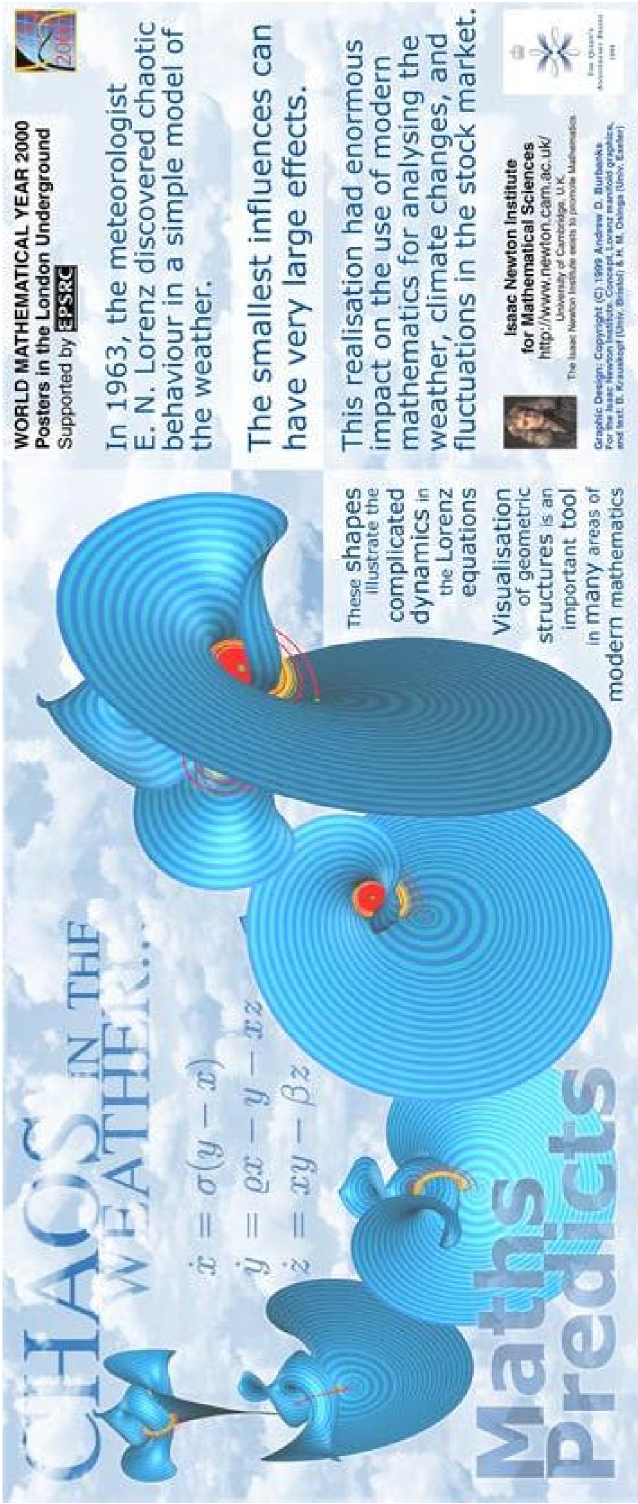
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 086 - Marzo 2006 - Anno Ottavo



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 085 ha diffuso ***924*** copie e il **03/01/2006** alle **23:10** per Google eravamo in **894** pagine.

Nella più vecchia metropolitana del mondo, durante l'Anno Mondiale della Matematica, è comparsa questa pubblicità.

Siccome la più giovane metropolitana del mondo è, al momento, nella città natale di RM, ci pare giusto festeggiare (nota per gli *aliens*: a Milano è "la metro ", *qui* è "il metró ").

1. Sasha e Shurik

"Mi sembra che la biblioteca di questo rinomatissimo Istituto non sia poi così fornita di testi come uno si aspetterebbe…"

"Qui i libri non li leggiamo: li scriviamo"

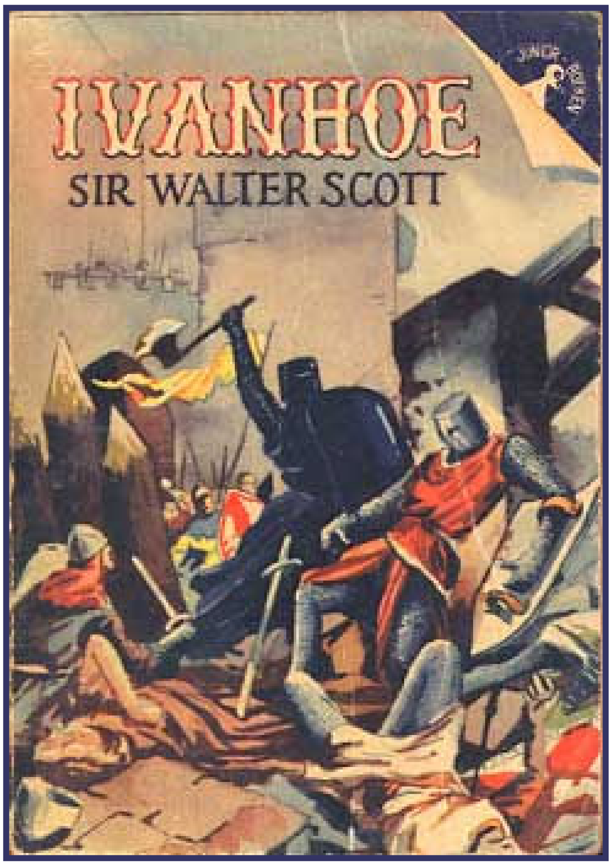
Napalm. Parola strana, per una strana sostanza. Ma è stranezza compensata da un certa onestà implicita nel termine stesso: sembra inizialmente curioso, quasi perverso, trovare nel nome del componente base delle bombe incendiare quella parte che ricorda le palme, la spiaggia bianca, il mare d'azzurro accecante e trasparente, e tutto quanto oggi sembra fatto apposto per raccontare (magari attraverso il depliant d'una agenzia di viaggi) il paradiso terrestre. Ma non c'è errore e la perversione, se c'è, è frutto di spietata ironia della storia stessa: il "palm" di "napalm" è davvero l'inglese per "palma", pianta bella e pacifica quante altre mai. Perché è proprio dall'acido palmitico che proviene il gel incendiario alla base del napalm; e la parte iniziale della parola, il "NA", era non meno eloquente, rammentando col simbolo chimico del sodio l'altro componente essenziale della miscela.

Ma è roba vecchia, del secolo scorso. Adesso perfino il modo di produrre il napalm è cambiato, e si preferisce passare per l'acido naftenico, anche se il palmitico resta elemento essenziale. Benzene, toluene, fosforo bianco si alternano nella composizione, rendendo l'arma abbastanza artificiale da consentire oggi il superamento indenne dell'antico sconcerto iniziale: perché restava comunque sconvolgente l'immagine delle rosse sfere di fuoco defolianti, assassine di foreste, sapendole nel contempo generate direttamente da un'altra pianta, sterminatrice di consorelle.

Un'altra caratteristica fondamentale della parola "napalm" è la sua collocazione storica. Non perché l'oggetto designato dal termine sia passato di moda, purtroppo: nella storia dell'uomo, le armi sembrano destinate ad essere dimenticate solo quando vengono sostituite da armi simili e più efficienti. E' piuttosto che la parola funziona da "marcatore" d'un epoca: è sostanzialmente impossibile aver attraversato gli Anni Settanta del secolo scorso senza aver la parola definitivamente segnata nel vocabolario individuale. Il Vietnam è stato a lungo "il conflitto", il polo d'attrazione dei giornali e delle televisioni, e come tutti i poli di attrazione mediatica e politica si poteva guardare al conflitto del 17° parallelo con occhi e opinioni diverse, ma non si poteva evitare di guardarlo. E "napalm" era allora parola diffusa e frequente quanto lo è oggi la parola "jihad"; e si riconosceva facilmente la capitale del Laos o della Cambogia tanto quanto oggi si distingue senza difficoltà tra sciiti e sunniti. Per il resto, la conoscenza reale e profonda delle cause e degli sviluppi del conflitto resteranno per molti versi ignoti e dimenticati, come quasi sempre succede con le guerre; gli storici proveranno col tempo a mettere ordine nella successione degli eventi bellici e politici, e il lento passare degli anni renderà il loro lavoro ad un tempo più facile e più difficile: le difficoltà verranno dal dissolversi delle fonti e delle testimonianze di prima mano; le semplificazioni arriveranno dall'ancor più lento cedere delle passioni e delle emozioni del ricordo, a vantaggio d'una più serena obiettività. E chissà allora come racconteranno – chissà se mai racconteranno – quell'episodio certo insignificante dal punto di vista bellico e quasi del tutto trascurabile dal punto di vista politico, ma così brutalmente evocativo dal punto di vista romantico e scientifico: quello di una lezione di alta matematica – Teoria dei Gruppi[1], per la precisione – tenuta con magistrale impegno nella giungla intorno ad Hanoi da quello che secondo alcuni è il più geniale dei matematici del Novecento.

[1] Anche se secondo Marcus du Satoy (autore de "L'enigma dei Numeri Primi" – Rizzoli 2004, 20 Euro), si trattava di un "breve corso di geometria algebrica astratta". Tendiamo a fidarci un po' di più di Pierre Cartier, dal quale abbiamo preso l'informazione del testo, se non altro perché nelle giungle di Hanoi ci è andato anche lui. Ma anche perché, a ben vedere, le due ipotesi potrebbero non essere affatto in reciproca contraddizione.

L'immagine di un assorto e calvo professore impegnato a spremere matematica nel bel mezzo della foresta equatoriale, mentre intorno a lui ascoltano studenti asiatici e dottorandi europei, è visione che sembra esageratamente diversa dai canoni accademici. Giovani francesi forse assestati su bassi rami di mangrovia, o sostenuti da morbidi rampicanti; vietcong presumibilmente poco compresi dalla lezione, induriti da tutta una vita vissuta con la colonna sonora garantita dall'esplodere della polvere da sparo; e il tutto mentre forse le sfere rosse e gialle del napalm davvero si gonfiavano poco distanti. E' idea che toglie troppo alla fantasia d'uno sceneggiatore, che inevitabilmente solleva d'incredula noia l'angolo della bocca del romanziere o del regista. Rivendicare la pace tramite una lectio magistralis di matematica, caratterizzata principalmente dall'assenza dei muri e dei banchi, del gesso e delle lavagne, a ricordare che l'università di Hanoi non esisteva più, se non in quell'aula virtuale della giungla indocinese. Come al solito, sembra di sentire l'immaginario "lettore" della casa editrice mormorare paterno all'autore che dovesse proporre un episodio del genere nel suo romanzo d'esordio: "Ma non serve, tutto questo pathos! La narrazione non deve aver bisogno di simili esagerazioni, così come non ne ha bisogno la vita…".



In fondo, il lettore della casa editrice ha ragione: un romanzo ha delle regole ben definite, ed un romanzo storico ne ha di specialissime. Sono codificate e rigorose, e assomigliano ad un patto solenne e non troppo dissimile dall'impegno matrimoniale: se la Letteratura chiede aiuto alla Storia, questa ben lietamente le fornirà ambienti e scenari intriganti, e lunghe cronache dense d'incredibili eventi nelle quali inserire e far muovere i protagonisti della narrazione; ma questa cornucopia di delizie viene concessa a patto che i suoi sacri lineamenti siano rispettati e mantenuti intatti da quella scavezzacollo della Letteratura, che è spesso tentata di dipanare le sue trame senza tener troppo in conto i vincoli esterni. La penna del narratore avrà allora una guida e un ausilio costante, perché gli eventi e gli ambienti sono già tracciati, e molti reali personaggi storici sono pronti a rivestire, con somma magnanimità e modestia, il ruolo di comprimari nel racconto. Accade così fin dall'inizio, fin da quell' "Ivanohe" di sir Walter Scott, che viene considerato il primo romanzo storico propriamente detto, nel quale parlano e si muovono, oltre al protagonista eponimo, anche Robin Hood (che personaggio storico non è), e Riccardo Cuor di Leone (che personaggio storico invece è, eccome).

Proprio per salvaguardare i diritti della Storia alcuni principi di base vengono rapidamente codificati, a beneficio degli scrittori. Uno dei più importanti è riassumibile nell'istruzione: "Lasciate i personaggi storici sullo sfondo della vicenda narrata". Il senso dell'avviso è chiaro: non ha davvero senso scrivere un romanzo che abbia come protagonista Napoleone Bonaparte, per il semplice fatto che ogni aspetto della vita di Napoleone è ottimamente conosciuto. Non c'è nulla di "inventabile", in un soggetto così profondamente noto agli storici: quantomeno, nulla di inventabile senza stravolgere in qualche modo gli eventi storici realmente accaduti e verificabili. In buona sostanza, scrivere un romanzo storico su Napoleone non è possibile perché o si finirà con il raccontare semplicemente la vita di Napoleone (nel qual caso si scriverà allora una biografia, e non un romanzo), o si finirà inevitabilmente con il falsare qualche elemento della Storia, e in questo caso si scriverà forse un romanzo di qualche genere (universi alternativi, fantapolitica, etc.) ma di certo non un romanzo "storico". Da questa regola specifica discendono una serie di conseguenze inevitabili, quali avere come protagonisti d'una vicenda gente poco notevole come Renzo Tramaglino e Lucia Mondella, o al massimo esuberante come D'Artagnan, ma sempre abbastanza oscura; caratteri grigi e normali quanto basta, insomma, per non essere costretti a tracimare sui libri di Storia. In altri termini ancora, si può dire che è certo possibile scrivere un romanzo secondo il quale tutti i successi militari di Alessandro Magno siano in realtà merito dei sagaci consigli d'un ilota nano figlio illegittimo d'una sacerdotessa di Atena, sempre che la vicenda stessa renda però evidente che non possono in alcun modo esistere delle prove "reali" tali da comprovare storicamente l'invenzione letteraria. Insomma, l'invenzione deve sempre essere ben distinguibile dal fatto storico, pena la violazione delle regole narrative sacramentate.

Poi, ovviamente, anche in questo campo, esistono regole e regole. Nel tentativo di ritrovare un elenco puntuale delle regole del romanzo storico ci siamo imbattuti in una serie di regole supplementari, delle quali vi forniamo un sintetico estratto:

1. *Per vicende ambientate durante la Guerra Civile Inglese, i buoni devono essere i Realisti e i cattivi devono essere i Parlamentaristi. Per vicende ambientate nella Guerra Civile Americana, entrambe le parti devono essere quella dei buoni.*
2. *A prescindere dall'ambientazione spaziotemporale della vicenda, il vostro eroe o eroina deve avere lo spirito politicamente corretto d'una persona di un paese occidentale del 2000 d.C. circa.*
3. *I soldi devono sempre contare pochissimo per i vostri protagonisti.*
4. *Se la vostra eroina rimane incinta dovrà mostrarsi sempre assolutamente stupita dalla cosa, a prescindere da quello che è successo nei sei capitoli precedenti.*
5. *E' proibito scrivere un romanzo storico ambientato in Africa a sud del Sahara e a nord della Repubblica Sudafricana.*
6. *Il vostro eroe deve avere la sorprendente abilità di sopravvivere a cinquanta frustate d'un gatto a nove code senza soffrire di alcuna menomazione permanente.*
7. *L'eroe rimpiange sempre la natia Inghilterra o Scozia (mai l'Irlanda o il Galles), ma comunque non ci ritorna mai.*
8. *I cattivi dimenticano sempre di tagliare i fili del telegrafo.*
9. *Non esistono tenenti: ogni ufficiale è per lo meno capitano*
10. *Nelle vicende classiche, i personaggi Greci devono essere necessariamente saggi, eloquenti e dotti. I Romani, anche se intellettualmente derelitti e senza alcun senso dell'humour né ironia, si riabilitano mostrando una superba capacità di utilizzo dell'ablativo assoluto quando citano Virgilio o Cicerone (citazioni che restano obbligatorie in misura di almeno una per personaggio per romanzo).*
11. *Tutti i soldati Greci sono Nobili Eroi. Tutti i guerrieri barbari sono Appassionati Ma Disperatamente Disorganizzati Eroi. Tutti i legionari romani sono Goffi (o Rozzi) Stupratori. I Goffi (o Rozzi) Stupratori devono sempre vincere.*

12. *Il vostro eroe deve trovare la schiavitù, la crocifissione e il combattimento dei gladiatori moralmente ripugnante.*
13. *Tutte le bighe dei barbari hanno lame sulle ruote.*

… e l'elenco può continuare quasi all'infinito, visto che è stato stilato proprio da autori che si divertono a prendersi in giro con una buona dose d'autoironia. E' palese che le ipotetiche regole sopra riportate servono soprattutto a fustigare le cattive abitudini degli autori di certa narrativa d'evasione, ma è in parte un peccato che il difetto essenziale dei romanzi storici che mirano a diventare bestseller di stagione non vi sia elencato: ovvero l'ansia patogena che ogni valido protagonista di romanzo storico mostra nel voler incontrare, ad un certo punto della sua vicenda tutti, assolutamente tutti, i personaggi notevoli dell'epoca. Questo conduce il nostro povero eroe (sia esso legionario romano o mercante veneziano, guerriero atzeco o navigatore fenicio) ad un autentico tour de force che lo sposta da una parte all'altra dell'universo conosciuto alla sua epoca, e in situazioni davvero estreme e vagamente ridicole. E immaginare una lezione di Teoria dei Gruppi nella giungla di Hanoi ha un po' lo stesso sapore; per questo il lettore della casa editrice esorta ad una fantasia meno sbrigliata. Ma il fatto è che quella lezione è storia, non fantasia. E il protagonista è personaggio storico, per quanto strano ed originale. E comunque, non era certo originale e strano quanto suo padre…

Viene ricordato spesso solo con il cognome, Shapiro. Il nome di battesimo era Alexander, detto Sasha, ma non è facile ritrovarlo nelle cronache che lo riguardano. Sasha Shapiro attraversa velocemente la prima metà del Novecento, la parte più violenta del secolo più violento. Il secolo breve[2] colleziona rivoluzioni nei suoi primi anni di vita, e Sasha sembra proprio, più che uomo in carne ed ossa, un artificio letterario inventato da un autore smanioso di raccontarle tutte attraverso un fil rouge. Nasce attorno al 1890 là dove si incontrano Russia, Bielorussia ed Ucraina, e il cognome è anche un identificativo di spazio, perché è da questo incrocio di confini che provengono tutti gli Shapiro del mondo; era una zona popolata da ebrei hassidici, molto pii e devoti, e al giorno d'oggi non esiteremmo a chiamarli fondamentalisti. Era la Russia profonda degli zar, quella; ed era terra rivoluzionaria. Pur giovanissimo, Shapiro prende parte alla prima rivoluzione russa del 1905: rivoluzione che viene sedata dallo Zar, e i partecipanti vengono puniti dall'autorità costituita. A Sasha tocca il confino e la prigione: per dieci anni vivrà chiuso in una cella della Siberia. Come guidato da una regia spietata, il rilascio avviene proprio nel 1917, anno cruciale per le rivoluzioni di Russia. Alexander Shapiro partecipa sia alla Rivoluzione Menscevica del Febbraio che a quella Bolscevica di Ottobre. A San Pietroburgo è uno dei leader del partito "Socialista Rivoluzionario della Sinistra", inizialmente alleato con Lenin ma rapidamente entrato in conflitto con il padre della rivoluzione, e da questi epurato.

E' proprio lo Shapiro raccontato da John Reed nel celebre "Dieci Giorni che Sconvolsero il Mondo": e il suo spirito rivoluzionario non si esaurisce con l'epurazione subita dai bolscevichi di Lenin. La Prima Guerra Mondiale riduce in brandelli i grandi Imperi Centrali, e le scintille della rivoluzione si alzano quasi in ogni parte dell'Europa Centrale.

---

[2] "Il secolo breve" è l'espressione con cui lo storico inglese Eric J. Hobsbawn chiama il Novecento, anche perché in realtà il termine è stato da lui introdotto per caratterizzare l'influenza avuta sul Novecento dalll'Unione Sovietica. Di conseguenza l'estensione temporale è limitata all'intervallo tra il 1917 e il 1989.

Nel Febbraio 1919, a Berlino, Rosa Luxemburg guida la rivolta degli Spartachisti; e Sasha era lì. Ad Aprile dello stesso anno, anarchici come Toller, Landauer e Musham proclamano a Monaco la Repubblica Sovietica Bavarese, e Sasha era lì. Negli stessi giorni Bela Kun portava avanti la sua spietata rivoluzione ungherese, e Sasha, in qualche misura, visse anche quella. Nestor Makhno nel 1920 guidò un movimento indipendentista ucraino, e ancora una volta Shapiro partecipa anche a questo. Sempre presente, sempre e comunque, come il prodotto della fantasia sfrenata d'un autore esagerato.

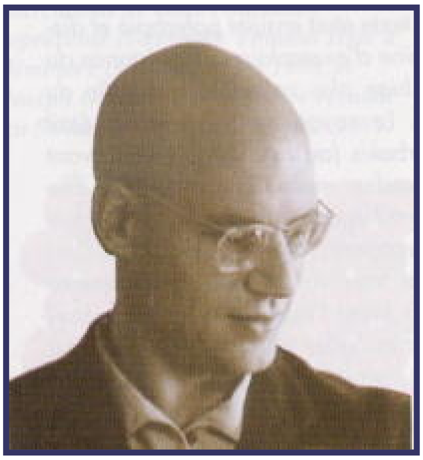
E per fermarsi dopo tanto affannoso girare, non scelse certo il luogo più tranquillo per un ebreo della prima metà del Novecento: si sistemò a Berlino. Gli Anni Venti in Germania sono anni in cui ebrei e comunisti sono in lotta con l'ascendente partito nazionalsocialista di Adolf Hitler. E si tratta di lotta armata, violenta, sempre più violenta. A Berlino Sasha incontra Hanka, ebrea tedesca: si innamorano, hanno una figlia che muore in tenera età, poi nasce un figlio, Alexander, nel 1928. Stesso nome del padre, ma il nomignolo del bambino sarà "Shurik", non Sasha. Con l'ascesa al potere dei nazisti, nel 1933, non è più proponibile l'idea di vivere a Berlino, per due ebrei rivoluzionari; e Sasha ed Hanka rifugiano in Francia.

Alexander, Shurik, non può andare coi genitori, e viene affidato, anche se sarebbe meglio dire nascosto, in una scuola privata di Amburgo. Nel 1936 scoppia la Guerra Civile Spagnola, e cosa volete che faccia quel compendio vivente di tutte le rivoluzioni del secolo che risponde al nome di Alexander Sasha Shapiro? Si arruola nelle file degli anarchici che si oppongono ai miliziani di Franco. Ma il secolo irrequieto non lascia ancora requie: Hanka non aveva seguito il compagno in Spagna, ma era invece andata a recuperare Shurik, ormai decenne. E' il 1938, la guerra in Spagna volge al peggio per i Repubblicani, e un ben più cruento conflitto bussa già alle porte d'Europa. I repubblicani spagnoli, in rotta, si rifugiano nel sud della Francia, dove vengono aperti dei campi per rifugiati politici; ma sono tempi difficili, e quei campi si trasformano ben presto in veri e propri campi di detenzione, dove rinchiudere stranieri potenzialmente pericolosi: anarchici spagnoli, ma anche ebrei tedeschi e trozkisti d'ogni nazionalità. Non sono una bella istituzione per la Francia terra di libertà, questi campi, e lo scoppio della guerra nel Settembre 1939 non migliora certo le cose. Pochi mesi dopo l'inizio delle ostilità la Francia capitola, e il governo fantoccio di Vichy del maresciallo Petain promulga le leggi razziali nell'Ottobre 1940, e in forza ad esse Alexander Shapiro viene rinchiuso nel campo di Vernet. Ma vi restò pochissimo: in breve venne trasferito ad Auschwitz, dove morirà nel 1942.

E' figura talmente sopra le righe, quella di Alexander Sasha Shapiro, che è quasi impossibile da inquadrare. La tradizione romantica – non solo le regole scherzose del romanzo storico elencate poco sopra – esige sempre che il "rivoluzionario" per antonomasia sia sempre figura perdente e tragica, ma non esiste fantasia fervida abbastanza da immaginare una vita, neanche troppo lunga, passata interamente saltando da una rivoluzione ad un campo di prigionia, da una prigione ad una barricata.

Dieci rivoluzioni in mezzo secolo di vita, prigioni siberiane, tedesche e francesi, e infine la conclusione più canonicamente tragica per un ebreo europeo del Novecento, nel lager più tristemente famoso della storia. Se fossimo alla ricerca d'un uomo che sia in grado di simboleggiare con la propria esistenza il dramma e la crudele follia della prima metà del ventesimo secolo, potremmo sperare di trovare un candidato migliore? Dove cercare un migliore esempio di Uomo del Secolo, a patto di accontentarsi di qualcuno che non è neppure riuscito a vedere la fine della seconda guerra mondiale? E se non fossimo disposti a rinunciare alla seconda metà di questo Novecento sanguinario, potremmo forse volgere l'attenzione a suo figlio.

Quando Shapiro muore, Alexander "Shurik" ha ormai quattordici anni. Non è più il bambino lasciato nascosto in una scuola di Amburgo; non è più neanche un bambino, perché quattordici anni di vita passati quasi interamente come rifugiato politico fanno crescere molto, molto in fretta. Ma il 1942 è ancora anno di guerra, e altri ne devono passare: Hanka e il giovane Alexander non hanno vita facile nella Francia antisemita di Vichy, e, da ebrei, dovranno la loro salvezza alla comunità protestante delle Cévennes. Sono regioni montuose e nervose, e l'esercito d'occupazione tedesco non osò mai avventurarvisi: gli orgogliosi abitanti, eredi delle comunità protestanti francesi, raccontano di aver imparato lo spirito della resistenza fin dal 1684, anno della revoca dell'Editto di Nantes[3]. Qui Shurik riesce a trovare un po' di quella pace di cui era in forte credito con la vita, e riuscì perfino ad andare a scuola. Prima al Liceo Protestante di Chambon-sur-Lignon, chiamato semplicemente College Cévenol, poi a Montpellier, accompagnato da una lettera di raccomandazione dei suoi insegnanti del Collège, che dichiaravano che il ragazzo li surclassava in matematica. I professori di Montpellier scriveranno, qualche anno dopo, una lettera del tutto simile diretta ad Elie Cartan, geometra e padre di quello che sta gia rivelandosi come il maggior matematico di Francia del tempo, Henri Cartan.



E' il 1948, Shurik ha ormai vent'anni ed è arrivato a Parigi. Non ha mai usato il cognome del padre, Shapiro, ma sempre quello della madre Hanka. Per tutti, ma soprattutto per sé stesso, il suo nome è Alexander Grothendieck.

Dal 1949 al 1970 Grothendieck non cessa di rivelarsi al mondo come il più brillante matematico del suo tempo. Non tutto è semplice e brillante, ancora: la sua formazione non è ancora completa, e passerà un anno ancora all'Università di Nancy per cementare la sua preparazione prima di tornare a seguire i seminari di Cartan; è tuttora apolide, e come tale ha non pochi problemi nella ricerca di una cattedra o di un lavoro accademico. Esplorerà diverse possibili soluzioni, da San Paolo del Brasile al Kansas; ma quello che è certo è che è destinato a lasciare una traccia profonda nella storia della matematica. Studia con Laurent Schwartz e con Jean Dieudonné, e già la sua dissertazione di laurea "*Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*" è destinata a rimanere una pietra miliare della matematica moderna, con l'introduzione degli "spazi nucleari". Dello stesso periodo è la memoria "*Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques »,* celebrata come l'atto di nascita della teoria geometrica degli spazi di Banach.

Poi, Grothendieck diverrà l'anima più attiva e significativa di Bourbaki. Trova la strada per generalizzare il Teorema di Riemann-Roch[4], e nel 1959 entra come professore

[3] L'Editto di Nantes del 1598 era quello che garantiva libertà di religione nei territori francesi. Promulgato da Enrico IV (quello per cui Parigi valeva bene una messa), venne infine revocato nel 1684 dal Re Sole, e il cattolicesimo tornò ad essere l'unica religione legittima di Francia.

all'IHES, l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Qui parte con l'intenzione di rifondare la geometria algebrica, e i suoi "*Éléments de Géométrie Algébrique"* confermano l'intento. Nel 1966, durante il Congresso di Mosca, la comunità matematica gli assegna la Medaglia Fields.

Poi, abbastanza improvvisa, la fine di tutto. Grothendieck scopre che una parte dei fondi dell'IHES per il quale lavora provengono da fonti militari. Questo non è assolutamente accettabile per lo strenuo pacifista figlio del rivoluzionario anarchico, e passa subito a chiederne conto alla direzione dell'Istituto. La scoperta aveva sconcertato anche altri ricercatori, ma in genere questi accettarono una sorta di compromesso e non lasciarono l'IHES. Ma nessun compromesso era possibile con Shurik, figlio di Sasha. Alexander Grothendieck lascia sdegnato l'istituto nel Settembre 1970. Da questo momento Shurik diventa meno matematico e più attivista politico. Il seminario nella giungla di Hanoi è già meno sensazionale, visto dagli occhi di Shurik Grothendieck.

Le rivoluzioni d'inizio secolo avevano in Sasha il loro disperato interprete. Gli sconvolgimenti della seconda metà del secolo sono probabilmente meno significativi, ma bastano a far tremare le vene di Shurik. La guerra nel Vietnam, la Guerra Fredda, il movimento del Maggio Francese del '68 che stravolse alle fondamenta anche il Gruppo Bourbaki. La tensione e la paura dell'invecchiare, certo mai conosciuta dal padre, ma che spesso tormenta i matematici, che vedono nel compimento del quarantesimo compleanno la fine della creatività. In un modo o nell'altro, la carriera matematica di Alexander Grothendieck termina con la sua uscita dall'IHES.

Purtroppo, termina anche parte della sua vita pubblica. Dopo il 1970, Grothendieck sembra avere un ritorno alla ricerca nel 1980, quando si dedica al seminario "La lunga marcia attraverso la teoria di Galois", al quale, secondo la leggenda, partecipa un solo studente. Nel 1984 partecipa ad un concorso del Centro Nazionale delle Ricerche, dal quale ottiene un posto di prestigio pur non vincendo il titolo di "Direttore" al quale concorreva. Dal 1986, gran parte della sua attività si è coagulata nella redazione di "*Récoltes et Semailles*", riflessioni autobiografiche sulle matematiche, che occupano migliaia di dense pagine in francese, in gran parte ancora non tradotte. Nel 1988 gli viene conferito il Premio Crafoord, che però, a differenza della Fields, rifiuta; premio questo che, sempre a differenza della Fields, portava anche un bel quantitativo di denaro[5]. Scrive al giornale Le Monde per giustificare il suo rifiuto: "*La fecondità si riconosce dalla progenie, non dagli onori (…) accettare di entrare nel gioco dei premi e delle ricompense sarebbe come dare il mio avallo ad uno spirito e ad una evoluzione del mondo scientifico che io invece reputo profondamente malsani, nonché destinati al suicidio spirituale, oltre che intellettuale e materiale…* "

E poi sparì.

Non dalla faccia della Terra, perché qualcuno ancora conosce il suo rifugio nei Pirenei. Non dal pianeta, perché – a meno che non ci sia sfuggita la triste notizia – Shurik dovrebbe ancora calpestare il fango di Francia e d'Europa, , e in questo mese dovrebbe compiere il suo settantottesimo compleanno. E se così è , questo è il primo compleanno dedicato ad un matematico vivente: matematico che non ha certo più voglia di

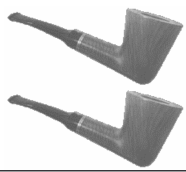
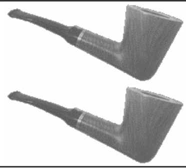
[4] Che non a caso oggi si chiama Teorema di Riemann-Roch-Grothendieck

[5] Circa un milione e mezzo di franchi francesi.

considerarsi tale, e con probabilità di arrivare a leggere queste righe pari a quelle di dimostrare nei prossimi mesi l'Ipotesi di Riemann. Ma, per quanto improbabile sia che egli venga mai a conoscenza di questi auguri, noi glieli facciamo lo stesso.

Buon compleanno, Shurik.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Venerdì 17			
Sempre a proposito di superstizione...			

2.1 Venerdì 17

Non so se ve ne siete accorti, ma questo mese ha dentro un Venerdì 17. E questa frase è vera sia nel mese in cui stiamo scrivendo che nel mese in cui state leggendo. Il mese scorso (per voi), questo fatto è stata fonte di notevole divertimento alle spese di alcuni amici piuttosto superstiziosi; la cosa ci ha ricordato una serie di problemini piuttosto di moda tempo fa, che hanno rappresentato interessanti aneddoti da raccontare a questa banda di creduloni.

La prima domanda che ci si pone è quanto si possa essere sfortunati: ossia, quanti Venerdì 17 possiamo avere, al massimo, in un anno? E, in questo caso, in che mesi cadono?

Prima che ai nostri amici venga un infarto, potreste anche calcolare quanto possano stare tranquilli; ossia, qual è il massimo periodo di tempo per cui non avremo Venerdì 17? E qui sorge anche spontanea la domanda di quale sia il minimo priodo di libertà da Venerdì 17, o in genere quali siano le "lunghezze" dei possibili periodi (ma quanti sono, i periodi?).

Da qui al baco sul tempo di Windows Excel il passo è breve (almeno per chi scrive): anche quest'anno (che cominciava di Domenica) il buon Bill ha deciso che il 2 Gennaio era la *seconda* settimana, e non la prima[6]. Un veloce aggiornamento ha permesso di calcolare la "WEEKNUM() " correttamente, almeno a partire da metà Gennaio. E qui, secondo voi, quanto siamo sfortunati come ferie? Più formalmente, è più probabile che l'anno cominci di Sabato o di Domenica?

Siccome Rudy si sta già lamentando che il calendario è in ritardo, vorremmo dei risultati piuttosto veloci, grazie...

2.2 Sempre a proposito di superstizione...

Spiace un po' che le targhe delle macchine abbiano solo tre cifre... Un nostro amico si è inventato i "numeri fortunati ": si definisce tale un numero di $2n$ cifre per cui la somma delle *prime* n cifre sia uguale alla somma delle *ultime* n cifre; assolutamente non interessato alla cosa, Rudy (che è perfettamente soddisfatto dei numeri che ha: "010 " e, essendo la lettera precedente una "*T* ", questo gli permette di chiamare affettuosamente la vecchia carretta "Tojô " – la seconda "o " si legge "u ") si è messo a pensare...

Ma quanti sono, i numeri fortunati di 6 cifre? E di 8? O di 10?

[6] Siamo ragionevolmente sicuri di averlo già detto e ripetuto un mucchio di volte: standard ***ISO 8601***. "La prima settimana dell'anno è quella che contiene il primo Giovedì "

Qui il Nostro stava pensando di passare al binario, quando ha pensato che forse era troppo facile: e allora, quanti sono i numeri fortunati di $2n$ cifre in base m?

3. Bungee Jumpers

Dimostrare che, se a, b, c e d sono interi positivi soddisfacenti la

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4abcd\ ,$$

allora nessuno di essi è divisibile per 5.

La soluzione, a "Pagina 46 "

4. Soluzioni e Note

Arriva! Ma sì, come, non lo sapete? Sta arrivando la primavera. Qui in Redazione siamo tutti eccitatissimi, soprattutto dopo questo lungo inverno: il Capo si sta preparando ad avere la pressione sotto le scarpe, il Doc sta pregustando i fatto che le signorine incominceranno a ridurre i capi d'abbigliamento indossati, e Alice si prepara a fare lo stesso, per la gioia degli altri Redattori.

Finalmente è marzo, il compleanno del Capo capita in questi giorni e lui si sente molto meglio, ha anche ricominciato a disegnare: con il radio a posto il suo talento è addirittura cresciuto, come noterete nei prossimi numeri.

Sempre a proposito di Calendario (il nostro è in ritardo, si lamenta il Capo), abbiamo scoperto che non tutti lo hanno appeso vicino alle donne nude del Pirelli, qualcuno lo utilizza per prepararsi agli esami e "ispirarsi ". Mentre facciamo gli auguri a ***Loba*** e a tutti i nostri lettori universitari per gli esami, ricordiamo che il concorso per riempire i buchi del calendario di RM è sempre aperto. Non si vince niente *[Ma non avevamo detto che regalavamo un abbonamento a vita a RM? ... uffa, che c'entra che non costa niente? (PRS)]*, ma almeno il Capo smette di lamentarsi.

Ancora a proposito del calendario, per tutti quelli che non hanno letto tra le righe della newsletter del mese scorso, abbiamo compiuto 7 anni e il numero di coloro che si sono iscritti nel frattempo a RM ha toccato le tre cifre. Niente male per una rivista che nel suo primo numero toccava a malapena le tre pagine.

Per la sezione recriminazioni, che non manca mai in queste S&N, ***Zar*** e ***PMP*** ci ricordano *"Fatti Vedere Sabato alle due "*, *"Non è un invito, ma il modo per ricordare la formula di Eulero (in uno spazio 3D): F+V=S+2. "*. Il Doc non si perdonerà mai di non averla ricordata nel numero precedente, quando aveva introdotto la cantilena delle Alpi.

Per gli eventi del mese passato, il Doc è andato ad una conferenza di Mariano Tomatis, e non pubblichiamo niente di quello che ci ha raccontato e del materiale che lui stesso ci ha inviato, nella speranza che lui voglia inviarci qualche riga da pubblicare, ma vi diamo il link alla sua pagina (www.marianotomatis.it), e vi consigliamo di informarvi sulle sue conferenze nella vostra città, sono veramente interessanti.

Per il resto, le dissertazioni del Doc su Galileo in Febbraio hanno scatenato un coro di reazioni, per lo più positive, di cui non riportiamo molto, ma vi ringraziamo: il nostro grande Postino scrive praticamente solo grazie alla motivazione indotta dai suoi ammiratori. Ed andiamo a cominciare.

4.1 [085]

Come sapete la soluzione ad ogni *Quick&Dirty* si trova nel numero successivo, e raramente pubblichiamo metodi alternativi, ma questo di ***Cid*** è bellissimo:

> Nel testo del problema non è specificato quale è lo strumento che deve essere usato per tagliare il cubo. Ebbene, posso dividere il cubo in 27 cubetti con solo 2 tagli

usando una rete per tagliare il cubo: siccome il cubo ha lato 3, appoggio una rete a maglie quadrate di lato 1 su una faccia del cubo, in tal modo attraversando con la rete il cubo ottengo 9 parallelepipedi a base quadrata; ruotando poì la rete di 90°, e ripetendo l'operazione su un'altra faccia del cubo ottengo la divisione in 27 cubetti.

Nota: Se mi fosse permesso passare per la 4° dimensione spaziale ed utilizzando una rete tridimensionale potrei ottenere la divisione cercata con un solo taglio.

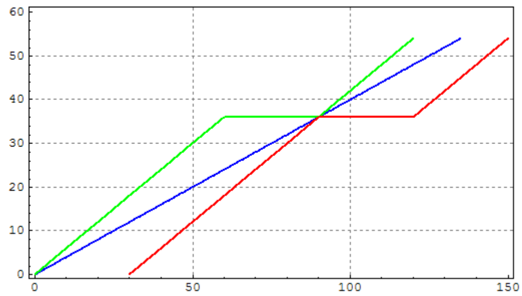
Eh, sì, i nostri lettori sono famosi per avere più dimensioni. Per esempio ***Daverovero*** sta risolvendo i problemi dei numeri precedenti, e presto proporremo qualcosa di suo.

4.1.1 La strada per il Luogo da Cui

Questo problema è piaciuto tantissimo, e in tanti si sono cimentati nella soluzione: ***Toki***, ***Damir Wilras***, ***Zar***, ***Cid***, ***Luigi*** il fumature di pipa, ***Jacopo*** (new entry: benvenuto!), ***Celeste*** e ***Flo***.

Due gli approcci possibili, trasformare ogni frase in una equazione e risolvere il sistema, o l'approccio grafico, vi presentiamo qui quello di ***Zar***:

Ordunque, qua si va molto piano. Ci saranno un sacco di tornanti (ora ricordo un quesito di qualche tempo fa che Rudi riuscì a risolvere nell'affrontare un tornante in auto, se ben ricordo travolgendo un paracarro, forse[7]).



Per chiarirmi le idee sui termini del problema mi sono fatto una figurina, che allego a questo messaggio. La figura mi ha poi permesso di risolvere il problema grazie anche ad alcune proprietà euclidee: in pratica ci sono due bei parallelogrammi che fanno molto comodo. La riga blu è Rudi che parte e non si ferma mai; la spezzata verde è Paola che parte insieme a Rudi, va più veloce e si ferma in pasticceria mezz'ora. La riga rossa è Paola che parte dopo Rudi e lo raggiunge alla pasticceria. Ah, sull'asse x ci sono i minuti e sull'asse y i chilometri. Al parallelogrammo in basso a sinistra manca la base inferiore, al parallelogrammo in alto a destra manca quella superiore, ma possiamo sempre immaginarcele.

Consideriamo il parallelogrammo in basso a sinistra: sappiamo che Paola sta ferma mezz'ora alla pasticceria, questo significa (i lati opposti dei parallelogrammi sono congruenti) che, quando parte dopo Rudi, parte mezz'ora dopo.

Vediamo ora l'altro parallelogrammo, quello con la base inferiore rossa: questa base è lunga 30 minuti (è la solita sosta di Paola), quindi anche la base superiore (che non è stata disegnata) è lunga 30.

Ma dal termine della riga blu al termine della riga rossa in alto passano 15 minuti, di conseguenza anche dal termine della riga verde al termine della riga blu passano 15 minuti, per un totale di 30.

Questi 15 minuti servono a Rudi per percorrere gli ultimi 6 chilometri, e quindi possiamo finalmente ricavare la velocità di Rudi: 6km/15min = 24km/h.

Ora possiamo tornare al primo parallelogramma: ci viene detto che quando Rudi e Paola partono insieme, Paola arriva alla pasticceria quando Rudi ha fatto solo 24 chilometri, e quindi deduciamo che è passata un'ora, e che Rudi deve ancora

[7] Complimenti a Zar per essersi ricordato di un problema estivo di molto tempo fa; Alice non può ricordarselo in quanto all'epoca si stava sollazzando al sole, mentre i due Roboanti Reduci Redattori sudavano sul numero da pubblicare... *[RdA]*

guidare per mezz'ora per arrivare alla pasticceria, che quindi dista 36 chilometri, percorso che Paola fa in un'ora, andando quindi alla folle velocità di 36km/h.

Ora abbiamo tutto quello che ci serve, possiamo mettere le scale giuste sulla figura e finire i calcoli che rimangono, in particolare possiamo ricavare la lunghezza del percorso totale, che è di 54km, percorsi da Rudi in 2 ore e 15 minuti, e da Paola in 2 ore esatte (compresa la sosta in pasticceria di 30 minuti).

E questo è quanto. Rimane da scoprire sulla cartina il nome del paesello.

Cosa che ***Zar***, con l'aiuto di Google Earth ha fatto, ma non vi diciamo cosa ha scoperto, il concorso è ancora aperto. Vi ribadiamo solo che LdC sta per *"Il Luogo da Cui, in Ragionevoli Condizioni di Lucidità Atmosferica e Mentale, è possibile Rimirare l'Intero Canavese in Tutta la Sua Beltà " [più o meno... ma la lucidità è fondamentale, data la presenza del vino (RdA)].*

Cid commenta: *"devono essere strade di montagna, per definire una velocità media di 36 km/h come guida sportiva "*, mentre ***Luigi*** *"Non mi pare quindi che Paola sia così spericolata alla guida come vuole far intendere Rudy. Diciamo piuttosto che Rudy se la prende comoda, cosa questa comune a quasi tutti i fumatori di pipa. "* E ***Flo***: *"...i casi sono due: o i conti sono sbagliati, o il terreno che porta al Luogo da Cui è molto accidentato... "*. Tutto è relativo ragazzi. In Redazione abbiamo la guida "molto tranquilla " di Rudi[8], quella "rilassata " del nostro Postino, e la pazzoide di Alice. Se quando il Capo sale in macchina con sua moglie giudica la cosa "spericolata " a quelle velocità, immaginatevi come si sente con Alice...

4.1.2 Non sono sicuro

E ad occhio e croce il titolo la dice tutta. Si sono cimentati nei tentativi in tanti: ***pmp***, ***Allanon***, ***Filippo***, ***Jacopo***, ***Celeste***, ***Zar***, ***Cid***, ***Flo***. Andiamo in disordine come al solito e diamo la parola per primo a ***Jacopo***, dandogli il benvenuto per il suo primo contributo:

> Per quanto mi riguarda mi associo pienamente al titolo del problema.
>
> Ragionando ricorsivamente (un modo informatico più elegante per dire "andando per tentativi ") sono arrivato alla soluzione nel caso semplice; la sequenza in cui devono disporsi in cerchio le persone per essere liberate tutte e sei è la seguente:
>
> 2 - 3 - 5 - 6 - 1 - 4
>
> Così facendo i giocatori saranno liberati secondo il seguente ordine:
>
> 2 (il giocatore da cui si parte), 5, 3, 1, 4, 6
>
> Ovviamente il giocatore con il numero più alto (n) deve sempre essere l'ultimo ad essere liberato; all' n+1 esimo passaggio viene percorso il giro completo ed il gioco termina perché si ritorna sempre sul giocatore n.
>
> ...Le mie scoperte terminano qui. Ho provato ad affrontare il problema generalizzato, ma temo sia ben oltre le mie capacità e conoscenze! Ho pensato ad un algoritmo in SQL che potrebbe darmi una mano a vedere un po' come funzionano le cose per n elevati, ma mi ci vorrebbe del tempo per realizzarlo e non so quanto mi potrebbe essere realmente utile (di sicuro non è un modus operandi molto elegante matematicamente parlando..).
>
> Per il resto mi rimangono delle ipotesi che trascendono quasi la fantascienza Douglassiana:

[8] I tornanti sono sulla strada più diretta tra il Luogo da Cui e il Punto del Divano Quantistico, non da Casa di Rudy. Qui la strada è ragionevolmente lineare, ma siccome buona parte (fino alla pasticceria, poi si gira a destra) viene percorsa tutti i giorni da Rudy per andare in ufficio, il Capo innesta il pilota automatico, tanto "Tojo " (che ormai dovreste sapere chi è) sa la strada. *[RDA]*

- La risposta potrebbe riguardare in qualche modo i numeri triangolari? Mi sembra che il problema non ammetta soluzioni per n dispari... E questo potrebbe essere collegato al fatto che ai numeri dispari corrispondono numeri triangolari multipli del numero stesso (in fin dei conti durante lo svolgimento del gioco con n giocatori non si fa altro che sommare tutti i numeri da 1 ad n, senza ripetizioni).

- L'idea del cerchio di persone che viene percorso più volte nello stesso senso mi fa pensare che potrebbe anche essere utile il "calcolatore a orologio " di Gauss (non sono sicuro che questo sia il suo nome rigoroso... comunque se non sbaglio ha a che fare con la cosiddetta aritmetica modulare), ponendo il numero delle ore nel quadrante uguale al numero dei partecipanti...

Da ***pmp*** un approccio:

Iniziamo con il caso banale. Per comodità (successiva), numero le persone da 0 a 5, dove la persona 0 è quella che ha il numero 2. I numeri assegnati alle varie persone devono essere questi:

012345

235614

quindi da 0 passiamo a 2, poi a 1, quindi 4, 5, e finalmente 3.

Per l'inizio della seconda parte, supponiamo di avere n persone in cerchio.

È immediato (anche per un non matematico :-)) che la persona che ha il numero n deve essere l'ultima a venire toccata, perché contando n a partire da lui si ritorna a lui. Ne consegue che per toccare tutti gli altri vedremo, in un ordine non identificato, i numeri da 1 a n-1, e quindi arriveremo alla posizione pari alla loro somma (modulo n). Il guaio è che se il numero di persone è dispari, la posizione finale è 0; ma visto che per ipotesi questo ha il numero 2 e non n, è impossibile trovare un percorso completo.

Detto ciò, e aggiunto banalmente che il caso n=2 è impossibile (si ritorna subito alla posizione 0), così come quello n=4 (se n è pari, l'ultimo da toccare deve essere in posizione n/2, ma in questo caso sarebbe la posizione 2 che è la prima raggiunta), ho deciso che il problema generale è un po' meno banale.

(...) Con 8 prigionieri una disposizione possibile è

01234567

24738615

con percorso 0 -> 2 -> 1 -> 5 -> 3 -> 6 -> 7 -> 4 (ovviamente non ho fatto tutte le prove, ma lavorato prima su una disposizione di parità per sapere quando ci volevano i numeri dispari e quando i pari).

E ***Celeste*** prosegue così:

(...) Volendo espandere il problema ad insiemi più numerosi, si possono fare queste considerazioni:

- Tenendo conto che si tratta di un problema di natura ciclica, è opportuno prendere in considerazione i "residui ", cioè i resti della divisione per il numero totale di persone; in sostanza, se le persone sono n, sommando via via, ognuno una sola volta, tutti i possibili residui (0, 1, 2, …., n – 1) che corrispondono al numero d'ordine delle persone, bisogna trovare ogni volta un risultato, trasformato in residuo, differente, altrimenti il gioco si arresta prematuramente.

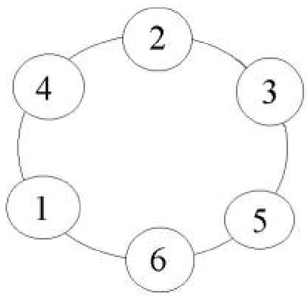
- La persona col numero d'ordine n va lasciata per ultima; infatti, contando n posti da essa, si ritorna allo stesso punto, quindi si ricadrebbe su una persona già liberata e il gioco si arresterebbe.

- Siccome il totale di tutti i residui vale n(n – 1)/2, si vede che se tale valore è multiplo di n (e ciò succede se n – 1 è pari, cioè se n è dispari), con l'ultimo residuo si arriva alla persona da cui si è iniziato, e quindi rimarrebbe alla fine una persona ancora da liberare; in altri termini la liberazione di tutte le persone si può avere solo con n pari (condizione necessaria ma non sufficiente).

- Partendo da valori diversi da 2, ci possono essere soluzioni più immediate: ad esempio, se n è una potenza di 2 (compresi n = 2 e n = 4, casi impossibili iniziando da 2) basta partire da n – 1 e scalare ogni volta di 1; la spiegazione è che, così facendo, è come aggiungere -1, -2, -3 ecc., cioè sommare 1, 2 , 3 ecc. girando al contrario, e ottenendo un risultato sempre diverso perché la somma dei primi k numeri non è mai una potenza di 2.

- Una possibile strada per risolvere il caso di n pari e grande a piacere potrebbe essere quella di dimostrare che, se n – 2 è risolubile lo è di conseguenza anche n, ma questo purtroppo è solo una vaga possibilità.

Filippo ci ha promesso un approccio cervellotico, ma non l'ha più mandato. ***Cid***, invece, ci scrive:



La soluzione del problema può essere data anche scrivendo la sequenza dei numeri che verranno liberati. Nel caso semplice di 6 persone la sequenza dei numeri liberati è:

2, 5, 3, 1, 4, 6 (come si può verificare facilmente nel disegno)

In generale con N persone, sappiamo che sicuramente l'ultimo liberato sarà quello con il numero N, perché avanzando di N posti in senso orario ci troviamo nella stessa posizione e il gioco finisce.

Inoltre, se i e j sono numeri interi positivi diversi tra loro e minori di N si deduce che la somma dei primi i numeri (modulo N) sarà diversa dalla somma dei primi j numeri (modulo N), altrimenti la somma dei numeri da (i + 1) a j sarebbe uguale a 0 (modulo N) e quindi il gioco finirebbe prima di arrivare sull'ultimo numero.

Quindi, un altro modo di scrivere la soluzione è scrivere la sequenza delle somme (modulo N).

Nel caso di N = 6, la sequenza delle somme è: 2, 1, 4, 5, 3. Infatti: 1=(2+5) Mod N, 4=(2+5+3) Mod N, 5=(2+5+3+1) Mod N, 3=(2+5+3+1+4) Mod N

In generale se N è pari:

Si nota che la sequenza delle somme è fatta di N-1 elementi (distinti tra loro) compresi tra 1 e N-1, inoltre si nota che l'ultimo termine è sicuramente (N/2) in quanto la somma da 1 a (N-1) vale:

$$\sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{N-1}{2} * N = \frac{N}{2} * (N-1) = N * \frac{(N-2)}{2} + \frac{N}{2}$$

ed essendo N un numero pari, anche (N-2) è pari quindi $\frac{(N-2)}{2}$ è un numero intero che moltiplicato per N diventa uguale a 0 (modulo N) e quindi quel che rimane è solo (N/2).

Per cui con N=6, sapendo che il primo valore era 2 ed il quinto era 3, ho dovuto solo cercare la giusta sequenza delle somme tra 6 sequenze possibili e la soluzione è risultata immediata.

Prima di generalizzare, consideriamo il caso di N dispari:

in tal caso la soluzione è impossibile, in quanto la somma da 1 a (N-1) vale:

$$\sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{N-1}{2} * N$$

ed essendo N un numero dispari, (N-1) è pari quindi $\frac{(N-1)}{2}$ è un numero intero che moltiplicato per N diventa uguale a 0 (modulo N) e quindi il gioco finisce prima di arrivare sull'ultimo numero.

A questo punto posso rispondere alla prima domanda: 1) Esistono dei valori di N per cui il problema è impossibile, quali? Sì, tutti i numeri dispari (ed anche i valori N=2 e N=4 se si comincia con il numero 2).

Ora passo alla parte più difficile: partendo da alcuni valori è semplice trovare una struttura che permetta in modo generalizzato un "liberi tutti ", ad esempio partendo dal valore 1, una sequenza valida di numeri liberati è la seguente:

1, (N-2), 3, (N-4),5, ...,(N-5), 4, (N-3), 2, (N-1), N

e la corrispondente sequenza delle somme (modulo N) è:

1, (N-1), 2, (N-2), 3,.... (N/2)-2 , (N/2)+2 , (N/2)-1, (N/2)+1, (N/2)

Analogamente partendo dal valore (N-1), una sequenza valida di numeri liberati è la seguente:

(N-1), 2, (N-3), 4,(N-5), ...,5 , (N-4), 3, (N-2), 1, N

e la corrispondente sequenza delle somme (modulo N) è:

(N-1), 1, (N-2), 2, (N-3),.... (N/2)+2 , (N/2)-2 , (N/2)+1, (N/2)-1, (N/2)

Mi sono posto la domanda: In quali casi è possibile che la sequenza dei numeri liberati sia la sequenza in ordine crescente dei numeri da 1 a N? Ho trovato che ciò è possibile solo se N è una potenza di 2.

Esempio: con N=8, la sequenza 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 è una valida sequenza di numeri liberati.

Dimostrazione:

*--Condizione sufficiente--.(*Comincio con il dimostrare che essere N una potenza di 2 è una condizione sufficiente.)

Una sequenza di numeri liberati per essere valida deve essere tale che nessun sottoinsieme di numeri adiacenti dei primi (N-1) numeri della sequenza abbia somma uguale a un multiplo di N.

Tra i fattori primi di tale somma sicuramente saranno presenti numeri dispari in quanto:

A) o la somma è composta da un numero pari di elementi ed allora la somma è uguale a:

$$(\text{primo elemento + ultimo elemento}) \cdot \left(\frac{numero\_elementi}{2}\right)$$

e la somma (primo elemento + ultimo elemento) è un numero dispari essendo il numero di elementi del sottoinsieme in numero pari.

B) oppure la somma è composta da un numero dispari di elementi ed allora la somma è uguale a:

$$\text{(elemento centrale)} \cdot (numero\_elementi)$$

e è un numero dispari perché stiamo considerando il caso in cui la somma è composta da un numero dispari di elementi.

Pertanto in entrambi i casi, la somma non può essere multipla di N in quanto è uguale a un numero dispari moltiplicato per un numero sicuramente minore di N.

--*Condizione necessaria*--.*(*Dimostro ora che essere N una potenza di 2 è una condizione necessaria.)

Se N non è una potenza di 2 allora o è un numero dispari o si può scrivere come prodotto di un numero dispari e un numero pari.

Se è un numero dispari, abbiamo visto prima che la somma dei primi (N-1) elementi è un multiplo di N, quindi la sequenza non è valida.

Se N è il prodotto di un numero dispari D e un numero pari P, vi sono 2 casi:

1) $D<2 \cdot P$

In tal caso il seguente sottoinsieme di numeri adiacenti ha somma uguale a N. insieme dei numeri compresi tra $\left(P-\frac{D-1}{2}\right)$ e $\left(P+\frac{D-1}{2}\right)$ che ha somma uguale a $D \cdot P=N$

2) $D>2 \cdot P$

In tal caso il seguente sottoinsieme di numeri adiacenti ha somma uguale a un multiplo di N. insieme dei numeri compresi tra $\left(\frac{D+1}{2}-P\right)$ e $\left(\frac{D+1}{2}+P\right)$ che ha somma uguale a $D \cdot P=N$

Analogamente se il primo elemento è N-1, si può avere che la sequenza dei primi (N-1) numeri liberati sia la sequenza in ordine decrescente dei numeri da N-1 a 1 se e solo se N è una potenza di 2.

Un'osservazione: qualunque sia il primo elemento e qualunque sia il valore di N, si ha che per qualsiasi soluzione valida il valore di N si troverà, sul cerchio, in posizione diametralmente opposta al valore iniziale, ciò è conseguenza diretta del fatto che la sequenza delle somme termina con (N/2) in qualsiasi soluzione valida.

Un'altra osservazione che ho fatto è che se il primo numero della sequenza è (N/2) allora siamo sicuri che non esiste soluzione, in quanto il primo numero della sequenza delle somme sarebbe (N/2) mentre abbiamo visto che per trovare una soluzione valida (N/2) deve essere l'ultimo numero della sequenza delle somme.

A questo punto non sapendo come analizzare ulteriormente il problema, ho provato a studiarlo tramite un algoritmo che mi ha trovato tutte le soluzioni nel caso in cui il primo numero sia 2 e considerando N<18.

Con N=6, la sequenza dei numeri liberati è: 2, 5, 3, 1, 4, 6

Con N=8, le sequenze dei numeri liberati sono:

2, 1, 3, 7, 4, 6, 5, 8

2, 3, 4, 6, 7, 5, 1, 8

2, 5, 7, 3, 4, 6, 1, 8

2, 7, 4, 6, 3, 1, 5, 8

Con N=10, ho 29 sequenze possibili di numeri liberati.

Con N=12, ho 356 sequenze possibili di numeri liberati.

Con N=14, ho 7306 sequenze possibili di numeri liberati.

Con N=16, ho 195784 sequenze possibili di numeri liberati.

Nel caso in cui il primo numero sia 1.

Con N=6, la sequenza dei numeri liberati è: 1, 4, 3, 2, 5, 6

Con N=8, le sequenze dei numeri liberati sono:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

1, 5, 7, 6, 4, 3, 2, 8

1, 6, 3, 4, 5, 2, 7, 8

1, 6, 4, 3, 7, 5, 2, 8

Con N=10, ho 43 sequenze possibili di numeri liberati.

E qui mi sono fermato...

(A dire il vero ho trovato anche qualche soluzione per valori di N compresi tra 20 e 60 e con il valore 2 come numero iniziale della sequenza; ad esempio con N = 30, la sequenza dei numeri liberati è:

2, 1, 3, 4, 6, 5, 7, 9, 10, 8, 13, 11, 12, 17, 16, 18, 19, 28, 20, 25, 26, 24, 29, 14, 15, 23, 21, 27, 22, 30

ma non sono riuscito a trovare una formula che dia una soluzione valida per N generico.)

Infine ***Allanon***:

Supponiamo che gli N punti siano i vertici di un poligono regolare. Il senso è sempre quello orario.

a) - Identifichiamo la "posizione " di questi vertici con i numeri 0,1,1,…,N-1. Descriviamo il poligono a partire da uno qualsiasi dei vertici che identificheremo con il vertice 0. Quindi: V(i)=Vi=i; i=0;N-1.

- Identifichiamo i valori che indicano il "salto " da effettuare "da " ogni vertice con Ji; i=1;N-1.

b) - Identifichiamo con Pi; i=1,N-1 la successione di "posizioni " che, partendo dal primo vertice V0=0, con J(0)=J0, si sposti a salti determinati dai Jk, via via incontrati, in senso orario.

- Identifichiamo con Xi la corrispondente successione dei valori Ji incontrati…;

<u>Le serie Ji ed Xi sono l'incognita del nostro problema.</u>

Si osserva subito che una successione di "salti " , che non passi mai due volte per lo stesso vertice, NON può contenere il salto Xi=Jk=N, (per i, k compresi fra 1 e N-1) perché ciò significherebbe fare un giro completo tornando sullo stesso vertice.

Ne segue, da questa considerazione, e che il valore X=J=N deve SEMPRE trovarsi sull'ultimo vertice raggiunto nella successione di salti, cioè JPN=XN=N.

<u>Si trova così che una condizione NECESSARIA (ma NON SUFFICIENTE) perché le Xi siano una soluzione del problema, è che queste siano una PERMUTAZIONE delle Ji a cui sia stato tolto il valore N, cioè una permutazione di 1,2,…,N-1</u>

c) Con le notazioni di cui sopra, partendo dal primo vertice, la successione delle posizioni Pi toccate dalla successione di salti sarà data da:

P1=0

P2=|JP1|mod.N =|X1|mod.N

P3=|P2+JP2|mod.N =|P2+X2|mod.N

…. …

PN=|PN-1+JPN-1|mod.N =|PN-1+XN-1|mod.N

Dove si è introdotto il resto mod.M vista la circolarità dell'insieme dei vertici

d) Se nella definizione del generico Pi si sostituiscono all'indietro le varie Pi-1, Pi-2, etc. vediamo che i Pi sono individuati dalla "successione delle somme parziali " di Xi; cioè:

$$\left| P_i = \sum_{K=1}^{i} X_K \right|_{ModN}$$

Da questo segue l'osservazione fondamentale che:

<u>"CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE perché la successione Xi sia una SOLUZIONE del problema è che:</u>

<u>- la successione Xi sia una permutazione di 1,…,N-1;</u>

<u>- la successione Pi delle somme parziali di Xi sia una permutazione di Xi ";</u>

e) È immediato, una volta trovata la successione Xi, calcolare la successione Ji.

f) Questo risultato permette di trovare un algoritmo (simulato con Excel ovviamente: che cosa vi aspettavate?) che consente in linea di principio di trovare TUTTE le successioni X che risolvono il problema, dato un qualsivoglia N ed un qualsivoglia salto iniziale J0.

Ho risolto il problema per N=2,3,4,5,6,7,8; (poi il fattoriale di N-1 diventa troppo grande!) Espressi graficamente, i risultati mostrano che in alcuni casi le soluzioni hanno delle "regolarità " che sono valide, con alcune condizioni aggiuntive, per qualsiasi N; Per fare un esempio, per N pari, (quindi anche per N=1998) esistono sempre almeno una soluzione per J0=1; =N-1; =N/2-1; =N/2+1, e tali costruzioni sono DIRETTAMENTE costruibili;

g) Non è per fare della "suspence " gratuita…, ma vorrei attendere alcuni giorni per dare una forma definitiva ai fogli Excel, alle rappresentazioni grafiche, e per valutare più attentamente il "teorema " sopra riportato. Vi manderò tutto appena raggiunto un minimo di forma… presentabile.

E qui Alice vi risparmia il risultato, ragazzi, lavorateci ancora un po'... Al mese prossimo!

5. Quick & Dirty

Questo è uno di quei casi in cui non mi piace il problema ma mi piace la soluzione...

Avete un cubo di lato ***3***; vostro scopo è ottenere una serie di cubi di lato ***1***. La cosa si può fare agilmente con i ***6*** tagli in figura.

Ricombinando eventualmente i pezzi dopo ogni taglio, è possibile impiegare meno tagli?

*No; il cubetto che si trova al centro ha **sei** facce che "non esistono " nel cubo originale; essendo ortogonali tra loro, per ognuna è necessario un taglio, quindi non si può scendere sotto i sei tagli.*

6. Pagina 46

Per prima cosa, dimostriamo che i quattro interi dati sono primi tra loro; procediamo per assurdo.

Data la soluzione in cui i quattro valori non sono tutti primi tra loro che minimizza la somma $a+b+c+d$, ordiniamo i numeri in modo tale che $a \geq b \geq c \geq d$ e consideriamo il polinomio quadratico:

$$f(x) = x^2 - 4bcdx + b^2 + c^2 + d^2 .$$

Questo ha radice $x = a$ e possiamo dire che è:

$$f(b) \leq 4b^2 - 4b^2cd = 4b^2(1-cd) \leq 0 .$$

Se $f(b)=0$, allora $c=d=1$ e $f(b)=2b^2-4b^2+2=2(1-b^2)=0$, e quindi $b=1$. Ma se $b=c=d=1$, allora a, b, c e d sono primi tra loro, e quindi $f(b)<0$. Questo significa che a è la radice maggiore di $f(x)$ e che l'altra radice (indicata con e) è minore di a. Notiamo che $e = 4bcd - a$ è un intero e, essendo $ae = b^2 + c^2 + d^2$, è positivo.

Il massimo comun divisore di e rispetto a ognuno dei numeri b, c, d è pari al massimo comun divisore con a; quindi, e, b, c, d soddisfano l'equazione:

$$e^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4ebcd ,$$

non sono primi tra loro e inoltre si ha:

$$e+b+c+d < a+b+c+d ,$$

in contraddizione con l'assunto che il secondo membro qui indicato sia minimo.

Quindi, a, b, c, d sono primi tra loro.

Quindi, al più uno di questi numeri deve essere divisibile per 5; in questo caso, i quadrati dei restanti numeri saranno congrui a $\pm 1 \bmod 5$, e quindi la loro somma sarà congrua (modulo 5) ad un numero dispari s per cui $-3 \leq s \leq 3$, ossia sarà nell'insieme $\{-3,-1,1,3\}$, quindi non sarà congrua a 1 (sempre modulo 5).

Quindi, l'equazione del problema non può essere soddisfatta in modulo 5 nel caso in cui uno dei numeri sia divisibile per 5.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Meno c'è da fare, più siamo contenti...

Speriamo che questo titolo susciti la vostra immediata approvazione, anche perché pur avendo l'intenzione di usarlo, non ci sogniamo neanche di dimostrarlo; lo diamo per scontato, fiduciosi del fatto che ci seguirete in questo tranquillo postulato.

L'argomento trattato questa volta non ci è mai stato particolarmente simpatico, quindi non avevamo alcuna intenzione di parlarne; poi, a Febbraio, un nostro lettore (PMP, per gli interessati al pettegolezzo) lo ha nominato sostenendo che "...per i fisici è più matematica che fisica, per i matematici è più fisica che matematica... " e, a questo punto, non parlarne sarebbe stato brutto.

Il successo della Meccanica Newtoniana deriva, secondo alcuni, non solo dal fatto che sia piuttosto facilmente applicabile al mondo reale, ma anche dalla Matematica che ne nasce: come ebbe a dire Penrose in merito, è interessante notare che tutte le "belle " teorie sulla Natura sono sorgenti fertilissme di teorie matematiche; certe volte, però, sembra che per fare questo si vada a finire in pantani che non finiscono mai.

Il buon Isaac ci ha spiegato che le *posizioni* delle particelle sono la cosa importante; la velocità non è altro che la variazione della posizione rispetto al tempo; peccato che anche questo insignificante oggetto sia necessario, per fare i conti; infatti, se non avete le posizioni *e* le velocità di un insieme di particelle, non potete avere idea di quale sia il comportamento effettivo del sistema. Insomma, ricordando che

$$F = m\ddot{x}\,, \qquad \texttt{[1]}$$

viene fuori che vi ritrovate a fare i conti con una derivata seconda, e quindi vi servono un mucchio di cose (note agli specialisti del ramo come "condizioni iniziali "); quello che ci si chiede è se sia possibile semplificare la cosa.

E non è finita qui.

Tanto per cominciare, qui stiamo parlando di particelle, e pure particelle piuttosto strane[9]; d'accordo che possiamo decomporre un "corpo esteso " in una serie di particelle costituenti, ma sovente la sensazione è che da qualche parte nel ragionamento ci sia una frizione che slitta.

Come dicevamo, le coordinate cartesiane (che sono posizioni, in questo caso) nelle quali divete risolvere la `[1]` non è che siano proprio il meglio; dobbiamo calcolare una derivata prima per avere le velocità, e poi la forza richiede un'altra derivata... sarebbe più carino riuscire a trovare qualcosa che ci permetta di fare un po' meno calcoli complicati, soprattutto se (come capita sovente) bisogna fare i conti al contrario.

L'idea, all'inizio, è venuta a Lagrange (che, come tutti sanno da almeno tre anni, ***non*** è francese); cerchiamo di prenderla calma, come era nel suo stile.

Tanto per cominciare, supponiamo ci sia un modo; ossia, supponiamo di avere un insieme $q_i \; i = 1, \ldots, N$ di numeri (che chiameremo ***coordinate generalizzate***) in grado di specificare *completamente* la configurazione del sistema; facciamo un esempio, e approfittiamone per una digressione.

> Prendete un corpo che si muove nello spazio (il classico esempio del prof era un uovo sodo tirato per aria: i più sanguinari tra noi, propendendo per un'interpretazione letterale della parola "corpo ", visualizzavano la cosa con una

[9] E qui sorge spontaneo il ricordo delle parole di un nostro compagno di facoltà: "Mi sono iscritto a Fisica perché tratta della Realtà della Natura, e adesso mi ritrovo omini velocissimi e imponderabili che posano masse finite adimensionali su piani con attrito zero... " (*Giò, sfogo da intervallo*)

proiezione di judo particolarmente spettacolare); ***tre*** coordinate vi servono di sicuro, per definire la posizione del baricentro e capire in genere "dove va a finire " l'oggetto; siccome però questo può anche ruotare su se stesso, vi servirà anche sapere come si gira; e qui arriva la digressione.

Il modo migliore per descrivere le rotazioni del nostro aggeggio sono gli ***angoli di Eulero***[10]. Cominciamo con un sistema di coordinate centrato nel baricentro e allineato con quello di riferimento; quando il nostro aggeggio gira, i tre assi ruoteranno ciascuno di un certo angolo. Ora, per mettere un po' d'ordine, supponiamo che la coppia ***xy*** venga ruotata avendo come asse di rotazione ***z*** di un certo angolo ϕ; *successivamente* a questo movimento, ruotiamo quello che è il nuovo piano ***xz*** con asse di rotazione ***y*** di un angolo ϑ; *infine*, ruotiamo con asse di rotazione ***x*** il piano ***yz***. Complicato? Tranquilli, non ne parliamo più. Se volete provare a visualizzare la cosa, provate con il "sistema di coordinate della mano destra ": il pollice fa l'asse ***y*** (e punta a destra i fuori), il medio l'asse ***x*** (e punta verso di voi) e l'indice l'asse ***z*** (verso l'alto); girateli degli angoli opportuni e tra un mese vi tolgono il gesso, come è successo a me.

Bene, questi numeri q_i (*sei*, nel caso qui sopra) sono detti i ***gradi di libertà*** del sistema; se adesso utilizziamo questi numeri per definire un punto (in coordinate cartesiane) in uno spazio ***N***-dimensionale, questo spazio rappresenta gli stati che il nostro sistema può assumere ossia, se preferite, è lo ***spazio delle configurazioni del sistema***.

La cosa interessante è che mentre il nostro oggetto si muove traccerà una curva nello spazio delle configurazioni; evidentemente, questa curva sarà funzione del tempo e la indichiamo con $\mathbf{q}(t)$; utilizziamo il grassetto per indicare la notazione vettoriale, altrimenti tra sommatorie, indici e versori c'è da impazzire.

Dalla Legge di Newton vista sopra, ci si aspetta che la traiettoria nello spazio delle configurazioni sia completamente definita specificando per un certo momento t_1 i valori $\mathbf{q}(t_1)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t_1)$, e effettivamente la cosa si può fare, anche se non è semplicissima. Lagrange, però, preferisce procedere in un altro modo, per non dover trattare con la derivata: piuttosto che specificare $\dot{\mathbf{q}}(t_1)$, preferisce specificare la funzione *in un secondo momento* t_2 , ossia attraverso la $\mathbf{q}(t_2)$.

Adesso, è abbastanza immediato chiedersi *che cammino segue il nostro sistema se (*nello spazio delle configurazioni*) in* t_1 *era in* $\mathbf{q}(t_1)$ *e in* t_2 *era in* $\mathbf{q}(t_2)$. La cosa è strettamente correlata al titolo di questo pezzo: il cammino $\mathbf{q}(t)$ soddisfacente le nostre richieste è quello che *estremizza* (minimizza, se preferite) una data quantità *S*. La cosa è nota (da cui il titolo) come ***Principio di Minima Azione***.

Punto, finito... Beh, no. All'inizio vi avevamo chiesto di accettarlo come dato di fatto, ma almeno cerchiamo di capire come funziona. La cosa, tanto per cambiare, non è affatto semplice, soprattutto se si vuole stare sulle generali.

Genericamente, a noi interessa minimizzare un oggetto contenente posizione, tempo e velocità, ossia trovare il minimo di[11]:

[10] Poteva mancare? A noi sta simpatico, ma vorremmo una volta tanto riuscire a parlare di Matematica senza tirarlo in ballo… Quasi peggio di Virgilio il gatto: sempre tra i piedi.

[11] Non la chiamiamo "funzione ", perché il nome corretto è "funzionale ". Saremo a lungo grati a chi riuscirà a spiegarci in parole semplici la differenza tra queste due cose.

$$F[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)dt, \qquad [2]$$

dove abbiamo scelto la forma più generale possibile per il nostro aggeggio.

Supponiamo $\overline{\mathbf{x}}(t)$ sia il cammino minimo e, rispetto a questo cammino, $\eta(t)$ rappresenti una piccola variazione, tale che nei punti t_1 e t_2 questa variazione sia nulla (insomma, il cammino "originale " e quello "variato " partono e arrivano nello stesso posto e nello stesso tempo. Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} F[\overline{\mathbf{x}}] \leq F[\mathbf{x}] &= \int_{t_1}^{t_2} f(\overline{\mathbf{x}} + \eta, \dot{\overline{\mathbf{x}}} + \dot{\eta}, t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(f(\overline{\mathbf{x}}, \dot{\overline{\mathbf{x}}}, t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \dot{\eta} + \ldots \right) dt \\ &= F[\overline{\mathbf{x}}] + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \dot{\eta} + \ldots \right) dt \end{aligned} \qquad [3]$$

...e adesso dovreste aver capito perché non ci piace... La buona notizia è che integrando per parti e considerando i valori ***0*** iniziali e finali della variazione, alcuni termini spariscono; non solo, ma siccome $0 \geq F[\mathbf{x}] - F[\overline{\mathbf{x}}]$ per *qualsiasi valore* di $\eta(t)$, anche i nostri puntini spariscono. E sparisce anche $\eta(t)$, nell'intervallo; quindi $\overline{\mathbf{x}}(t)$ *minimizza* ***F*** *se e solo se*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 0 \qquad [4]$$

lungo tutto il cammino $\overline{\mathbf{x}}(t)$. E questa è nota come ***Equazione di Eulero***(poteva mancare?)***-Lagrange***.

"E adesso che sei arrivato a questo obbrobrio, cosa hai intenzione di farci? " Assolutamente niente. Quello che mi interessava, era vedere un esempio di ***Calcolo delle Variazioni***. Adesso voglio parlare di come digeriva Newton. Leggenda vuole che il problema seguente sia stato risolto in un dopocena dal Nostro.

7.2 ...e quel poco, facciamolo più alla svelta possibile.

> *Una perlina scorre senza attrito su un filo metallico passante attraverso due anelli: uno nell'origine, l'altro in* $(x', y', z') = (x_0, 0, -z_0)$ *con* $z_0 > 0$. *Secondo quale curva deve essere piegato il filo metallico in modo tale che il tempo tra il passaggio nei due anelli sia minimo?*

Proprio lui, il problema della brachistocrona. E adesso ve lo risolvo anche.

La curva ottimale deve giacere nel piano $y' = 0$; utilizziamo un sistema di coordinate (x, y, z) tale che *z* aumenti verso il basso; allora il tempo di scorrimento diventa:

$$\tau = \int_0^{z_0} \frac{dz}{\dot{z}}. \qquad [5]$$

Essendo poi $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = gz$, abbiamo:

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{2gz}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}} \qquad \texttt{[6]}$$

E quindi il nostro tempo di percorrenza diventa:

$$\tau = \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{2gz}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}\,. \qquad \texttt{[7]}$$

La richiesta del problema è di minimizzare $\tau[x(z)]$ come espresso dalla **[7]**, in funzione del cammino $x(z)$. Possiamo usare l'Equazione di Eulero-Lagrange **[4]** con le sostituzioni:

$$t \to z \text{ e } f\left(x, \frac{dx}{dz}, z\right) = \frac{1}{\sqrt{2gz}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}\,. \qquad \texttt{[8]}$$

Poiché *f non* dipende da *z*, deve essere:

$$0 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{z}\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}}\right), \qquad \texttt{[9]}$$

il che implica

$$x(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{Az}{1 - Az}}\,dz\,, \qquad \texttt{[10]}$$

Dove A è una costante di integrazione; ponendo $\sin^2\vartheta \equiv Az$, si ottiene:

$$x = \frac{1}{A}\left(\vartheta - \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta\right), \qquad \texttt{[11]}$$

Che è l'equazione (della cicloide) cercata.

Ora, con buona pace per Sir Isaac, conosciamo duecentonovantasette modi migliori per digerire la cena...

7.3 Adesso, lasciamo da parte Eulero.

Soprattutto perché a noi è più simpatico Lagrange.

Come dicevamo in merito al Principio di Minima Azione, l'idea era quella di minimizzare una grandezza S (giustappunto, l'azione) rappresentata come integrale di una funzione delle coordinate generalizzate: in pratica,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\,dt\,. \qquad \texttt{[12]}$$

Dove L è la ***Lagrangiana*** del sistema; il ruolo importante di questo oggetto è che determina completamente l'evoluzione dinamica del sistema che stiamo osservando, e quindi riuscire a scrivere L ci permette di conoscere l'evoluzione generale del sistema.

Purtroppo, non esiste una regola generale per scrivere L, anche se, almeno per i sistemi più semplici, se indichiamo con T l'energia cinetica del sistema e con V la sua energia potenziale, allora è:

$$L = T - V \ . \qquad [13]$$

"Ci faresti un esempio con le mele e le pere? " Il più semplice è probabilmente il movimento di una particella di massa m in un campo gravitazionale descritto attraverso la funzione potenziale Φ; in questo caso, $T = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2$ (energia cinetica), $V = m\Phi$ (energia potenziale) e quindi $L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2 - m\Phi(\mathbf{x})$; inserendo questa nell'Equazione di (Eulero) Lagrange, abbiamo:

$$\frac{d}{dt} m\dot{\mathbf{x}} + m\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} = 0 \ , \qquad [14]$$

che non è altro che l'equazione del moto.

E, logicamente, qualcuno non è d'accordo. In particolare quel simpatico teppista di Hamilton.

Infatti, sotto sotto, qui stiamo continuando a considerare (come avevamo detto all'inizio) le velocità come delle semplici "variazioni di posizione ", non come delle variabili realmente indipendenti; l'idea di Hamilton è stata quella di considerare le ***quantità di moto*** ("momentum ", in inglese: plurale, "momenta") delle particelle come seconda variabile; la cosa sembra un cambiamento di secondaria importanza, ma l'idea soggiacente è quella di considerare queste variabili come *completamente indipendenti*; quindi, nella formulazione hamiltoniana, abbiamo ***due*** insiemi di variabili indipendenti: un insieme ci racconta come variano nel tempo le quantità di moto, l'altro ci spiega come variano (sempre nel tempo) le posizioni.

Spero vi ricordiate che le leggi del moto erano basate sul concetto di *accelerazione*, ossia di una derivata del secondo ordine; utilizzando il momento, dobbiamo preoccuparci solo di variazioni ("derivate ", se preferite) del primo ordine, e la cosa (anche se non sembra, dalle cosacce che abbiamo scritto poco sopra) semplifica notevolmente le cose; anche qui, le equazioni fondamentali sono ricavate da un'unica quantità detta (evidentemente) ***Hamiltoniana*** del sistema, che non è altro che l'espressione dell'energia totale in termini delle variabili di posizione e di quantità di moto.

"E come la calcoli, l'Hamiltoniana? " Beh, la cosa non è semplicissima; per mettere a fuoco la sua differenza rispetto alla formulazione di Lagrange, è probabilmente meglio esprimere le nuove variabili utilizzate: qui, le coordinate più comode da utilizzare risultano essere, oltre alle $\mathbf{q}$ già viste, un nuovo insieme di variabili definito come:

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}} ; \qquad [15]$$

a questo punto, possiamo definire la funzione Hamiltoniana come:

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) \equiv \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L \ , \qquad [16]$$

il che ci permette di eliminare $\dot{\mathbf{q}}$ in favore delle nuove variabili.

A questo punto quello che dovrebbe risultare immediato è il motivo per cui Hamilton, ogni tanto, alzava un po' troppo il gomito; giusto per accennare un punto sul quale si può finire (ma qui vi fate accompagnare da altri), $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sono grandezze ***coniugate*** e, in meccanica quantistica, non commutano; da cui, con semplici passaggi, il Principio di Indeterminazione di Heisemberg...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms