Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 082 - Novembre 2005 - Anno Settimo

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com
RM 081 ha diffuso ***784*** copie e il **1 novembre** alle **11:30** per Google eravamo in **755** pagine.

In copertina, le **QUATTRO** prestigiose riviste che accettano i nostri scritti....

1. Difficile come contare fino a dieci

"Perché sei fisico?
Perché non sei matematico?"
[Paul Erdös]

Una giostra è un oggetto semplice. Almeno se ci si limita a considerarla per quello che è nel senso più ampio ed evidente: una cosa che gira, colorata, accogliente, e in grado di presentarci il mondo in maniera diversa dal solito. È questo che attrae i bambini sulle giostre, no? Certo contano i cavallucci e le astronavi colorate che addobbano le piattaforme girevoli; certo è importante avere delle redini da afferrare o volanti da manovrare, ma il fascino essenziale e fondamentale rimane quello di sempre: sulla giostra, il mondo gira.

Un bambino – tanto più un bambino molto piccolo – è sottoposto ad una spaventosa serie di stimoli, e la sua mente è continuamente e alacremente impegnata in un lavoro di classificazione. Ad un certo punto del suo sviluppo, se ha ripetuto l'esperienza del "giro in giostra" abbastanza volte, arriverà ad una sorta di consapevolezza razionale dell'evento fisico: la giostra gira in tondo, e quel che si vede dalla giostra non è un mondo in movimento, ma è soltanto il solito mondo di sempre visto da sopra una piattaforma che gira su sé stessa. Anche se l'analfabetismo di ritorno costituisce indubbiamente un pericolo per i meno giovani, è in realtà davvero difficile ricordare quale fosse la visione di un evento "prima" della comprensione dello stesso. La visione "adulta" arriva di colpo, con un sorta di consapevolezza improvvisa: da quel momento in avanti, non sarà praticamente più possibile rivedere "il mondo dalla giostra" com'era prima dell'illuminazione. Si può provare a ricordare, ma è difficilissimo riuscire a riprodurre davvero le sensazioni che si avevano quando il paesaggio rotante che invadeva gli occhi del bambino restava senza spiegazione.

Appena saliti sul cavalluccio, l'animale di legno serviva come sistema di riferimento immediato: sono saldo in sella, tengo le redini, il cavallo è sempre sotto di me, e allora non sono io a muovermi. È il cavallo a farlo, oppure è il mondo che lo fa sotto di noi. Solo che il mondo si muove in maniera strana: non è come quando si va in macchina o in bicicletta, quando tutto il paesaggio cambia ma si limita a scorrere e a sparire all'indietro (tanto è vero che se ci voltiamo facciamo ancora in tempo a vedere le cose che si allontanano). Sulla giostra il mondo scorre da una parte all'altra, però resta sempre alla stessa distanza, e poi continua a tornare davanti agli occhi. Ecco il negozio di gelati che passa, scompare, e dopo un po' ritorna. Ecco il semaforo che fa la stessa cosa: arriva da destra, attraversa tutto il panorama, e anche lui sparisce a sinistra; ma anche lui tornerà, poi. Magari con le luci di colore diverso, ma ritornerà. Ecco la mamma, che ogni volta che arriva mi sorride e mi saluta con la mano.

Solo che proprio la mamma talvolta rende tutto più difficile, perché non sempre si muove alla stessa maniera del semaforo o del negozio. Certe volte arriva quando non te l'aspetti, per non parlare delle volte che – aiuto! – dovrebbe comparire e invece non compare. Si scopre solo dopo un po' che in realtà era uscita dal panorama rotolante solo perché si era allontanata un attimo con la zia, ma un fatto rimane indubitabile: dall'alto di una giostra, i semafori e le gelaterie sono molto più affidabili e sicuri delle mamme.

Quando infine la giostra si ferma e si scende dal cavalluccio, il mondo torna normale: soprattutto, ritorna l'usuale sensazione che per far cambiare il paesaggio occorra muoversi e camminare, e che non basti più il solo "guardare"[1]. E questo è probabilmente un vantaggio: anche il ragazzino più viziato passa certo più tempo con i piedi ancorati al terreno piuttosto che sulla piattaforma d'una giostra, e di conseguenza non ha troppe difficoltà a considerare "eccezionale" la visione del mondo che si ha in groppa al cavalluccio di legno, rispetto a quella usuale; mentre sarebbe invece decisamente diversa la situazione per un povero fanciullo costretto a restare vita natural durante a bordo della giostra. Per questo ipotetico forzato del carosello la "normalità" sarebbe inevitabilmente data dal paesaggio eternamente rotolante da sinistra a destra, fino al punto che – probabilmente – il suo cervello forse non "registrerebbe" più il moto continuo del panorama, alla stessa maniera con cui le nostre orecchie dopo si rifiutano di differenziare un sibilo continuo e monotono, che si rivela infatti con assordante sorpresa solo nel momento in cui cessa di sibilare.

A conferma di ciò, possiamo ben considerare il fatto che, in realtà, sulla giostra ci siamo fin dalla nascita. Il nostro cavalluccio di legno è particolarmente grande e accogliente, e ci intriga così tanto che destiniamo ben poco della nostra attenzione al panorama che ruota attorno a noi; eppure basta alzare gli occhi al cielo in una notte serena per una decina minuti per convincersi che il panorama sta effettivamente rotolando da est verso ovest. E quasi tutte le parole che abbiamo ereditato dai nostri antenati descrivono la situazione proprio come la descriverebbe il bambino sulla giostra: è il panorama a muoversi, non il cavalluccio: Sole e Luna "sorgono" e "tramontano", costellazioni "ascendono" o si celano dietro l'orizzonte; e sono stati immaginati carri di fuoco guidati da Dei per trasportare il Sole da una parte all'altra del cielo, riportandolo ad oriente durante la notte in un misterioso percorso sotterraneo; e si sono pensate immani sfere di cristallo perfettamente trasparenti che ruotano nel cielo senza il minimo cigolio, sospinte dalle ali e dai canti di interi eserciti di angeli.

Del resto, per gli occhi d'un bambino o di una bambinesca civiltà, è inevitabile concludere che a muoversi sia la volta celeste: se ci concentriamo con attenzione sulla nuca del nostro cavalluccio di legno della giostra, dieci minuti passano senza che l'ombra d'un movimento venga registrato. Se ci concentriamo ad osservare la montagna all'orizzonte, traguardandola attraverso i rami di un albero, non la vedremo muoversi di un solo millimetro. Mentre si vede benissimo che sono proprio le stelle del cielo a rotolare da destra a sinistra, tutte insieme. Anzi, quasi tutte. Ce n'è qualcuna che va per conto suo (un po' come le mamme quando si allontanano con le zie), ma sono poche, soltanto cinque. Chissà se vale la pena di considerarle.

[1] È forse una sensazione diversa da persona a persona, ma chi scrive trova davvero difficile provare a ricostruire quelle sensazioni infantili, a meno che non siano legate a qualche piccolo trauma di consapevolezza indotta. Più che il caso della giostra e relativo moto angolare, per chi scrive è stata a suo tempo memorabile e sconvolgente un'esperienza che riguardava il semplice asse zeta. Quand'ero molto piccolo, capitava ogni settimana che si dovesse andare a salutare un parente alla stazione ferroviaria, e per accompagnarlo al giusto binario prendevamo il regolamentare sottopassaggio. Ebbene, il fatto che venissero discesi e poi risaliti lo stesso numero di gradini non era affatto dato per scontato dalla mia giovane testolina: a me pareva molto più "naturale" considerare che lo zio partisse "da un diverso livello" della stazione (naturalmente, un "livello" completo di terra, cielo, case e tutto quanto, non certo un semplice "piano per binari" tipo quello di due linee di metropolitana che si incrociano). Quando, dopo un po' di volte, mi accorsi finalmente che invece restavamo alla fin fine sempre sulla stessa "superficie" (solo con qualche binario in mezzo a dividerci), rimasi molto, molto deluso.

L'attività di mera classificazione è universalmente riconosciuta come fondamentale per la conoscenza, ma certo anche come incredibilmente noiosa. Non sembra molto affascinante l'idea di dover classificare diligentemente migliaia di elementi, siano essi minerali, insetti o particelle subatomiche: nondimeno, senza una corretta classificazione (e relativa nomenclatura) è assai difficile anche solo cominciare a parlare di "conoscenza scientifica". Nel caso di pochi elementi, quantomeno, il lavoro sembra tale da poter essere sbrigato in quattro e quattr'otto: i pianeti del sistema solare sono decisamente pochi, e i problemi di definizione virtualmente assenti. Quindi, nessun cruccio apparente. La prima, etimologica definizione di pianeta significa proprio "stella vagabonda", e rimarca infatti l'abitudine di alcuni astri di rifiutarsi di ruotare in sincrono con gli tutti gli altri. È verosimile che quasi tutte le più antiche civiltà, abituate ad avere un rapporto con il cielo stellato più intenso e diretto di quello che ha oggi l'occidentale medio, abbiano gratificato di nomi propri quegli oggetti che noi chiamiamo Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, proprio a causa di questa loro inspiegabile indipendenza dal tappeto delle stelle fisse. C'è qualcos'altro di significativo da dire, nel nostro primo tentativo di definizione? Certo no; "stella vagabonda" già basta, a meno che…

A meno che non si decida di essere un po' più rigorosi sul concetto di "movimento rispetto alle stelle fisse". I tempi non sono ancora maturi (stiamo pur sempre parlando dell'Alba dell'Uomo) per concionare sul fatto che le stelle fisse non sono poi così fisse: devono passare dei secoli prima che venga scoperto il moto proprio della Stella di Barnard, ma il punto è che esistono comunque un sacco di oggetti che saettano da una parte all'altra del cielo disinteressandosi bellamente della rigidità del firmamento[2]. La Luna, tanto per cominciare: è palesemente più grande di quei cinque puntini ribelli, ma con loro condivide l'abitudine di muoversi di moto proprio; e poi, diamine, il Sole!

Occorre davvero un discreto salto intellettuale per parificare il Sole ad un pianeta. La presenza della nostra stella nel cielo diurno impedisce la vista degli altri astri, salvo qualche piccola eccezione, e arrivare comunque alla conclusione che le stelle "persistano" nella loro esistenza anche quando la luce del Sole le offusca è una conquista intellettuale non da poco. Solo dopo una tale conquista sarà possibile "immaginare" il Sole mentre attraversa il tappeto delle stelle fisse, e si potrà figurarselo campeggiare in mezzo a qualche costellazione dello zodiaco, proprio come fanno – ogni notte - gli altri cinque pianeti. È forse il primo vero sintomo della nascita d'una cosmogonia: l'universo non "cambia" al variare della notte e del giorno, ed è lecito visualizzare il Sole mentre attraversa lo Scorpione o il Capricorno; ed è anche plausibile immaginare che, anche in

[2] Parola che non discende tanto da presunte abitudini autografe del Creatore, quanto dal concetto di "fisso, fermo, stabile", coniugato proprio in relazione alle stelle fisse. Viene da "firmare" che significa "rendere fermo, stabile" (e che svela così impreviste parentele con gli autografi sopraccitati, specie se apposti in fondo ad un contratto), e nel linguaggio biblico ha infatti il senso di "sostegno". Nel linguaggio classico, invece, rappresenta proprio l' "ottavo cielo", quello delle stelle fisse che giace oltre quelli dei pianeti. Perché mai la "gioia suprema" sia per la nostra lingua invece limitata al "settimo cielo" (quello di Saturno) è ancora argomento di (nostra) ricerca.

un luminosissimo pomeriggio di Luglio, il Toro stia comunque trionfalmente sorgendo ad Est[3], proprio in questo preciso momento, sotto il solleone.

Per la nostra ricerca di definizione, questa caratteristica del "moto proprio indipendente da quello delle stelle fisse" appare subito più importante di caratteristiche clamorosamente evidenti quali le dimensioni o la luminosità; questo pone subito in evidenza che il concetto di "pianeta" è subito diventata un'idea abbastanza elaborata. Con l'aggiunta dei due corpi celesti più brillanti, il numero dei pianeti arriva alla magica cifra di sette, e sarà difficile smuoverlo da un valore tanto evocativo. L'idea che comincia a prendere piede per giustificarne il moto è che ogni pianeta abbia un "cielo" tutto suo nel quale ruotare. Poichè li si vede ruotare in maniera ordinata e lineare, ci si immagina che, così come le stelle fisse sono incastonate in una grande volta che ruota all'estremità del cielo, anche ogni singolo pianeta abbia una sua propria sfera ruotante – il suo "cielo", appunto – e che in esso sia incastonato come una singola pietra preziosa. Naturalmente, ogni cielo dev'essere trasparente, fatto di cristallo, altrimenti le stelle fisse e i pianeti esterni non si riuscirebbero a vedere. In conclusione, abbiamo sette "sfere cristalline", ognuna delle quali trasporta un pianeta; il pianeta che compie il più rapido moto di rivoluzione attorno alla Terra sarà quello che occupa la sfera più piccola e più vicina, mentre il secondo occuperà la successiva, e così via fino a Saturno, relegato ad occupare l'ultima sfera prima della volta delle stelle fisse. L'ordine è quindi facilmente deducibile: Luna, Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove, Saturno.

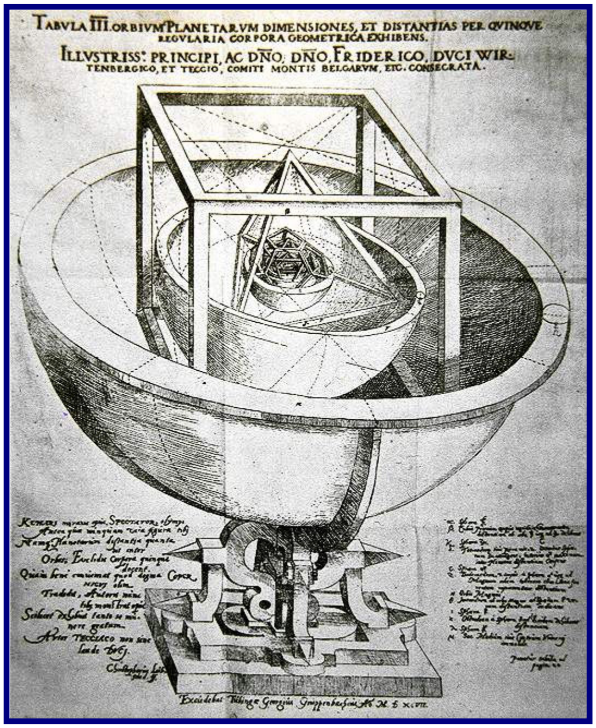
Sette pianeti dotati di moto caratteristico. E ordinato, anche: i cieli ospitano, a ben vedere, anche altri moti diversi da quello algidamente rituale delle stelle fisse: meteore, bolidi, comete ogni tanto turbano la quiete del cosmo, ma sono eventi straordinari, e come tali eccezionali, non ripetibili. Anche per questa ragione venivano considerati come segni di malaugurio, perché turbavano l'ordine immutabile dei cieli[4]. Se gli antichi si fossero accorti della periodicità della Cometa di Halley, probabilmente avrebbero cessato di considerarla un segno di sventura, e sarebbero subito passati rapidamente a costruirle un'ospitale sfera cristallina più grande di quella di Saturno. Non ogni cosa è chiara, nell'universo dei sette cieli, ma quel che non torna – come ad esempio alcuni eccentrici epicicli necessari per spiegare il moto di qualche pianeta esterno – sembra rientrare nella categoria dei dettagli. Ma poi arriva una squadra di guastafeste armati di ellissi e cannocchiali.

La rivoluzione copernicana ci mette il suo buon tempo ad affermarsi, ma quando alla fine ci riesce lascia sul campo quasi moribonda la nostra definizione di pianeta. Le sfere di cristallo sono cadute con grande fracasso, abbattute dalle leggi di Keplero e dalla gravitazione di Newton. I due pianeti più appariscenti hanno subito una promozione e un declassamento: il Sole è stato elevato a rango di stella fissa, e la Luna declassata a misero satellite. In compenso, la categoria "pianeti" accoglie un illustrissimo nuovo elemento: nientemeno che il nostro cavalluccio di giostra preferito, la nostra amata madre Terra. Galileo l'ha costretta a "muoversi", Keplero le ha disegnato una comoda ellisse, e Copernico le ha insegnato i vantaggi considerevoli nel non essere sempre al centro dell'attenzione. Così, sia il numero che l'ordine dei pianeti è sconvolto: Mercurio, Venere,

[3] Entrambe le considerazioni sono non banali, ed entrambe fondamentali per l'astrologia. Il sole impiega circa un mese per "attraversare" – in maniera del tutto discreta e invisibile, fatti salvi i brevi momenti dell'aurora e dell'occaso – una costellazione zodiacale, ed è proprio questo transito ciò che viene identificato come "segno zodiacale" da parte degli oroscopi. La costellazione che sorge è invece ovviamente l'ascendente, e nell'economia astrologica è di importanza decisiva, perché "nasce" proprio nello stesso momento in cui "nasce" anche la persona alla quale si sta rifilando il quadro astrologico. Anche se tende a semplificare (in fondo, il Sole trascorre in Ofiuco ben più tempo di quanto ne passi nello Scorpione), non è che l'astrologia sia falsa in quanto banale, anzi: qualche fondamento della conoscenza siderale lo annovera e presuppone. Poi, però, si ferma; rifiuta anche la pura rivoluzione copernicana, e, a ben vedere, non sembra che riconosca compiutamente neanche tutta la cosmogonia tolemaica.

[4] A proposito, sono proprio i pianeti tolemaici a rendere possibile la coniugazione al plurale d'una parola naturalmente singolare come "cielo".

Terra, Marte, Giove e Saturno, adesso. Ma è nata anche la nuova e misteriosa classe dei "satelliti", perché la Luna non è più sola: Giove e Saturno hanno mostrato attraverso i primi rudimentali telescopi delle piccole lune che ruotano loro intorno, proprio alla stessa maniera in cui i pianeti ruotano attorno al Sole. Ed è proprio su questa base di "moto relativo" che prende piede la nuova definizione di pianeta; non più "stella vagabonda", ma "corpo celeste privo di luce propria che ruota attorno ad una stella". E c'è anche una conquista poetica, in questa rivoluzione, perché lascia intravedere che stelle e pianeti siano davvero fatti della stessa materia. Prima la Terra era "cosa diversa" dalla sostanza celeste, adesso la visione è quella di un frammento di materia stellare ormai intiepidita che orbita attorno alla sua stella madre. Più vicini e più simili alle "stelle fisse" di quanto lo fossero mai stati, i pianeti se ne distinguono ormai perché proprio delle stelle sembrano essere corte e corona.



Ma le sfere di cristallo, cadendo, hanno allargato immensamente i confini dell'universo. Dalla prima posizione di Mercurio è facile adesso giungere fino alla sesta di Saturno, ma poi perché fermarsi? La più romantica delle ragioni che blocca a sei il numero dei possibili pianeti arriva da Keplero: proprio colui che non ha esitato a demolire le sfere cristalline centrate sulla Terra, ha subito cercato di rimpiazzarle con un sistema complesso di sfere e solidi platonici centrati attorno al Sole. Il suo "Mysterium Cosmographicum" del 1596 regolamenta le distanze tra le orbite planetarie inserendo un solido platonico a separarne ogni coppia: il Cubo definisce la distanza tra Saturno e Giove, il Tetraedro quella tra Giove e Marte, e così via. E visto che i solidi platonici sono soltanto cinque, è palese che non possano esserci in totale più di sei pianeti. Le distanze interorbitali determinate dal Mysterium erano però troppo poco precise per essere credibili, e lo stesso Keplero si rassegnò serenamente all'idea che il suo modello potesse essere sbagliato[5]: ma non per questo la comunità scientifica comincia a sentire il bisogno di altri oggetti celesti.

Quando Herschel scopre Urano, nel 1781, è più che altro stupito dal fatto che quella piccola stella sembra muoversi di moto proprio: non era certo a caccia d'un settimo "vagabondo" nel senso greco del termine. Ciò nondimeno, l'arrivo del pianeta numero sette rompe un confine verso l'infinito: la sua scoperta rende alfine possibile immaginare l'esistenza di altri pianeti ancora, ben oltre la fantasia degli antichi. E così, proprio mentre tutti gli entusiasti di Urano scrutano i cieli alla ricerca del pianeta numero otto, un astronomo italiano inquadra nel campo del suo telescopio il pianeta numero quattro e mezzo. Non era certo troppo grande: del resto, per poter essere rimasto invisibile agli occhi umani pur essendo più vicino di Giove non poteva certo essere un gigante dei cieli. Ma era indubbiamente un pianeta: correva l'anno 1801, e l'astronomo siciliano lo chiamò Cerere Ferdinandea, in onore del Re delle Due Sicilie, ma siccome Ferdinando I non

[5] Del resto, lo stesso Johannes non nega di essere interessato ad avere un modello tridimensionale in argento del suo complesso marchingegno cosmografico, da destinare ad uso mobile bar. Se non serve alla scienza, che almeno possa servire da estetico elemento di intrattenimento e ristoro…

godeva troppi favori tra gli scienziati europei, sopravvisse il solo nome Cerere. Piazzi, lo scopritore, non riuscì ad osservarlo abbastanza a lungo per determinarne con precisione l'orbita – compì ventiquattro osservazioni, ma non erano sufficienti, con i metodi dell'epoca - al punto che il pianeta venne poi "perduto" quando venne oscurato da una congiunzione col sole. Per fortuna di Piazzi, un tedesco ventiquattrenne riuscì, con i dati di sole tre osservazioni e molta abilità, a calcolare dove doveva essere finito il pianeta perduto. Cerere fu ritrovato, e il nome del giovane matematico tedesco (tale Gauss) cominciò a diventare celebre.

Improvvisamente, però, il fatto che Cerere orbitasse ordinatamente attorno al Sole non sembrava più un elemento sufficiente a fargli meritare il titolo di "pianeta". Era indubbiamente piccolo, come corpo celeste: e, soprattutto, nei suoi dintorni incominciarono a scoprirsi molti altri piccoli astri con caratteristiche simili: piccoli, numerosi, e con orbite simili[6]. Cerere fu classificato come pianeta nelle tavole per quasi mezzo secolo, finché alla fine fu definitivamente declassato. Una parola inventata per lui dal grande Herschel, "asteroide", ne sancì la fine delle aspirazioni planetarie (ma gli procurò quantomeno un sacco di confratelli).

Declassata la posizione tra Marte e Giove a zona popolata da migliaia di zanzare astronomiche, i telescopi si volsero di nuovo oltre Urano; furono però le linee d'inchiostro d'un paio di penne matematiche a segnare il punto vincente, e non le lenti vetrose dei cannocchiali. Urano era in fondo ancora sotto stretto controllo: non si può rimanere nascosto per tutta la storia dell'astronomia e poi sperare di non essere sottoposto ad asfissianti osservazioni, specialmente se ci si comporta in maniera così poco educata. L'orbita del nuovo pianeta non era infatti perfettamente allineata ai calcoli della meccanica celeste, e questo mise in allarme più di un matematico: uno di questi fu John Couch Adams, che fece quattro conti e arrivò alla conclusione che poteva esserci un ottavo pianeta a disturbare il moto di Urano. Ma la sua voce non era sufficientemente potente, in quei tempi, e non fu ascoltata: o forse lo fu fin troppo. Non c'è davvero spazio per poter raccontare i misteriosi fatti che condussero alla scoperta dell'ottavo pianeta, fatto sta che Le Verrier, astronomo e matematico francese, arrivò alle medesime conclusioni di Adams, convinse l'astronomo J.G. Gall a puntare il telescopio in un punto ben preciso della costellazione dell'Acquario, e nella notte dell'equinozio d'autunno del 1846 l'azzurro Nettuno si presentò per la prima volta agli occhi dell'umanità. L'esperienza di Cerere aveva scottato gli astronomi e reso quanto mai complessa la definizione di "pianeta", ma Nettuno superò l'esame a pieni voti, e ottenne l'ambito titolo di pianeta numero otto.

Il bello degli spazi infiniti è che le cacce possono continuare proprio all'infinito, e la preda da rincorrere era ora diventata il pianeta numero nove. Tanto per consolidare la sua fama di esperto cacciatore di pianeti, è lo stesso Le Verrier a scrivere il capitolo successivo: tredici anni dopo la scoperta di Nettuno, nel 1859, Le Verrier annuncia di aver scoperto il pianeta numero… zero. Il metodo usato è il medesimo di quello del 1846: dalle perturbazioni di un pianeta si deduce e si calcola la posizione di un pianeta ancora inosservato. Il pianeta perturbato questa volta è Mercurio, e il pianeta misterioso che ne causa le perturbazioni deve avere un'orbita ancora più interna di quella del primo pianeta. Ad un simile temerario non può attribuirsi altro nome se non quello di Vulcano.

Però questa volta i telescopi rimangono ad oculare asciutto. Nessun segno del pianeta intimo, per quanto le perturbazioni di Mercurio siano effettivamente significative. Vulcano rimane un nome senza sostanza[7], e per spiegare la precessione del perielio di

[6] E dei bellissimi nomi mitologici vennero forse sprecati: Pallade, cioè Minerva, venne trovata nel 1802, con orbita praticamente coincidente a quella di Cerere. Poi arrivò Giunone, anche lei destinata al rapido declassamento. Così, nei nostri cieli del ventunesimo secolo, tra i pianeti ufficiali abbondano i nomi maschili dell'Olimpo, ma tra i femminili solo la Dea dell'Amore continua a regnare sovrana (mamma Gea a parte, s'intende…).

[7] Con buona pace del Signor Spock.

Mercurio occorrerà aspettare la Relatività Generale del 1915. I pianeti rimangono otto, ma nel frattempo gli astronomi acquisiscono una visione sempre più dettagliata e completa del Sistema Solare: una pletora di satelliti popola i cieli, mentre gli asteroidi crescono in modo tale che da tempo hanno dovuto rinunciare ad avere un nome proprio; delle comete si tiene il conto con fatica, e si comincia fortemente a sospettare che il Sistema Solare sia un "sistema" decisamente più complicato di quello che pure riusciva a stupire Galileo. Esistono pianeti giganteschi in grado di galleggiare sull'acqua – se mai fosse messo a disposizione un oceano della misura giusta - e pianeti piccoli e densi. Possono davvero rientrare nella medesima categoria, oggetti così diversi? Alcuni satelliti dei "giganti gassosi" sono più grandi di Mercurio, e diventa sempre più complesso stabilire dei criteri "semplici" per la definizione di pianeta, visto che anche il criterio dimensionale (che aveva giocato a sfavore di Cerere) ha il suo peso. Quando il nono pianeta viene infine trovato, la situazione è ormai matura per scatenare un dibattito sulla terminologia e sulle definizioni.

L'iter è quello del solito copione: i transiti sia di Urano che di Nettuno sembrano essere perturbati, almeno a giudicare dai dati che si hanno a disposizione sui due pianeti. È soprattutto Percival Lowell a sostenere che tali perturbazioni non possono non essere causate da un pianeta ancora ignoto, e porta avanti la sua battaglia fin dagli inizi del '900. Occorrerà attendere però fino al 1930 per avere la conferma della scoperta, quando Tombaugh inquadra finalmente il piccolo pianeta non distante dal punto calcolato teoricamente sulla base delle perturbazioni degli altri pianeti. Il nome attribuitogli ne ricorda la lontananza (Plutone è il dio degli inferi), ma indubbiamente celebra anche Percival Lowell e le sue iniziali.

Sembra solo un altro caso di "buona scienza", ma la situazione risulta presto essere assai più complessa. Innanzitutto, Plutone è così strepitosamente piccolo da non poter certo essere responsabile delle perturbazioni indotte sui moti di Urano e Nettuno. Una sessantina d' anni dopo la scoperta, nel 1989, Voyager II spiegherà l'arcano: le masse reali di Urano e Nettuno sono un po' diverse da quelle che si ritenevano essere all'inizio del secolo, e insomma le perturbazioni non sono tali, e quindi non c'è bisogno di alcun pianeta che le giustifichi. Sul miracoloso fatto che puntando i telescopi proprio dove si riteneva esserci un pianeta perturbante si sia davvero trovato un pianetino (anche se non perturbante), Voyager II non è in grado di esprimersi, e noi non possiamo che rimanere a bocca aperta per la meraviglia. Siamo comunque contenti di allargare la famiglia del Sistema Solare a questo strano oggetto: è più piccolo anche di Mercurio, ha un'orbita talmente eccentrica da intersecare quella di Nettuno[8], e soprattutto (scandalo degli scandali, per la deontologia di un pianeta ben educato) la sua orbita non giace affatto sul piano dell'eclittica. A dire il vero, il caro Plutone sembra davvero l'invenzione di un professore di astronomia: è una collezione di caratteristiche insolite che sembrano messe insieme proprio al fine di stimolare gli studenti, per vedere se riescono o meno a trovare le "stranezze" coagulate nell'astro lontano. Ha tolto anche uno dei rari primati che la Terra aveva in qualità di pianeta: pur non essendo la Luna il satellite più grande (record che spetta a Ganimede, ovvero Giove III) l'accoppiata Terra-Luna rimaneva il "sistema doppio" più caratteristico dell'intero Sistema Solare. Il rapporto dimensionale tra pianeta e satellite è assai rilevante, e, vista dall'esterno, la coppia Terra-Luna deve avere un fascino del tutto particolare. Al punto che persino il baricentro del sistema, che di solito si considera praticamente coincidente con il baricentro del pianeta perché molto più massivo del satellite, è in questo caso assai spostato, pur rimanendo nascosto al di sotto della superficie terrestre. Questo criterio del "baricentro sopra o sotto la superficie" è in realtà significativo perché viene usato come criterio per la definizione di "duplicità": se la Luna fosse stata massiva al punto da "estrarre" il baricentro del sistema da sotto la superficie

[8] Il che lo rende, per qualche tempo, non più "ultimo" – e nemmeno "nono" – pianeta del Sistema Solare. Ma rende anche assai complicato costruire un modello a sfere cristalline o come il "Mysterium" di Keplero…

della Terra, allora più che di sistema "pianeta-satellite" si sarebbe dovuto parlare di "pianeta doppio".

Ebbene, Plutone è così lontano che ha tenuto a lungo nascosto Caronte, il suo satellite. Le prime osservazioni del pianeta non risolvevano il primario dalla sua luna, ma quando alla fine ce l'hanno fatta, gli astronomi hanno subito capito di trovarsi di fronte ad un sistema doppio vero e proprio. Il nono pianeta è già quasi il decimo, senza bisogno di altri oggetti orbitanti intorno al Sole. Questa caratteristica risposta positiva al "test del baricentro" rivela degli aspetti imprevisti: boccia crudelmente il sistema Terra-Luna (che del resto hanno un rapporto di masse (81:1), promuove il sistema Plutone-Caronte (rapporto masse 13:1), ma riabilita in maniera del tutto inaspettata un'altra "strana coppia": quella formata da Giove e dal Sole. Nonostante l'abominevole rapporto di massa (dell'ordine di 1000:1), la lunga "leva" di Giove fa sì che il baricentro del sistema stella-pianeta cada al di fuori del Sole. È forse esagerato parlare del sistema Sole-Giove come di "stella doppia", però che Giove sia un po' ibrido, qualcosa a mezza via tra l'oggetto planetario e quello stellare è storia che è rimbalzata spesso negli ambienti astronomici[9]. Così, mentre si fanno i salti mortali per arrivare a contare fino al pianeta numero dieci, si rischia di perdere lungo la via non solo il contestatissimo pianeta numero nove, ma addirittura l'insospettabile gioiello piazzato all'ordinale numero cinque, per possibile promozione a rango superiore.

Del resto, di candidati a pianeta numero dieci ne abbiamo ormai di ottimi, al punto che il problema è ormai davvero più di definizione che di mancanza di oggetti celesti. La IAU (International Astronomical Union) è ormai da tempo attesa con una definizione di pianeta tale da poter fugare tutti i dubbi, ma l'impresa è davvero complessa. Lo status di Plutone resta sub-iudice, visto che gli astronomi continuano spietatamente a parlare di oggetti "trans-nettuniani" e non "trans-plutoniani": e questi peraltro vengono scoperti con un buon ritmo. Nomi come 50000 Quaoar e 90377 Sedna arrivano e si candidano come il Pianeta X[10], ma più che rafforzare la loro candidatura, finiscono in realtà con indebolire quella del povero Plutone. Sembra sempre più probabile che Cerere stia a Plutone come la Fascia degli Asteroidi sta alla Cintura di Kuiper: e adesso che è arrivato 2003 UB_{313}, le chances plutoniane sono forse ridotte al lumicino. Ancora senza nome ufficiale, ma con un affettuoso "Xena[11]" già ragionevolmente famoso, l'ultimo arrivato è spudoratamente più grande di Plutone, con un diametro di almeno 2400 chilometri. Ha una luna, ed è già molto più "pianeta" di quanto lo sia Plutone. Le speranze di quest'ultimo sono forse legate proprio al fatto che se 2003 UB_{313}-Xena rimarrà abbastanza a lungo famosa come "il decimo pianeta", non si potrà poi fare a meno di mantenere in vita anche il nono.

Se le definizioni, studiate appositamente per essere chiare e inequivocabili, vanno ugualmente incontro a una tale ridda di problemi, figuriamoci quale sia il misero destino dei comuni nomi propri. Non tutti hanno la fortuna di unire capacità eccezionali a nomi memorabili, in maniera tale che una chiara fama possa aderire senza difficoltà ad una etichetta di pari pregio. Un nome altisonante può essere una scorciatoia verso la celebrità (talvolta parzialmente immeritata: Don Scipione Del Grotto non fu poi scacchista così indimenticabile, ma provate a scordare un nome del genere, dopo averlo incrociato anche

[9] E naturalmente anche in quelli fantascientifici. Arthur C. Clarke non ha esitato a "riaccendere" Giove, per consentire alle sue lune di sviluppare la vita, ad esempio.

[10] Gli stessi astronomi trovano assai divertente che la X, inizialmente posta accanto alla parola "pianeta" per indicarne lo stato di "ancora sconosciuto", sia anche maliziosamente interpretabile come "decimo" scritto in caratteri romani. (E che questa sia invece proprio la nota a piè di pagina numero 10 è un autentico caso, lo giuriamo).

[11] La "naming convention" degli oggetti celesti è estremamente rigorosa e complessa, e prevede regole rigide per ogni tipologia di ente astronomico, dalle meteore alle supernove. Un oggetto classificato come possibile pianeta deve, ad esempio, essere denominato con il nome di una "divinità creatrice" di qualche cultura umana (sia Quaoar che Sedna rispettano questa convenzione), e Xena è decisamente fuori norma, da questo punto di vista, visto che il nome discende da quello dell'eroina d'un telefilm.

solo un paio di volte), mentre, per contrappasso, dei nomi troppo comuni o troppo poco eclatanti talvolta possono limitare ingiustamente dei meriti sacrosanti. Può dipendere dalla nostra pigrizia mentale, che cerca spesso delle scorciatoie mnemoniche, ma alcuni casi sono chiaramente patologici; più o meno quanto lo è Plutone per la planetologia.

Vi ricordate esattamente la grafia del cognome del matematico che ha dimostrato poco tempo fa l'ultimo teorema di Fermat, o sapete per certo solo che ci devono essere una "W", una "L" e forse una "E"? Chi vi viene in mente se sentite parlare di un tedesco celebre per i suoi studi di relatività e teoria dei quanti, professore prima all'ETH di Zurigo e poi all'Università di Princeton, morto nel 1955? Come si chiama quel celebre matematico fratello d'una ancor più celebre filosofa?

Forse nessuno di questi quesiti vi imbarazza: il nome di Andrew Wiles potrebbe salire immediatamente ai vostri ricordi senza alcuna interferenza mnemonica per quel che riguarda il teorema di Fermat, mentre la celebre coppia di fratelli matematico-filosofa potrebbe essere perfettamente classificata senza un attimo di esitazione nei nomi di André e Simone Weil. E forse siete anche abbastanza smaliziati da sapere o immaginare che Einstein non fu certo l'unico professore tedesco di Princeton a morire nel 1955. Per noi, che non temiamo di riconoscerci poveri di spirito, queste ed altre suonano come trappole ineludibili nel tentativo di rammentare i passi salienti della vita di Hermann Klaus Hugo Weyl (Peter per gli amici).

In realtà, l'incredibile somiglianza tra i cognomi Weyl e Weil viene talvolta usata proprio come metro di paragone per saggiare la conoscenza degli studenti che si avventurano nello studio della storia della matematica. Entrambi i matematici sono stelle di prima grandezza della matematica del Novecento, e saper distinguere bene le opere di uno e dell'altro è segnale palese di buona preparazione. Ma solo Hermann (anzi, Peter) Weyl è nato il 9 Novembre 1855, e quindi quest'articolo novembrino è dedicato solamente a lui. Nacque a Elmshorn, non distante da Amburgo, figlio di un direttore di banca; della sua tranquilla infanzia e giovinezza non c'è troppo da dire, se non che, una volta giunto nella solita Göttingen per gli studi universitari, venne qui totalmente affascinato dagli insegnamenti di Hilbert. È proprio con il grande David che Weyl si laurea nel 1908, con una tesi sui teoremi dell'Integrale di Fourier; ma è poco dopo la laurea che comincia a farsi conoscere come matematico di eccezionali capacità, grazie al suo corso sulle Superfici di Riemann del 1911. Da quel corso ricaverà nel 1913 il testo "*Die Idee der Riemannschen Fläche*", giudicato il più autorevole e influente sull'argomento: ne è prova evidente il fatto che è stato ristampato – e non per fini celebrativi – nel 1997.

La carriera di Hermann Weyl è strettamente intrecciata con quella di alcuni tra i maggiori fisici del Novecento. Forse perché, come succede spesso ai grandi matematici, il loro interesse si sposta dalla matematica alla fisica, per giungere poi fino alla filosofia. Dopo l'influenza di Hilbert, Weyl subì fortemente anche quella di Husserl, filosofo in Göttingen; e finì con lo sposare Helene, filosofa anch'essa e discepola dello stesso Husserl.

Nel 1913 Weyl cominciò ad insegnare nella celebre Eidgenössische Technische Hochschule di Zurigo, proprio nel periodo in cui Albert Einstein vi stava completando la Teoria Generale della Relatività. La capacità di Hermann di entusiasmarsi per le complesse teorie matematiche lo porta a proporre, nel 1917, un approccio rivoluzionario alla Relatività tramite la geometria differenziale. È un approccio innovativo e difficile, che non viene accettato – o forse non è pienamente compreso – da Einstein e dagli altri grandi relativisti dell'epoca, ma che darà origine, più avanti, alle teorie dei campi di gauge.

Dal punto di vista umano, l'aspetto più curioso che coinvolge Hermann Weyl risale proprio agli Anni Venti e all'ambiente zurighese. La difficoltà principale per un lettore degli Anni Duemila consiste probabilmente nel considerare il luogo e il tempo in esame come polveroso e bigotto: tendiamo forse a figurarci la Svizzera del 1921 come intrisa di una morale vittoriana coniugata tramite il rigore calvinista. Ma la realtà è diversa, almeno per quanto riguarda il circolo accademico che comprende Peter Weyl: i rapporti affettivi e le relazioni extraconiugali erano vissuti senza traumi, in una maniera che un po' ricorda addirittura quella degli hippies degli anni '70. Nel 1921 arriva a Zurigo Erwin Schrödinger accompagnato dalla bella moglie Anny: nel circolo che si forma attorno ai professori dell'ETH, la leader della "sezione delle mogli" è senza dubbio proprio Helene (detta Hella) Weyl, forte della sua estrosa personalità di filosofa e letterata ebrea. Anny Schrödinger è del tutto diversa da Hella Weyl, e forse proprio per questo risulta travolgentemente affascinante per Hermann: tra il matematico e la moglie del fisico si instaura subito un rapporto di passione intensissima destinato a durare anni. E del resto, le altre metà delle coppie non erano né ignare né disperate per quanto accadeva: a quel tempo Helene Weyl era follemente innamorata di Paul Scherrer[12], mentre le innumerevoli e intense passioni di Erwin Schrödinger erano tante e tali da diventare materia per aneddoti e romanzi.

Nel 1930 Weyl ereditò la cattedra che fu del grande Hilbert, ma la tenne solo fino al 1933. Pur non essendo ebreo, trovava decisamente riprovevole l'idea di vivere in una nazione che perseguitava i giudei – e bisogna tenere bene in conto anche che sua moglie Helene ebrea lo era. Al pari di Einstein, anche Weyl lasciò l'Europa e si stabilì nel tranquillo campus americano di Princeton. I suoi anni di maggior produttività restarono (a confermare l'ennesimo parallelismo con il padre della Relatività) quelli di Zurigo, ma a Princeton Weyl completa opere di grande importanza e interesse. Nel 1952 dà alle stampe "Simmetria", un libro che coniuga splendidamente l'interesse per la simmetria matematica e quella puramente estetica, passando per quesiti squisitamente filosofici *("a che punto dello sviluppo dell'embrione si determina il piano di simmetria dell'organismo?")* e fisici. La simmetria vi è raccontata come anima sottile della fisica, e come struttura portante della matematica. Per lasciarla definire dalle stesse parole di Weyl: "*La simmetria, a voler definire il suo significato più ampio o più specifico, è un'idea con la quale l'uomo ha tentato, attraverso tutte le epoche, di comprendere e creare ordine, bellezza e perfezione*".

Col passare degli anni, i suoi interessi si concentrarono sempre più sui fondamenti della matematica, come sempre accade ai grandi vecchi di questa scienza. Condivideva con Brouwer lo scetticismo sul "continuum", e temeva che non vi fossero elementi sufficienti ad una fondazione compiuta della sua amata scienza. Era molto interessato – e decisamente critico – nei riguardi della "prova matematica". Come dice nel suo "*Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften"* (edito peraltro già nel 1932):

"Una moderna prova matematica non è troppo diversa da una moderna macchina o marchingegno: i principi semplici e fondamentali sono nascosti e quasi invisibili sotto una massa di dettagli tecnici" – e, in altra parte dello stesso testo: - *"Desideriamo innanzitutto*

[12] Fisico svizzero, dalle capacità organizzative non inferiori a quelle accademiche. Organizzò i primi congressi per fisici dopo la Prima Guerra Mondiale, esaltò la fama dell'ETH di Zurigo e fu capo e amico di Wolfgang Pauli. Vieppiù interessato alla fisica nucleare, si impiegò a favore della costruzione di un ciclotrone proprio nell'ETH, per poi diventare nel 1946 Presidente della Commissione Svizzera di Energia Nucleare; dall'alto di questa carica, è stata la persona che forse ha dato il maggiore contributo alla creazione del CERN di Ginevra.

una visione generale della direzione della strada: vogliamo capire l'idea della prova, il suo contesto più profondo…"

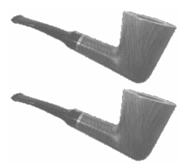
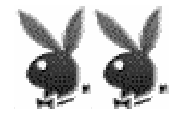
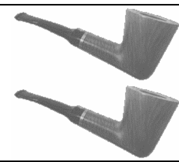
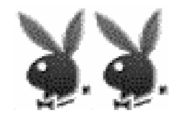
Ancora definizioni, a ben vedere: ancora richieste di certezze evidenti e non troppo misteriosamente capziose. Ma la semplicità e l'assenza di confusione non sembrano essere di questo mondo: a finale dimostrazione della cosa, basti notare che nella nostra ricerca di citazioni famose di Hermann (Peter) Weyl ci siamo come al solito affidati a quella che riteniamo essere la massima autorità in rete per la storia della matematica[13], e siamo rimasti sconvolti nello scoprire che la famosissima frase "*Dio esiste perché la matematica è consistente, e il diavolo esiste perché questa consistenza non può essere provata*", è silenziosamente attribuita sia ad André Weil che a Hermann Weyl. L'attrazione fatale dei nomi troppo simili ha fatto cadere in fallo anche i grandi redattori della St.Andrews University. Per conto nostro, siamo abbastanza certi che la frase suddetta sia in realtà da attribuirsi al francese André (quello senza la ipsilon nel cognome), e per questo chiudiamo la confusione di questo pezzo con quella che è probabilmente la frase più celebre del tedesco Hermann/Peter (quello con la ipsilon nel cognome): è allo stesso tempo una dichiarazione di sconfitta e un inno alla fiducia nella bellezza del mondo:

"*Nel mio lavoro ho sempre cercato di unire verità e bellezza, ma quando dovevo per forza scegliere una delle due, sovente mi trovavo a preferire la seconda*".

E a noi non resta che sperare di non essere troppo spesso costretti a scegliere tra le due cose.

[13] Ovvero il celeberrimo sito dell'Università di St.Andrews, Scotland.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Bruco zerofago			
Il Sentiero da Cui...			

2.1 Bruco zerofago

Sono sicuro che non è un bruco; c'è un biologo in sala? Seriamente, volevo alcune informazioni[14].

Ricordo un disegno da un libro sugli insetti di molto tempo fa raffigurante una strana specie di pulce chiamata, se non ricordo male, "pesciolino d'argento", vera dannazione dei bibliotecari in quanto apprezza particolarmente la carta; siccome non ricordo niente altro, cercavo delle indicazioni ulteriori, tipo il nome scientifico e un disegno o una foto. Posto che ve ne importi qualcosa del motivo di questo mio interesse, Alberto ha una specie di diploma da "Topo di Biblioteca" risalente alle elementari e volevamo fare una cosa un po' diversa per Fred; mai capito perché il topo in biblioteca debba essere simpatico mentre 'sto pesciolino no, ma questi sono dettagli.

Veniamo al problema, sì? Prima la versione che ho trovato, poi la complicazione che mi è venuta in mente.

Su un foglio di carta sono scritti tutti i numeri da **1** a **9999**; un "pesciolino" che si ritrova da quelle parti e che (per consiglio del medico?) segue una dieta piuttosto particolare mangia tutti gli zeri, in modo tale che (ad esempio) **1200** diventa **12** e **6054** diventa due numeri, **6** e **54**. Bene, non dovrebbe essere troppo difficile calcolare la somma dei numeri restanti. Attenzione che ho detto "numeri", non "cifre": quindi, con quanto esemplificato sopra otteniamo **12+6+54=72**.

E fin qui il problema originale; decisamente più interessante però la sua generalizzazione: supponiamo che il medico del nostro "pesciolino" consenta ad un ammorbidimento della dieta, lasciandogli mangiare tutte le cifre da **0** a $x-1$ (notoriamente più ricche di carboidrati); questa volta però sul foglio i numeri sono scritti in base b, da **1** a b^n-1 e quindi, dopo il passaggio dell'affamato insetto, restano i numeri composti dalle cifre x, $x+1,\ldots,b-1$.

Quanto vale adesso la somma?

2.2 Il Sentiero da Cui...

Vi ricordate che Rudy ha una casa in campagna nota come "Il Luogo da Cui"? Quello dove c'è la porta del fienile che disegna strane figure sul tappeto e dove vive l'Apologeta del Pettegolezzo (suo padre).

[14] Meno urgenti del *De Divina Proportione*... Il problema lo avete risolto tutti, ma informazioni correlate nisba.

Per strane ragioni inerenti diritti di passaggio e altri argomenti relativi ad alcuni bovini maleducati, ci ritroviamo a dover selciare un tratto di sentiero, e vorremmo fare un buon lavoro; Alberto, recente reduce da alcuni scontri con il Teorema di Pitagora, ha proposto un disegno piuttosto strano con cubetti di colore diverso che ha sollevato un interessante problema: segue la sua descrizione.

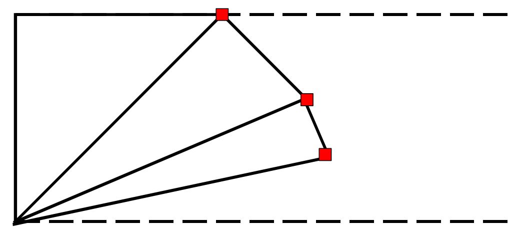


Figura 1 - Il disegno del sentiero

"Prima facciamo un triangolo rettangolo isoscele, poi sull'ipotenusa facciamo un triangolo rettangolo metà con base sull'ipotenusa del primo e avanti così e poi ripetiamo il disegno..."

La chiarezza non appartiene al patrimonio ereditario, si direbbe.

Alla richiesta di fare un disegno, si è esibito nel risultato che vedete in ***Figura 1***, seguito da un "...eccetera...", intendendo con questo che i cubetti rossi (di cui vi abbiamo indicato i primi tre) sono su una curva che potrebbe essere ripetuta a pavimentare l'intero sentiero.

Insomma, abbiamo un triangolo con vertici in $(0,0);(0,1);(1,1)$ e angolo nell'origine pari a $\frac{\pi}{4}$; usando la sua ipotenusa come base, costruiamo un altro triangolo rettangolo avente angolo nell'origine $\frac{\pi}{8}$ e angolo retto in $(1,1)$; il successivo avrà angolo nell'origine $\frac{\pi}{16}$ (e angolo retto in... no, non ve lo dico).

Ora, prima di bocciare il progetto in quanto di lunghezza infinita, sarebbe interessante rispondere ad alcune domande:

1. Siccome all'infinito arriveremo all'asse $\boldsymbol{x}$, qual è l'ascissa dell'ultimo cubetto rosso?

Prima o poi (non fosse altro che per *random walk* in condizioni di ubriachezza), un matematico ci capita, e la domanda me la fa di sicuro; qual è una funzione che passa per tutti i punti rossi?

3. Bungee Jumpers

Provare che, se x_1, x_2 sono le radici dell'equazione

$$x^2 - 6x + 1 = 0,$$

allora $x_1^n + x_2^n$, per qualsiasi $n \in N$, ***non*** è divisibile per **5**.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Questo mese non è esploso niente o, se è successo, non ce ne siamo accorti.

Non che il mese sia stato propriamente calmo; la nostra Redazione Estera (Alice) ha traslocato, approfittando della sostanzaiale assenza di macchinari (vi ricordate che il suo laptop non è più in condizioni di nuocere, sì?); la cosa per voi probabilmente non riveste un soverchio interesse, in quanto restano uguali il pianeta (terzo dal Sole), la nazione (Svizzera), la città (sobborghi di Zurigo) e l'indirizzo di posta elettronica (e questo dovreste conoscerlo); va però detto che i nostri Validi Assistenti di Laboratorio spingono per visitare la nuova sede: a quanto pare, è a due passi da un *discount* di cioccolato.

Nonostanze il nostro scetticismo di fondo, certe coincidenze fanno pensare; non appena (senza dirlo a nessuno) abbiamo messo penna in una rivista di astronomia sono arrivate una segnalazione di ***DanielaDaniela*** relativa al fatto che non vedeva l'eclisse causa nuvole e la richiesta di ***Zar*** di informazioni sul decimo pianeta recentemente scoperto.

Giusto per sfoggiare la nostra cultura, tenete da parte i vari filtri, che il ***29 marzo*** ne arriva un'altra visibile dall'Italia e, possibilmente, ricordate a Rudy che ha promesso un foglio da filtro a Doc per il telescopio. Per quanto riguarda il decimo pianeta, al momento si chiama "Xena" e ha un satellite denominato "Gabrielle"; siccome sono personaggi di telefilm, ben difficilmente verranno mantenuti; in compenso è ripartita la *querelle* su cosa sia un pianeta e cosa no, con i soliti estremisti (per i quali Rudy nutre una certa simpatia) sostenenti che per vari motivi Plutone non può essere considerato un pianeta.

Riccardo, a seguito dei nostri timori relativamente a "Numb3rs", ci scrive che per quanto ne sa lui è interessante; quindi, tenete d'occhio la serie.

Anche se è finita l'estate, continua il tormentone del sudoku; ***Riccardo*** ci ha mandato un interessante articolo, e ***Giorgio*** ci chiede quando scriveremo un articolo in merito; la posizione della Redazione è condensata dalle parole di Rudy (anche perché l'articolo dovrebbe scriverlo lui): "Mi piace talmente poco che sin quando la gente continua a chiedere un articolo, ho un blocco a scriverlo". Il mese scorso Rudy ha promesso che ne accennerà parlando d'altro, ma al momento ha altre cose per la testa.

Prima Pubblica Ammenda: ci scusiamo con ***Cid***, abbiamo sbagliato a contare gli spigoli del tetraedro; come cerchiamo di dimostrare questa volta nel PM, abbiamo dei problemi con i numeri maggiori di tre; il guaio è nato dal fatto che Rudy i tetraedri li tiene in ufficio, e la risposta l'ha scritta in un posto senza tetraedri.

"And now, go with the show". Anche se la prima parte ci spiace un po' scriverla.

4.1 [4.81]

Non vi siete dati molto da fare: pressione bassa, come Rudy?

4.1.1 Perlina Matematica

Seconda Pubblica Ammenda, ma mica tanto. Seriamente, se questa forma di Teorema Rotondo di Pitagora fosse stata esatta, non credete che sarebbe un filino più nota? Quindi, rifiutiamo in blocco le definizioni di "bufala" et similia; al massimo accettiamo il titolo di una delle mail di risposta: "perlina di bigiotteria". E la prossima volta che troviamo una cosa del genere ve lo rifiliamo come pesce sul numero di Aprile.

Infatti, non è vera, anche se gli va decisamente vicino: come ci fa notare ***Ser Aglio***, nel caso del triangolo $[1;1;2]$ l'errore è del 5% (in eccesso), per passare al 7% (in difetto) nel caso del triangolo $[1;2;3]$ e poi al 1% (nuovamente in eccesso) nel caso $[2;3;5]$; il Nostro sta cercando di ricavare una formula che permetta di ricavare l'errore rispetto all'n-esimo termine della serie di Fibonacci, e i primi risultati parlano di una formula (testuale definizione) "ciclopica"; quello che siamo riusciti a sapere sinora è che la differenza dalla serie persiste, ma l'errore resta decisamente piccolo. Appena avremo ulteriori notizie pubblicheremo, in compagnia delle battutacce di ***Ser Aglio***.

Il termine "perlina da bigiotteria" arriva da ***µ/6*** (sì, "mu sesti". Non chiedete il perché); usando KIG[15] (KDE Interactive Geometry) e attraverso l'inversione circolare ha calcolato

[15] Ci segnala tra l'altro che il programma è disponibile in EduKnoppix, distribuzione Linux Live gratuita e (nelle sue parole) davvero bella. Non la conosciamo, ma se in questo momento non stessimo scrivendo per una prestigiosa rivista di matematica ricreativa staremmo installando Edubuntu sulla macchina "grande" dei Validi Assistenti di Laboratorio. A loro, Knoppix serve solo per giocare a KAtomic (sul quale avremmo una domanda, ma non vorremmo la scambiaste per un problemino... Probabilmente non ha soluzione).

il raggio della circonferenza, il che ha fornito un risultato decisamente "strano" *[leggasi: "giusto"]*; a questo punto, passando alla geometria analitica, ha ricavato il risultato.

Chi si è incavolato di brutto è ***Dr.Toki***, la cui fiducia in noi ha dell'ammirevole; infatti, ci ha messo quindici giorni di calcoli per convincersi che la proprietà non era vera. Non solo, ma il suo fondamentalismo RMmico è tale che secondo lui ci avete "tempestato di mail accusatorie" in quanto provate un "gran piacere nel trovare le vostre [nostre] cantonate".

Spiacente deluderti, ma siete stati gli unici tre che se ne sono occupati; la cosa ci è piuttosto dispiaciuta, anche perché l'inversione prometteva bene, per calcolare il valore generico.

4.1.2 Mi vergogno un po'...

Terza Pubblica Ammenda: nella valutazione dei problemi dovevano esserci ***tre*** coniglietti, ma la comunicazione non è arrivata in tempo; inoltre, forse ci voleva qualche frazione di pipa in meno. Cerchiamo di spiegarci sorvolando sulle birre, che siccome si tratta di probabilità sono tre per definizione senza neanche stare a guardare.

Rudy è sempre stato un grande ammiratore del Metodo MonteCarlo, e negli anni felici e turbolenti dell'Università l'unico modo per tenerlo buono era proporgli un problema di questo genere e chiedergli di farci un po' di simulazioni; anche per questo, secondo lui questo è il più bel problema che abbia visto sinora (e siccome i problemi che conosce prima o poi li vedete anche voi, traetene le dovute conseguenze). E il fatto che ci sia stata solo una soluzione lo ha seccato molto, anche se quando l'ha letta ha cominciato a saltare come un matto; infatti, niente lo rende più felice che trovare una soluzione *diversa dalla sua* (con gli stessi risultati, possibilmente...).

La soluzione arriva da ***Qfwfq***, accompagnata dal commento "i random walk non si possono affrontare alla leggera..." *[sono quindici giorni che cerco una battuta sul fatto che in un random walk ogni passo va meditato... (RdA)]*. Ma passiamo alla soluzione: oltre ad aggiungere alcune note, Rudy si è preso la libertà di evidenziare alcuni punti. Il Nostro lo titola "A spasso per Torino" e la cosa ci piace molto, anche se adesso una passeggiata per Torino è tutt'altro che casuale, dati i lavori in corso per le Olimpiadi: mancate il lampione, ma finite nel buco.

> Abbiamo un reticolo in $\boldsymbol{d}$ dimensioni e, al tempo $\boldsymbol{t=0}$, siamo posti nell'origine orientati in una delle $\boldsymbol{2d}$ possibili direzioni. Ad un tempo successivo facciamo un passo nella direzione in cui siamo orientati e successivamente cambiamo direzione con una certa probabilità. Il problema è capire quale è la probabilità di ritornare, prima o poi, al punto di partenza.
>
> Si tratta di un cammino casuale con la piccola complicazione che oltre alla nostra posizione, dobbiamo prendere in conto anche la nostra direzione. Tuttavia la dinamica non dipende dalla posizione ne dal tempo e questo permette di affrontare il problema con due strumenti standard: generatore funzionale e trasformata di Fourier.
>
> Indico con $P_n(\vec{x},i)$ la probabilità di trovarmi al tempo $\boldsymbol{n}$ nel punto $\vec{x}$, orientato nella direzione $\boldsymbol{i}$.
>
> $\vec{x}$ è un vettore con $\boldsymbol{d}$ componenti intere e $\boldsymbol{i=0,1,\ldots,2d-1}$ indica in quale direzione sto puntando.
>
> Assumendo che al tempo **0** sono nell'origine ed orientato in modo equiprobabile in qualsiasi direzione, il sistema è descritto da:
>
> $$P_0(\vec{0},h) = \tfrac{1}{2d}\delta_{\vec{x},\vec{0}} \qquad \textbf{[4.1]}$$

$$P_{n+1}(\vec{x},h)=\sum_{j=0}^{2d-1}P_n(\vec{x}-\vec{e}_j,j)\rho_{jh}$$

I vettori $\vec{e}_i$ puntano nelle **$2d$** direzioni. Per esempio nel caso bidimensionale potremmo scegliere $\vec{e}_0=(1,0)$, $\vec{e}_1=(0,1)$, $\vec{e}_2=(-1,0)$, $\vec{e}_3=(0,-1)$.

ρ_{jh} è la probabilità di cambiare direzione, passando dalla direzione ***j*** alla direzione ***h***.

A questo punto si introduce il generatore funzionale per P:

$$G(\vec{x},h,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\vec{x},h)z^n \qquad \texttt{[4.2]}$$

In altre parole passo dalla variabile discreta ***n*** alla variabile continua **0<*z*<1**. Ovviamente se conosco la ***G*** posso facilmente tornare indietro facendo derivate.

$$P_n(\vec{x},h)=\frac{1}{n!}\left.\frac{d^nG(\vec{x},h,z)}{dz^n}\right|_{z=0} \qquad \texttt{[4.3]}$$

Che questo trucco di introdurre un generatore possa essere di qualche utilità non finisce mai di stupirmi, soprattutto perché è utile nei settori più disparati. Qualcuno ha addirittura scritto un libro (generatingfunctionology) per illustrarne alcune delle applicazioni. Lo segnalo perché è disponibile gratuitamente in rete[16] e magari qualcuno è interessato[17].

Moltiplicando `[4.1]` per z^n e sommando su ***n***, otteniamo la seguente equazione per ***G***

$$G(\vec{x},h,z)=\frac{1}{2d}\delta_{\vec{x},\vec{0}}+z\sum_{j=0}^{2d-1}G(\vec{x}-\vec{e}_j,j,z)\rho_{jh} \qquad \texttt{[4.4]}$$

Il passo successivo è introdurre la trasformata di Fourier. Se $F(\vec{x})$ è una funzione su un reticolo ***d***-dimensionale, indico la sua trasformata di Fourier con

$$f(\vec{k})=\sum_{\vec{x}}F(\vec{x})e^{i\vec{k}\vec{x}} \qquad \texttt{[4.5]}$$

Dove $\vec{k}$ è un vettore ***d***-dimensionale con componenti reali comprese nell'intervallo $[-\pi,\pi]$.

Se si conosce la ***f***, per tornare indietro è necessario fare un integrale multiplo in ***d*** dimensioni

$$F(\vec{x})=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d}e^{-i\vec{k}\vec{x}}f(\vec{k}) \qquad \texttt{[4.6]}$$

[16] http://www.math.upenn.edu/~wilf/gfology.pdf

[17] Vale la pena, fidatevi. Riesce ad essere divertente, anche se l'argomento sembra di una noia pazzesca. Rudy (che è stato preso *sul serio* dalla mania tipograficolegatoristica, lo ha stampato in-octavo e rilegato (non brochure: cucito!) solo per leggerlo e studiarlo con calma. Lo ha anche usato in una decina righe di un PM di qualche tempo fa, ma siccome non se n'è accorto nessuno non vi diciamo qual è; intende comunque approfondire il problema, ma i tempi rischiano di essere quelli del sudoku: non perché non gli piaccia, ma perché ha trovato altra roba più facile.

Moltiplicando la `[4.4]` per $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ e sommando su tutti gli $\vec{x}$ si ottiene

$$g(\vec{k},h,z)=\tfrac{1}{2d}+z\sum_{j=0}^{2d-1}e^{i\vec{k}\vec{e}_j}g(\vec{k},j,z)\rho_{jh} \qquad \texttt{[4.7]}$$

Dove abbiamo indicato con $\boldsymbol{g}$ la trasformata di Fourier di $\boldsymbol{G}$.

Quello che abbiamo ottenuto è un sistema algebrico di **2*d*** equazioni lineari non omogenee "facilmente" risolubile! Nei casi specifici che vedremo, risolvo il sistema e sommando sui possibili orientamenti ricavo

$$g(\vec{k},z)=\sum_{h=0}^{2d-1}g(\vec{k},h,z) \qquad \texttt{[4.8]}$$

Facendo l'anti-trasformata di Fourier in `[4.6]` e derivando rispetto a $\boldsymbol{z}$ posso ottenere

$$G(\vec{x},z)=\sum_{h=0}^{2d-1}G(\vec{x},h,z) \qquad \texttt{[4.9]}$$

e

$$P_n(\vec{x})=\sum_{h=0}^{2d-1}P_n(\vec{x},h) \qquad \texttt{[4.10]}$$

$P_n(\vec{0})$ è la probabilità di trovarmi nel punto di partenza dopo $\boldsymbol{n}$ passi. Tuttavia per trovare la probabilità di tornare prima o poi nel punto di partenza non posso semplicemente sommare su $\boldsymbol{n}$ perché gli eventi per $\boldsymbol{n}$ diversi non sono indipendenti. In altre parole, tra i percorsi che tornano nell'origine dopo **100** passi ci possono essere percorsi che tornano nell'origine dopo **10** passi e che quindi sarebbero contati più volte. È necessario quindi introdurre la probabilità $\Pi_n(\vec{x})$ che il percorso passi per $\vec{x}$ **per la prima volta** dopo $\boldsymbol{n}$ passi. Pensandoci un attimo si capisce che si può scrivere

$$P_n(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}\Pi_k(\vec{x})P_{n-k}(\vec{0}) \qquad \texttt{[4.11]}$$

Infatti la probabilità di essere in $\vec{x}$ dopo $\boldsymbol{n}$ passi, si può scrivere come la somma su $\boldsymbol{k}$ delle probabilità di arrivare in $\vec{x}$ per la prima volta dopo $\boldsymbol{k}$ passi, e di ritornare successivamente nello stesso punto nei restanti $\boldsymbol{n\text{-}k}$ passi. In verità bisognerebbe essere più precisi e tenere in conto anche della direzione tenuta , ma ci si può convincere che la `[4.11]` vale per le grandezze sommate sulle direzioni (osservando anche che sommando sulle direzioni, il risultato non dipende dall'orientamento iniziale a $\boldsymbol{t=0}$). Introducendo la funzione generatrice anche per Π

$$\Gamma(\vec{x},z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Pi_n(\vec{x})z^n \qquad \texttt{[4.12]}$$

si può ricavare

$$
\begin{aligned}
G(\vec{x},z) &= \delta_{\vec{x},\vec{0}} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\vec{x}) z^n \\
&= \delta_{\vec{x},\vec{0}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \Pi_k(\vec{x}) P_{n-k}(\vec{0}) z^{n-k} z^k \\
&= \delta_{\vec{x},\vec{0}} + G(\vec{0},z)\Gamma(\vec{x},z)
\end{aligned}
\qquad \texttt{[4.13]}
$$

E cioè

$$\Gamma(\vec{x},z) = \tfrac{G(\vec{x},z)-\delta_{\vec{x},\vec{0}}}{G(\vec{0},z)} \qquad \texttt{[4.14]}$$

La probabilità di tornare prima o poi nell'origine si ottiene sommando su Π_n

$$\Pi_1(\vec{0}) + \Pi_2(\vec{0}) + \Pi_3(\vec{0}) + \ldots = \Gamma(\vec{0},1) = 1 - \tfrac{1}{G(\vec{0},1)} \qquad \texttt{[4.15]}$$

$G(\vec{0},1) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} g(\vec{k},1)$ fornisce dunque la risposta alla domanda iniziale.

Vediamo adesso in concreto i casi nelle varie dimensioni.

Caso Unidimensionale

Sia $\vec{e}_0 = (1)$ e $\vec{e}_1 = (-1)$ e supponiamo che dopo ogni passo inverta la mia direzione con probabilità ***p*** e mantenga la stessa direzione con probabilità ***(1-p)***. Si ha dunque $\rho_{00} = \rho_{11} = 1-p$ e $\rho_{01} = \rho_{10} = p$. Il sistema `[4.7]` diventa quindi esplicitamente

$$
\begin{aligned}
g(\vec{k},0,z) &= \tfrac{1}{2} + z(e^{ik_1} g(\vec{k},0,z)(1-p) + e^{-ik_1} g(\vec{k},1,z)p) \\
g(\vec{k},1,z) &= \tfrac{1}{2} + z(e^{ik_1} g(\vec{k},0,z)p + e^{-ik_1} g(\vec{k},1,z)(1-p))
\end{aligned}
\qquad \texttt{[4.16]}
$$

Risolvendo il sistema, sommando sulle direzioni, e semplificando un po', si ottiene

$$g(\vec{k},z) = \sum_{h=0}^{1} g(\vec{k},h,z) = \tfrac{1+z(2p-1)\cos k_1}{1+(1-2p)z^2 - 2z(1-p)\cos k_1} \qquad \texttt{[4.17]}$$

Dobbiamo integrare su k_1 e porre ***z*=1**. Si vede tuttavia immediatamente che ponendo ***z*=1** nella `[4.17]` il denominatore diventa $2(1-p)(1-\cos k_1)$ cioè l'integrale diverge nell'origine come $\frac{dk}{k^2}$. Questo vuol dire che $G(\vec{0},1) = \infty$ e cioè $\Gamma(\vec{0},1) = 1$, ossia ***il cammino ripasserà sicuramente per l'origine***. Questo per qualunque valore di ***p***, tranne ovviamente ***p*=0**, nel qual caso $G(\vec{0},z) = 1$ e la probabilità di tornare nell'origine è **0**. Il caso unidimensionale è particolare perché `[4.17]` si può integrare esplicitamente ed ottenere per esempio per $\vec{x} = \vec{0}$:

$$G(\vec{0},z) = \tfrac{(1-2p)(1-z^2) + \sqrt{(1-z^2)(1-(1-2p)^2 z^2)}}{2(1-p)(1-z^2)} \qquad \texttt{[4.18]}$$

Derivando rispetto a ***z*** e ponendo ***z*=0** si possono ricavare le probabilità di ripassare per l'origine.

Caso Bidimensionale

Indico le direzioni con $\vec{e}_0 = (1,0)$, $\vec{e}_1 = (0,1)$, $\vec{e}_2 = (-1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,-1)$ e sia ***(1-p)*** la probabilità di non cambiare direzione, e ***p/2*** la probabilità di ruotare di **90** gradi. In altre parole si abbia

$$\rho_{ii} = (1-p) \quad , \quad \rho_{ij} = 0\, se\, | i-j | = 2 \quad , \quad \rho_{ij} = p/2\, altrimenti$$

Il sistema algebrico di eq.(7) diventa **[4.18]**

$$g(\vec{k},0,z) = \tfrac{1}{4} + z(e^{ik_1} g(\vec{k},0,z)(1-p) + e^{ik_2} g(\vec{k},1,z)\tfrac{p}{2} + e^{-ik_2} g(\vec{k},3,z)\tfrac{p}{2})$$
$$g(\vec{k},1,z) = \tfrac{1}{4} + z(e^{ik_1} g(\vec{k},0,z)\tfrac{p}{2} + e^{ik_2} g(\vec{k},1,z)(1-p) + e^{-ik_1} g(\vec{k},2,z)\tfrac{p}{2})$$
$$g(\vec{k},2,z) = \tfrac{1}{4} + z(e^{ik_2} g(\vec{k},1,z)\tfrac{p}{2} + e^{-ik_1} g(\vec{k},2,z)(1-p) + e^{-ik_2} g(\vec{k},3,z)\tfrac{p}{2})$$
$$g(\vec{k},3,z) = \tfrac{1}{4} + z(e^{ik_1} g(\vec{k},0,z)\tfrac{p}{2} + e^{-ik_1} g(\vec{k},2,z)\tfrac{p}{2} + e^{-ik_2} g(\vec{k},3,z)(1-p))$$

Ovviamente, $\vec{k} = (k_1, k_2)$

Risolvendo il sistema, sommando sulle direzioni e semplificando un poco, si ottiene

$$g(\vec{k},z) = \sum_{h=0}^{3} g(\vec{k},h,z) = \frac{n_0 + n_1(\cos k_1 + \cos k_2) + n_2 \cos k_1 \cos k_2}{d_0 + d_1(\cos k_1 + \cos k_2) + d_2 \cos k_1 \cos k_2} \qquad \textbf{[4.19]}$$

con

$$n_0 = 2 + 2z^2 - 6pz^2 + 4p^2z^2$$

$$n_1 = -3z + 4pz - z^3 + 4pz^3 - 5p^2z^3 + 2p^3z^3$$

$$n_2 = 4z^2 - 10pz^2 + 6p^2z^2$$

$$d_0 = 2 + 4z^2 - 8pz^2 + 4p^2z^2 + 2z^4 - 8pz^4 + 10p^2z^4 - 4p^3z^4$$

$$d_1 = -4z + 4pz - 4z^3 + 12pz^3 - 10p^2z^3 + 2p^3z^3$$

$$d_2 = 8z^2 - 16pz^2 + 6p^2z^2$$

Esattamente come nel caso unidimensionale se poniamo ***z*=1**, si ha che vicino l'origine $\vec{k} \approx \vec{0}$ il denominatore diventa $p^2(2-p)(k_1^2 + k_2^2)$. Indicando con $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ si ha che

$$\frac{dk_1 dk_2}{k^2} \approx \frac{kdk}{k^2} \approx \frac{dk}{k}$$

e quindi anche in questo caso l'integrale diverge, anche se meno fortemente che nel caso unidimensionale, e quindi $G(\vec{0},1) = \infty$ e il cammino tornerà sicuramente nell'origine per qualunque valore di ***p*>0**.

Potremo quindi chiederci ***quanto tempo dobbiamo mediamente aspettare prima di ripassare per la prima volta nell'origine***. Dovremmo quindi calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Pi_n(\vec{0}) = \left.\frac{d\Gamma(\vec{0},z)}{dz}\right|_{z=1} = \frac{1}{G(\vec{0},z)^2} \left.\frac{dG(\vec{0},z)}{dz}\right|_{z=1} \qquad \textbf{[4.20]}$$

e si può subito vedere che anche questa grandezza è infinita. In altre parole la probabilità che il primo passaggio capiti dopo ***n*** passi, decresce cosi poco velocemente con ***n*** che il valore medio è infinito. Abbiamo quindi la certezza di ritrovare la chiave, ma se siamo sfortunati dovremmo aspettare parecchio.

Non sono stato capace di integrare analiticamente **[4.19]** e comunque non credo si possa esprimere in termini di funzioni elementari, tuttavia l'equazione **[4.19]** permette di trovare facilmente e rapidamente (usando un manipolatore algebrico ovviamente) molti risultati particolari. Per esempio è facile derivare la ***g*** rispetto a ***z***, e ponendo ***z*=0** il denominatore diventa uguale a **1**. L'integrale su $\vec{k}$ è a questo punto immediato e otteniamo così in un attimo le probabilità che il cammino passi al tempo ***n*** per qualunque punto. Per esempio la probabilità che la particella passi per l'origine è *[Nota della Redazione: qui il Nostro usa una formattazione che viene decisamente brutta nel nostro formato standard: gli eventuali errori sono da imputare ai Redattori che hanno certosinamente copiato le formule]*:

$$P_4(\vec{0}) = \frac{p^3}{4}$$

$$P_6(\vec{0}) = \frac{p^3}{2} - \frac{5p^4}{8} + \frac{p^5}{8}$$

$$P_8(\vec{0}) = \frac{3p^3}{4} - \frac{15p^4}{8} + \frac{27p^5}{16} - \frac{15p^6}{32} + \frac{3p^7}{64}$$

$$P_{10}(\vec{0}) = p^3 - \frac{15p^4}{4} + 6p^5 - \frac{71p^6}{16} + \frac{21p^7}{16} - \frac{3p^8}{32} - \frac{p^9}{32}$$

$$P_{12}(\vec{0}) = \frac{5p^3}{4} - \frac{25p^4}{4} + \frac{115p^5}{8} - \frac{35p^6}{2} + \frac{345p^7}{32} - \frac{275p^8}{128} - \frac{135p^9}{128} + \frac{105p^{10}}{128} - \frac{45p^{11}}{256}$$

Mentre se consideriamo la probabilità che il cammino ripassi per la prima volta nell'origine, abbiamo, per esempio

$$\Pi_4(\vec{0}) = \frac{p^3}{4}$$

$$\Pi_6(\vec{0}) = \frac{p^3}{2} - \frac{5p^4}{8} + \frac{p^5}{8}$$

$$\Pi_8(\vec{0}) = \frac{3p^3}{4} - \frac{15p^4}{8} + \frac{27p^5}{16} - \frac{17p^6}{32} + \frac{3p^7}{64}$$

$$\Pi_{10}(\vec{0}) = p^3 - \frac{15p^4}{4} + 6p^5 - \frac{75p^6}{16} + \frac{13p^7}{8} - \frac{5p^8}{32} - \frac{p^9}{32}$$

$$\Pi_{12}(\vec{0}) = \frac{5p^3}{4} - \frac{25p^4}{4} + \frac{115p^5}{8} - \frac{145p^6}{8} + \frac{395p^7}{32} - \frac{449p^8}{128} + \frac{25p^{10}}{32} - \frac{45p^{11}}{256}$$

Notare come la prima differenza si noti al tempo ***t*=8**. In Π_8 infatti non viene considerato il cammino che ripassa ***due*** volte per l'origine (a ***t*=4** e ***t*=8**). Tale cammino ha probabilità ***(p^3/4)^2***, ed infatti la differenza tra $P_8 - \Pi_8$ è proprio ***p*^6/16**.

Caso Tridimensionale

È una immediata generalizzazione del caso bidimensionale. In questo caso ho probabilità

(1-p) di cambiare direzione e probabilità ***p/4*** di prendere una delle **4** direzioni ortogonali a quella precedente. Se

$\vec{e}_0 = (1,0,0)$, $\vec{e}_1 = (0,1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,0,1)$, $\vec{e}_3 = (-1,0,0)$, $\vec{e}_4 = (0,-1,0)$, $\vec{e}_5 = (0,0,-1)$

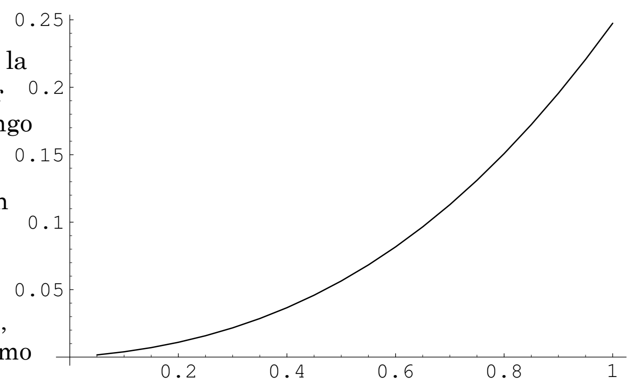
Si ha che

$$\rho_{ii} = (1-p) \quad , \quad \rho_{ij} = 0 \, se \, |i-j| = 3 \quad , \quad \rho_{ij} = p/4 \, altrimenti$$

Si imposta il sistema ***6x6*** in modo analogo al caso bidimensionale e si risolve ottenendo

$$\begin{aligned} g(\vec{k}, z) &= \sum_{h=0}^{5} g(\vec{k}, h, z) \\ &= \frac{n_0 + n_1(\cos k_1 + \cos k_2 + \cos k_3) + n_2(\cos k_1 \cos k_2 + \cos k_1 \cos k_3 + \cos k_2 \cos k_3) + n_3 \cos k_1 \cos k_2 \cos k_3}{d_0 + d_1(\cos k_1 + \cos k_2 + \cos k_3) + d_2(\cos k_1 \cos k_2 + \cos k_1 \cos k_3 + \cos k_2 \cos k_3) + d_3 \cos k_1 \cos k_2 \cos k_3} \end{aligned} \qquad \texttt{[4.21]}$$

Dove $n_i \; e \; d_i$ sono polinomi in ***p*** e ***z*** che, per brevità, non riporto. Come nel caso bidimensionale, si ha che ponendo ***z*=1** il denominatore si annulla come k^2 nell'origine, dove ovviamente $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Tuttavia adesso l'elemento di volume regolarizza tale divergenze, infatti $\frac{d\vec{k}}{k^2} \approx \frac{k^2 dk}{k^2} \approx dk$ e quindi $G(\vec{0},1) < \infty$ e $\Gamma(\vec{0},1) < 1$ c'è quindi una probabilità non nulla che il cammino non ripassi mai per l'origine. È possibile integrare numericamente `[4.21]` ed ottenere quindi la probabilità di ripassare per l'origine. Se ***p*=1**, ottengo $\Gamma(\vec{0},1) = 0.2474$, mentre per altri valori di ***p*** riporto in figura il risultato.

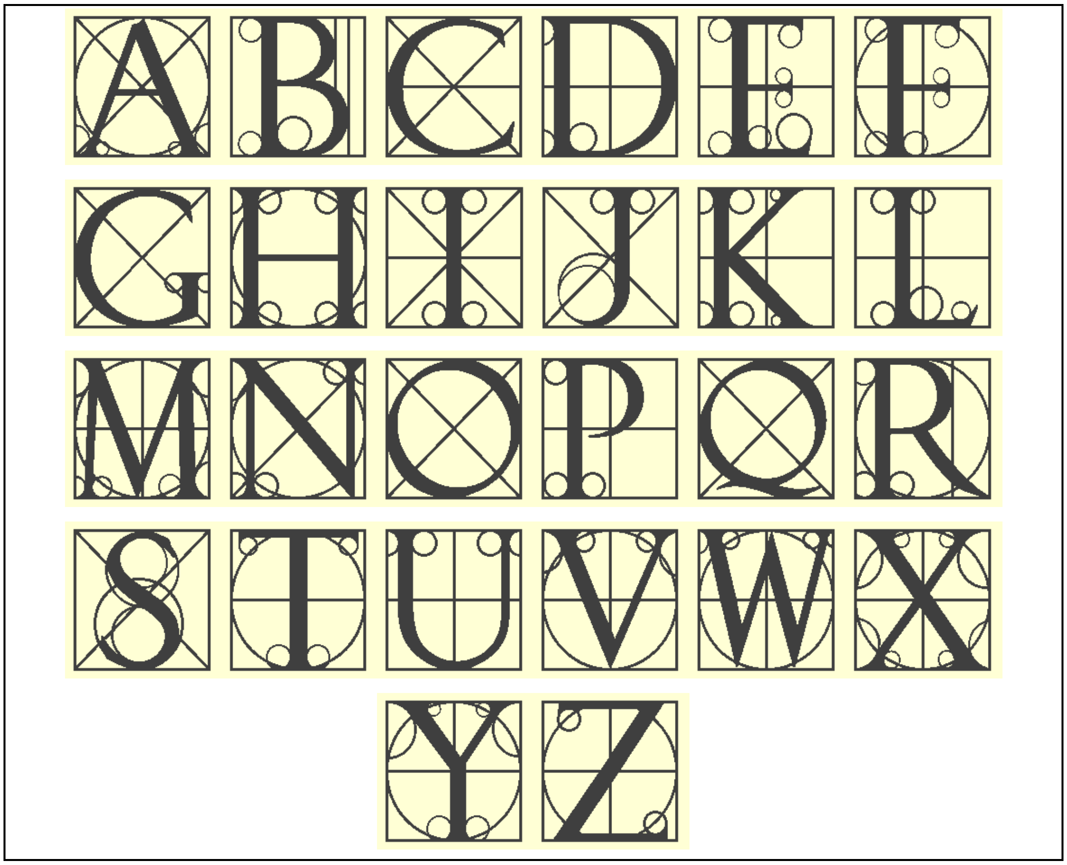


Insomma, se ci sono le scale, la macchina non la troveremo mai.

Grande.

4.1.3 Quefta lettera .A. fe caua del tondo e del fuo quadro...

Per prima cosa, posto che vi interessino questi tipi di calcoli e questi argomenti, vi passiamo quelle belle, dal "De Divina Proportione"; non vi passiamo il testo di descrizione in quanto (almeno a giudicare dai vostri commenti) non è reperibile in rete e nessuno (noi inclusi) intende spendere la bellezza di centonovantadue euro per comprarsi la copia cartacea.



Abbiamo ricevuto soluzioni da ***Zar***, ***Cid***, ***Michele*** e ***Dr.Toki***, tutte correttissime dal punto di vista formale; due, però, ci hanno lasciato un filino stupiti, quindi pubblichiamo queste.

La prima soluzione è da parte di ***Zar*** che risolve ma, nella prima parte, ci ricorda una vignetta western di Andrea Pazienza: "Ho rapinato la banca su una mucca? Ma allora stamattina ho munto il cavallo!".

Il Nostro, infatti, per prima cosa *dimostra* la tangenza della retta (la "gamba" della A) alla circonferenza che serve per definire le grazie, e poi da lì procede a fare gli altri conti. Ineccepibile, ma la retta era lì per costruzione... Vediamo comunque la soluzione.

> Eccoci alle prese con il quesito letterario di questo mese, ovvero "come complicarsi la vita costruendo la lettera A". Guardando la figura preparandosi spiritualmente alla risoluzione del quesito, sorge subito la domanda: ma quella circonferenza piccolina, siamo sicuri che sia tangente sia ai lati del quadrato che alla circonferenza grande ***e*** alla gamba della lettera A *[Ngu? Beh, sì. Per costruzione]*?
>
> Mi sono messo lì cercando di dimostrare la tangenza come avrebbe fatto Euclide, ma non ci sono riuscito. Sono dunque passato alla geometria analitica, ed ecco il risultato.
>
> Premessa, ci sono tre circonferenze, denominate circonferenza grande, circonferenza piccola, circonferenza piccolina (ehm).
>
> Poniamo che la circonferenza grande abbia raggio R=1. La circonferenza piccola ha allora raggio r=1/2 e la lunghezza della gamba della A, dal vertice in alto al punto di tangenza con la circonferenza piccola risulta $\sqrt{(3/2)^2-(1/2)^2}=\sqrt{2}$ (teorema di Pitagora).

Abbiamo ora due triangoli simili: quello che ha come vertici la punta della A, il punto di tangenza della gamba della A con la circonferenza piccola, il centro della circonferenza piccola e quello che ha come vertici la punta della A, il punto medio del lato inferiore del quadrato, il punto in cui la gamba della A incontra il lato inferiore del quadrato. Possiamo impostare una proporzione che ci serve per trovare la lunghezza del segmento che ha come estremi il punto medio del lato inferiore del quadrato e il punto in cui la gamba della A incontra il lato inferiore del quadrato (potevate mettere delle lettere nella figura, eh?, in modo da non costringerci a farne un'altra con le lettere...). Ecco la proporzione:

$$\frac{1}{2} : x = \sqrt{2} : 2$$

che ci dice che tale lato ha lunghezza uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A questo punto passiamo alla geometria analitica. Mettiamo l'origine nel vertice in basso a sinistra del quadrato: il punto in cui la gamba della A incontra l'asse ha coordinate uguali a

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},0\right)$$

Ora riusciamo a trovare l'equazione della gamba della A, perché è una retta che passa per il punto appena trovato e per la punta della A, che ha coordinate uguali a $\left(\frac{1}{2},2\right)$. L'equazione cercata è questa:

$$\frac{y-2}{0-2}=\frac{x-1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$$

che esplicitata rispetto a ***y*** diventa $y = 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 2$.

Ora possiamo rispondere alla domanda iniziale: siamo sicuri che la circonferenza piccolina sia tangente a questa retta? La risposta è sì se il raggio della circonferenza piccolina è uguale alla distanza tra il centro della circonferenza piccola e la retta. Troviamo dunque le coordinate del centro della circonferenza piccolina: questo sta sulla bisettrice del primo e terzo quadrante, perché la circonferenza è tangente ai 2 lati del quadrato. Se indichiamo con ***x*** il raggio della circonferenza, il centro ha evidentemente coordinate (x, x). La distanza tra questo centro e l'origine degli assi è uguale a $x\sqrt{2}$. Il punto di tangenza tra la circonferenza grande e quella piccolina ha coordinate $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2};\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$, e possiamo quindi impostare l'equazione $x\sqrt{2}+x=\sqrt{2}-1$ che, risolta, ci dice che il raggio della circonferenza piccolina è . $3-2\sqrt{2}$.

Ora possiamo verificare che la circonferenza piccolina è tangente alla gamba della A, calcolando la distanza tra il suo centro e la suddetta gamba.

Ricordiamo che, data una retta di equazione $ax+by+c=0$ e un punto $P(x_0, y_0)$, la distanza tra il punto e la retta si calcola con la formula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sostituendo quindi tutti i valori che abbiamo trovato, si ottiene

$$d = \frac{\left|2\sqrt{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{2} + 2 - 3 + 2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+8}} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

E questo è proprio il raggio della circonferenza piccolina, che quindi è tangente a tutto.

Allora ecco le risposte: i raggi dei vari cerchi, dal più piccolo al più grande, sono

$$3 - 2\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1.$$

La barra orizzontale è un segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo (tali lati sono le gambe della A) e quindi è uguale a metà base del triangolo, lunghezza che abbiamo già calcolato prima e che vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se vogliamo il calcolo in proporzione all'altezza, abbiamo che il rapporto richiesto è uguale a

$$.\frac{1/\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Il disegno lo fornisce ***Michele***: e meno male che mette il disegno, altrimenti stava tutto in un paio di righe:

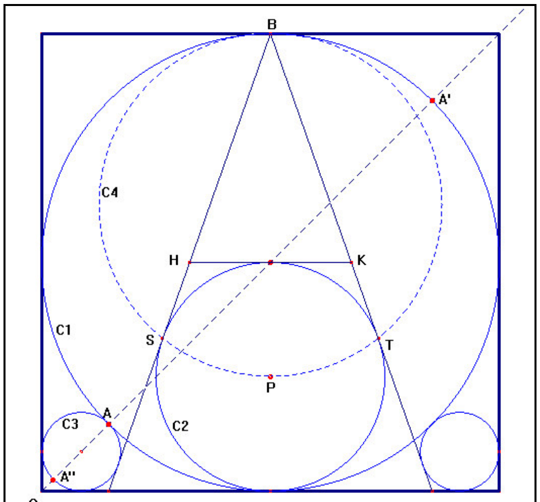
L'omotetia di centro ***O*** e rapporto ***k*** (incognito) muta il punto ***A*** nel punto ***A'***. Poiché (prendendo ***O*** come origine)

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A' = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

allora

$$k = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$



La "A" di Michele

La stessa omotetia muta la circonferenza $\boldsymbol{C_3}$ nella circonferenza $\boldsymbol{C_1}$, e dunque il raggio di $\boldsymbol{C_3}$ è

$$r_3 = \frac{r_1}{3 + 2\sqrt{2}},$$

dove $\boldsymbol{r_1}$ è il raggio di $\boldsymbol{C_1}$.

Il raggio di C_2 è ovviamente $r_1/2$.

Il segmento ***HK*** misura $\frac{\sqrt{2}}{2}$ r_1. Tutto quello che occorre sapere è che per mandare le tangenti dal punto esterno ***B*** alla circonferenza C_4 occorre intersecare C_4 con la circonferenza di diametro ***BP*** (***P*** è il centro di C_4); è una vecchia e classica costruzione con riga e compasso

Non arriviamo ad affermare che tutto sia chiaro e limpido come un mattino senza nuvole, ma dobbiamo ammettere che è originale.

5. Pagina 46

Dal Teorema di Viète si ha che la somma delle radici deve essere pari al coefficiente del termine di primo grado cambiato di segno e loro prodotto deve essere pari al termine noto, ossia:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 6^2 - 2 \cdot 1 = 34. \end{aligned} \qquad \texttt{[5.1]}$$

E questo verifica il teorema per ***n*=1** e ***n*=2**.

Inoltre, si ha che:

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n &= (x_1 + x_2)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - x_1x_2\left(x_1^{n-2}x_2^{n-2}\right) \\ &= 6\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - 1 \cdot \left(x_1^{n-2}x_2^{n-2}\right) \\ &= 5\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) + \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - \left(x_1^{n-2}x_2^{n-2}\right), \end{aligned} \qquad \texttt{[5.2]}$$

Ossia, se $\left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right)$ e $\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right)$ sono interi, allora lo sarà anche $\left(x_1^n + x_2^n\right)$; dalla `[1]` vediamo che i primi due valori della successione sono interi e quindi per induzione lo sono tutti.

Sia ora ***n*** il più piccolo naturale per cui $x_1^n + x_2^n$ è divisibile per ***5***; in questo caso, dalla `[2]` si ha deve essere divisibile per ***5*** anche la differenza:

$$\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - \left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right).$$

Sostituendo nella `[2]` ***n*** con ***n-1***, abbiamo:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} = 5\left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right) + \left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right) - \left(x_1^{n-3} + x_2^{n-3}\right),$$

da cui segue che

$$x_1^{n-3} + x_2^{n-3} = 5\left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right) - \left[\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - \left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right)\right]$$

deve essere anch'esso divisibile per ***5***.

Questo contraddice l'ipotesi che ***n*** fosse il *più piccolo Naturale* per cui $x_1^n + x_2^n$ fosse divisibile per **5**, quindi non esiste un ***n*** siffatto.

Che è la tesi.

6. Paraphernalia Mathematica

6.1 ∞, 5, 6, 3, 3,...

Prima una nota: i più scafati cultori dell'arte tipografica si accorgeranno che abbiamo dovuto cambiare carattere per scrivere l'inizio del titolo. Nel nostro ormai consunto *Century Schoolbook* non esiste il simbolo di infinito, siamo dovuti passare al *Times New Roman*.

Bene, mi aspetto che molti di voi riconoscano la serie qui sopra; in caso contrario, tutto vi sarà chiaro dopo la prossima frase.

Come ben sa chiunque abbia letto il primo libro del lato letterario della mia libreria[18], in due dimensioni le figure regolari (che qui si chiamano poligoni) sono infinite; la cosa porta, nel libro di Abbott, ad un'interessantissima gerarchia di poligoni che (partendo dal secondo[19]) vede i Triangoli come operai e salendo nella scala sociale ne aumenta il numero dei lati, sino al Re indistinguibile da un cerchio ma cui per cortesia sono attribuiti diecimila lati.

È abbastanza semplice vedere che questa possibilità non continua per sempre; in tre dimensioni, infatti, esiste una simpatica dimostrazione del fatto che il numero dei solidi regolari è finito.

La premessa è che in un punto (vertice) devono incontrarsi almeno ***tre*** facce, altrimenti non lo chiamiamo "solido", ma "panino". Partiamo dalla figura piana più semplice, il ***triangolo*** (equilatero); farne incontrare ***tre*** in un vertice non è un problema, e possiamo continuare la costruzione sino ad ottenere il ***tetraedro***. E uno.

Non solo, ma possiamo metterne ***quattro*** ottenendo il ***tetraedro*** o ***cinque*** ottenendo l'***icosaedro***; con sei, però, niente da fare: in quel modo, tasselliamo il piano e il nostro solido "non si chiude".

"Next!" Con il ***quadrato***, se ne uniamo ***tre*** per vertice formiamo il ***cubo*** e ci fermiamo lì, visto che anche qui quattro tassellano il piano.

Coraggio che è l'ultimo: il ***pentagono*** genera il ***dodecaedro*** mettendone ***tre*** per vertice e basta: quattro, infatti, "sforano" ampiamente l'angolo giro.

Se a questo punto avete la sia pur minuscola parvenza dell'ombra di un minimo dubbio nella visualizzazione di questi aggeggi, andate a riprendervi i numeri 38 e 42 di una Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa, dove riposano due ingiustamente sottovalutati PM ("Suppergiù platonicamente perfetto", 1 e 2), che vi spiegano come costruire i poliedri regolari con l'origami: manca il cubo, ma speriamo che sin lì a visualizzazione non abbiate problemi; oltre ad essere un'ottima occupazione per le mani durante le lunghe telefonate (se usate l'auricolare), quando tra un paio di mesi cominceranno ad essere troppi potrete usarli come decorazioni per l'albero di Natale. *[i Validi Assistenti di Laboratorio di RM sconsigliano l'utilizzo del* Geomag*: il dodecaedro viene decisamente instabile (Alberto & Fred).].*

Bene, l'umanità gioca da molto tempo con questi oggetti, tant'è che sono noti come solidi *platonici*. In realtà, sembra che Platone fosse più bravo ad interessare gli amici in merito alla matematica piuttosto che a darsi da fare lui; la gran parte del lavoro in effetti è stata

[18] So benissimo che (a parte Zar, cui devo ancora una torta di mele di mia suocera) non ve ne importa niente, ma ve l'ho detto pochi numeri fa: sono in ordine alfabetico per autore. E il primo è "Flatlandia", di Abbott. Regalo di Doc, che conosceva la mia fisima ordinatoria e voleva che il suo libro fosse "il primo".

[19] Partiamo dal secondo perché altrimenti le signore presenti si offendono. Ho detto che è un bel libro, non che ne condivido le idee.

svolta da *Archita* e da *Teeteto*[20] autore, tra le altre cose, della dimostrazione presentata poco sopra.

Probabilmente, da quanto abbiamo visto, la costruzione meno immediatamente ricavabile è quella del dodecaedro; anche in questo caso ci viene in aiuto Teeteto, scoprendo che basta prendere un icosaedro, mettere un vertice al centro di ognuna delle facce, congiungere opportunamente questi vertici e ottenete il dodecaedro (e viceversa, se interessa), in quanto i due solidi sono l'uno il *duale* dell'altro. La cosa funziona anche per il cubo, nel senso che se prendete i centri di ogni faccia e li unite ottenente un ottaedro; per il tetraedro la cosa è abbastanza deludente, in quanto ottenete solo un tetraedro più piccolo; infatti, è il duale di se stesso.

Va detto che Teeteto ha fatto di più, in quanto (con i rudimentali strumenti dell'epoca) è riuscito a calcolare il rapporto tra lo spigolo e il raggio della sfera che circoscrive il solido; non sto a calcolarveli (con i metodi moderni, più che difficile è solamente noioso), ma se siete interessati ai valori li trovate nella ***Tabella 1*** (promesso, è l'ultima volta che lo chiamo "esaedro").

Solido	**Rapporto**
Tetraedro	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
Ottaedro	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
Esaedro	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
Icosaedro	$\sqrt{5-\frac{\sqrt{5}}{10}}$
Dodecaedro	$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$

Tabella 1 - Rapporti tra spigolo e raggio della sfera circoscritta

Come dicevamo, non esattamente semplicissimi, con gli strumenti dell'epoca.

Va bene, ma allora perché non si chiamano "Teeteti ci"? Beh, perché anche Platone ci ha lavorato sopra. Ci ha costruito un Universo; il nostro, per essere precisi.

Visto che è un lavoro lungo, prendiamola con calma.

Nel *Timeo*, Platone cerca di riportare tutti questi solidi (evidentemente, cinque gli sembravano troppi) ad un numero inferiore di componenti di base, possibilmente uniformi tra loro e le più elementari possibili; è probabile (pura supposizione) che gli abbia dato fastidio il fatto che le *facce* fossero di tanti tipi diversi; triangoli, pentagoni, quadrati... "troppe note, signor Mozart!" come ebbero a dire un paio di tizi.

Se vogliamo ridurre tutto ai minimi termini, è probabile che si debba cercare la cosa più elementare possibile; l'idea di Platone, quindi, fu quella di *ridurre tutto a triangoli*; qui, il guaio è che non ci vengono tutti uguali, ma comunque la situazione migliora in quanto riusciamo comunque a ridurre il numero degli oggetti che ci servono[21].

Abbiamo visto che, in fin della fiera, i solidi regolari sono costruibili attraverso triangoli (tetraedro, ottaedro, icosaedro), quadrati (cubo) e pentagoni (dodecaedro). Cominciamo dal cubo, che è più facile? In ***Figura 1*** (prima parte) vedete una faccia del cubo divisa in quattro triangoli; definiamo questi triangoli come di tipo $(1;1;\sqrt{2})$, notazione evidente sulla quale non ci soffermiamo.

I diversi solidi a facce triangolari non presentano eccessiva difficoltà: ne vedete la divisione in triangoli del tipo $(1;2;\sqrt{3})$ nella seconda parte di ***Figura 1***.

[20] Al quale sono attribuite le basi di quello che diventerà il tredicesimo libro -ora perduto- degli Elementi di Euclide. Non esattamente l'ultimo arrivato, quindi.

[21] Nota polemica, quidi la evidenziamo: *..e se a qualcuno sembra un modo balordo per costruire l'universo, si vada a rivedere il motivo per il quale sono stati ipotizzati* (un vero polemista avrebbe detto "inventati") *i "quark"*. Ci torneremo, su questo.

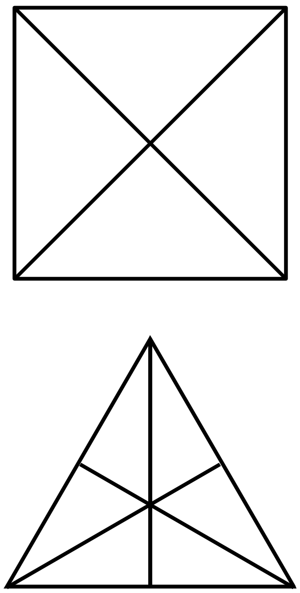


Figura 1 - I "quark" di un mucchio di solidi

...e due... Ma il dodecaedro è composto da pentagoni, e qui nasce un problema. O meglio, due problemi.

Infatti, Platone/Socrate (il *Timeo*, come tutti i Dialoghi platonici, è messo in bocca a Socrate), si limita a dirci che "il pentagono è formato da ***30*** triangoli", senza specificarne il tipo; si presume siano rettangoli, e la maggior parte dei commentatori che se ne interessano optano per la divisione indicata in ***Figura 2***. Non dovreste avere problemi ad effettuare un veloce calcolo di quali siano i rapporti tra i lati; come in ogni teoria delle simmetrie, secca un po' dover introdurre dei casi particolari, ma a quanto sembra dobbiamo proprio. Tant'è che, per quanto possibile, il Nostro cerca di ignorarlo. Facciamolo anche noi e vediamo dove siamo arrivati, considerando anche gli elementi ai quali sono associati; questa può sembrare un po' pesante da bere, ma daremo una specie di giustificazione in seguito. Trovate il tutto in ***Tabella 2***.

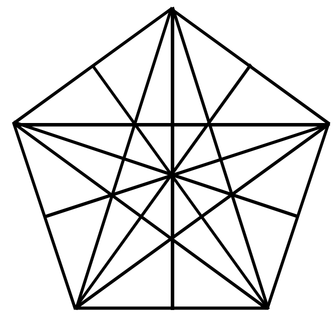


Figura 2 - Gli altri quark (quelli "strani")

Solido	Elemento		Triangoli	
			$\left(1;2;\sqrt{3}\right)$	$\left(1;1;\sqrt{2}\right)$
Tetraedro	"Fuoco"	(plasma)	24	
Ottaedro	"Aria"	(gassoso)	48	
Esaedro	"Acqua"	(liquido)	120	
Icosaedro	"Terra"	(solido)		24

Tabella 2 - Associazioni tra i solidi e gli stati della materia

Un attimo, prima di arrabbiarsi per le associazioni. Sono più giustificate di quanto sembra.

Infatti, Platone pensava che due atomi dell'elemento più leggero (due tetraedri, fuoco, composti dal minor numero di triangoli) potessero formare un atomo dell'elemento successivo (un ottaedro, aria); questo non appiccicando i due tetraedri in un qualche modo per ottenere un ottaedro (provate, se ci riuscite...), ma "*smontando*" *in triangoli base e rimontando*! Inoltre (e questa affermazione ha una forza incredibile), essendo i triangoli della terra diversi dagli altri, questa è particolarmente stabile e, nel caso "decada" in triangoli, continuerà a restare in questo stato sin quando non trova altri triangoli dello stesso tipo per formare altra terra.

Ora, quando Platone dice che triangoli diversi non possono legarsi, non è chiaro se si stia riferendo alla loro semplice "differenza" o alla loro *incommensurabilità*; questo diventa però un campo nel quale le speculazioni ci sembrano eccessive[22]; e non ci sentiamo di prendere il Nostro troppo alla lettera; anche perché l'atomo "più stabile" secondo Platone è, dal punto di vista geometrico, il *meno stabile*: provate a costruire questi solidi con il

[22] Si veda ad esempio Popper, secondo cui Platone era convinto che $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\pi$, esattamente.

GeoMag, e vi accorgerete facilmente che il cubo è il più difficile da far stare assieme, con l'eccezione del dodecaedro.

Già, il dodecaedro. Mancava qualcosa...

Platone gli dedica uno spazio tutto particolare: infatti, il dodecaedro è stato utilizzato per "ricamare tutte le figure da esso" e definire "l'intero universo" attraverso un ulteriore elemento, la quintessenza. Voglio sperare apprezziate la bellezza di questa costruzione: essendo i triangoli della quintessenza incommensurabili con gli altri, la struttura dell'universo è particolarmente stabile (e non è fatto con il GeoMag).

Bene, il resto sui solidi platonici lo consideriamo cultura generale, e facciamo un passo avanti.

In quattro dimensioni la cosa si complica, anche perché sarebbe il caso di trovare una terminologia che ci permetta di generalizzare; un buon metodo può essere quello di identificare le componenti con un unico nome, ad esempio ***celle***: quindi il pentagono è formato da **5** celle (segmenti), un cubo da **6** celle (le facce) eccetera; dal numero si presume di essere in grado di capire che "forma" hanno le celle, qualunque cosa voglia dire questo.

Bene, otteniamo un sistema come quello schematizzato in ***Tabella 2***.

Nome	Celle	Forma	Note
Ipertetraedro	5	Tetraedri	Noto anche come 4-simplesso
Ipercubo	8	Cubi	Noto (nella fantascienza) come tesseratte
Iperottaedro	16	Tetraedri	Noto come 4-cross-politopo
Iperdodecaedro	120	Dodecaedri	
Ipericosaedro	600	Tetraedri	
24-celle	24	Ottaedri	Non ha equivalenti in tre dimensioni

Tabella 2 - Gli ipersolidi

Non mi aspetto che ci crediate tutti e subito; sarebbe interessante trovare un modo non dico per calcolare, ma almeno giustificare molto vagamente tutto questo; esiste, anche se non è una meraviglia.

Prima facciamo una premessa; quando avete un solido tridimensionale "aperto" sul piano, vi accorgete che le facce concorrenti in un vertice non occupano tutto il piano; resta uno *spazio non occupato* che è quello che ci permette di ripiegare il tutto in tre dimensioni e ottenere il solido; se tutto lo spazio fosse occupato, avremmo una pavimentazione (o, se preferite, avremmo "saturato il piano"); ad esempio, i tre triangoli del tetraedro occupano **180** gradi lasciandone liberi **180**, i quattro dell'ottaedro ne occupano **240** e ne lasciano liberi **120** eccetera; sono questi spazi liberi che ci permettono di "richiudere" il tutto, e si vede facilmente che *minore è lo spazio, più grande verrà il solido*. Fine premessa, cominciamo.

Partiamo da un ***cubo*** e schiacciamo le facce in modo tale che si incontrino al centro del cubo; alla fine ottenete un aggeggio cubico con, sulle facce, sei buchi piramidali a base quadrata e, a questo punto, è abbastanza immediato pensare di cacciarci dentro un ***ottaedro***, che ci sta giusto giusto. Ora, siccome il cubo satura lo spazio, ci potrebbe venire l'idea di andare avanti così e vedere se riusciamo a saturare lo spazio di ottaedri; purtroppo, non si riesce, ci avanza un buco[23]. *Che è quello che ci serve per ripiegare lungo*

[23] Nota a margine che non c'entra nulla: se volete saturare lo spazio, appiccicate all'ottaedro un tetraedro; con la roba strana che vi viene fuori ci riuscite.

la quarta dimensione (qualsiasi romanzo di fantascienza vi spiega come fare); quattro "esa-ottaedri" di questo tipo vi permettono di costruire il nostro aggeggio, che è quindi un ***24-celle*** (ottaedriche) che si incontrano sei a sei nel centro del nostro cubo. Oibò, siamo riusciti a cominciare proprio con quello che non esiste nel "mondo di qua".

Proviamo lo stesso trucco con un ***tetraedro***, schiacciando le facce e inserendo in ogni buco (piramidi triangolari, questa volta) un altro ***tetraedro***. Ne piazziamo quattro, e ci accorgiamo che avanza *un mucchio* di spazio; a occhio, ci starebbe un altro tetraedro... e infatti ci sta, ripiegando in quattro dimensioni: *et voila*, il ***5-celle***, noto anche come 4-simplesso, con quattro celle che si incontrano in ogni vertice (il centro del tetraedro schiacciato).

Certo che di spazio ce n'era proprio tanto; infatti se schiacciamo le facce di un ***tetraedro*** riusciamo anche a mettere lo spigolo di un ***cubo***! Qui non ci sta un altro cubo, ma con due di questi aggeggi (e opportuna piegatura quadridimensionale) otteniamo l'***8-celle***, altriementi noto come ipercubo con quattro cubi che si incontrano in ogni vertice-tetraedro.

Lo spazio nel ***tetraedro*** è tale che riusciamo anche a metterci lo spigolo del ***dodecaedro***; adesso lo spazio diventa pochino e di aggeggi del genere ce ne servono trenta da "4-piegare" per ottenere il ***120-celle*** che si incontrano a quattro a quattro in ogni vertice.

Ormai dovreste aver capito il trucco: si prende un solido con un certo numero di spigoli per faccia e ci si incastra dentro un altro solido per cui in un vertice concorrano lo stesso numero di facce e si guarda se avanza spazio. Quindi, se proviamo a schiacciare un ***ottaedro*** e a piazzarci in ogni piramide un ***tetraedro***, dovremmo ottenere qualcosa di sensato. Infatti, questo è il ***16-celle***, ossia il 4-cross-politopo le cui facce tetraedriche si incontrano otto a otto nei vertici.

L'ultimo passaggio del giochino (adesso che sapete come funziona diventa noioso) consiste nel partire da un ***icosaedro*** e in ogni piramide ottenuta inserire un ***tetraedro***; qui lo spazio è decisamente scarso, ma trenta di questi aggeggi sono assemblabili attraverso iperpiegatura e il risultato finale è il ***600-celle***; essendo venti le facce dell'icosaedro, venti celle si incontrano in un vertice.

Comunque, io non sono proprio sicuro di aver capito "come sono fatti" questi aggeggi; il bello di certi rami della matematica, fortunatamente, è che le cose si possono capire anche in un altro modo.

Ve li ricordate i quaternioni? Anche se li abbiamo trattati per altra via, credo sia stato abbastanza chiaro che sono dei vettori in uno spazio quadridimensionale e $(1, i, j, k)$ formano una base di questo spazio.

Partiamo dal ***24-celle***; un rapido controllo vi mostra che ha anche ***24 vertici*** e, siccome i suoi vertici sono su una 4-sfera, possiamo pensare ai vettori che uniscono i vertici all'origine (il suo centro) come a un insieme di quaternioni unitari; questi aggeggi rappresentano la base attraverso cui possiamo generare dei simpatici aggeggi definiti da

$$a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \left\{ \frac{Z}{2} \right\}, \qquad \texttt{[5.1]}$$

ossia con coefficenti interi o seminteri; se vi piacciono i paroloni, sono i *quaternioni interi di Hurwitz*, chiusi sotto la moltiplicazione; quindi, formano sottogruppo rispetto ai quaternioni unitari.

Alcune veloci considerazioni dello stesso tipo vi portano a scoprire che, se parliamo del ***16-celle***, arriviamo a conclusioni simili, solo che questa volta la regola sui coefficienti è abbastanza deludente; uno e uno solo vale ± 1, mentre gli altri valgono **0**; l'aggeggio ha **8** vertici, quindi **8** elementi ed è noto semplicement come "il gruppo dei quaternioni".

Un po' meno veloci considerazioni sul ***600-celle*** vi permettono di appurare che i coefficienti devono appartenere al "Campo Aureo" (*Golden Field*, per le sue evidenti connessioni con la sezione aurea), ossia essere nella forma:

$$x + \sqrt{5}y \qquad [5.2]$$

altrimenti noti come *icosiani* e (anche loro) formano gruppo.

Per gli altri, niente da fare. Non pretendo che la cosa sia più chiara, ma forse aiuta.

Il passaggio alle dimensioni superiori è abbastanza deludente; infatti, qui esistono solo ***tre*** solidi regolari:

- L'***n-simplesso***, parente del tetraedro con ***n*+1** facce ***(n-1)-simplessiche***;
- L'***n-cubo***, derivato dal cubo con **2*n*** facce ***(n-1)-cubiche***,
- L'***n-cross-politopo***, derivato dall'ottaedro con $\mathbf{2^n}$ facce ***(n-1)-simplessiche***.

Fatemi risparmiare le "n": se al centro delle facce di un simplesso mettete un vertice e li unite, ottenete un nuovo simplesso; se fate la stessa cosa con un cubo, ottenete un cross-politopo e viceversa, ossia il simplesso è sempre il duale di se stesso e il cubo e il cross-politopo sono duali tra loro; nelle quattro dimensioni, il 24-celle è anche lui autoduale (per questo ha 24 vertici) e il 120-celle e il 600-celle sono duali tra loro.

A questo punto, sarebbe interessante sapere cos'ha di speciale lo spazio quadridimensionale, per averne così tanti (e anche il bidimensionale, giacchè ci siamo).

Beh, la cosa non mi è molto chiara, ma è legata al fatto che in pochi n-spazi la sfera unitaria è anche un gruppo: succede solo nelle dimensioni **1**, **2** e **4**.

Nel caso **1**, la sfera unitaria è rappresentata dai punti $\{1;-1\}$; in **2** dimensioni abbiamo i numeri complessi a modulo unitario, ma vi ricordate anche voi i guai di Hamilton nel cercare un aggeggio simile in tre dimensioni; è dovuto saltare al **4** (con i quaternioni) e vi ricordate che da lì non si schioda: gli ottonioni cominciano a comportarsi decisamente male.

Adesso non lamentatevi che da lì in poi è tutto noioso; ci sono un paio di cose piuttosto interessanti...

Ma questa è un'altra storia.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms