Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 081 - Ottobre 2005 - Anno Settimo

NEW HORIZONS MISSION
Shedding Light on Frontier Worlds

Participation Certificate

Presented to

Rudi Mathematici

On August 31, 2005

Thank you for joining the first mission to the last planet! A compact disc bearing your name will be included on the New Horizons spacecraft, set for the first voyage to a new class of planets on the solar system's farthest frontier.

Come with us as we complete the reconnaissance of the solar system and unlock the secrets of Pluto, its moon, Charon, and the Kuiper Belt.

Certificate No. 308024

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovich Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 080 ha diffuso ***764*** copie e il **18 settembre** alle **06:45** per Google eravamo in **683** pagine.

Finestra di lancio: 11 Gennaio - 14 Febbraio 2006. Fly-by su Plutone: tra il 2015 e il 2020. E gli amici australiani smetteranno di essere "i lettori più lontani".

1. Idee ad Improbabilità Infinita

"I numeri sono libera creazione della mente umana"

Quando il capitano Kirk apre con un gesto deciso ed elegante del polso il suo trasmettitore portatile e, guardando in tralice il Signor Spock, ordina con pacata autorevolezza: "Scott, ci tiri su", compie una lunga serie di azioni importanti. Senza la pretesa di elencarle tutte, possiamo mettere in conto almeno le seguenti: svolgimento di un'azione diretta nella trama dell'avventura, marcamento di un cambio di scena nella sceneggiatura, attuazione di ipotesi tecnologico-scientifica, stimolazione della corteccia cerebrale del marketing management di aziende di telefonia mobile, risoluzione immediata di problemi di budget.

Alcune di queste sono del tutto evidenti: stretto nella sua lucida uniforme (che grazie alle magie delle previsioni retroattive riesce ad essere sia futuristica che disperatamente fuori moda), Kirk avrà certo appena risolto una crisi su qualche pianeta con l'aiuto del fido scienziato vulcaniano, e risalendo all'interno dell'Enterprise chiude, se non tutto l'episodio di Star Trek, quantomeno una fase importante della sceneggiatura. Nel contempo, introduce il fantascientifico (e di conseguenza scientificamente affascinante e tecnologicamente misterioso) processo del teletrasporto. I sagaci strumenti di Scott riusciranno in qualche maniera a scomporre le cellule, le molecole, gli atomi, forse direttamente anche i quark e i leptoni che costituiscono il corpo dei nostri eroi e a ricomporli ordinatamente nella plancia di comando dell'astronave. Come questo sia possibile non ci è naturalmente dato sapere: è saggia abitudine della fantascienza usare la prima parte del suo composito nome per inguaiare a dovere la seconda. Talvolta qualche autore si sbilancia ad ipotizzare dei possibili principi scientifici reali come base costituente dell'artificio narrativo (non c'è Macchina del Tempo che non tiri in ballo la Relatività Ristretta, ad esempio), ma questo passaggio non è obbligatorio. E in fondo è meglio così, perché se gli autori di fantascienza dovessero essere troppo vincolati alle conoscenze scientifiche attuali, rischieremmo di perderci delle belle avventure a causa di misere serie ancora divergenti o di fusioni fredde mal riuscite. Ciò non di meno è inevitabile richiedere agli sceneggiatori un certo grado di coerenza interna: se il teletrasporto funziona così bene, a cosa diavolo serve l'Enterprise? I nostri eroi non potrebbero farsi teletrasportare direttamente da una ospitale base del Texas fino al giusto indirizzo del settimo pianeta di Aldebaran?

Sono molte le ragioni (fantascientifiche) che possono giustificare l'apparente contraddizione: ad esempio, potrebbe sussistere qualche vincolo che forza il teletrasporto di Scott a funzionare solo a corto raggio; oppure magari è necessaria una sorta di "focalizzazione" visiva, e l'ingegnere non può "tirare su" i nostri se prima non li inquadra nell'obiettivo di una qualche futuristica telecamera. Il punto essenziale è comunque che un telefilm ha regole interne più stringenti di quelle che possono liberamente immaginare gli autori della sceneggiatura: la scena menzionata all'inizio ha certo un suo fascino filmico e narrativo, e sospettiamo fortemente che i signori della Motorola ce l'avessero bene in mente quando, qualche lustro fa, misero in commercio il loro telefono cellulare piccolo e richiudibile proprio come il trasmettitore del Capitano Kirk: non abbiamo il conforto di prove sicure, ma già l'aver chiamato quel prodotto "Star Tac" ci sembra che basti a palesare il debito di figliolanza con il dispositivo di Star Trek. Soprattutto, un film di fantascienza ha dei costi da rispettare e delle regole di spettacolo da mantenere: è inconcepibile che un'astronave colpita non esploda senza il boato regolamentare (e spesso, con tanto di fumo e fiamme), anche se non è molto chiaro come facciano le onde sonore ad attraversare il vuoto cosmico dello spazio profondo; alla stessa maniera, è decisiva l'interferenza sulla sceneggiatura imposta dalla produzione

("Settantamila dollari per un paio di scene di atterraggio e decollo da un pianeta? Ma siamo impazziti? Inventate un sistema più economico!")[1].

La penna (o meglio la tastiera) degli autori di romanzi ha meno vincoli di quella degli sceneggiatori, ma non per questo gode di libertà assoluta: l'atroce lentezza dell'insuperabile velocità della luce costringe a particolari virtuosismi anche i narratori che non devono fare i conti con l'avarizia dei produttori di Hollywood. Si passa così dai generici "Via, più veloci della luce!" urlati da Superman (che non ha bisogno di spiegare a noi terricoli come ci riesca), ad artifici più consolidati, quali il celeberrimo "salto nell'iperspazio" che i primi[2] autori giustificavano in maniera più o meno blanda, mentre i più recenti si limitano a considerare uno standard acquisito usandolo a mani basse. L'idea di base è che il continuum spaziotemporale relativistico avrà certo le sue ferree regole, solide quanto le pareti divisorie d'un complicato labirinto bidimensionale, ma nessuno impedisce alla fantasia fantascientifica di immaginare di poter fare un salto in una dimensione superiore, buttare uno sguardo in basso (come se potessimo salire sull'asse zeta e guardare dall'alto il labirinto di cui sopra) e ridiscendere direttamente nella destinazione desiderata, a dispetto dei lunghi e stretti corridoi del dedalo. È un artificio talmente usato che nella letteratura fantascientifica è ormai difficile trovare delle alternative,: in genere, o si salta nell'iperspazio o ci si appella a poteri mediatici particolari, che in genere sono più psichici che tecnologici[3]. In fondo Harry Potter non dovrebbe aver bisogno di un motore positronico, se un bel giorno decidesse di farsi un giro all'altro capo della Galassia.

Esiste però una descrizione sorprendente d'un sistema di trasporto alternativo sia al teletrasporto che al salto nell'iperspazio che si basa su principi fisici non meno probabili dei classici artifici della science fiction: ha il solo difetto di essere descritto in una serie di libri spudoratamente divertenti e dissacranti, e forse a causa di ciò non viene preso in debita considerazione "scientifica"[4].

Tutto nasce dall'equazione di Schrödinger. L'equazione base della Meccanica Quantistica descrive il comportamento placidamente ondulatorio d'una particella libera, ma l'accorto inserimento della costante di Planck al suo interno genera delle sorprese quando la particella in esame non è più libera, ma sottoposta a dei vincoli. Non appena si introducono quest'ultimi, l'equazione riduce drasticamente la libertà ondulatoria della nostra particella e la limita a dei valori ben definiti, "quantizzati", di energia. E di vincoli, nella vita delle nostre povere particelle, ce ne sono a bizzeffe: avendo queste l'insana abitudine di interagire le une con le altre (e con diversi tipi di interazione, pure), è inevitabile finire con l'analizzare il comportamento della nostra eroina quando è in prossimità di sistemi di altre particelle. Tutto ciò si traduce, dal punto di vista degli studenti, nello studio dell'Equazione di Schrödinger in particolari situazioni fisiche (barriere o buche di potenziale, o altre situazioni del genere); e in termini di illustrazioni didattiche conduce ad una pletora di grafici pieni di buche da golf, di montagnole e grandi muraglie stilizzate, diligentemente decorate con righe orizzontali e parallele (i livelli di energia), che popolano le pagine dei testi di fisica quantistica e nucleare. Questi disegni

[1] I settantamila dollari sono una nostra pura licenza narrativa, ma che il teletrasporto di Start Trek discenda da problemi di budget è pura verità. Questa e molte altre divertenti osservazioni (per lo più di natura scientifica) le trovate nel libro di Lawrence M.Krauss "La Fisica di Start Trek" (*"The Physics of Star Trek"*), Longanesi, 1996. Euro 14,46.

[2] Per quel che ci ricordiamo il primo autore a farne uso potrebbe essere stato Isaac Asimov, nel ciclo della Fondazione. Ma non ne siamo affatto sicuri, e a dire il vero in redazione c'è discordanza di opinioni. Il GC è convinto che John Campbell Jr. lo avesse già introdotto in "Aarn Munro il Gioviano", ad esempio.

[3] Il nostro maggiore esperto nel campo (sempre il GC) ritiene che "difficile" sia parola un po' troppo impegnativa: all'appello rispondono in fretta la "propulsione libera" di E.E."Doc" Smith, la "Blieder" di Eric Frank Russell, e probabilmente molte altre ancora.

[4] Insomma, "scientifica" nel senso fantascientifico del termine. Non che sia più realizzabile del salto nell'iperspazio: ma riteniamo che non sia neppure "meno realizzabile".

dovrebbero mostrare al discente perché la pallina in fondo alla buca da golf non riesca a saltare fuori, o cosa potrebbe invece succedere se davvero riuscisse alla fine a superare la muraglia. La questione potrebbe apparire non troppo affascinante[5], ma ci sono almeno un'altra coppia di fattori che la rendono decisamente avvincente. Il primo fattore è l'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica, che introduce un'alea permanente e decisamente intrigante nel rigore matematico: le equazioni riescono a dirci sempre quali sono le probabilità di posizione d'una particella, ma si rifiutano testardamente di darcene la certezza assoluta. Possiamo pertanto anche calcolare quale sia la probabilità che la particella si trovi non in fondo alla nostra buca da golf (dove per altro l'abbiamo messa noi per definizione), ma dall'altra parte dell'Universo. La magia sta nel fatto che questo valore è quasi sempre infinitamente piccolo, ma pur sempre diverso da zero, il che è esattamente quanto basta ai bravi autori di fantascienza.

L'altro elemento importante nell'economia del brivido quantistico è quello che autorevolmente va sotto il nome di "Principio di Corrispondenza": Niels Bohr lo introdusse per dirimere una questione sull'irradiamento delle cariche accelerate, ma in buona sintesi il principio afferma che quello che vale per la MQ deve valere anche per la fisica classica (e viceversa), fatti salvi i problemi di scala. Le conseguenze delle due condizioni sono esplosive: l'interpretazione probabilistica applicata ad una particella che si trovi a sinistra d'una barriera di potenziale fa in modo che esista una probabilità ben precisa che essa possa superarla e comparire qual fantasma alla sua destra, pur senza mai avere l'energia necessaria a superarla; non a caso la situazione è descritta con l'eloquente nome di "effetto tunnel". Il Principio di Corrispondenza induce invece immediatamente negli studenti il desiderio di capire che probabilità abbiano di riemergere sani e salvi a Chamonix se si lanciano a bordo della Panda contro il massiccio del Monte Bianco dalle parti di Courmayeur[6]. Il risultato del calcolo è tale da dissuadere qualsivoglia verifica sperimentale, ma ciò che in ultima analisi è veramente istruttivo è che tale probabilità, per quanto spudoratamente piccola, è ancora una volta finita e diversa da zero.

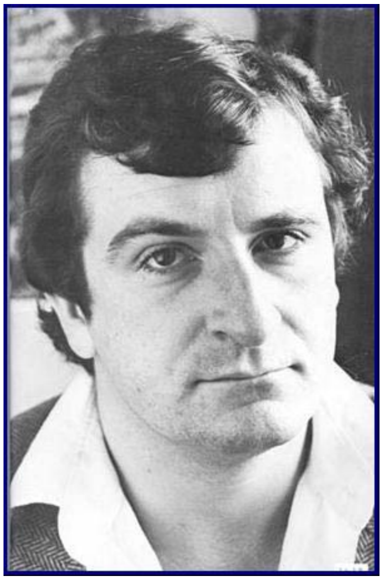
Quando il lettore incontra per la prima volta la Cuore d'Oro nelle pagine della "Guida Galattica per gli Autostoppisti" di Douglas Adams, non è detto che si renda subito conto che la splendida astronave viaggi per la Galassia grazie a principi fisici del tutto analoghi a quello sopra descritto. Normalmente è distratto dal fatto che la forma della nave è quella di una scarpa da tennis, oppure che essa sia il risultato d'un furto perpetrato da un improbabile Presidente della Galassia, o magari deve ancora riprendersi dallo shock causato dal fatto che l'amato pianeta Terra è stato spazzato via a pagina 29 (della prima edizione italiana) per consentire la costruzione d'una tangenziale spaziale[7]. Eppure la Propulsione ad Improbabilità Infinita si ispira sostanzialmente a principi quantistici reali almeno tanto quanto il Salto nell'Iperspazio si ispira a pieghe teoriche della Relatività Generale. Il fatto che l'Improbabilità Infinita venga poi utilizzata nella storia anche per usi complementari quali sfuggire alla minaccia di due missili termonucleari (trasformandoli uno in un capodoglio e l'altro in un vaso di petunie), o per salvare due protagonisti da morte certa nel vuoto interstellare, mostra solo la genialità del "principio di economia narrativa" attuato dall'autore.

---

[5] E invece lo è, e molto anche. Se non lo sembra, è solo colpa di chi scrive (e un po' anche del fatto che non è facilissimo raccontare la meccanica quantistica in venti righe).

[6] Il calcolo diventa interessante solo se si mette come condizione al contorno quella di evitare accuratamente di imboccare l'ingresso dell'esistente traforo autostradale.

[7] Shock causato solo dal fatto che in fantascienza, se la Terra è protagonista del racconto, essa finisce di solito per trionfare, o al massimo con l'essere tragicamente distrutta alla fine della saga, non certo all'inizio e per futili motivi. Ma è comunque shock ingiustificato da parte del lettore: la vera tristezza arriva più tardi, quando si scopre che il nostro pianetucolo è in realtà il più grande calcolatore dell'Universo, costruito su commissione per trovare la Domanda Fondamentale alla Vita, all'Universo e a Tutto Quanto. E che aveva appena finito il programma e risolto la questione (ma senza aver la possibilità di annunciare la cosa), giusto un attimo prima d'essere ricondotto al nulla assoluto.



Douglas Noel Adams ha generato un'autentica mitologia moderna, con la sua saga[8] della Guida Galattica per Autostoppisti, e la sua popolarità trascende ampiamente i limiti ristretti del pubblico della fantascienza. Per quanto noto soprattutto nei paesi di lingua anglosassone, la sua fama è diffusa in maniera estensiva in quasi ogni gruppo di persone amanti della scienza, al punto che Wikipedia dedica voci non solo allo scrittore in sé, ma anche a molte delle idee scaturite dai suoi romanzi. Del resto, è sufficiente avere un po' di familiarità con la serie della Guida Galattica e un buon motore di ricerca per stupirsi di quanto abbiano proliferato alcune sue invenzioni: non è quasi più possibile chiedere "un numero a caso" senza che ci si senta inevitabilmente rispondere "Quarantadue", e su tale numero (che indubitabilmente è, per gli ignari non-iniziati, la Risposta Fondamentale alla Domanda Fondamentale dell'Universo) sono stati versati i proverbiali fiumi di inchiostro; sono centinaia i siti che ne discettano, e almeno una decina quelli che hanno direttamente "42" nella URL. Uno dei primi e più famosi strumenti per la traduzione online disponibili in rete si chiama "Babel Fish", e con buona pace della Torre di Babele di biblica memoria, il nome discende direttamente dall'animaletto traduttore che ogni bravo cittadino della Galassia alleva nel suo orecchio per poter comprendere le lingue aliene. Uno dei più potenti e celebri calcolatori è stato battezzato "Deep Thought"[9], e "Pensiero Profondo" è un elemento fondamentale della saga di Adams. Rispettabili ricercatori universitari e insospettabili professionisti mostrano una strana patologia nei confronti del Giovedì, e per di più se ne vanno orgogliosamente in giro con un asciugamani celato nella ventiquattrore, specialmente durante un ben preciso giorno dell'anno (il "Towel Day[10]"). E la lista potrebbe davvero continuare a lungo[11].

[8] Riepilogo ad uso dei fortunati che ancora non la conoscono: "Guida Galattica per gli Autostoppisti" (The Hitch Hiker's Guide to the Galaxy), "Ristorante al Termine dell'Universo" (Restaurant at the End of the Universe), "L'Universo, la Vita e Tutto Quanto" (Life, the Universe, and Everything", "Addio e Grazie per Tutto il Pesce" (So Long and Thanks for All the Fish), "Praticamente Innocuo" (Mostly Harmless), tutti pubblicati a suo tempo da Urania e ampiamente ripubblicati (almeno i primi tre). Notevole anche il ciclo di Dirk Gently, investigatore olistico, del quale però non ci risulta mai tradotto il titolo "The Long Dark Tea-Time of the Soul" (con Thor che si irrita molto al check-in di Heatrow), come forse non ha mai avuto traduzione italiana "Titanic", uno dei suoi ultimi romanzi (ma è anche un gioco). È invece reperibilissimo "Il Salmone del Dubbio", raccolta non troppo organizzata degli ultimi scritti dei Adams, ma considerata quasi un testamento spirituale dai fans.

[9] Si tratta del papà di "Deep Blue", celebre per essere stato il primo computer in grado di battere un campione del mondo di scacchi (Garry Kasparov). "Deep Thought" fu progettato alla Carnegie Mellon University, e quando il progettista principale (Feng-hsiung Hsu) passò all'IBM, la sua evoluzione perse il "pensiero" per assumere il "colore" del marchio della multinazionale. L'ulteriore evoluzione di Deep Blue venne ufficiosamente chiamata "Deeper Blue".

[10] Quest'anno il Towel Day era il 25 Maggio, e la data è confermata anche per il 2006. Il vostro misero narratore ha realmente intercettato un palese indizio di affetto e stima da parte del burbero Gran Capo di RM quando questi, nel Maggio scorso, gli ha donato uno splendido piccolo asciugamani arancione da borsa. Naturalmente, lo porto sempre con me, sopra il laptop e vicino al coltellino svizzero.

[11] Tanto per restare nel nostro piccolo mondo di RM, l'uscita del film derivato dalla Guida Galattica per Autostoppisti ci è stato segnalato per tempo da almeno tre RMers (prima ancora che uscisse l'edizione italiana), cosa che probabilmente spiega come mai non sembra essere stato speso neanche un centesimo in promozione tradizionale per la pellicola. Del resto, il film è probabilmente in grado di essere apprezzato solo dai fan che hanno letto i romanzi, e la produzione deve aver fatto affidamento sul passaparola. Ma, film a parte, la saga di Douglas Adams sembra essere un fil rouge sotterraneo dato per scontato in qualsiasi comunità anche solo vagamente scientifica. In una sola giornata di Settembre, senza preavviso né accordo, ci sono arrivate: da Alice l'informazione che aveva terminato la lettura della saga, da PuntoMauPunto una recensione sul suo blog; da un vecchio compagno d'università un'elegia a favore della regia del film. E, proprio quando avevamo deciso di

Se il successo di Adams è indubbiamente dato dalla sua capacità di essere divertente, che il suo pubblico sia in qualche modo "riconoscibile" dipende probabilmente dal fatto che sono davvero rari gli autori che riescono a divertire con la scienza. Per quanto assurde e paradossali possano essere le sue trovate, il lettore non ha difficoltà ad intuire che l'autore stesso è un "dilettante informato", con in più il talento invidiabile di saper estrarre il senso del comico dalle fantasie scientifiche. Occorre essere informati per conoscere l'esistenza del moto disordinato degli atomi causato dall'agitazione termica; occorre essere fantasiosi per immaginare che nel futuro questo moto disordinato possa essere in qualche maniera governato e indirizzato; bisogna essere dei geni della narrativa per ipotizzare che le prime applicazioni della scoperta siano i tentativi degli studenti ricercatori di far muovere all'insù tutte le molecole delle gonne delle compagne di corso.

Adams divenne[12] rapidamente noto e apprezzato anche negli ambienti della scienza "seria", ed è divertente leggere di come un entusiasta della scienza riuscisse a cambiare ruolo e a diventare una star proprio per coloro che profondamente ammirava[13]. Uno dei suoi migliori amici era Richard Dawkins, il biologo della teoria del "gene egoista", che nell'elogio funebre rivela che notizia della morte di Douglas gli giunse proprio il giorno in cui veniva ufficializzata la sua ammissione alla Royal Society; e di come l'ambìto coronamento d'una vita dedicata alla scienza gli risultasse terribilmente sminuito di fronte alla perdita di un amico come Adams. Dawkins racconta poi della sorprendente capacità che "Doug" aveva di trattare in maniera divertente argomenti tutt'altro che banali e di grande importanza proprio per "la vita, l'universo e tutto quanto", come il celebre apologo della pozzanghera:

> *"Immaginate che una pozzanghera si svegli al mattino e cominci a pensare: «Questo nel quale mi trovo è un mondo davvero interessante: il buco nel quale mi trovo è stupefacente, mi si adatta abbastanza bene, visto? Anzi, a dirla tutta mi si adatta incredibilmente bene, e questo dimostra che è stato creato apposta per contenere me!». Quest'idea è così potente che, sebbene il sole cominci ad alzarsi nel cielo, l'aria a riscaldarsi e, gradualmente, la pozzanghera cominci ad asciugarsi e a diventare sempre più piccola, lei continui freneticamente ad appellarsi alla nozione che tutto sta andando bene, perché quel mondo è stato creato appositamente per contenerla: e quando alla fine arriva il momento fatale in cui la pozzanghera svanisce del tutto, questo la coglie abbastanza di sorpresa. Credo che questa storia debba esserci di monito."*

È un esempio, purtroppo abbastanza raro,di quello che si potrebbe definire "laico senso comune". Adams era stupito dal fatto che di alcune cose fosse "difficile" parlare, perché una sorta di specifica cortina sembrava calarsi sugli argomenti fondamentali: si entrava fin troppo facilmente in territori in cui fede e ragione entrano rapidamente in conflitto, e si rattristava del fatto che, probabilmente per un eccesso di "political correctness", fosse davvero complicato mettere in discussione le cose realmente importanti dei nostri tempi.

---

riposarci sfogliando DEV (una rivista molto tecnica per programmatori seri che il sottoscritto non dovrebbe leggere perché l'ultima vera riga di programma l'ha scritta dieci anni fa: ma siccome ci trova anche le pagine di considerazioni e i giochi matematici di Luigi, RMer e ottima penna, quel sottoscritto di cui sopra à ben contento di comprarla), troviamo che proprio di Adams e delle sue celebri tre leggi Luigi ha deciso di scrivere questo mese. Sono cose come queste che fanno pensare che dedicare due o tre pagine di "compleanno di RM" a Douglas Adams sia più o meno come cercare di spiegare la sabbia ai beduini.

[12] Il passato remoto è necessario: Adams è morto nel 2001, all'età di 49 anni. Che ci crediate o meno, la maggioranza dei suoi lettori ha confessato, non appena conosciuta la notizia, di aver cercato di calcolare l'età del nostro al momento della morte, temendo fortemente che fosse di 42 anni.

[13] Un suo celebre intervento al "Digital Biota 2" comincia con l'osservazione: "Questo discorso era stato inizialmente programmato come dibattito solo perché ero un po' emozionato all'idea di venire qui: non avevo tempo di preparare alcunché e, in un consesso di così alti luminari, mi chiedevo cosa mai avrei potuto dire. Ma un paio di giorni qui mi sono bastati a capire che non siete altro che un mucchio di tizi normali…". Proseguiva poi con una delle sue battute di presentazione preferite: "C'è una cosa che non ha certo alcun significato, ma di cui vado estremamente orgoglioso: sono nato a Cambridge nel 1952 e le mie iniziali sono DNA" [*la doppia elica dell'acido desossiribonucleico è stata scoperta nel 1952 a Cambridge*].

L'aneddoto della pozzanghera serviva solo a spiegare la posizione di chi, come lui, riteneva che se è l'uomo ad essere perfettamente adattato alla Terra e non viceversa (come diversi libri sacri sembrano sostenere), forse non è il caso di fare troppo affidamento su poteri e grazie esterne per prendersi seriamente cura del nostro pianeta. Adams non era certo un teista, anzi, ma le cose che diceva – le poche volte che parlava seriamente – non dovrebbero suonare blasfeme alle orecchie di nessuno. E, tanto per contrastare un po' la comune opinione che tutti gli atei siano privi di ricchezza spirituale e di afflato poetico, riportiamo anche questo altro estratto:

> *"Il mondo è così totalmente disordinato, complesso, ricco e strano da essere assolutamente incredibile. L'idea che una tale complessità possa sorgere non solo da una totale semplicità, ma probabilmente dal nulla assoluto è l'idea più favolosa e straordinaria che si possa concepire. E quando si percepisce anche soltanto vagamente come tutto questo possa essere accaduto, beh, è una sensazione semplicemente meravigliosa. E l'opportunità di trascorrere 70 o 80 anni di vita in un tale universo la considero tempo ben speso, per quel che mi riguarda."*

Adams era un'inguaribile ottimista, e il tempo concessogli è stato decisamente inferiore ai settanta od ottanta anni di vita che citava. Ma gli sopravvivono i suoi libri e, come abbiamo visto, sopravvivono molte sue idee, che sembrano aver trovato vita indipendente anche dai romanzi che inizialmente le contenevano. Questa sopravvivenza delle idee, abbastanza curiosamente, riconduce di nuovo al suo amico Dawkins: forse spaventato (o magari solo rattristato) dalla crudeltà della sua teoria del "gene egoista" che riduce gli esseri viventi a poco più di mere macchine biologiche progettate per la sopravvivenza dei geni, sostiene in uno dei suoi saggi che l'avvento delle "civiltà" è caratterizzato dalla diffusione e prolificazione dei "memi", che altro non sono se non le "idee condivise". A differenza dei suoi lavori di biologia, questa teoria è squisitamente filosofica: il suo fascino sta proprio nel prefigurare i prodotti essenziali della mente umana, ovvero le idee, come compagni e ad un tempo concorrenti con i geni nella lotta per la sopravvivenza. Le idee si trasmettono e si evolvono in maniera più rapida di quanto riescano a fare i geni, e cambiano l'ambiente in maniera forse più radicale: a ben pensarci, tutta la nostra esistenza è marcata da memi fortissimi e condivisi in maniera così profonda da non apparire più come creazioni, ma come entità oggettive e indipendenti. I sentimenti, i principi, le regole, il denaro, il potere, le scienze e le religioni possono rientrare tutte nella definizione di meme, lasciandone fuori solo i meccanismi base della mera sopravvivenza biologica.

Più di altre discipline, la matematica è essenzialmente scienza di idee: libera dalla necessità di confrontarsi con il mondo fisico (anche se non disdegna affatto di farlo), è un territorio perfetto per i cacciatori e creatori di idee. Tra i matematici esistono razze diverse di indagatori: ci sono coloro che affrontano problemi difficili e complessi, quelli che cercano raccordi e tratti d'unione tra una parte e l'altra della teoria, e ci sono anche coloro che scavano a fondo nelle idee primigenie, alla ricerca dell'essenza ultima dei fondamenti: le idee madri delle idee, in un certo senso. Non che questa sia una categoria di matematici più meritevole delle altre: alla fin fine, piantare un nuovo seme è di importanza fondamentale, ma resta comunque attività sterile se non c'è chi poi si prenda cura del germoglio. È però spesso sorprendente come l'abitudine a considerare nota e ormai acquisita un'idea conduca a sorprese quando si tenti di verificarne i principi di base.

Un matematico interessato a questo arduo aspetto della sua disciplina è stato Julius Wihelm Richard Dedekind, nato a Brunswick il 6 Ottobre 1831. Brunswick (o meglio Braunschweig, per restare fedeli alla grafia tedesca) è la città che nel 1777 dette i natali anche a Gauss, e che sembra pertanto essere ottimo vivaio per le menti matematiche. Curiosamente, il legame tra Dedekind e Gauss è ancora più stretto di quello dato dalla mera cittadinanza: si incontrarono infatti a Göttingen, dove Gauss insegnava e Dedekind arrivò come studente. Il fatto che Richard fosse poi proprio l'ultimo di quelli che oggi chiameremmo "tesisti" del principe dei matematici colpisce soprattutto a causa dell'estensione temporale coperta da questo rapporto docente-discente. Gauss nasce dodici anni prima della Rivoluzione Francese, Dedekind morrà durante la Prima Guerra Mondiale: quasi un secolo e mezzo di densissima storia europea coperti da un solo passaggio di consegne matematico.

Se la figura di Gauss risplende per la grandissima fama che egli ebbe durante tutta la sua carriera, quella di Dedekind è caratterizzata quasi dall'esatto opposto. È indubbio che Richard venne rapidamente considerato uno dei più grandi matematici del suo tempo, ma la sua vita privata è sempre rimasta in secondo piano, al punto che si lamenta ancora l'assenza di un "biografo ufficiale" di Dedekind, o quantomeno di una biografia dettagliata al di fuori di quelle accademiche redatte in tedesco. Esiste un esempio clamoroso a conferma di questa sorta di "invisibilità": l'edizione del 1904 del *Calendario dei Matematici*[14] di Teubner riportava puntigliosamente la data di morte di Dedekind: 4 Settembre 1899. Se non che il nostro era invece ancora brillantemente in vita, e si divertì moltissimo nel leggere la data della sua dipartita: prese carta e penna e indirizzò all'editore un messaggio affermando che il giorno e il mese potevano forse essere anche giusti[15], ma l'anno era certo sbagliato: in quella data fatidica, a giudicare da quanto riportato nel suo diario, aveva anzi avuto una animata e piacevole conversazione con il suo amico Georg Cantor.

L'episodio è indicativo almeno per due aspetti: il primo è proprio l'assoluto amore per la discrezione, che si sublima in quello che Bell chiama "il grande mistero di Dedekind": come è possibile, si chiede lo storico inglese, che mentre le migliori Università assumevano come docenti persone "indegne di allacciargli le scarpe"[16], Dedekind decidesse di rimanere per mezzo secolo a ricoprire il modesto incarico di insegnante alla Scuola Tecnica Superiore di Brunswick? La speranza è naturalmente che la situazione

[14] Un calendario che riportava i dati biografici dei più celebri matematici della storia. Pare fosse molto bello, secondo soltanto ad un altro pubblicato circa un secolo dopo.

[15] Non lo furono: Dedekind lasciò la proverbiale valle di lacrime il 12 Febbraio 1916. Il 4 Settembre è stato invece fatale a Cassini III (troppi astronomi, in quella famiglia…) e a Riesz.

[16] La locuzione è tra virgolette perché è proprio del Bell, non nostra. Noi avremmo detto probabilmente di peggio, ovviamente.

sia stata dettata da una serena e autonoma scelta di vita, e non da feroce miopia da parte dei magnifici rettori degli atenei. Il secondo aspetto che si legge tra le righe dell'episodio della sua prematura morte annunciata è il fatto che Dedekind fosse regolarmente scelto come amico e confidente da alcuni dei matematici più geniali di tutti i tempi. Se nel 1904 conversava e beveva cognac con Cantor[17] discettando di "sistema e teoria" nel giorno della sua presunta morte, è anche bene rammentare che Dedekind fu anche e soprattutto il miglior amico di Riemann. E solo per aver raccolto e classificato le carte del genio prematuramente scomparso meriterebbe la gratitudine di intere generazioni di matematici. Certo non fu solo la consapevolezza dell'importanza dei lavori dell'amico ad indurlo a salvare quante più carte possibile dall'oblio; c'era certo anche molto sentimento "privato", in quella dedizione. Anche se più giovane di cinque anni, Richard Dedekind si laureò insieme a Bernhard Riemann[18] nel 1854, e sei anni dopo lo reincontriamo mentre lo accompagna in occasione dell'elezione all'Accademia di Berlino; e gli fu spesso vicino anche negli ultimi giorni, convincendo infine la vedova di Riemann ad affidargli almeno una parte delle preziose carte del marito. Del resto, Dedekind non era nuovo al lavoro di raccolta ed edizione delle opere dei suoi grandi predecessori: oltre a quelli di Riemann, raccolse e curò le edizioni anche dei lavori di Dirichlet e di Gauss.

Nel 1862, la sua scuola di Brunswick (Collegium Carolinum) viene "promossa" al rango di Scuola Tecnica Superiore (Polytechnikum), ma l'accresciuto prestigio non poteva comunque competere con quello della rinomatissima Göttingen, dove Dedekind aveva la cattedra. Ciononostante, il nostro fece i bagagli e tornò nella sua città natale, insegnandovi per trentadue anni e godendosi lì la pensione per altri ventidue. A voler essere fantasiosi e romanzeschi, si può notare che il 1862 fu anche l'anno in cui i malanni cominciarono a costringere Riemann a viaggiare continuamente verso i più ameni climi italiani, e forse il fatto che Gottingen risultasse orfana del suo amico potrebbe aver influito sulla decisione di Dedekind di far ritorno alla città natia. In ogni caso, anche se spostato alla periferia dell'impero matematico tedesco, Richard non cessò di esplorare i quesiti dei fondamenti della matematica, anzi.

I suoi meriti principali si trovano in due questioni profondamente "essenziali" della scienza dei numeri: anzi, più propriamente, sulla vera e propria natura dei numeri. Una di queste è strettamente apparentata (guarda caso) con i lavori di Cantor, e va sotto il profetico nome di Teoria degli Ideali. Dedekind la presenta nella terza edizione del suo testo "Sulla Teoria dei Numeri Interi Algebrici[19]", e apparentemente non dovrebbe avere troppo a che spartire con gli insiemi infiniti, perché nasce soprattutto per "costringere" i numeri interi algebrici alla scomposizione unica in numeri primi. Questo tentativo viene affrontato proprio tramite la semplice definizione in classi: tutti i numeri che vengono esattamente divisi da 2, ad esempio, vengono ricondotti alla Classe Ideale indicata dal simbolo "(2)", e così via. Lo studio procede poi all'analisi delle classi stesse e nelle loro relazioni di inclusione: ad esempio, è ovvio che (2) include (8), perché tutti gli elementi di (8) appartengono anche a (2). Dedekind procede allora alla costruzione di una vera e propria "algebra degli Ideali" in cui il criterio elementare di divisibilità dei numeri viene trasformato in quello di inclusione in classi. Da questo piccolo germe nasce tutta una

---

[17] Non si trattava di un incontro occasionale. Dedekind conosce Cantor nel 1874 in Svizzera, ed è il primo matematico a riconoscere l'importanza del lavoro sui transfiniti del genio di San Pietroburgo. Difenderà con tenacia le teorie cantoriane dalle feroci critiche di Kronecker in un periodo in cui la maggior parte dei matematici è invece propensa a considerarle pazzesche. Non è improbabile che senza il suo autorevole contributo in proposito le idee di Cantor avrebbero potuto aver vita ancora più difficile di quella che hanno già avuto.

[18] Non era Dedekind ad essere precoce, ma Riemann ad essere distratto. Come raccontiamo nel suo compleanno ("Pellegrinaggio a Thule", RM68), aveva già iniziato le sue peregrinazioni da matematico di professione quasi dimenticandosi il dettaglio burocratico della discussione della tesi di laurea.

[19] "Über die Theorie der Ganzen Algebraischen Zahlen", 1874.

teoria complessa[20] che conduce anche alla generalizzazione ed estensione algebrica del teorema fondamentale dell'aritmetica. Curiosamente, ma forse non troppo, è una teoria che deve confrontarsi con il concetto di insieme infinito, che tanto angustiò Cantor, e con gli arcigni numeri primi, territorio di studio di Riemann. Quasi non fosse ancora pienamente soddisfatto della cosa, Dedekind nel 1882 pubblica uno studio in cui mette in relazione la sua Teoria degli Ideali con le Superfici di Riemann.

Nonostante gli Ideali di Dedekind bastino a far comprendere l'originalità di pensiero del matematico di Brunswick, la sua fama è probabilmente legata più ad un'altra idea, che si incontra più facilmente nei libri di testo: quella del "taglio" che da Dedekind prende il nome. Lo si può vedere come un vero e proprio tentativo di giustificare l'esistenza dei numeri irrazionali, e se la sua definizione suona un po' artificiosa agli studenti di liceo che, sapendo benissimo come calcolare il prodotto di due radici, si stupiscono della necessità di un'invenzione così cerebrale, questo dipende dal fatto che l'abitudine alla manipolazione dei simboli corrompe il senso critico. La radice di due viene facilmente moltiplicata, sottratta, addizionata da qualsiasi liceale che abbia imparato ad eseguire gli esercizi del libro di testo delle medie, ma ciò non toglie che fior di matematici[21] dubitino tout court della sua esistenza. Il dilemma è reale e tutt'altro che banale, non appena ci si soffermi a pensare un po' a cosa significhi davvero "manipolare" un numero come la radice di due. In fondo, possediamo bene solo i naturali: ogni estensione successiva costa una certa fatica intellettuale. I Greci più antichi erano restii a considerare l'uno come autentico numero, perché nello stesso concetto di numero vedevano implicito il senso di "quantità plurale"; lo zero ha richiesto quasi duemila anni, da tempi di Pitagora in poi, prima di conquistare piena cittadinanza numerica; e poi gli interi negativi, e così via. Ma già ai tempi di Pitagora si nuotava agilmente nel mare dei razionali, mentre la scoperta degli irrazionali generò il panico: rinunciare all'idea di numero come "rapporto di grandezze" era ostacolo troppo elevato, a quei tempi.

Del resto, ancora oggi, come si può immaginare di poter trattare qualcosa che non si conosce fino in fondo? Nel trasformare una frazione in un numero decimale è facile incontrare una sequenza infinita di cifre dopo la virgola, ma il loro comportamento è noto e conoscibile. In qualche modo, la regolarità della ripetizione dei decimali sembra garantire la possibilità di "vedere il numero fino all'infinito", e questo sembra legittimare le azioni degli operatori algebrici. Ma un irrazionale rimane ignoto, quando lo consideriamo come numero decimale, come numero puro. E allora come si può pretendere di operare con l'ignoto? "Radice di due per radice di sette uguale radice di quattordici" sembra avere la stessa identica dignità di 2x7=14, eppure la prima uguaglianza richiede delle enormi supposizioni sul comportamento dell'infinito matematico. È un po' lo stesso discorso che ricompare quando osserviamo anche solo la maniera che abbiamo per chiamare i numeri: gli interi hanno nomi propri, vere etichette non diverse da nomi come Giovanni o Elisabetta, salvo il fatto che i numeri grandi riciclano posizionalmente i nomi dei numeri bassi. Già i razionali sono definiti un maniera diversa, operativa: un matematico del ventesimo secolo[22] in un'intervista dichiarò di essere rimasto folgorato, da ragazzino, quando capì che 2/3 poteva davvero essere considerato un numero pienamente definito, e non solo come un'operazione da svolgere che nascondeva il "vero" numero 0,66666…; e quando, tutto entusiasta, provò a trasmettere la sua scoperta ai compagni ed amici rimase frustrato nel constatare che la sua illuminazione non sembrava affatto colpire l'immaginazione altrui. Gli irrazionali sono definiti sempre tramite operazioni più complesse delle mere divisioni e per di più negano la soddisfazione di lasciarsi conoscere appieno: sono infinitamente approssimabili, certo, ma è proprio nel concetto di "approssimazione" e nel solito e terribile avverbio "infinitamente" che si cela il mistero.

[20] Non necessariamente "complessa" in senso assoluto: certamente troppo difficile, però, per chi scrive le righe di quest'articolo.

[21] Come Kronecker, appunto. E non è che stesse tentando di schivare i compiti in classe.

[22] Ci sembra fosse Timothy Gowers, ma prendete l'affermazione con ampio beneficio di inventario.

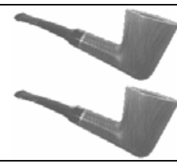
Dedekind inventa il "taglio" per ricondurre gli irrazionali nella retta continua dei reali. Sembra un artificio da poco, eppure aggira l'infinito con un infinitesimo (l'impalpabile spessore del taglio fra due numeri razionali), introduce il concetto di classe nella definizione (la classe dei numeri inferiori al taglio, la classe di quelli superiori), e riempie gli interstizi formati dai numeri razionali iniettando il fluido onnipresente degli irrazionali.

Sembra quasi più fantascienza che matematica.

I tagli di Dedekind non sono più considerati esenti da critiche dalle moderne definizioni matematiche, e il problema che resiste ancora è sempre quello di sempre: "infinito" è ancora sinonimo di "ignoto", e non solo in matematica. Ma restano comunque un potente strumento di immaginazione, degli esaltatori di immaginazione anche se forse formalmente non perfetti, per continuare a leggere nella retta dei reali la continuità che siamo abituati a vederci.

Soprattutto, sono un'idea. E se nella foresta matematica è rassicurante vedere coloro che studiano con tenacia per tutta la vita un solo albero, se è esaltante vedere quegli acrobati cha saltano di ramo in ramo aprendo nuove vie che erano rimaste nascoste per andare da un punto all'altro della selva, è anche vero che osservare coloro che, come Richard Dedekind, rimangono ancorati al terreno provando continuamente a far crescere nuove piantine, è cosa che lascia semplicemente stupefatti. Sono matematici, sono uomini che hanno un fascino del tutto particolare: quello dei seminatori di idee.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Mi vergogno un po'...			
Quesfta lettera .A. fe caua del tondo e del fuo quadro...			

2.1 Mi vergogno un po'...

Perché ci faccio la figura dello scemo. Ma ormai sono passati sei anni, quindi ho imparato a conviverci.

Era il Febbraio del 2000, questa rivista procedeva con metodi sostanzialmente artigianali (meglio: "primitivi") e il vostro problemista preferito girellava in Rete, quando è finito su un sito che aveva *un problema*; la cosa interessante era la frase in cima: "Al primo solutore, entro Agosto 2000: cento dollari in libri di matematica su Amazon gratuiti!".

Il problema l'ho risolto, ho mandato la soluzione (era quasi Agosto... in inglese me la cavo benissimo a leggere, ma a scrivere sono un incapace) e quello che ho ottenuto è stato di ritrovarmi:

1. La mailbox piena di spam
2. La pagina del problema con scritto "Termine della consegna spostato ad Agosto 2001!".

Adesso capite perché sostengo di aver fratto la figura dello scemo. Peccato, perché il problema era carino; e avevo anche trovato un'estensione!

Beh, andiamo avanti con il testo; come al solito, cerchiamo un'ambientazione più consona.

Come sapete, i Comitati di Redazione di RM si tengono a Torino; come sapete Torino ha le vie perpendicolari e parallele tra di loro e, come sapete (certo che ne sapete, di cose... Avete applicato il metodo del pettegolezzo del mese scorso?), i CdR di solito implicano congrui quantitavi di birra.

Bene, il Grande & Glorioso Comitato di Redazione esce dalla Sala Riunioni (aka "birreria dell'angolo": è su un incrocio) e inizia a cercare la macchina; per fare questo, cammina in linea retta lungo una via.

Lo stato non esattamente di sobrietà nel quale si trovano i Redattori fa sì che, giunti ad un incrocio, con probabilità $\boldsymbol{p}$ centrino brutalmente il lampione preposto ad illuminare il quadrivio; nel caso, effettuano una svolta di $\pm 90^{o}$ (leggasi: girano a destra o a sinistra) scegliendo tra le due possibilità con probabilità $\boldsymbol{0,5}$.

Quello di cui si sono dimenticati completamente, è che *la macchina è parcheggiata davanti alla birreria*; presupponendo che a forza di botte sui pali raggiungano un relativo livello di corretta percezione dell'ambiente (leggasi: in grado di riconoscere la macchina, se ci ritornano), secondo voi, con che probabilità (al variare di $\boldsymbol{p}$) ritroveranno la macchina?

Sin qui, il problema... Ma il solito tarlo mi girava in testa.

E se Torino avesse le scale? Leggasi: se il reticolo nel quale si muovono i nostri eroi fosse tridimensionale?

...e se ne avesse ancora di più (dimensioni, non scale...)?

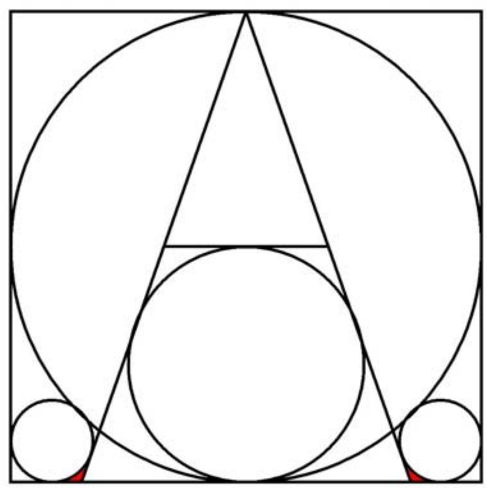
2.2 Quefta lettera .A. fe caua del tondo e del fuo quadro...

No, non stiamo parlando con la bocca piena.

È l'inizio della didascalia alla lettera "A" del *De Divina Proportione* di Frá Luca Pacioli[23]. Ma forse è meglio se vi spieghiamo dall'inizio.

Sapete tutti che vorremmo, in un modo o nell'altro, "andare su carta". Rudy, come al solito, ha considerato completamente secondario il *cosa* scrivere, preoccupandosi principalmente di *come* e *dove* scrivere *["dove" non nel senso di trovare un Editore, ma nel senso di stabilire le proporzioni di pagina del libro (AR & PRS). "Dove" anche nel senso che gli abbiamo impedito di fare la carta in casa (Paola, Alberto & Fred). Però ci ho provato. Risultati fetenti (RdA)].* Come al solito, ha trovato un oceano di roba *[assolutamente inutile (AR & PRS)]* sulla quale è partito in quarta a lavorare; tra le altre cose, ha anche deciso di ridefinire i caratteri nei quali debba essere scritto il libro.

Uno dei tentativi (riconosciuto anche da lui come "fetente") ha però generato un interessante problema; qui di fianco, vedete la "A", con tutti i cerchi necessari al tracciamento; in particolare i due cerchi piccoli, considerati fondamentali da Rudy per tracciare le "grazie", che vi abbiamo indicato in rosso (Rudy si ostina a chiamarli "serif", ma in italiano si chiamano grazie[24]).



La "A" di Rudy

Ora, quello che ha interrotto Rudy dai suoi sproloqui, sono state le domande: "Ma quanto valgono i raggi dei vari cerchi? E quanto è lunga, in proporzione all'altezza, la barra orizzontale?

Pensateci pure con calma, che sin quando non trova i valori sta zitto.

3. Bungee Jumpers

Quante radici hanno le equazioni:

[23] Domanda ***molto*** seria: qualcuno sa dove trovarlo in Internet? Possibilmente le immagini delle pagine, in alta definizione. *[Trovateglielo, almeno a leggere l'italiano del Rinascimento lo teniamo zitto un paio d'ore... (AR&PRS)].*

[24] *Chiamatele come vi pare, basta che non me le togliate dai caratteri di RM (RdA).* Questi aggeggi sono fonte di continuo litigio con Doc, che preferisce il "Comic Sans" ("serif", appunto).

$$a) \quad \sin x = \frac{x}{100}$$
$$b) \quad \sin x = \log x \quad ?$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Cominciamo anche questa volta con un modo di dire: l'altra volta era "l'elicottero delle sei", questa volta è "non c'è due senza aleph".

Nel senso che anche questo mese ne sono successe di tutti i colori: il portatile di Doc iniziava appena ad alzarsi e a bere un brodino, quello di Alice si chiedeva "Dove sono?" ogni quarto d'ora (e, visto che nessuno gli rispondeva, decideva di prendersi tre ore di riposo), che ci è scomparsa la posta.

Ora, finchè si tratta di un paio di PC, Rudy sbuffa ma sa benissimo che Alice e Doc riusciranno a metterli a posto[25], ma quando considerate che Rudy non può scaricare la posta (deve vederla via internet) e schiantano i due che ne hanno una copia a bordo, gli "Oibò!" si sprecano...

Quindi, è estremamente probabile che questo mese si sia perso per strada qualcosa. E, per la legge di induzione, che il mese prossimo sia ancora peggio. Per non parlare di Novembre, in cui Alice latiterà (ferie, anche se noi continuiamo a sostenere che prova a portare il PC nei climi caldi per vedere se magari sta un po' meglio).

Per cominciare, vi ringraziamo dei complimenti (***Dr.Toki***, ***Cid*** e, anche se cominciano con un "Pazzi!", ***vilumin***) per essere usciti in tempo; ci hanno fatto sentire un po' meglio, dopo i disastri, e ci hanno permesso di affrontare quelli di questo mese: se leggete queste note, ce l'abbiamo fatta anche stavolta.

Loba (che ci rovina la sorpresa di una decina di PM: ormai è un'abitudine...) e ***PMP*** (arrivato secondo causa ferie lunghe) ci hanno fatto notare un'improprietà nel compleanno del mese scorso; la canzone su Bartali non è di Jannacci, ma di Paolo Conte. Doc riconosce il fatto, ma non lo considera esattamente un errore; infatti quando Bartali incontrò Paolo Conte, gli disse che la canzone gli piaceva, ma la preferiva cantata da Jannacci; e che comunque certa gente, in merito ai nasi "tristi come una salita", avrebbe fatto meglio a stare zitta.

Sempre a proposito di distrazioni di Doc, vi confermiamo che il refuso nella frase che parlava di refusi non era voluto: non arriviamo a certe finezze dell'autoreferenzialità.

Aubrey ci fornisce un mucchio di notizie interessanti (e anche lui riesce a trovare una serie di cose "da PM"... forse è ora di cominciare a rinnovare i miei Favoriti), mentre ***Zar*** ci passa un documento molto interessante sul *Sudoku*; come gli abbiamo già detto per mail, lo ringraziamo ma non troppo: Rudy come gioco non lo sopporta, soprattutto da quando quest'estate è stato pubblicizzato con la frase "non serve sapere la matematica, basta un po' di logica...". Meglio se sto zitto. Comunque, stiamo aspettando che passi la moda e poi utilizzeremo quanto fornito da Zar per un pezzo che, come al solito, parlerà di tutt'altro.

Bene, le più profonde scuse a tutti i dimenticati: no, non li recupereremo il mese prossimo, a meno di salvataggi alla Chuck Norris dei vari dischi fissi.

[25] Piccola nota, su quello di Alice: lei sostiene che è da rottamare, io le ho proposto di provare a caricare Linux *Ubuntu*, non appena uscirà la versione funzionante (quella di Agosto aveva dei problemi di installazione, pare). Ora, mi rendo benissimo conto che la mia è una scelta dettata unicamente da ragioni personali: vi risulta che ci siano versioni più semplici, da installare? Non per incapacità dell'utente, ma perchè in questi casi Alice perde la pazienza in un decimo di secondo...

4.1 [080]

4.1.1 Q&D

A proposito di Chuck Norris, torniamo un attimo alla Scuola di Arti Marziali. C'era un errore, ma quasi nessuno se ne è accorto: infatti, in una delle due "regole" era saltato un "qualsiasi"; i solutori indicati la volta scorsa lo avevano dato per scontato, ma ***Cid*** ha deciso che quella era una condizione e ci ha mandato una serie di soluzioni. Una, in particolare, gli piaceva particolarmente: prevedeva un *tetraedro*, in cui le *facce* rappresentavano le arti marziali e gli *spigoli* gli allievi; quindi, se la cavava con quattro arti marziali e quattro allievi; sicuramente minimale, poco da dire. Il Nostro procede poi attribuendoci un certo qual disamore per i tetraedri dovuto al fatto che un tetraedro come simbolo di una scuola di arti marziali non sia un gran che... E a questo punto Rudy ha chiesto la parola:

> Qui, devo smentire su tutta la linea: tanto per cominciare, i tetraedri mi sono simpaticissimi: durante le lunghe telefonate, ne costruisco a decine con il metodo dell'*origami* che avevamo spiegato tempo fa (sono i più facili da fare); proprio uno di questi, seduto sulla mia scrivania, mi ha permesso di capire che *se ci fosse stato il "qualsiasi"* la soluzione non sarebbe stata valida. Infatti, due spigoli (allievi) opposti non hanno arti marziali (facce) in comune. Secondariamente, mi è piaciuto moltissimo il fatto che, una volta tanto, non venissero usati i vertici e gli spigoli, ma le *facce*; anche se il tetraedro è duale di se stesso, l'immagine della faccia come *tatami* è decisamente migliore rispetto all'ipotesi di combattere su un vertice. E, per puro spirito polemico, non sono d'accordo neanche sull'altra affermazione: sono il felice possessore di un vecchio libro: "*4260 Japanese Design Motifs*", e posso garantirti che di tetraedri ne compaiono un paio. Di sicuro, sono più dei piani di Fano.

4.1.2 Dal Padre di Rudy

Siccome siamo buoni (e anche un po' pigri), la soluzione di ***Dr.Toki*** non ve la passiamo: infatti è in modo testo e chiama la generica peste `P_i` e la parte di pettegolezzo che conosce `p_i`. Dopo il secondo passaggio, cominciano a ballare gli occhi... Comunque, soluzione correttissima: inoltre, il Nostro analizza diversi metodi, da quello meno ottimale (ognuno telefona la propria parte a tutti gli altri) sino a quello che avete trovato tutti. Non solo, ma sviluppa un metodo che permette una velocità incredibile, basato sul fatto che $\boldsymbol{P}_i$, prima di telefonare a $\boldsymbol{P}_{i+1}$, *aspetta la telefonata di* $\boldsymbol{P}_{i-1}$; se tutti applicano questa strategia (Alberto, che è il primo, parte appena sveglio *[che è tardissimo secondo qualunque fuso orario (RdA)]*); il secondo aspetta di sentire la segreteria telefonica (e quindi aspetta di conoscere la parte di Alberto) prima di telefonare al terzo... e avanti così; a sera, l'*ultimo della fila sa tutto il pettegolezzo!* A quel punto può telefonarlo ad Alberto che, il giorno dopo, lo telefonerà al secondo con lo stesso metodo...

Bene, veniamo a quello che consideriamo un metodo più realistico: usiamo la forma di ***Cid***, che è in Word. Premessa: tutte le operazioni sono in modulo $\boldsymbol{N}$.

> Le (n) Pesti per diffondere rapidamente il pettegolezzo possono utilizzare la seguente strategia: utilizzano come metodo di ordinamento una struttura ad anello, su cui a ciascuna delle pesti viene assegnato un valore compreso tra 1 e n.
>
> In Figura 2 vediamo un esempio con $n = 12$

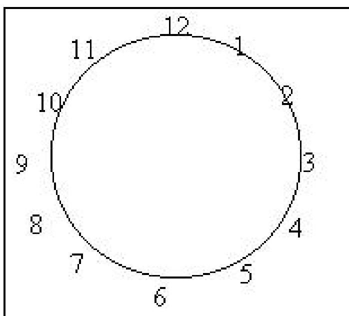


Figura 2 - 12 Pesti

A questo punto ognuna delle pesti il ***k-esimo*** giorno telefonerà alla peste che dista da essa in senso orario 2^{k-1}, in tal modo in (***Log₂ n***) giorni tutti conosceranno la notizia per intero. Se (***Log₂ n***) non è un numero intero occorre approssimare all'intero successivo.

Dimostrazione:

Essendo la struttura ad anello e per la simmetria insita nella strategia è garantito che se dimostro che una delle pesti riceverà la notizia per intero, allora anche tutte le altre pesti riceveranno la notizia per intero. Considero quindi la n-esima peste.

Dopo il ***primo*** giorno conoscerà la propria parte di informazione + quella della peste (***n-1***); analogamente la peste (***n-2***) conoscerà la propria parte di informazione + quella della peste (***n-3***).

Dopo il ***secondo*** giorno la n-esima peste conoscerà la propria parte di informazione + quella della peste (***n-2***); quindi ***n*** conoscerà l'informazione iniziale delle pesti: ***n***, ***n-1***, ***n-2***, ***n-3***; analogamente la peste (***n-4***) conoscerà la propria parte di informazione + quella della peste (***n-6***), quindi ***n-4*** conoscerà l'informazione iniziale delle pesti: ***n-4***, ***n-5***, ***n-6***, ***n-7***

Dopo il ***terzo*** giorno la ***n-esima*** peste conoscerà la propria parte di informazione + quella della peste (***n-4***); quindi ***n*** conoscerà l'informazione iniziale delle pesti: ***n***, ***n-1***, ***n-2***, ***n-3***, ***n-4***, ***n-5***, ***n-6***, ***n-7***; analogamente la peste (***n-8***) conoscerà la propria parte di informazione + quella della peste (***n-12***), quindi ***n-8*** conoscerà l'informazione iniziale delle pesti: ***n-8***, ***n-9***, ***n-10*** ,***n-11***, ***n-12***, ***n-13***, ***n-14***, ***n-15***

ecc... In tal modo il ***k-esimo*** giorno ognuna delle pesti, estende la sua informazione a $\frac{(2^{(k+1)} * \pi)}{n}$ radianti (ragionando sul cerchio); con $k \geq (Log_2\, n)$ abbiamo che l'arco di cerchio risulta essere maggiore o uguale a $\frac{(2 * n * \pi)}{n}$ radianti, quindi essendo maggiore di $2 * \pi$ radianti significa che ognuna delle pesti conosce l'informazione completa.

Anche ***Flo*** ci fornisce una soluzione (o meglio, due: quella che richiede ***n*** giorni e quella logaritmica) e, per essere chiara, ci fornisce un bellissimo disegnino che ha fatto venire a Doc la nostalgia per lo *Spirograph*[26]: Lo trovate in ***Figura 3***.

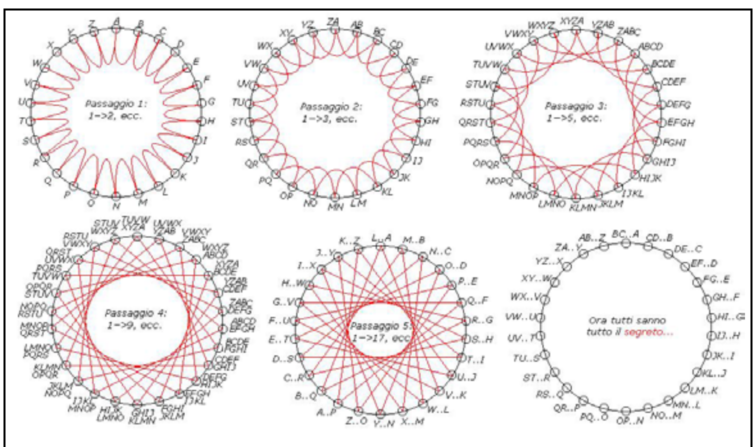


Figura 3 - I passaggi secondo Flo

La soluzione di ***PMP*** (stringata come al solito) questa volta presenta una caratteristica interessante: infatti, è stata risolta in metropolitana, discutendone con ***BraMo logicar***. Secondo Doc, "L'alito matematico si condensava sui finestrini...". Ci permettiamo di dubitarne, visto che quel giorno a Milano faceva piuttosto caldo. Comunque, apprezziamo e riportiamo la versione integrale (tanto occupa pochissimo spazio, come tutte le soluzioni di ***PMP***):

> Non puoi fare la soluzione a stella, perché il centro dovrebbe fare ***n-1*** telefonate, e quindi gli ci vorrebbe troppo tempo.
>
> D'altra parte, il numero minimo di telefonate deve essere ***2(n-1)*** e questo lo si dimostra in fretta: occorrono ***n-1*** telefonate per raccogliere tutto il segreto da una persona, e questa lo deve spifferare agli altri ***n-1***.
>
> Per il numero minimo di giorni, io andrei su ***ceil(log_2 n)***, col metodo *duplica et impera*. Se ad esempio abbiamo ***16*** pesti, ***a1*** .. ***a16***, il primo giorno gli ***a*** dispari telefonano ai successivi, e gli ***a*** pari ai precedenti. Quindi alla fine del primo giorno abbiamo due gruppi da ***8*** persone (i pari e i dispari), ognuno che conosce un ottavo del segreto. Quindi i due gruppi procedono in parallelo allo stesso modo. Se le pesti non sono una potenza di due, si salta qualche telefonata...

Ora, lo sforzo che vi chiediamo è di immaginare la faccia degli altri passeggeri davanti a due che parlano così...

4.1.3 Una strana lotteria

Bene, direi che la cosa non vi ha entusiasmato; per riuscire ad avere una soluzione, abbiamo dovuto organizzare un mezzo nubifragio (sapete che ***Cid*** risolve i problemi nelle giornate di pioggia, sì?). Andiamo, senza por tempo in mezzo.

> In questa lotteria abbiamo un valore costante in tutte le serate, questo valore è il numero di casi sfavorevoli che sono sempre 7500 alla prima estrazione, e in generale (7501-k) alla k-esima estrazione.
>
> Pertanto tenendo conto che massimizzare la probabilità di vincere è equivalente a minimizzare la probabilità di perdere, definisco la variabile S = numero di casi sfavorevoli.
>
> Nel caso in cui si usi un biglietto per ognuna delle serate, la probabilità di perdere è:
>
> $$P=\left(\frac{S}{S+1}\right)^{20}$$
>
> per ognuna delle 6 estrazioni con S=(7501-k) alla ***k***-esima estrazione.
>
> A questo punto dimostro che questo è il miglior risultato possibile: se raggruppo ***m*** biglietti nella stessa serata ottengo:
>
> $$P'(m)=\left(\frac{S}{S+m}\right) \quad \text{al posto di } P=\left(\frac{S}{S+1}\right)^{m}$$
>
> ora devo dimostrare che $\left(\frac{S}{S+m}\right)$ è sicuramente maggiore di $\left(\frac{S}{S+1}\right)^{m}$
>
> Ipotesi: $\left(\frac{S}{S+m}\right)>\left(\frac{S}{S+1}\right)^{m}$

[26] *Doc, ho una buona e una cattiva notizia: la buona è che lo fanno ancora, la cattiva è che è molto più semplice di quello che circolava quando eravamo piccoli (RdA).*

l'ipotesi precedente è equivalente a $(\frac{S+m}{S})<(\frac{S+1}{S})^m$

moltiplicando ambo i membri per S^m si ottiene:

$$S^{(m-1)}*(S+m)<(S+1)^m$$

e semplificando il primo membro:

$$S^m + m*S^{(m-1)} < (S+1)^m$$

dal Triangolo di Tartaglia sappiamo che l'equazione sopra riportata risulta sempre verificata con ***m>1***, in quanto S^m e $m*S^{(m-1)}$ sono i primi 2 fattori dello sviluppo del binomio $(S+1)^m$

Di conseguenza qualsiasi raggruppamento di m biglietti in una stessa serata porta ad un aumento della probabilità di perdere, e siccome ciò vale con qualsiasi m>1 la soluzione migliore risulta quella di usare un solo biglietto per ognuna delle serate.

Con 10 serate "piene" e 10 serate "vuote", per minimizzare il numero totale di partecipanti alla lotteria nelle serate in cui partecipo anch'io, devo utilizzare 2 biglietti per ognuna delle serate "vuote", in modo da distribuire in modo uniforme i biglietti su ciascuna delle serate "vuote".

Praticamente la strategia muta leggermente, ma mantiene la regola di distribuirsi in modo uniforme cercando di minimizzare il rapporto (Casi sfavorevoli / Casi possibili).

Come dicono nei giornali seri: *"Mentre stavamo per andare in macchina..."* ci è arrivata una soluzione di ***µ/6*** ; la sua trattazione è decisamente interessante, anche se sembra più "complicata" di quella di ***Cid***:

Premesso che in un gioco del genere io preferirei "spizzicarmi" (come dicono a Roma) i biglietti, ovvero giocarmeli uno alla volta, massimizzando certamente il mio divertimento, in questo caso l'entità della posa in gioco mi costringe ad eseguire un calcolo un po' più raffinato.

Intanto faccio un conto introduttivo, che mi farà da guida nel resto. Se ***N*** è il numero dei presenti ogni sera (nel nostro caso ***N=7500***), mi pongo il seguente problema ridotto ai minimi termini: ho solamente ***2*** biglietti e viene estratto un solo biglietto alla volta. Me li gioco subito tutti e due o li uso in due giorni diversi?

In formule (usando la regola aurea del calcolo delle probabilità, in cui è sempre(!) più facile calcolare la probabilità dell'evento complementare), $\frac{N}{N+2}$ è la probabilità di perdere giocando tutto subito, $\left(\frac{N}{N+1}\right)^2$ quella di perdere giocandoli uno alla volta. Poiché è facile vedere che

$$\frac{N}{N+2}-\left(\frac{N}{N+1}\right)^2 = N\frac{N^2+2N+1-N^2-2N}{(N+2)(N+1)^2}>0\,,$$

risulta che perdo più facilmente nel primo caso. Sono contento, perché oltre a far durare il gioco più a lungo, ho anche più possibilità di vincere!

Se è vero per due, mi dico, sarà vero anche per ***20*** ...o no? Vabbè, provo a fare il conto generale. Siano m_1, m_2,...,m_{20} le quantità di biglietti che gioco in ogni serata: potrò anche avere $m_i=0$ per qualche ***i***, ma la somma deve dare ***20***. La probabilità di perdere nell'***i-esima*** sera è data da

$$\frac{N}{N+m_i}\cdot\frac{N-1}{N-1+m_i}\cdot\ldots\cdot\frac{N-5}{N-5+m_i}$$

ovvero, usando il mitico simbolo di produttoria,

$$\prod_{k=0}^{5}\frac{N-k}{N-k+m_i}$$

(da notare che, ovviamente, se $\boldsymbol{m_i=0}$ la probabilità di perdere è ***1***: non sono neppure entrato nel casinò...)

La probabilità di perdere in tutte e 20 le serate è il prodotto di tutte queste, ovvero

$$p(m_1,\ldots,m_{20})=\prod_{i=1}^{20}\prod_{k=0}^{5}\frac{N-k}{N-k+m_i}$$

Devo dire che per la prima volta nella mia vita scrivo una produttoria doppia.

Ora, voglio cercare l'insieme degli $\boldsymbol{m_i}$ che rendano minima la probabilità di perdere. Quindi cerco i punti critici della funzione $p(m_1,\ldots,m_{20})$ col vincolo $m_1+\ldots+m_{20}=20$. Faccio così: cerco il minimo della funzione $\log p$, in modo da trasformare in somme i prodotti ed essere molto più comodo a derivare. Usando le solite comode proprietà dei logaritmi, ottengo la funzione (**C** *è una costante*):

$$\log p=\sum_{i=1}^{20}\sum_{k=0}^{5}\log\left(\frac{N-k}{N-k+m_i}\right)=C-\sum_{i=1}^{20}\sum_{k=0}^{5}\log(N-k+m_i)$$

e quindi il problema diventa (notare che è apparso un segno meno) massimizzare la funzione

$$-\sum_{i=1}^{20}\sum_{k=0}^{5}\log(N-k+m_i)$$

Usando il moltiplicatore di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ e derivando rispetto agli $\boldsymbol{m_i}$ si ottiene il sistema

$$\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{N-k+m_i}=\lambda,\quad i=1,\ldots,20$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{N-k+m_i}=\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{N-k+m_j}\qquad per\, i\neq j\,.$$

Ora l'ultima considerazione: poiché la funzione $f(x)=\sum_{k=0}^{5}\frac{1}{N-k+x}$ è decrescente, si ha ***f(x)=f(y)*** se e solo se ***x=y***. Questo significa che deve essere $\boldsymbol{m_i=m_j}$ per ogni ***i*** e ***j***. Poiché la somma deve fare ***20***, si ha per forza

$$m_1=m_2=\ldots=m_{20}=1$$

che è la soluzione. La probabilità di vincere è massima quando gioco un biglietto a sera (non ho bisogno neppure di scomodare glia amici). Dopo tutti questi conti, però, mi rendo conto che la probabilità di vincere in questo caso vale

$$1-\left(\prod_{k=0}^{5}\frac{N-k}{N-k+m_i}\right)^{20}\approx 0{,}015877$$

che non è molto grande. Meglio iscriversi alla newsletter...

Mi accorgo a posteriori che tutto questo discorso è indipendente dal numero di partecipanti (***7500***), di biglietti (***20***) e di estrazioni per sera (***6***). Avrò sbagliato qualcosa?

Commenti sulla seconda parte: mi sembra che a questo punto debba scegliere solamente fra due strategie: o giocare due biglietti alla volta nelle ***10*** sere da ***5000*** persone (strategia ***A***), o giocare un biglietto alla volta nelle ***20*** sere (strategia ***B***). Facendo dei conti a mano risulta (pongo ***N=5000***) che la probabilità di perdere con la strategia ***A*** è

$$\left(\frac{N}{N+2}\cdot\frac{N-1}{N+1}\cdot\frac{N-2}{N}\cdot\frac{N-3}{N-1}\cdot\frac{N-4}{N-2}\cdot\frac{N-5}{N-3}\right)^{10}\left(\frac{(N-4)(N-5)}{(N+1)(N+2)}\right)^{10}$$

mentre quella di perdere con la strategia B è

$$\left(\frac{N}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\ldots\cdot\frac{N-5}{N-4}\right)^{10}\left(\frac{2N}{2N+1}\cdot\frac{2N-1}{2N}\cdot\ldots\cdot\frac{2N-5}{2N-4}\right)^{10}=\left(\frac{(N-4)(2N-5)}{(N+1)(2N+1)}\right)^{10}.$$

Si verifica che il primo numero è più piccolo del secondo, e dunque per vincere conviene giocare la strategia A, due biglietti alla volta nelle serate da 5000 persone. In questo caso ho una probabilità di vincere di

$$1-\left(\frac{(N-4)(N-5)}{(N+1)(N+2)}\right)^{10}\approx 0{,}023721$$

un po' più alta di prima, ma non molto.

...vi raccontiamo una cosa, di questa soluzione: ci è arrivata in ***PDF*** e in ***TeX***, due formati che non possiamo elaborare; però, ci pareva così "diversa" che ce la siamo copiata praticamente tutta a manina (quasi: il testo l'abbiamo recuperato, ma le formule abbiamo dovuto riscriverle una per una...)

4.2 [079]

Lo sappiamo benissimo che il settantanove viene prima dell'ottanta, ma volevamo fare la battuta stupida su Chuck Norris (Giusto per parlarne anche qui: Rudy plaude alla sua decisione di non fare più *Walker Texas Ranger*).

4.2.1 Filetto Paritetico Albertiano

Buone notizie per ***Flo*** e ***Marco***! ***Cid*** ha esaminato (complici un altro paio di giorni di pioggia in quel di Rimini) le loro espansioni! E ci ha mandato le sue considerazioni.

Versione di ***Marco***

Se con le regole iniziali il gioco era smaccatamente sbilanciato a favore del primo giocatore, con le regole proposte da Marco il gioco diviene smaccatamente sbilanciato a favore del secondo giocatore.

Il secondo giocatore per vincere deve semplicemente seguire la seguente strategia:

Fa la sua ***prima*** mossa su uno spigolo della scacchiera, fa la sua ***seconda*** mossa sullo spigolo opposto a quello della prima mossa (se è libero) e se non è libero occupa uno degli altri spigoli.

Notare che fino a questo punto è indifferente per il secondo giocatore inserire uno "0" o un "1".

A questo punto se la casella centrale è libera, la occupa rendendo della sua parità una delle diagonali (ciò risulta sempre possibile in quanto le prime due mosse del secondo giocatore garantiscono che vi siano due spigoli opposti occupati).

Nel caso in cui la casella centrale sia occupata il secondo giocatore con la sua mossa completa un altro tris.

Per dimostrare che ciò è sempre possibile, disegno qui sotto tutti i casi possibili *(li trovate in* **Figura 1***)*: indicando con G le prime 5 mosse giocate e con M la mossa con cui il secondo giocatore completa un tris.

Quindi alla sua ***terza*** mossa, il secondo giocatore realizza *almeno un punto*.

Mentre il secondo punto lo realizza con la sua ultima mossa, infatti quando restano solo due caselle da occupare sulla scacchiera 3x3 è ovviamente sempre possibile completare una fila orizzontale o verticale.

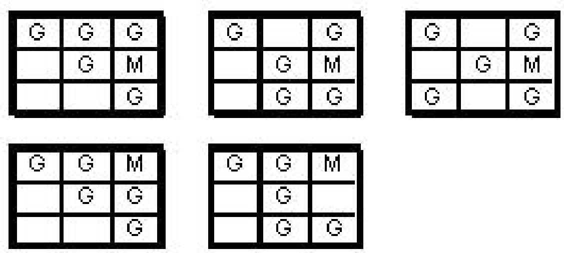


Figura 1

(Ciò in quanto se le due caselle libere sono sulla stessa fila non stanno sulla stessa colonna, e viceversa.)

Pertanto il secondo giocatore, con questa strategia, riesce sempre a realizzare almeno 2 punti.

Invece, per quanto riguarda la versione di ***Flo***:

Questa variante del filetto paritetico, mi sembra coincidere praticamente con il filetto tradizionale; basti considerare che esistono solo 8 gruppi di tre cifre che danno come somma 15, e sono quelli del quadrato magico (vedi tabella): per cui basta giocare a filetto su questa scacchiera scegliendo la cifra corrispondente alla casella giocata.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Tabella 1 - Il quadrato magico

Ma volendo descrivere la strategia sotto forma puramente numerica, la si può descrivere cosi: chiamo Bianco il primo giocatore e Nero il secondo giocatore e chiamo M_i la i-esima mossa. *[L'indentazione del seguito è stata decisa dalla redazione]*

1) Il Bianco fa la seguente scelta: $M_1 = 5$,

2) Il Nero risponde scegliendo un numero pari,

infatti, se il Nero sceglie un numero dispari il Bianco riesce a vincere nel seguente modo

il Bianco sceglie $M_3 = (M_2+5) \text{ Mod } 10$

il Nero per non perdere subito deve scegliere $M_4 = 10 - M_3$

il Bianco sceglie $M_5 = \dfrac{M_4}{2}$ (M_4 è sempre pari in quanto M_2 è dispari, quindi M_3 e M_4 pari)

infine se il Nero sceglie $M_6=(10 - M_5)$ allora il Bianco sceglie $M_7 =(M_5 + 5)$ e vince mentre se il Nero sceglie M_6=(M_5 + 5), il Bianco sceglie M_7 =(10 - M_5) e vince

... se il Nero sceglie un numero pari, la partita si conclude in parità così:

3) Il Bianco sceglie M_3 = (M_2+5) Mod 10

4) Il Nero per non perdere subito deve scegliere M_4= 10 - M_3

5) Il Bianco sceglie M_5 = 10 - ((2*M_4) Mod 10)

6) Il Nero per non perdere subito deve scegliere M_6= 10 - M_5

7) Il Bianco sceglie uno dei 2 numeri dispari rimasti

8) Il Nero per non perdere deve scegliere M_8 = 10 - M_7

9) Il Bianco prende l'ultimo numero rimasto e la partita termina in parità.

Tutto chiaro, vogliamo sperare. E questo è quanto, salvo errori od omissioni.

5. Pagina 46

a)

Per prima cosa notiamo che se x_0 è radice dell'equazione, anche $(-x_0)$ lo sarà, quindi vi sono tante radici negative quante radici positive; inoltre 0 è evidentemente radice dell'equazione.

È quindi sufficiente calcolare il numero delle radici positive.

Dal fatto che

$$\frac{x}{100} = \sin x \Rightarrow |x| = 100|\sin x| \leq 100 \cdot 1 = 100$$

si deduce che nessuna soluzione può essere maggiore di ***100***.

Dividiamo il segmento $[0;100]$ sull'asse ***x*** in intervalli di larghezza 2π (l'ultimo segmento risulterà più corto) ed esaminiamo le radici in ogni intervallo.

Abbiamo una radice positiva nel primo intervallo $[0;2\pi]$; in ognuno dei successivi, abbiamo invece ***due*** radici positive.

Per calcolare il numero delle radici nell'ultimo intervallo, esaminiamolo separatamente.

Si ha

$$15 < \frac{100}{2\pi} < 16,$$

quindi abbiamo ***15*** segmenti di larghezza 2π e un segmento finale di larghezza di larghezza

$$100 - 15 \cdot 2\pi > 5 > \pi.$$

E questo segmento è abbastanza ampio da contenere la parte positiva del periodo sinusoidale, e quindi contribuisce con ***due*** radici.

Da cui, per quanto riguarda le radici ***positive***, queste sono:

$$\underbrace{1}_{\text{primo intervallo}} + 14 \cdot 2 + \underbrace{2}_{\text{ultimo intervallo}} = 31$$

e un pari numero di radici ***negative***.

Considerando l'esistenza della soluzione 0, il numero totale di soluzioni risulta essere 63.

b)

La soluzione è simile a quella della parte precedente; in questo caso si ha che

$$\sin x = \log_{10} x \Rightarrow x \le 10 .$$

Dal fatto che $2 \cdot 2\pi > 10$ si ricava che l'intervallo $0 \le x \le 10$ contiene il primo periodo e parte del secondo della funzione seno.

Il grafico della funzione logaritmica interseca quello della funzione seno una volta nella prima "onda"; inoltre, essendo $2\pi + \frac{\pi}{2} < 10$, abbiamo

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 > \log_{10}\left(\frac{5\pi}{2}\right),$$

il che significa che il grafico del logaritmo interseca la prima metà della seconda onda positiva della funzione seno.

Essendo poi

$$\log_{10} 10 = 1 > \sin 10 ,$$

il logaritmo intersecherà la funzione seno ancora una volta.

Quindi l'equazione data ha 3 soluzioni.

6. Perlina Matematica

Se state leggendo questa, vuol dire che non abbiamo avuto il tempo di scrivere il PM che volevamo; del resto, vi avevamo promesso che sarebbe comparsa in PM la trattazione dei "100 prigionieri e una lampadina", quindi non lamentatevi troppo.

Per prima cosa giustifichiamo il titolo:

1. Volevamo tenere le stesse iniziali dei Paraphernalia Mathematica
2. Non è propriamente una "gemma", ma ha una sua bellezza ed è molto decorativa, almeno secondo noi.

Inoltre, ci farebbe molto piacere averne la dimostrazione.

"E perché non la mettete tra i problemi?" Semplice, perché non abbiamo la dimostrazione; l'abbiamo trovata dove non ci saremmo mai aspettati (circa come un pezzo di collanina per strada), ci è piaciuta e vorremmo sapere "perché".

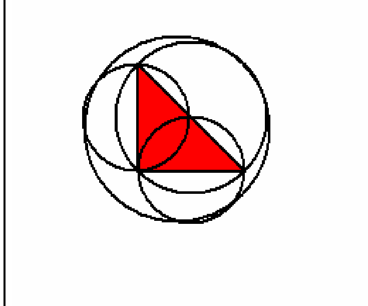


Figura 1

Tracciamo un triangolo rettangolo di cateti $\sqrt{1}$ e $\sqrt{1}$; l'ipotenusa risulta evidentemente pari a $\sqrt{2}$ e, se tracciamo i cerchi avente come diametri i cateti vediamo che i quadrati dei diametri sono nel rapporto $1:1:2$. Tracciamo adesso il cerchio che inscrive l'intero disegno e calcolatene il diametro; noi, per tentativi, abbiamo trovato che vale $\sqrt{3}$; trovate il tutto in ***Figura 1***.

Ora, prendiamo un cateto e l'ipotenusa del nostro triangolo, e trasformiamoli nei due cateti di un nuovo triangolo rettangolo; la sua ipotenusa varrà $\sqrt{3}$, quindi i quadrati dei raggi saranno in rapporto $1:2:3$. Qui se (come mostrato in ***Figura 2***) costruite il cerchio esterno tangente, trovate (lo abbiamo fatto anche qui per tentativi) che il diametro vale $\sqrt{5}$.

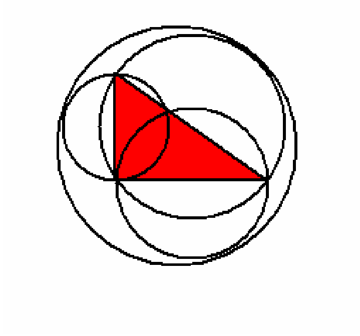


Figura 2

Cercate di non stufarvi proprio adesso; si tratta di fare un altro passo dello stesso tipo, e lo trovate in ***Figura 3***: qui, abbiamo un cateto pari a $\sqrt{2}$, l'altro pari a $\sqrt{3}$ e quindi ipotenusa pari a $\sqrt{5}$; sempre per tentativi, ci risulta che il diametro del cerchio esterno valga $\sqrt{8}$.

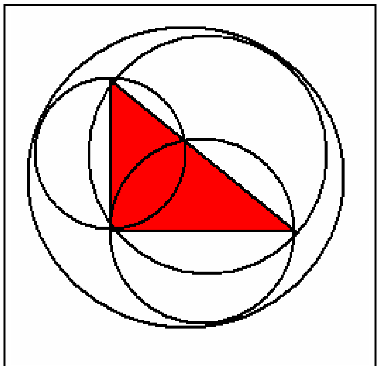


Figura 3

Ora, se prendiamo la successione dei quadrati dei lati, dovreste conoscerla: ***1***, ***1***, ***2***, ***3***, ***5***, ***8,***... ma quello che ci piacerebbe sapere è *cosa c'entra il cerchio esterno*... Perché il diametro coincide con la "prossima ipotenusa"?

7. ...E questo, dove lo metto?

Altrimenti noto come il "Summer Contest". Per prima cosa, ristatuiamo il problema.

> *Una singola lampadina illumina la stanza; cento persone vestite da carcerato, appena sbarcate in questo nuovo carcere, guardano il sorvegliante con aria perplessa.*
>
> “Siete i primi e sarete gli ultimi ospiti di questo accogliente carcere. Tra un’ora, sarete portati ognuno nella propria cella, dalla quale non potrete comunicare con nessun altro dei vostri colleghi; peró, a partire da domani una volta al giorno, io sceglieró a caso uno di voi e lo porteró in questa stanza a divertirsi; potrá gioire dello scoprire se la lampadina è accesa o spenta e, se vorrà, potrà spegnerla o accenderla con quel meraviglioso interruttore.”
>
> *Un mormorio percorre la sala, alla prospettiva di questo emozionante divertimento...*
>
> “Se, ad un certo punto, uno qualsiasi di voi quando viene portato a questa stanza è convinto che tutti e cento siate stati portati qui almeno una volta, basta che me lo dica; se ha ragione, tutti voi sarete liberi. Ma, se sbaglia... Piú niente lampadine, piú niente interruttori, piú niente chiavi delle celle, piú niente di niente, neanche pranzi e cene.
>
> *Insomma, non vi conviene sbagliare... Avete un’ora di tempo per decidere una strategia, a meno che preferiate giocare con l’interruttore per l’eternità...*

Notiamo subito che non vi siete appassionati particolarmente: poche risposte, e tutte quante centrate su due soli metodi... Con un’unica eccezione che trova quello che è sicuramente il modo “ottimale” per uscire alla svelta:

> *“...convinco gli altri novantanove a suicidarsi, il giorno dopo il guardiano è obbligato a chiamare me, dico che sono passati tutti ed esco”.*

No, non ve lo diciamo chi è. Come si diceva a naja, “dormite preoccupati”.

Torniamo seri: nonostante il problema sembri piuttosto irrisolvibile, è possibile statuire una serie di “fatti interessanti”:

Fatto interessante numero 1: *Potete uscire*.

La ***Strategia 1*** prevede di dividere la sequenza dei giorni in blocchi di dimensione ***100***. All’inizio di ogni blocco, si resetta tutto e si considera come se fosse il primo giorno “in assoluto”: quindi, nel seguito, quando diremo “il primo giorno” sarà sottinteso “di un blocco da 100”)

Il primo prigioniero che entra nella stanza il primo giorno mette la lampadina a ***0***. Se un qualsiasi prigioniero entra per la *seconda* volta nella stanza, mette la lampadina a ***1***.

Se il prigioniero che entra il *centesimo* giorno nella stanza trova la lampadina a ***0***, vuol dire che tutti i prigionieri sono entrati nella stanza e dichiara il “liberi tutti”.

Il ***Risultato Atteso per la Strategia 1*** richiede di calcolare quali siano le probabilità di avere una sequenza in cui ognuno entra nella stanza esattamente una volta nell’intervallo di tempo considerato: questa è pari al numero di ordinamenti possibili dei prigionieri diviso per il numero di modi con cui i prigionieri potrebbero essere entrati nella stanza (il denominatore tiene conto degli “ingressi multipli”, il numeratore conta le possibili sequenze di “ingressi singoli”): per ***n*** prigionieri, qusta probabilità vale:

$$p = \frac{n!}{n^n}, \tag{7.1}$$

e quindi il numero atteso di blocchi che dovremo utilizzare è pari a $1/p$.

Siccome ogni blocco ha lunghezza ***n***, allora i giorni che ci separano dalla libertà saranno (invertendo la **[7.1]** e considerando la lunghezza dei blocchi)

$$D = \frac{n^{n+1}}{n!} \sim O\left(\frac{\sqrt{n}}{e^n}\right), \qquad \textbf{[7.2]}$$

Dove l'ordine di grandezza è stimato utilizzando la formula di Stirling. Per i nostri ***100*** prigionieri, il valore atteso è

$$D = \frac{100^{101}}{100!} \text{ giorni} \approx 10^{44} \text{ giorni} \approx 10^{41} \text{ anni}, \qquad \textbf{[7.3]}$$

ossia, molto di più della vita attesa dell'Universo.

Forse è meglio se ci pensiamo ancora un attimo.

Fatto interessante numero 2: *Potete uscire prima della fine dell'Universo.*

La ***Strategia 2*** prevede di eleggere un *Cassiere*, che sarà responsabile di annunciare la fine del gioco; gli altri prigionieri saranno definiti come *Ordinari*.

Supponiamo che ogni Ordinario inizi con un "qualcosa" (che i nostri autori chiamano "Anima"); scopo degli Ordinari è riuscire a lasciare la loro Anima nella stanza della lampadina; il Cassiere raccoglierà le anime ogni volta che viene fatto entrare nella stanza centrale.

Supponiamo che all'inizio del gioco la lampadina sia a ***0***.

> Se un Ordinario entra nella stanza e trova la lampadina a ***0*** allora se ha ancora l'Anima la può lasciare nella stanza, mettendo la lampadina a ***1***. Se la lampadina è a ***1***, non la tocca e, se ha ancora l'Anima, non la deposita nella stanza. Se non ha più l'Anima (segno che è già entrato nella stanza), lascia tutto com'era prima.
>
> Quando il Cassiere entra nella stanza, se trova la lampadina a ***1*** la spegne, portandosi via l'Anima che ha trovato e aggiungendola a quelle raccolte precedentemente; se a questo punto ha raccolto tutte le anime, dichiara la fine del gioco. Se la lampadina è a ***0***, la lascia a ***0***.

Il ***Risultato Atteso per la Strategia 2*** prevede che succedano una serie di eventi in sequenza; per prima cosa un Ordinario con ancora l'Anima deve lasciarla nella stanza, poi il Cassiere deve passare a raccoglierla, poi un altro Ordinario con l'Anima deve lasciarla, eccetera.

La probabilità che un Ordinario abbia ancora l'Anima da lasciare nella stanza decresce dal valore $\frac{n-1}{n}$ del primo giorno al valore $\frac{1}{n}$ quando ormai ne manca una sola; mentre, la probabilità del cassiere di andare a raccogliere l'Anima il giorno dopo che è stata posata è sempre $\frac{1}{n}$.

Siccome il tempo atteso prima che avvenga un evento avente probabilità ***p*** è l'inverso della probabiltà,

$$D = n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) + n(n-1). \qquad \textbf{[7.4]}$$

Notiamo che:

$$n^2 < D < 2n^2 \Rightarrow D \sim O(n^2); \qquad \textbf{[7.5]}$$

ossia, per i nostri ***100*** eroi,

$$D \approx 10400 \text{ giorni} \approx 29 \text{ anni}. \qquad [7.6]$$

Decisamente più simpatico.

Per la prossima strategia, senza perdere in generalità, supporremo siate finiti in un carcere minorile.

Fatto interessante numero 3: *Potete uscire in tempo per vincere la Medaglia Fields.*

La ***Strategia 3*** si basa anch'essa sulla raccolta di Anime, ma qui non esiste un singolo Cassiere; tutti i prigionieri sono impegnati a raccogliere Anime. La lampadina, in realtà, porta un numero differente di Anime ogni notte.

È fornita una *sequenza* in grado di definire quante Anime sono portate dalla lampadina ogni notte, e il numero delle Anime è sempre una potenza di ***2***. Sia ***V(n)*** il numero delle Anime che la lampadina può portare se è lasciata a ***1*** la notte ***n*** (o se *è scoperta accesa la notte* **n+1**, il che vuol dire la stessa cosa).

Per semplicità, supporremo il *numero dei prigionieri sia una potenza di* **2**. Dopo, cercheremo di adattare il risultato ad un ***n*** generico**.**

Un prigioniero entra nella stanza e raccoglie tutte le Anime che sono state lasciate la notte precedente (quindi, se la luce è a ***1***, raccoglierà ***V(n-1)*** Anime) e metterà la luce a ***0***. A questo punto, controllerà quante Anime ha raccolto, *in base* **2**. Se la notte ***n*** nella quale ci troviamo vale $V(n) = 2^k$ Anime, verificherà lo stato del ***k-esimo*** bit del numero di Anime che possiede e, se il bit è a ***1***, lascerà 2^k Anime nella stanza, lasciando la lampadina a ***1*** e sottraendo 2^k Anime da quelle che possiede. Se il bit a ***0*** (ossia non ci sono anime nella stanza), lascerà la luce a ***0*** e si terrà tutte le Anime che possiede.

In questo modo le Anime sono "incollate" in blocchi di dimensione 2^k, e possono essere spostate (come blocco) solo se quella notte vale 2^k; quando tutte le Anime sono incollate in un blocco di dimensione $n = 2^{\log_2 n}$, si esce.

Il problema sorge nel definire $V(n)$, ossia quante Anime si possano scambiare in una determinata notte; probabilmente è una buona idea iniziare con un certo numero di notti a valore ***1*** (in modo da creare molti blocchi da ***2*** Anime), seguite da una serie di notti con valore ***2*** in modo da creare blocchi da ***4*** Anime) e avanti di questo passo; le sequenze di notti avente un certo valore devono essere abbastanza lunghe da garantire una ragionevole probabilità di riuscire ad incollare tutti i blocchi di dimensione 2^{k-1} in blocchi di dimensione 2^k senza però perdere troppo tempo.

Il ***Risultato atteso per la Strategia 3*** è decisamente complicato da calcolare; un metodo può essere quello di cominciare con una serie di sequenze di notti del tipo:

$n\log n + n\log(\log n)$ notti in cui si scambiano blocchi da ***1*** Anima;

$n\log n + n\log(\log n)$ notti in cui si scambiano blocchi da ***2*** Anime;

$n\log n + n\log(\log n)$ notti in cui si scambiano blocchi da ***4*** Anime;

...

$n\log n + n\log(\log n)$ notti in cui si scambiano blocchi da $\log_2 n$ Anime.

Se dopo questo tempo non siamo riusciti a mettere assieme tutte le Anime, possiamo decidere di ricominciare da capo (questo significa che la sequenza ***V(n)*** si ripete nel tempo).

La probabilità di incollare assieme tutti i blocchi di dimensione 2^{k-1} in blocchi di dimensione 2^k in un periodo di $n\log n + cn$ notti (dove ***c*** è una qualche costante) è limitato asintoticamente da $e^{-e^{-c}}$ (si vede? "e alla meno e alla meno c": dovreste conoscerlo, come valore: è il "problema del collezionista", ne abbiamo trattato uno simile su uno dei primi numeri di RM). Se supponiamo ***c*** sia una funzione per cui $c(n) \leq \log(n)$, ossia (introducendo un fattore di errore) le probabiltà di successo di ogni stadio sono:

$$e^{-\frac{1}{\log n}}\varepsilon(n)$$
dove
$$\varepsilon(n) : \varepsilon(n)^{\log_2 n} \to 1 \qquad \textbf{[7.7]}$$

La probabilità di riuscire a completare tutti i $\log_2 n$ stadi è allora almeno:

$$p = \frac{e^{\log_2 e}}{\varepsilon(n)^{\log_2 n}}, \qquad \textbf{[7.8]}$$

il che ci porta a una durata in giorni

$$e^{\log_2 e}\left[n\log(n)(\log(n) + \log(\log(n)))\right] \sim O\left(n\log^2(n)\right) \qquad \textbf{[7.9]}$$

Ora, per il caso di un numero di prigionieri che sia una potenza di ***2***, la cosa funziona particolarmente bene, e la cosa si può adattare ad un numero generico di prigionieri[27]; il problema nasce quando si cerca una valutazione *non asintotica* di ***V(n)***; qui, l'unico modo sembra essere quello di procedere per simulazione.

Secondo gli autori dell'articolo da cui abbiamo tratto tutto questo[28], una sequenza che funziona particolarmente bene è: [***730***, ***630***, ***610***, ***560***, ***520***, ***470***, ***560***, ***720***, ***490***, ***560***, ***570***, ***560***, ***590***, ***590***] e poi da capo; la sequenza è da intendersi come "***730*** notti a valore ***1*** Anima, ***630*** notti a valore ***2*** Anime, ***610*** notti a valore 4 Anime,..., ***560*** notti a valore ***64*** Anime, ***720*** notti a valore **1** Anima eccetera. Se, arrivati al fondo, la cosa non funziona (fatto estremamente improbabile), tutti si riprendono le proprie anime e si ricomincia.

Questo ciclo porta ad impegnare

$$D \approx 4400 \text{ giorni} \approx 12 \text{ anni}. \qquad \textbf{[7.10]}$$

E, se in un'ora siete riusciti a costruire un metodo del genere, la Medaglia Fields ve la meritate proprio.

Capisco che l'utilizzo delle simulazione possa sembrare un po' deludente, ma il calcolo non è semplicissimo; alcuni (*Felgenhauer*, ad esempio) hanno provato con un metodo ibrido (strategia ***3*** all'inizio e poi passaggio alla strategia ***2)***, ma il guadagno sembra minimo, con dei valori attesi di circa ***3900*** giorni.

Comunque, qualcuno ha anche provato a proporre delle variazioni: ve ne forniamo qualcuna, caso mai vogliate pensarci. Le soluzioni (o meglio, degli accenni) li trovate nell'articolo citato.

1. **Lampadine multiple**: la stanza contiene più lampadine

[27] Ad esempio fornendo ad uno ***29*** Anime; il primo prigioniero che ne colleziona ***128*** dichiara l'amnistia.

[28] Adesso ve lo diciamo: Paul-Olivier DEHAYE, Daniel FORD, Henry SAGERMAN: *One hundred prisoners and a lightbulb"*, Mathematical Intelligencer **24** (2003), n.4. Ma se ne trovano copie in Rete.

2. **Stanze multiple**: ci sono più stanze, i prigionieri sono portati in una stanza a caso e non sanno di quale si tratti.
3. **Trasmissione e ricezione separate**: il guardiano spegne la luce a mezzanotte, porta un prigioniero all'interno all'una e ne porta un altro alle due.
4. **Guardiano malizioso**: il guardiano conosce la strategia dei prigionieri e sceglie ogni giorno chi mandare nella stanza; la sua coscienza gli impone di far visitare, prima o poi, la stanza a tutti i prigionieri.
5. **Tutti i prigionieri devono chiedere di essere liberati**: in un qualche momento, tutti i prigionieri devono annunciare che sono passati tutti dalla stanza.
6. **Annuncio simultaneo**: tutti i prigionieri devono chiedere di essere liberati lo stesso giorno
7. **Il prigioniero viene liberato quando annuncia**: quando un prigioniero è sicuro che tutti siano passati, lo annuncia e viene liberato; gli altri, continuano il gioco (si suppone che ogni prigioniero sia interessato alla liberazione di tutti, non solo di se stesso)
8. **Celle rosse/blu**: i prigionieri sono chiusi in celle rosse o blu; chi annuncia la fine, deve anche dire quante celle rosse ci sono.
9. **Numeri nelle celle**: ogni cella ha un intero scritto sul muro; chi annuncia, deve dire i numeri scritti sui muri delle celle.
10. **Tutti i prigionieri mandano messaggi a tutti i prigionieri** (è una combinazione di 5 e 9)
11. **Tempi di visita casuali**: I prigionieri hanno perso il senso del tempo e il guardiano sceglie i prigionieri con intervalli di tempo casuali.
12. **Tempi casuali, annuncio totale**: combina le variazioni 5 e 11.
13. **Tempi casuali, messaggio da uno a uno**: ci sono solo due prigionieri e uno di questi deve mandare un messaggio all'altro (un numero naturale) ma, come nella variazione 5, non possono contare i giorni.
14. **Tempi casuali, messaggio da tutti a uno**: combinano le variazioni 9 e 11: un prigioniero deve fornire tutti i numeri scritti sui muri e tutti perdono il senso del tempo.
15. **Tempi casuali, messaggi da tutti a tutti, 2 lampadine**.
16. **Tempi casuali, messaggi da tutti a tutti, una lampadina**

No, non ve le diamo, le soluzioni: ci limitiamo a dirvi che per *una sola* di queste non c'è strategia sicura.

...L'ho spenta la luce, uscendo?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms