tutto, disegna il "classico" pavimento a scacchi ("classico" nel senso che è un classico della matematica virtuale: quanti disegni in POV-Ray con questo sfondo in colori terribili avete visto?); seguiamolo nella sua costruzione: riferimento ***Figura 7***.

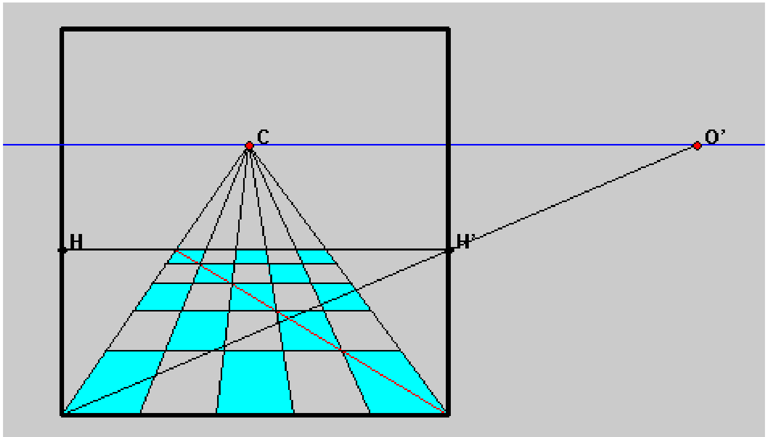


Figura 7 – La costruzione di Leon Battista Alberti

L'occhio guarda verso il punto ***C*** attraverso la cornice verticale in tratto spesso; il pavimento ha un lato coincidente con la base della cornice. Per prima cosa, individuate sulla retta di orizzonte il punto ***O'*** *distante dal bordo della cornice tanto quanto dista* **C** *dall'occhio*; tracciate la congiungente all'angolo inferiore sinistro della cornice, individuando il punto ***H'*** e il punto ***H***, che definiscono la fine del pavimento. A questo punto, tracciando le linee da ***C*** alla base della cornice (equispaziate, visto che le piastrelle sono tutte uguali) e tracciando la diagonale del "quadrato" potete trovare tutti i punti delle piastrelle.

Ormai, siamo talmente abituati all'utilizzo della prospettiva nel disegno che non ci rendiamo neanche conto che, in molti casi, *c'è un errore*: infatti, la prospettiva è veramente una rappresentazione fedele della realtà *solo se siamo alla corretta distanza*. La cosa, se vi capita di passare da Firenze, è facilment visibile.

Nell'affresco *La trinità* (in Santa Maria Novella), Masaccio utilizza questo metodo, e quindi esiste un punto dal quale guardare per cui il tutto risulta particolarmente

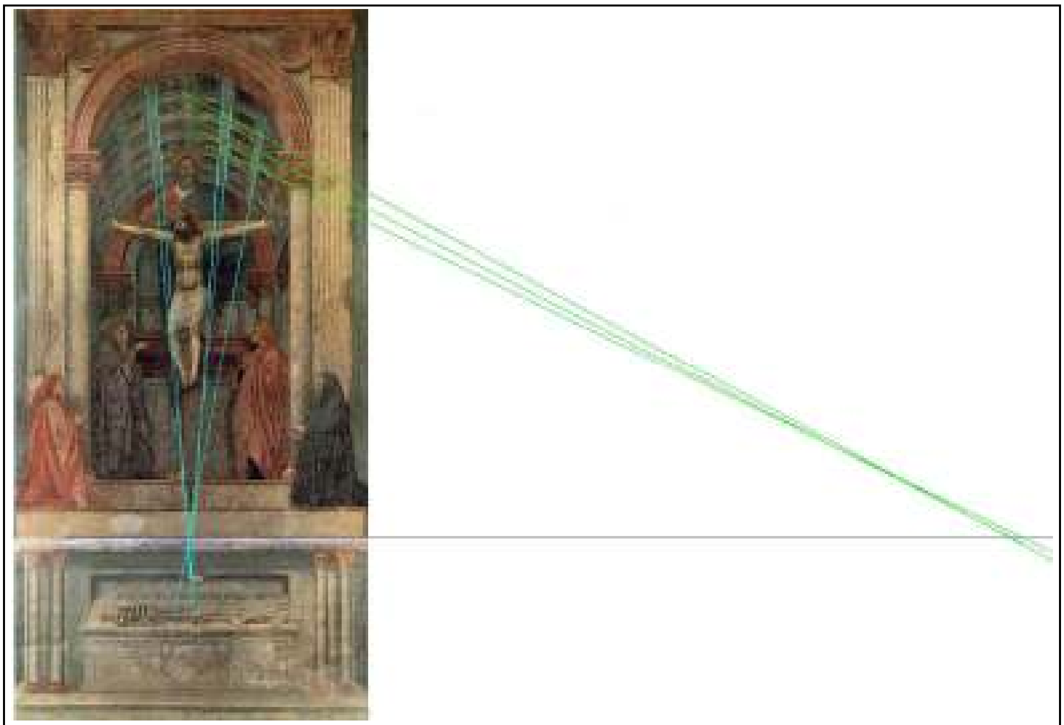
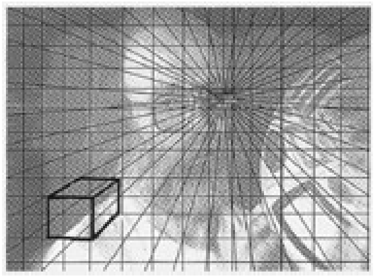
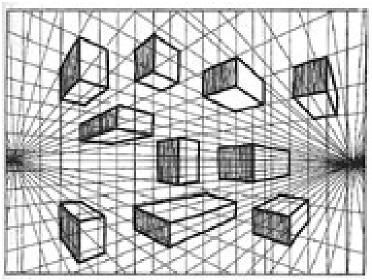
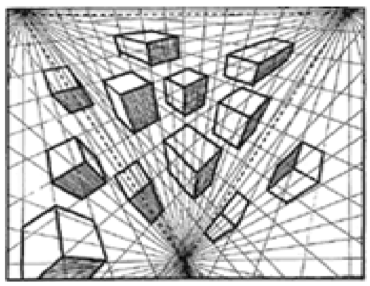


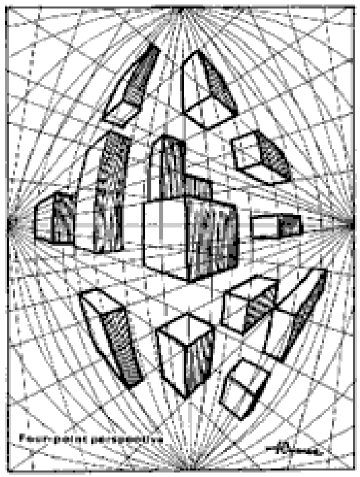
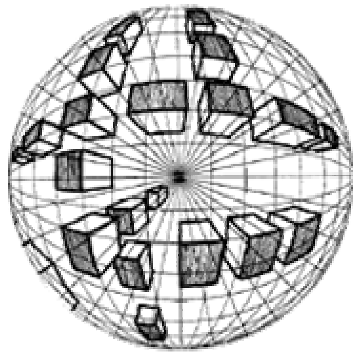
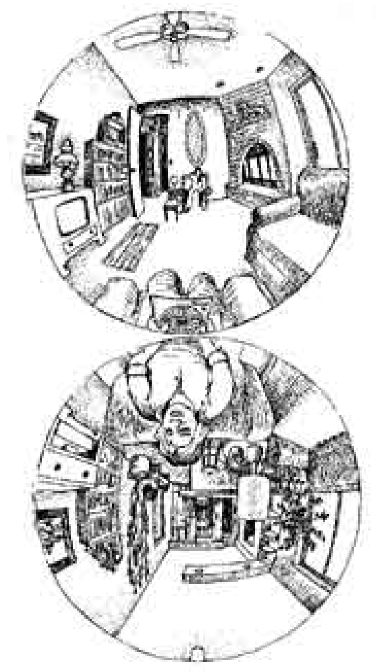
Figura 8 – Ancora un passo indietro...

realistico; se consideriamo i cassettoni del soffitto a volta come le piastrelle del pavimento di Alberti (tenendone una fila sola, per approssimare meglio un "piano"), possiamo tracciare le linee verso il punto di fuga e il punto all'infinito, come indicato in ***Figura 8***; se si fanno i conti, si scopre che il punto migliore per guardre l'opera è con gli occhi di fronte, a ***174*** centimetri di altezza e ***770*** centimetri di distanza, esattamente dove si e è piazzata una tribù di lampeggianti giapponesi.

Ora, adesso non arrabbiatevi, ma dobbiamo tornare alla nostra casetta. Infatti, di punti di fuga possiamo averne anche ***due***, se nessuno dei "muri" è parallelo al foglio/cornice; e provate ad indovinare cosa succede se il pavimento non è perpendicolare al nostro foglio.

Ad ulteriore complicazione, siccome l'angolo visuale umano è (approssimativamente) un cono con un angolo al vertice di circa 60°, nel disegno più di un punto di fuga non potete averlo (e certe volte neanche quello: andate a rivedervi l'affresco, e pensate a quanti insulti mi ha tirato dietro la nostra Linotype preferita quando ha dovuto sprecare tutto quello spazio...). Comunque, da qui in poi forse è meglio procedere in un modo piuttosto schematico, lasciando fare ad un artista: il buon ***Dick Termes***, ad esempio, che ha fatto una serie di bellissimi disegni in merito (ha anche scritto un libro: potete comprarlo in formato elettronico sul suo sito per dieci dollari).

Qui non dovreste avere eccessivi problemi; chiaramente, si tratta della ***prospettiva ad un punto*** e l'abbiamo analizzata nella parte precedente; ci limitiamo a ricordare che stiamo utilizzando un gruppo solo di rette parallele tra di loro che smettono di esserlo nel disegno.	
Qui, per disegnare i nostri parallelepipedi, consideriamo due insiemi di rette parallele tra di loro che smettono di esserlo nel disegno; il che, ci porta alla ***prospettiva a due punti***. Per i più scafati in fotografia, vorremmo far notare un leggero effetto "grandangolare"	
Sinchè parliamo di parallelepipedi, non dovrebbero esserci problemi per questo passo: anche il terzo insieme di rette parallele smette di esserlo nel disegno; quindi, qui abbiamo una ***prospettiva a tre punti***, e tutti dovrebbero accorgersi della deformazione.	

Ora supponiamo (se non soffrite di vertigini, come Rudy) di guardare dalla finestra di un grattacielo e di avere un altro grattacielo davanti; le finestre davanti a noi saranno più grandi, mentre quelle verso il piano terra e verso la cima del grattacielo verranno più piccole; quindi, avremo un altro punto verso cui far convergere le parallele; totale, otteniamo una ***prospettiva a quattro punti***.	
Muovendo gli occhi, possiamo abbracciare un campo che arriva a tutti i 180° che si trovano di fronte a noi; se vogliamo rappresentare tutto questo, ci serve un ulteriore punto verso quale far convergere le rette. Termes spiega questa vista come se “vi trovaste al centro della cupola di San Pietro e poteste vederla tutta”; più prosaicamente, noi ricordiamo che riprese fatte con un *fish-eye* e proiettate con lo stesso obiettivo su un telone emisferico davano un effetto di “realtà a centoottanta gradi”, nei Luna-Park della nostra infanzia.	
L’ultimo punto che potete aggiungere è quello *dietro* di voi, ottenendo in questo modo una rappresentazione a 360° dell’intero ambiente; qui, avete una ***prospettiva a sei punti*** e la rappresentazione della stanza è totale; un disegno del genere non può essere eseguito su un foglio, e quindi Termes usa delle sfere. L’effetto di vedere *fuori* dalla sfera quello che dovreste vedere da *dentro* la sfera dà un senso di estraniazione dall’ambiente vagamente inquietante.	

...Ora, chi è stato a mettere il pallone nella stampante?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms