Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 079 – Agosto 2005- Anno Settimo

Ora

Metatron

Metatrino

Quintron

Quintrino

Rudi Mathematici
Rivista Fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S.)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 078 ha diffuso ***723*** copie e il **14 Luglio** alle **14:05** per Google eravamo in **754** pagine

Batsheba Grossman per le sue sculture si ispira a modelli matematici; in copertina, la sua serie *Ora*: ogni modello è collegato (in un modo che francamente non ci è molto chiaro) ad uno dei solidi platonici.

1. Per chi suona la campana

Sulla Terra non c'è nulla di grande, a parte l'Uomo
Nell'Uomo non c'è nulla di grande, a parte la Mente

Gauss[1], quoziente, centottantasei.

Tre parole decisamente matematiche, anche se legate tra loro in maniera meno rigorosamente matematica di quanto si potrebbe credere a prima vista. Il principe dei matematici viene citato solo a causa d'una curva che prende il suo nome (e, una volta tanto, senza che ne fosse effettivamente lo scopritore); il risultato dell'operazione di divisione fa parte del gruppo soprattutto a causa della sua lettera iniziale, e il numero, infine, è così elevato e preciso solo perché la maggior parte degli esseri umani ha in odio i seminteri.

Centottantasei è infatti un'età. Espressa in mesi, e pertanto equivalente a quindici anni e mezzo: è il momento in cui, seppur con le dovute approssimazioni e cautele, gli psicologi ritengono che l'intelligenza raggiunga il suo massimo. Non perché già a sedici anni questa cominci a decrescere: non si deve immaginare la curva della crescita dell'intelligenza come il profilo d'un monte, ma piuttosto come la silhouette d'un altopiano. Dai quindici anni e mezzo in avanti, l'intelligenza rimane sostanzialmente costante: certo, nell'accezione colloquiale del termine, questo può apparire insolito; una persona comunemente ritenuta "intelligente" possiede inevitabilmente anche un certo grado di esperienza, cultura e conoscenze, e queste sono doti che a quell'età sono ancora ben lungi dall'aver raggiunto la piena maturità. Gli specialisti, comunque, ritengono che l'intelligenza propriamente detta sia già a pieno regime: la pura "capacità di comprendere" che si possiede a quindici anni e mezzo è la stessa che si possiede a quarantadue. In altre parole, si è pienamente adulti, almeno dal punto di vista delle potenzialità psichiche.

A ben vedere, è forse più interessante osservare la curva prima del raggiungimento dei centottantasei mesi d'età: in questo periodo l'intelligenza cresce, e quest'idea può forse sorprendere qualcuno ancora convinto che l'intelligenza si acquisisca solamente per nascita. Un bambino di tre anni è "meno intelligente" di uno di dieci, non è solamente "meno esperto": anche se, ovviamente, non tutti i bambini di tre anni sono intelligenti alla stessa maniera. L'idea di misurare l'intelligenza nasce proprio nell'ambiente della psicologia dell'infanzia: nel notare che alcuni bambini avevano diverse capacità di risolvere i problemi, Binet[2] e colleghi cominciarono ad inventare dei test proprio per misurare questa caratteristica infantile. Da lì alla definizione di una "età mentale", il passo fu breve: si determinarono problemi "normalmente" risolubili da bambini di varie età, e ad un bambino in grado di risolverli si attribuiva la tale "età mentale". È notevole il fatto che lo scopo ultimo della determinazione dell'età mentale era quello di individuare i bambini "ritardati" (e il senso della parola "ritardo" è più evidente, se l'unita di misura è un tempo) al nobile fine di fare quanto necessario per accelerarne lo sviluppo mentale; dedicando loro, insomma, maggiori attenzioni e cure rispetto agli altri. Ancorché governata da una immobile matrice genetica, i nostri eroi ritenevano infatti l'intelligenza determinata quasi

[1] Come gli affezionati lettori di RM avranno già capito, questo "compleanno" comincia con il nome d'un celeberrimo matematico per ribadire il vezzo consolidato di presentare solo dopo una lunga introduzione il vero protagonista dell'articolo. In altre parole se "Gauss" è la prima parola dell'articolo, allora è pacifico che Gauss non è il matematico del mese. Anche perché il grande tedesco non è nato in Agosto ma in Aprile, mese quanto mai prolifico per la scienza dei numeri.

[2] Alfred Binet, psicologo francese. Nel 1904 fu il primo a sviluppare un test per misurare l'intelligenza, su commissione del Ministero della Pubblica Istruzione francese. Definì, con Theodore Simon, la prima scala per la misura del QI, detta appunto di Binet-Simon. Questa poi venne corretta nella Stanford-Binet (1912), che è ancora usata, seppur insieme a molte altre.

esclusivamente da fattori ambientali, e la loro intenzione era quella di garantire uno sviluppo ottimale e omogeneo delle capacità psichiche.

L'introduzione del concetto di "età mentale" induce però inevitabilmente dei confronti con l'età anagrafica. Nell'ideale classe che raccolga tutti i bambini con età mentale pari a sette anni troveremo una maggioranza di settenni, con qualche precoce seienne e qualche lento ottenne. Proprio confrontando le differenze più rimarcate, verrà naturale chiedersi se sia più sveglio il bimbo di sei anni che mostra di avere un'età mentale di sette, o magari il ragazzino di tredici che ragiona già quasi come un quindicenne. La metrica è presto costruita: assumendo che i test che misurano l'età mentale siano abbastanza precisi, è sufficiente dividere l'età mentale (preferibilmente espressa in mesi) per l'età anagrafica, e il gioco è fatto. Siccome il risultato sarà quasi certamente uno scomodo numero con la virgola e i decimali, si può decidere di moltiplicare il risultato per 100 e tenere solo la parte intera: l'indicatore risultante sarà allora indipendente dalla fascia d'età. Così, i bambini che hanno uguali età mentale e anagrafica avranno il loro indice pari a 100; il seienne che ha un'età mentale di sette anni raggiungerà invece un bel 117, mentre il tredicenne che si trova bene con i ragazzi di quattordici anni e mezzo totalizzerà circa 111.

Dovendo dare un nome all'indicatore, è inevitabile ricordare che si ottiene tramite una divisione, e che tende a misurare l'intelligenza: "Quoziente di Intelligenza" è quindi denominazione perfetta, e la corrispondente sigla Q.I. (in inglese I.Q.) suona ancora meglio.

Di possibili debolezze, nella determinazione del QI, ce ne sono naturalmente a bizzeffe. Già le scienze esatte hanno dei colossali problemi, pratici e concettuali, nelle definizioni delle metriche: definizioni, assunzioni, propagazione degli errori, interpretazioni, e chi più ne ha più ne metta. Tutte queste debolezze sono naturalmente travasate anche nelle scienze che esatte non sono, le quali ne aggiungono altre per proprio conto. La costruzione dei test, ad esempio, richiede la soddisfazione di criteri non banali. Riuscire ad attribuire ad un individuo un età mentale di sei o tredici anni presuppone la costruzione di test a difficoltà crescente coerente: se un ottenne risolve male i test per i cinque anni di età e nel contempo risolve una buona parte di quelli destinati ai decenni può essere considerato un caso anomalo, ma se lo fanno in molti è probabile che i test siano mal costruiti. E costruirne di tali da poter distinguere tra centoventiquattro e centoventicinque mesi di età mentale non deve essere semplice. Inoltre, nel misurare qualcosa che, tutto sommato, sfugge ancora oggi ad una definizione ben condivisa da tutti gli specialisti del settore, è inevitabile dover fare dei continui aggiustamenti: occorre rimuovere il più possibile i riferimenti culturali[3] o in qualche modo specifici, e infine, in ultima analisi, bisogna sottoporre il test ad un test. Occorre cioè verificarlo su un campione statistico il cui QI è noto, per vedere se è aderente alle aspettative. Insomma, un caro vecchio serpente che si morde la coda, a voler essere maligni.

Pur con tutte le limitazioni, assunzioni e presupposti del caso, è comunque un metodo dotato di un certo criterio di ripetibilità e oggettività. In più, ha quantomeno una correlazione diretta tra il valore numerico risultante e il concetto alla base della misura. Se Giovannino risulta avere quattro anni e un QI di 200, i genitori orgogliosi sanno che ha già una testa tale da potergli consentire di frequentare con successo la terza elementare, se solo avesse il bagaglio culturale necessario. Però la stessa cosa non si può invece dire del brillante Alfonso, simpatico pensionato settantenne molto

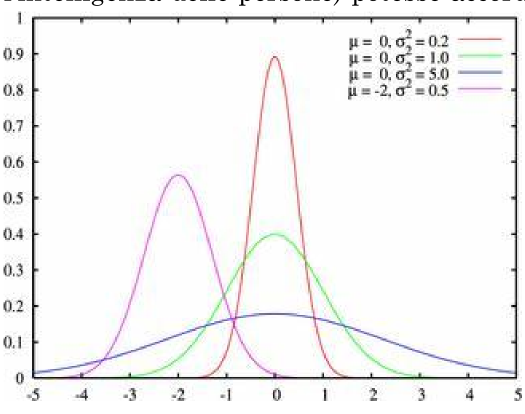
[3] E non pensiate che sia cosa facilissima. Fino a pochi anni fa si trovavano diversi test per l'IQ basati su "domande" ben scritte e "risposte multiple" altrettanto corrette, ma adesso si tende sempre di più a costruire test in cui nessun linguaggio viene utilizzato. Anche il solo fatto di saper leggere (e ben comprendere) una lingua presuppone un certo background culturale.

popolare nel quartiere: andargli a comunicare che ha l'età mentale d'un centoquarantenne non lo renderebbe affatto più felice. È in questo senso che i famosi "quindici anni e mezzo" portano il loro significato intrinseco: oltre quella data, il Quoziente di Intelligenza non è più un vero quoziente.

È a questo punto che entra in gioco Gauss, o meglio la curva più nota tra quelle associate al suo nome. I matematici la chiamano più correttamente "distribuzione normale", e la denominazione è più acconcia non tanto per la supposta "normalità" della distribuzione, quanto per il fatto che non fu Gauss il primo a studiarla: fu invece Abraham De Moivre, passato alla storia soprattutto per la formula che splendidamente coniuga trigonometria e numeri complessi[4], ad introdurla nel 1733. La curva fu poi studiata ed usata da Laplace, che probabilmente fu il primo ad applicarla alla Teoria degli Errori; Legendre la utilizzò nell'inventare il metodo dei Minimi Quadrati, e infine Gauss, dopo averla adoperata per una quindicina d'anni, la giustificò in maniera rigorosa e la assunse come distribuzione "normale", nel senso di standard, degli errori: non fu lui però a battezzarla in modo tanto impegnativo, ma Peirce e Galton, nel 1875; e nel farlo si sono forse presi troppe libertà, perché così facendo, più che mettere in evidenza una caratteristica di una curva, hanno soprattutto privato della "normalità" molte altre curve che in ultima analisi non sono certo anormali, neppure se considerate come distribuzioni di probabilità.

I fisici, di solito, la chiamano direttamente "gaussiana", e gli ingegneri fanno lo stesso. Ma siamo di fronte ad una delle poche curve che ha davvero valicato gli angusti confini della matematica, essendo usata a piene mani anche in campi diversissimi: in fondo, è la curva che viene usualmente usata per prevedere il comportamento d'una variabile casuale, e quasi ogni disciplina ha le sue variabili casuali da sistemare. La psicologia e la psicanalisi (ma anche, più generalmente, la medicina e la biologia) si riferiscono ad essa come "Curva a Campana" ["Bell Curve"], ed è sorprendente come una ricerca in rete con questa chiave generi come risultati principali proprio il titolo di un controverso libro di psicologia.

Tornando al nostro Quoziente di Intelligenza, apparve presto evidente che il rapporto tra età mentale ed età anagrafica ha ben poco senso per la popolazione adulta; d'altro canto, l'idea di poter effettivamente misurare l'intelligenza di una persona era invece estremamente feconda e promettente, perché gli uomini sono molto orgogliosi (e ancor più curiosi) del loro grado di intelligenza. Forti dell'esperienza fatta sui bambini, i pionieri della psicologia (ma forse non loro direttamente) fecero quello che fanno spesso gli scienziati: presupposero che la variabile in esame (in questo caso, l'intelligenza delle persone) potesse accordarsi con la distribuzione normale di Gauss.



Assunsero poi come valore centrale della gaussiana intellettiva il celebre valore 100 che nel caso dei ragazzini indicava la coerenza tra età mentale ed età adulta, e supposero che la distribuzione dei valori del QI (per quanto la "Q" fosse ora soltanto un residuo del passato) seguisse ordinatamente i morbidi flessi della celeberrima curva a campana.

La proprietà più significativa della distribuzione normale è forse proprio la

[4] E da cotanta coniugazione nascerà poi la più bella formula della matematica, scritta da Eulero e da noi celebrata, paragonandola alla bellezza di Megan Gale, in precedenti numeri di questo giornalino. Solo che gli anni cominciano a passare anche per la bella australiana, e temiamo che presto occorrerà trovare un'altra pietra di paragone, per la nostra deliziosa formula…

sua splendida adattabilità. Salta agli occhi la sua "simmetria" rispetto al valor medio, e soprattutto mantiene la sua "forma" caratteristica anche se viene in qualche modo schiacciata o allungata: e dal punto di vista analitico, entrambe queste proprietà sono tutt'altro che trascurabili. Ad esempio, se letta come distribuzione di probabilità, la simmetria enuncia che è sostanzialmente equiprobabile trovare un elemento che disti dal valor medio di una quantità prefissata sia a destra che a sinistra: questo è del tutto naturale in alcuni casi (cerco di colpire un bersaglio con un sasso: mancarlo di tre metri sulla destra o di tre metri sulla sinistra è ragionevolmente equiprobabile), mentre in altri richiede assunzioni concettuali impegnative (ad esempio, che ci siano tante persone con QI 30 tante quante sono quelle con QI 170). Ancora più significativo è probabilmente il parametro base della curva, la varianza (σ^2), che è per una gaussiana più o meno quello che è l'IMC[5] (Indice di Massa Corporea) per coloro che seguono diete. Come si vede dalla figura (rubata a Wikipedia), la curva verde è l'esempio matematicamente canonico di distribuzione normale (centrata in x=0 e con varianza pari ad 1), ma agendo su σ^2 si ottengono curve, per quanto sempre gaussiane di piena dignità, dal significato drammaticamente diverso. Qualsiasi fisico sperimentale, nel dover misurare qualcosa e il relativo errore di misura, si augura di ottenere una curva alta e stretta, simile a quella che in figura è disegnata in rosso; una come quella raccontata dalla linea blu è invece causa di tristezza o quantomeno di musi lunghi in laboratorio. Ma questo vale solo per la Teoria degli Errori; se la gaussiana è intesa come una vera e propria distribuzione di probabilità, una curva bassa e larga indica solo che i valori sono ampiamente distribuiti, e, al limite, che il "valor medio" non è poi così rappresentativo della totalità del campione. Visto che questa rivista è sufficientemente poco rigorosa, possiamo perfino permetterci una poco matematica visione "dinamica" della curva di Gauss: immaginate di "schiacciarla" verso il basso, premendola con decisione nel punto del suo massimo. Portando la schiacciatura all'estremo, si avrà una sorta di indistinta distribuzione "piatta", senza reali differenze di valori (tutti prossimi a zero) tra meno infinito e più infinito. Per dirla con i cosmologi, una sorta di inutile "radiazione cosmica di fondo" matematica. Ora, al contrario, afferriamola sempre per il suo massimo e tiriamola verso l'alto: si restringerà drammaticamente, innalzandosi, diventando sempre più stretta e sottile. Cosa otteniamo con questa esasperazione? Una sorta di linea verticale, strettissima, in corrispondenza del solo valor medio della gaussiana originale. Ipotizzando di mantenere costante l'area della gaussiana iniziale normalizzata ad 1, nel caso della schiacciatura verso l'asse delle x abbiamo disperso totalmente l'area originale in una striscia con ordinata alta un infinitesimo "epsilon", e spalmata sulle ascisse tra meno infinito e più infinito: nel caso dell'innalzamento abbiamo invece concentrato quest'area in corrispondenza di un solo valore di x. In altre parole, abbiamo ottenuto qualcosa di molto simile ad una Delta di Dirac. Per restare nel campo dell'immaginifico poco rigoroso, si può concludere che la gaussiana può ben rappresentare gli eventi "reali", che come al solito sono posti a mezza strada tra il continuum indifferenziato e indistinto del rumore di fondo e la "quantizzazione perfetta" nettamente rappresentata da un unico valore deciso e assoluto.

Farneticazioni a parte, è comunque certo che, qualora si decida di utilizzare una distribuzione normale come rappresentazione di una variabile casuale, la scelta dell'opportuno valore di σ^2 (o direttamente di σ, la deviazione standard) ha il suo peso, perché cambia radicalmente i valori assoluti di riferimento. In altre parole, non è certo sufficiente che gli psicologi decidano (a loro rischio e pericolo) che il QI sia distribuito secondo una gaussiana: per raggiungere un "valore numerico" devono

[5] Noto anche come Body Mass Index, BMI. Il peso (in chili) della persona viene diviso per il quadrato della statura (in metri), e il numero risultante è l'IMC. Se vi ritrovate con un valore superiore a 25 siete in soprappeso, se vale meno di 20 sottopeso. Un IMC pari o superiore a 30 indica spietatamente l'obesità.

stabilire (anzi ipotizzare) anche la forma della gaussiana, decidendo in qualche maniera quale sia il valore di σ più opportuno. E non sempre si trovano concordi: esistono infatti un gran numero di scale per la determinazione del QI, i cui valori variano grandemente. Cattell, Terman, Wechsler, Cooijmans, Grove, Hoeflin, sono tutti nomi di autori di scale per la misurazione del QI, e in molti casi il valore della deviazione standard è scelto in modo anche radicalmente diverso: per le metriche che fissano il valor medio (centro della gaussiana) a 100[6], i valori più usati sono 15 e 16, ma si raggiungono anche punte di 20 (test dell'Esercito Americano) o 24 (Cattell Verbale). Se lo stesso individuo si sottopone a test basato su scale diverse, inevitabilmente otterrà valutazioni di QI decisamente diverse, in funzione della scala di valutazione usata[7]. È per questa ragione che le società come il Mensa, in genere, non esplicitano un generico valore minimo di QI per l'ammissione, ma più correttamente parlano di "percentile"[8] : una gaussiana può infatti essere letta anche "da sinistra verso destra". Immaginando di scorrerla lungo l'asse delle x, arrivati in corrispondenza del massimo (valore medio della distribuzione) si sa che il 50% della popolazione giace a sinistra, nella parte con QI inferiori a 100, mentre il restante 50% resta a destra. Continuando a percorrere l'asse delle x, si arriverà in corrispondenza dell'estremità destra della curva a campana, che conterrà una percentuale via via più esigua della popolazione. Quando, ad esempio, il 90% dell'area della curva sarà rimasto a sinistra, si sarà in corrispondenza di un QI che è posseduto (o superato) solo dal 10% residuo della popolazione. E questa lettura è in genere coerente con quanto espresso dai risultati del test di QI, che spesso non vengono attribuiti con un valore secco ("il suo QI è 155"), ma in maniera "aperta a destra" ("il suo QI è 155+") dove il "+" sta ad indicare che il QI misurato deve considerarsi solo come "limite inferiore" della valutazione.

Le assunzioni avanzate per giungere ad un puro valore numerico sono già davvero molte (si suppone che esista relazione diretta tra l'intelligenza umana e la capacità di risolvere dei test; si ipotizza che l'intelligenza nella popolazione sia distribuita secondo una gaussiana[9]; si decide che la suddetta curva a campana abbia un certo valore di σ^2 , eccetera, eccetera), ma i rischi connessi al prendere troppo sul serio la misura di un QI sono ancora maggiori. Uno è di natura strettamente tecnica: in

---

[6] Perché, ovviamente, esistono anche scale per il QI il cui valore medio è definito su altri valori.

[7] Quindi, se il test fatto dieci anni fa vi aveva gratificato d'un eccellente 140 e quello fatto un po' per gioco la settimana scorsa, su qualche sito Internet, vi ha declassato al di sotto di 130, non cominciate subito a disperarvi recriminando sull'incipiente demenza senile: i due test potrebbero semplicemente usare scale di valutazione diverse e con diversa deviazione standard. Inutile dire che vale anche il contrario: se siete balzati improvvisamente nei dintorni di 150 quando eravate convinti di orbitare sotto i 135, la causa potrebbe essere diversa dall'aumento di fosforo nella dieta.

[8] Il Mensa è una associazione di origine anglosassone, ma diffusa ormai in moltissimi paesi (anche in Italia: www.mensa.it, se volete cimentarvi), che accetta come membri solo persone che hanno un QI tale da rientrare nel 2% superiore della gaussiana. Secondo la scala di Cattell più usata negli anni '80 (con deviazione standard pari a 16), questo valore corrispondeva a circa 148 punti; secondo la metrica di Wechsler (σ =15), a circa 131. Per quanto famosa, il Mensa non è però l'unica "High IQ Society": in rete ne abbiamo trovate almeno diciotto, con nomi e criteri di ammissione diversissimi. Si va dalla "International High IQ Society", che ammette come percentile limite il 95%, fino alla "Mega Society" che accoglie solo coloro che possono dimostrare di essere "uno su un milione", visto che il percentile di accettazione e 99,9999%. Buffo il fatto che molte società hanno già nel nome il criterio base di accettazione, come ad esempio la Triple Nine Society (ovviamente, con percentile di accettazione pari a 99,9%) o la "Top One Percent Society" (99%); ma rientrano in questo novero autoesplicante anche una "Sigma 2" (97,7%) e una "Four Sigma" (99,997%), che riconducono direttamente all'opportuna "coda" della gaussiana, spiegando implicitamente di quante "σ" occorra superare il valor medio per essere ammessi. Grazie al cielo, si incontra anche una insolita "Poetic Genius Society" (99,5%), che chissà, forse richiede oltre ai soliti test anche la stesura di sonetti in rima alternata.

[9] Cosa contraddetta, ad esempio, dalla celebre frase di Boltzmann che campeggia sul retro delle tre magliette di RM esistenti: "L'intelligenza totale è una costante, la popolazione sta aumentando".

genere, le persone affascinate dalla misura dell'intelligenza sono esse stesse altamente intelligenti, con un'umana voglia di misurarsi. È difficile che ponga particolare attenzione alla misura del QI qualcuno che si vede attribuito dai test un 98 o un 103. Questo conduce inevitabilmente al fatto che sia proprio la misura degli alti valori di QI ad essere maggiormente richiesta, e, in parallelo, alla curiosità di sapere quali siano i valori più alti mai raggiunti dall'uomo in questa insolita disciplina sportiva. È noto però anche che la misura delle "code" della gaussiana è attività sempre rischiosa e un po' aleatoria: è proprio in queste regioni che si vanno ad installare quelle che, durante una misura, vengono affettuosamente chiamate "fluttuazioni statistiche". Ciò non di meno, l'accurata esplorazione della coda destra della curva è fortemente richiesta ai metrologi dell'intelletto. Eppure, fosse anche solo per mere ragioni di simmetria, uno sguardo veloce alla coda sinistra dovrebbe convincere i curiosi che tali esplorazioni sono rischiose: è ragionevole aspettarsi una metrica che sappia realisticamente distinguere tra un QI pari a 10 da uno pari a 15 o a 5? Dovrà pur esistere un limite minimo di esplorazione: un bambino, per quanto piccolo, si troverà in grado di rispondere a qualche forma di interrogazione solo ad una certa età, non prima: non sembra verosimile una "continuità" nella crescita intellettiva, o quantomeno nella sua misurabilità.

La coda destra della gaussiana ha verosimilmente limiti simili e opposti. Un individuo con QI pari a 200 è assai probabilmente nella possibilità fisica di rispondere ai test, ma ora il problema diventa la compilazione dei test stessi. Uno psicologo, per quanto intelligente e accurato, può davvero riuscire a compilare test affidabili per la misura di quozienti tra 180 e 230, supponendo che egli sia un normale genietto da 140 punti? Ha certo più tempo a disposizione per la creazione dei test di quanto ne avranno i candidati alla risoluzione, ma questo è davvero sufficiente per riuscire a discriminare in qualche modo le capacità intellettive tra un QI di 190 e uno di 192? Questa difficoltà è almeno in parte misurabile con un po' di analisi matematica. A quanto ci risulta, a tutt'oggi la persona che viene spesso dichiarata essere in possesso del QI più alto mai misurato dovrebbe essere Marilyn Vos Savant[10], che riesce a vivere proprio di questa sua fama tenendo diverse rubriche sui giornali, come la celebre "Ask Marilyn!" sulla Paradès Magazine.

Il Guinness dei Primati le attribuisce un QI pari a 228, altri 230, qualcuno un più modesto 186, altri ancora perfino un misero 167. Il punto essenziale è però che il grande pubblico, di solito, memorizza un solo numero significativo e non tutta una metrica, quindi Marilyn è famosa per essere la signora con QI pari a 228, senza grossi dubbi sulle scale o su metodi utilizzati per giungere a tale valore. Abbiamo già discusso in precedenza di quanto sia in realtà fragile l'attribuzione di un "numero puro" come valutazione dell'intelligenza d'una persona, e il caso della Vos Savant è ragionevolmente indicativo in merito: il celebre 228, ad esempio, sembra essere scaturito da un autentico "quoziente", quelli del tipo di Binet, perché all'età di 10 anni esatti Marilyn si sottopose ad un test in cui

[10] Marilyn è matematicamente nota per il Monthy Hall Problem, da lei reso celebre dalle colonne della sua rubrica (noi ne abbiamo parlato – senza citarla - in RM25, Febbraio 2001, nell'"Introduzione" ai Bungee Jumpers), quando molti matematici professionisti attaccarono istericamente la sua analisi del problema, e sbagliarono a farlo. Per contro, un paio di anni dopo Marilyn esagerò un po', dichiarando di aver trovato un errore logico nella dimostrazione di Wiles dell'Ultimo Teorema di Fermat. Stavolta, però, era lei a sbagliarsi.

risultò in possesso d'una età mentale pari a 22 anni e 10 mesi[11], e di conseguenza di un QI pari a 228. Molte scuole di pensiero tendono però a non riconoscere come validi i test fatti in età infantile per la valutazione dei QI degli adulti, e il secondo biglietto da visita di Marilyn diventa allora il risultato del "Mega Test"[12] cui si sottopose quando non era più in piena puerizia: e in questo test totalizza un 186, pari ad un percentile corrispondente ad una parte su 30 milioni. In realtà, proprio quest'ultimo dato dovrebbe darci un paio di indicazioni importanti: la più evidente, è che su una popolazione di circa sei miliardi di persone possiamo attenderci circa duecento individui intelligenti quanto Marilyn; la seconda, più intrigante per una rivista di matematica ricreativa, verte sulla ragionevolezza o meno del supposto iperbolico QI di 228: anche ai fini di verificare l'analogia tra il rapporto di età mentale/anagrafica utilizzata nei test per bambini rispetto a quelli per adulti, sapreste calcolare il percentile al quale dovrebbe corrispondere un QI pari a 228 (supponete pure una σ pari a 16)? O, al contrario, quale dovrebbe essere il valore atteso più alto per un QI, in una popolazione di sette miliardi di individui?

In fondo, le diatribe sui quozienti intellettivi più alti restano abbastanza inoffensive: palesano certo quanto si sia ancora lontani dalla "scientificità" in questo tipo di valutazioni, ma la cosa era di per sé scontata: il semplice fatto che il concetto di intelligenza sfugga ancora ad una obiettiva definizione bastava già a garantire l'impossibilità di una misura ragionevolmente esatta della stessa. Quel che è più grave, e soprattutto pericoloso, è nascosto invece proprio nella supposta obiettività scientifica della valutazione. La pigrizia intellettuale da cui siamo tutti affetti ci porta a memorizzare e a valutare un numero senza porci troppe domande sulla metrica che lo ha generato.

L'Everest è alto 8848 metri: questo tipo di informazioni, una volta insediate, rimangono poi impresse nel cervello senza che con esse siano memorizzate anche le inevitabili approssimazioni di misura. In seguito può essere più o meno divertente scoprire che, in realtà, la misurazione più accurata sembra ora essere di 8850 e non più 8848; che tale misurazione è affetta da diversi possibili errori (non ultimo, il livello della neve più o meno alto in funzione della stagione); che nel 1856 la misurazione portò al risultato incredibilmente esatto di 29000 piedi, ma proprio per il timore che la cifra troppo tonda lasciasse intendere una misura approssimata e mal effettuata, fu dichiarata ufficialmente pari a 29.002; che la tettonica a zolle è ancora al lavoro, e ne sta alzando ancora la cima di circa 4 millimetri all'anno; che è la montagna più alta della Terra solo considerando la sua elevazione rispetto al livello del mare, perché il Chimborazo (Ecuador) porta la sua vetta più lontano[13] dal centro del pianeta di quanto riesca a fare il gigante himalaiano, mentre il Manua Loa delle Hawaii lo straccia alla grande se si decide di far partire la misura dell'altezza della montagna dalla "base" verso la "cima"[14]. Che si sappiano o meno, tutti questi dettagli contano relativamente poco, rispetto alla forza identificativa del solo numero indicante la pura altezza: e lo stesso avviene per quasi tutte le altre classificazioni numeriche. Così, quando i giornali riportano genericamente il QI d'una persona famosa o di un gruppo etnico, congelano, nel bene o nel male, un'etichetta che è poi difficile da rimuovere, anche se in ultima analisi questa ha una validità assai poco

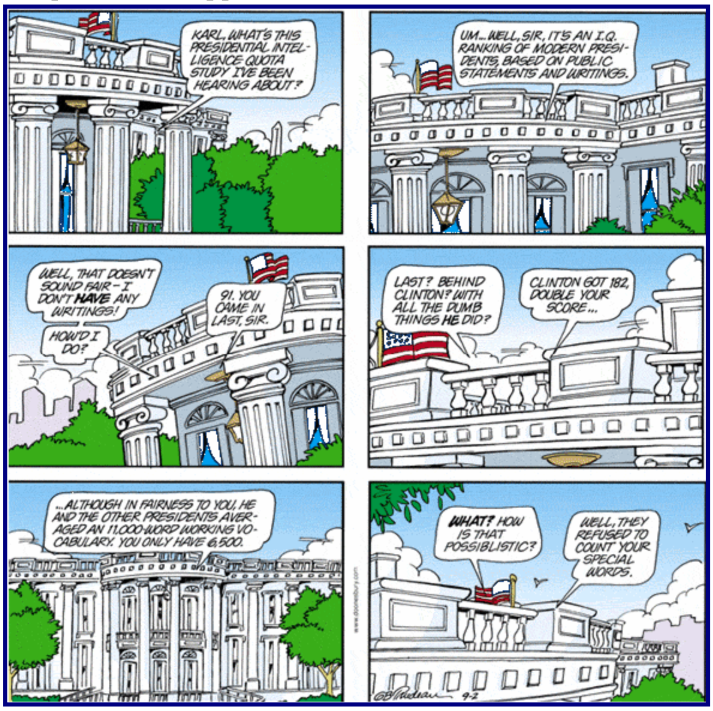
[11] Se vi state chiedendo come sia possibile giungere a certi valori di Età Mentale se il valore di "adulto" è fissato a quindici anni e mezzo, non girate la domanda a noi: non siamo riusciti a capirlo.

[12] Che è ovviamente il test di ammissione alla Mega Society, quella con percentile di ammissione 99,9999% di cui alla nota numero 8.

[13] Solo di un paio di metri, ma sono quelli che contano.

[14] Il Manua Loa supera di poco i quattromila metri, ma se si comincia a misurarlo dalla piattaforma del fondo marino su quale poggia bisogna arrampicarsi per oltre nove chilometri, prima d'arrivare in cima.

garantita scientificamente. Senza considerare che, in questo caso specifico, il Quoziente di Intelligenza è automaticamente leggibile anche come Quoziente di Stupidità, non appena il valore cada a sinistra del valore medio della distribuzione.



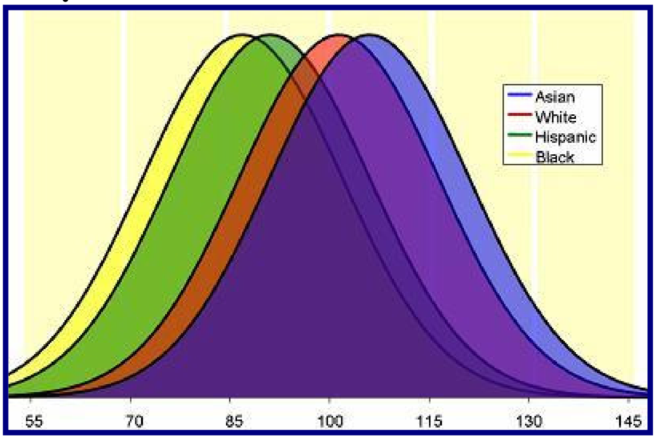
QI	Presidente	D/R
147	Franklin D. Roosevelt	Dem.
132	Harry Truman	Dem.
122	Dwight D. Eisenhower	Rep.
174	John F. Kennedy	Dem.
126	Lyndon B. Johnson	Dem.
155	Richard M. Nixon	Rep.
121	Gerald Ford	Rep.
175	James E. Carter	Dem.
105	Ronald Reagan	Rep.
98	George HW Bush	Rep.
182	William J. Clinton	Dem.
91	George W. Bush	Rep.

Nel 2001 una famosa hoax[15] ha girato in lungo e largo gli Stati Uniti d'America: uno studio del Lovenstein Institute di Scranton, Pennsylvania, conteneva la classifica dei QI degli ultimi presidenti americani, da Franklin Delano Roosevelt fino a George W. Bush, e metteva in evidenza come l'ultimo inquilino della Casa Bianca in ordine di tempo fosse anche disperatamente ultimo nella lista dei QI. Che si trattasse di uno scherzetto da periodo post-elettorale non ci volle molto a capirlo, visto che il Lovenstein Institute è del tutto inesistente, eppure la notizia ebbe davvero ampia risonanza, al punto da ispirare perfino una tavola di "Doonesbury", dove l'autore G.B. Trudeau sbeffeggiava spietatamente il neoeletto presidente americano. Per quanto evidentemente[16] falsa, la storia generò comunque fiumi di inchiostro e chilometri di nastro magnetico, tutti incisi per commentare la notizia. La cosa più istruttiva della vicenda è probabilmente nascosta nelle pieghe dell'evento, quando si scopre che la "valutazione" del QI dei dodici presidenti era dichiarata esser stata fatta sulla base degli scritti e dei discorsi pubblici dei medesimi, tenendo in massima considerazione il numero di parole usate. Questo lascia presupporre che il QI sia in fondo una vera e propria caratteristica naturale delle persone, usualmente misurata tramite opportuni test, ma ricavabile anche in maniera diversa, quali le analisi dei discorsi pubblici (che tra l'altro noi, ingenuamente, credevamo fossero scritti in massima parte da eccellenti professionisti della penna per conto presidenziale). E questo è uno dei rischi maggiori veicolati dall'eccesso di fiducia nella possibilità di classificazione dell'intelligenza: classificazione che può già raggiungere perversioni abbastanza antipatiche e rischiose anche senza questi elementi. Infatti, anche limitando il concetto di QI al solo esito finale di una serie di test si incorre in risultati politicamente rischiosi. Il testo di

[15] Il termine italiano, "bufala", ci piace pochissimo. Non c'è davvero niente di meglio?

[16] L'avverbio ci sembra opportuno forse perché troppo Europei, più ancora che naturalmente scettici. Non vorremmo offendere nessuno, ma un ragionevole sospetto nasce inevitabilmente quando la media dei presidenti d'un partito supera di oltre 40 punti di QI i presidenti dell'altro. Poi, anche se è un po' triste doverlo dire, non erano tanto i 91 punti di QI di G.W.Bush a stupire, quanto i 182 di Clinton (senza considerare suonava un po' sospetto anche il fatto che uno fosse il doppio esatto dell'altro).

psicologia citato poco sopra, "The Bell Curve"[17], è stato al centro di un'altra tempesta tutta americana legata al concetto di QI.



In questo ed altri libri si sostiene infatti esserci una evidente correlazione tra QI e razza, come si può vedere dal grafico a fianco che gaussianamente riproduce quattro distribuzioni di QI in corrispondenza di altrettante razze umane. Le innocenti distribuzioni scoperte da De Moivre sono cromaticamente ben sovrapposte, ma comunque usate con l'intenzione di mostrare "scientificamente" che i neri sono un po' meno intelligenti degli ispanici, anche se quest'ultimi sono decisamente meno intelligenti dei bianchi. Gli asiatici battono tutti, ma a ben vedere, la differenza con i bianchi è comunque piccola, quasi identica a quella che permane tra ispanici e neri. In casi come questi, la pericolosità (e anche la non-scientificità) del risultato è più difficile da notare, perché quello rappresentato in figura potrebbe effettivamente essere un risultato non manipolato di test. Potrebbero davvero essere stati selezionati campioni di persone nere, ispaniche, bianche, asiatiche, e queste potrebbero davvero essere state sottoposte alle stesse serie di test, e potrebbero infine aver davvero prodotto i risultati riportati nel grafico[18]. Non è questo il punto essenziale, però: quando si trattano argomenti così sensibili e delicati come razza e intelligenza, più ancora dell'aspetto "scientifico" dello studio contano i veri "contenuti scientifici" della cosa, e questi sono estremamente poco chiari, come si è visto nella ricerca della definizione di intelligenza. Inoltre, questo difetto iniziale viene coniugato con il concetto di "razza", che è a sua volta tutt'altro che immediato e pacifico, dal punto di vista biologico e genetico. Il risultato finale dovrebbe suonare molto, molto cauto, del tipo "... un insieme di persone, ritenuto appartenente ad una certa tipologia umana caratterizzata da questa, questa e questa caratteristica, ha ottenuto risultati migliori di altre nella risoluzioni di certi test, che noi riteniamo in qualche modo indicativi del grado di ciò che comunemente viene chiamata intelligenza". Detta così, suona più o meno come "i Piemontesi risolvono più parole crociate dei Bavaresi", e in ultima analisi quello che lo studio "scientifico" riesce a dire non è davvero molto diverso. Ma la lettura che arriva al grande pubblico è una più diretta e brutale "È stato scientificamente dimostrato che i negri sono stupidi", e in tale chiave vengono maltrattati non solo i neri, ma anche e soprattutto la scienza.

Questo anche perché l'innocenza è rara, nelle cose che hanno un feroce impatto politico e culturale: ad esempio, si è poi scoperto che gli autori di "The Bell Curve" non avevano il brillante curriculum scientifico che molti gli avevano fiduciosamente attribuito, e le istituzioni americane di psicologia presto cominciarono ad indagare sulla questione; inoltre, anche se il fatto non è di per sé una colpa manifesta, lascia perplessi lo scoprire che per un certo numero di anni successivi alla pubblicazione del libro uno degli autori (Murray) fu destinatario di fondi donatigli da una fondazione di

[17] R. Herrnstein, C. Murray: The Bell Curve, Free Press, 1994.

[18] Un grafico così bello e "continuo" è comunque sospetto: è difficile che i quattro campioni fossero così ampi e numerosi da poter essere pulitamente rappresentati da funzioni continue. Quattro istogrammi sarebbero verosimilmente stati più corretti.

orientamento conservatore[19]. Ma una volta accesa, la fiamma continua spesso a bruciare, a prescindere dalla verità o falsità che la ha innescata. Studi che mettono in relazione il QI con gli stipendi, con l'orientamento politico, con la religiosità, con il consumo di alcol o di noci di cocco continuano ad imperversare, e il messaggio nascosto è sempre lo stesso, di stampo smaccatamente reclamistico: "se i più intelligenti credono in questo e comprano quest'altro, tu che sei certo intelligente dovresti fare lo stesso…". La notizia più recente in merito alla correlazione tra "razza" e "intelligenza" è quella che annuncia che il gruppo etnico più brillante (meglio ancora dei generici "asiatici" del grafico) sembra essere quello degli Ebrei Askhenazi. L'articolo di giornale non riportava, oltre alla notizia, la metodologia usata nella misurazione, ma si peritava di mettere in evidenza che un'alta percentuale di premi Nobel e di campioni mondiali di scacchi appartengono proprio a quell'etnia. E non dubitiamo affatto della cosa: al massimo, dubitiamo della diretta correlazione tra il QI, così come è stato finora definito, e la capacità di vedere un matto in sei mosse o di teorizzare l'esistenza del bosone di Higgs. Soprattutto, ci dispiace un po' vedere che si tende a dimenticare troppo facilmente, in questa rincorsa all'etnia più intelligente, che fu proprio un ebreo ragionevolmente intelligente (non sappiamo se Ashkenazi), a rispondere placidamente "Umana" al funzionario della dogana americana che gli chiedeva a quale razza appartenesse[20].

Con buona pace di Binet e compagni, che per primi disegnarono "serie di test facilmente comprensibili, a difficoltà crescente…", i metodi per la stima del QI in assenza del candidato sembrano andare per la maggiore. Non abbiamo ancora notizie di estimatori di John Fitzgerald Kennedy che contestino il misero 174 attribuito dal Lovenstein Institute al loro beniamino, magari perorando la causa sulla base dell'avvenenza delle fidanzate ("Come può Bill Clinton aver un QI di otto punti più alto? La Monroe era molto più bella della Lewinski, e JFK è riuscito a gestire la cosa in maniera decisamente più discreta…"), ma se dovesse succedere non rimarremo poi troppo sorpresi. Il falso relativo al QI dei Presidenti Americani, in fondo, non era originale nel metodo di "stima" dei QI non misurati tramite test controllati: molte persone si cimentano nel tentativo di stimare QI di personaggi celebri o storici, anche se le basi scientifiche del metodo di valutazione utilizzato non sono di solito troppo chiare.

Ad esempio, nel 1926 Catherine Cox pubblicò con successo un volume[21] destinato a studiare le caratteristiche di trecento geni del passato, valutando anche una stima del loro QI. Lo studio si basava principalmente sui dati biografici quali i voti scolastici, lavori scritti, aneddoti, e limitando l'analisi ai soli primi 26 anni di vita. Ora, il metodo può forse anche essere complesso e richiedere una enorme mole di lavoro, ma lettori inesperti di psicologia come chi scrive fanno decisamente fatica a vedere la relazione tra questo approccio e la metrica dei test del QI (della quale, peraltro, abbiamo già mostrato di non essere fanatici estimatori). Eppure, la "scientificità" sembra apparentemente abbondare nello studio della Cox e nelle disquisizioni successive: ad esempio, nel riproporre l'elenco dei QI dei trecento geniali personaggi

[19] La Bradley Foundation di Milwaukee, Wisconsin.

[20] Albert Einstein. A dire il vero, non ricordiamo con esattezza se lo disse al commissario di dogana o se invece lo scrisse sul modulo di Immigrazione negli Stati Uniti. Non che la cosa faccia troppa differenza, a parer nostro…

[21] Catherine M. Cox, "The Early Mental Traits of Three Hundred Geniuses", incluso in "Genetic Studies" di M. Terman. Stanford University Press, 1926.

esaminati, i risultati vengono "aggiustati" tenendo conto dell'Effetto Flynn, ovvero del fatto che il QI medio sembra incrementare di qualche punto ad ogni generazione[22].

Resta forte l'impressione che questo tipo di stime si basi in fondo su concetti istintivi e colloquiali (e sostanzialmente soggettivi) di "intelligenza", piuttosto che su quella che inizialmente era "l'età mentale" proposta da Binet. È complesso, ad esempio, separare la "creatività" dall'intelligenza, nell'esaminare le vite dei geni passati: difficile valutare e soppesare con la medesima ideale bilancia l'intelligenza nascosta in un teorema matematico o in una composizione poetica. Ciò nondimeno, la Cox è riuscita a stilare una classifica, ed è quasi certamente dovuta al suo studio la convinzione che l'uomo più intelligente del mondo sia stato Goethe, con un QI pari (dopo la correzione dovuta all'Effetto Flynn) a 210[23]. Scorrere la tavola dei trecento geni è comunque divertente[24], anche se inevitabilmente le domande che nascono sono assai di più delle risposte che la tavola stessa sembra dare. A noi non dispiace che a vincere sia stato un poeta, anche perché un matematico (Leibniz) brilla al secondo posto, forte di un 205. E tutta la categoria è splendidamente piazzata: Pascal è quinto con 195, seguito da Laplace e Newton (settimi, 190), mentre nel gruppo dei 185 troviamo D'Alembert, Galileo, Lagrange. È anche vero che rimaniamo un po' interdetti nel vedere Pascal precedere Newton, ma questo dipende probabilmente da nostri preconcetti personali; ancora peggio è, in realtà, scoprire al terzo e quarto posto dei nomi pressoché sconosciuti (Grotius? Wolsey? Carneade ha la fama di una rockstar, al confronto…). Siamo certi, inoltre, che non solo gli italici resteranno sorpresi nel trovare Leonardo da Vinci abbastanza in basso (solo 180, con ben ventisei geniacci a precederlo e una buona trentina a pari merito); ma se dovessimo comunque rischiare dei soldi, non è sul malposizionato Leonardo che imbastiremmo la scommessa. Ci limiteremmo invece a chiedere di indovinare quale sia, in cotanta classifica, l'italiano meglio piazzato: e potremmo anche aggiungere che è un piazzamento di tutto rispetto (quinto, pari merito con Pascal). Siamo certi che ben pochi (anzi, probabilmente nessuno) riuscirebbe ad individuare in Paolo Sarpi[25] il portabandiera dell'italico ingegno. A voler leggere con malizia le posizioni dei geni del passato, si può ragionevolmente supporre che l'attenzione ai temi religiosi, e in seconda battuta a quelli matematici e poetici, fossero tenuti particolarmente in considerazione da chi ha stilato la classifica (anche Wolsey, terzo in classifica, era un religioso, e tutti le prime posizioni sembrano tenute da persone con elevata carica teologica), o magari che i biografi anglosassoni (con due tedeschi ai primi posti, un olandese e un inglese subito dopo) siano i più generosi narratori di aneddoti. La mera tecnologia è probabilmente considerata meno importante (e forse è questo lo scotto principalmente pagato da Leonardo), mentre un possibile sano pacifismo femminile potrebbe aver indotto la Cox a relegare nelle parti basse della classifica i conquistatori e i generali (Napoleone e i suoi marescialli si piazzano malissimo, ad esempio. Ma è bene ricordare che questa resta una classifica

---

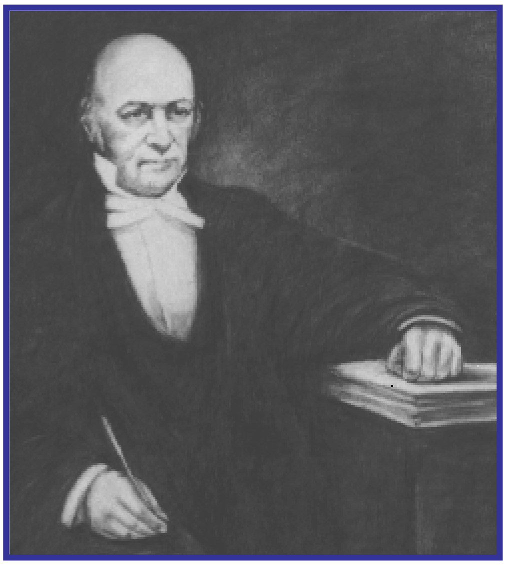
[22] Anche se a noi, ormai disperatamente scettici fino alla malizia, la correzione dovuta all'effetto Flynn è sembrata proporzionale solo al QI stimato, e non al numero di generazioni passate dal periodo storico del personaggio ad oggi. Mah.

[23] Scala Stanford-Binet, deviazione standard pari a 16. La correzione dovuta all'effetto Flynn dovrebbe comunque essere notevole, visto che è stimata in 0,3 punti all'anno. Anche per questo non ci è chiaro come sia possibile che Leopardi e Galileo, non esattamente contemporanei tra loro, entrambi stimati con un QI originale di 163 punti, siano entrambi poi "corretti" a 185. *[Avete notato che il Doc ama mettere le note ai numeri facendoli così sembrare più grandi? (AR)]*

[24] Potete trovarla su http://members.shaw.ca/delajara/Cox300.html, ad esempio.

[25] Paolo Sarpi (1552-1623), fu invero personaggio curioso, comunque. Ecclesiastico, storico, letterato, filosofo, cronista del Concilio di Trento, era uomo di immensa cultura e indiscusso coraggio intellettuale. Pur facendo parte della Chiesa, era aperto alla discussione anche con gli eretici, e fu sempre grande amico di un tal Galileo Galilei. Pur rappresentando il Papa a Venezia, quando la Serenissima iniziò il conflitto con le cattedra di San Pietro, Sarpi non esitò a schierarsi dalla parte della Repubblica.

di eccellenza). Certo, a voler considerare importanti il genio matematico e quello poetico, volendo tenere nell'opportuna considerazione anche il numero di lingue parlate (da sempre ritenuto indice affidabile di elevata intelligenza), non si resta stupiti nel trovare posizionato all'ottantunesimo posto un poeta reso celebre dalla matematica, un matematico che non smise mai di scrivere appassionate poesie, un bambino che sapeva parlare quattordici lingue, un romantico personaggio che visse un amore devastante e irrisolto e che nel contempo inventò una nuova intera classe di numeri. Anzi, a ben vedere la posizione in classifica e i 170 punti di QI potrebbero ben essere considerati troppo modesti, per una mente del genere.



William Rowan Hamilton nacque esattamente due secoli fa, tra il 3 e il 4 Agosto 1805[26], nella capitale d'Irlanda. Quello che è forse tutt'ora considerato la maggiore mente della sua terra dimostrò precocissime capacità intellettuali: l'educazione del piccolo Hamilton fu però affidata soprattutto ad uno zio linguista, e pertanto inevitabilmente fu nell'apprendimento delle lingue che mostrò i primi segni del genio. A tre anni già leggeva bene l'inglese, e cominciò ad inanellare la frequentazione di lingue straniere come grani di un rosario: latino, greco, ebraico, italiano, francese, arabo, sanscrito, caldeo, siriaco, indostano, malese, idioma del Mahratta e quello del Bengala, e un anche po' di cinese[27]. Poi, all'età di tredici anni, si stancò di studiare lingue e passò ad altre materie.

Le vie della matematica sono infinite, e nel caso di Hamilton passarono attraverso le capacità calcolatrici di un fenomeno americano: uno di quei calcolatori prodigiosi che intrattengono il pubblico trovando in poco tempo e senza neppure carta e penna le radici cubiche di numeri d'una decina di cifre. Il tredicenne di Dublino rimase con la sua dotta bocca aperta e con la fluentissima lingua penzoloni, di fronte a cotanta esibizione, e cominciò a interessarsi di matematica. Forte della conoscenza del francese, si procurò qualche testo sacro della scienza che, a quei tempi, era massimamente sviluppata sulle rive della Senna. Inizia dall'Algebra di Clairaut, e in breve tempo divora poi tutte le opere dei maestri francesi e, naturalmente, quelle di Newton. Alla vetusta età di diciassette anni affronta la Meccanica Celeste di Laplace, e come se nulla fosse intercetta e corregge un errore del francese: quando il Reale Astronomo dell'Osservatorio di Dublino viene informato della cosa, commenta con la celebre frase: *"Non dico che questo giovanotto diventerà il maggior matematico della sua era: dico che lo è già"*. La carriera scientifica di Hamilton è insomma già cominciata. Lo attende il Trinity College, e ha già iniziato a studiare un nuovo approccio dell'ottica geometrica che, portato a compimento qualche anno dopo,

[26] L'incertezza nella data non è data da scarsezza di informazioni, ma da indecisione di frontiera. Sembra sia nato esattamente a mezzanotte, e che la cosa abbia inevitabilmente generato indecisione nella determinazione del giorno di compleanno.

[27] Il numero "quattordici" che spesso ritorna nelle biografie di Hamilton discende sicuramente da quest'elenco, riportato dal Bell, che a sua volta lo riporta da una lettera dello zio incaricato dell'educazione del nostro eroe. Ci sembra che sia un numero da considerare come limite minimo, perché dal tono della lettera si capisce che non c'era l'intenzione di elencare "tutte" le lingue conosciute, ma solo quella di stupire il lettore con le più clamorosamente insolite. Ci sembra difficile che, in tale elenco, non figurino il tedesco e lo spagnolo, ad esempio; per non parlare del gaelico.

rivoluzionerà totalmente la materia. Il miglior indice di quanto fosse già stimato il giovanissimo William si può forse avere osservando che, quando si liberò la cattedra di Astronomia al Trinity College, questa venne assegnata proprio ad Hamilton, il quale aveva all'epoca solo ventuno anni e che, soprattutto, non era ancora laureato. Del resto, correva l'anno 1827, e l'anno precedente l'irlandese aveva già pubblicato per i tipi della Reale Accademia Irlandese la "Teoria dei Sistemi di Raggi", che è ben lungi da apparire come l'opera di un immaturo ventenne[28].

L'impressione che si ha nel leggere le note biografiche di Hamilton è soprattutto quella di una mente troppo rapida e invadente per gli interessi che di solito riempiono una vita normale. Già in piena infanzia, verso i setto od otto anni, il ragazzino di Dublino si divertiva a descrivere il paesaggio irlandese in esametri latini, perché gli appariva troppo banale poetare in inglese. E di poesia sempre si interessò: prima di cominciare a fare l'astronomo trova il tempo di fare un giro turistico (un "Tour", come di diceva a quei tempi) in Scozia e Inghilterra: conobbe il sommo Coleridge e divenne amico di Woodsworth. Con quest'ultimo dialogò a lungo, esaminando le somiglianze e differenze tra matematica e poesia, che ad Hamilton parevano del tutto evidenti, mentre Woodsworth era di parere ben diverso: del resto Woodsworth rimase impressionato, più ancora che dai versi di William, da quelli di Eliza, sorella del matematico. Questo non significa che non lo stimasse: lui che era, allora come ora, considerato uno dei massimi poeti inglesi, anche se si riteneva a ragione miglior poeta dell'irlandese, confessò più tardi che in tutta la sua vita incontrò due sole menti capaci di farlo sentire intellettualmente inferiore: quella di Coleridge e quella di Hamilton.

Mentre discute di matematica, però, il nostro William Rowan ha già il cuore spezzato. All'età di diciannove anni, nell'Agosto del 1824, ha conosciuto Catherine Disney, e si è perdutamente innamorato. Se l'amore ha la sua sede naturale nel cervello, anziché nel cuore come poco scientificamente si è soliti affermare, allora forse è immaginabile che un grande intelletto possa essere capace di amori intensissimi e disperatissimi. Catherine porta un cognome che diventerà famoso nel secolo successivo, ma deve indossare anche un fascino travolgente, se il giovane matematico perde la cognizione del mondo per lei. È però troppo giovane, ha ancora tre anni di college davanti, prima di poter ragionevolmente cominciare a pianificare un matrimonio, e questo sarà fatale per i suoi sogni sentimentali. Catherine va in sposa ad un pastore di quindici anni più anziano nel 1825, e William non si riprenderà mai del tutto dalla disperazione indotta da questo matrimonio. In questo periodo i suoi studi sono un po' meno brillanti, si interessa molto di più alla poesia che alla matematica, considera seriamente l'ipotesi del suicidio, e assai probabilmente comincia a frequentare l'alcool, che sarà un compagno costante dell'ultimo periodo della sua vita.

Hamilton non sembra un tipo che riesce a considerare seriamente i toni grigi e intermedi della vita: se Catherine non può essere sua, non prende in seria considerazione nessun'altra donna. Certo, considera il matrimonio comunque necessario, e finisce per sposare Helen Maria Bayley nel 1831: la principale virtù della fanciulla, agli occhi di Hamilton, è probabilmente il fatto che abita di fronte all'Osservatorio dove lui lavora. Il matrimonio non si può dire felice: sembra che la sposa non avesse grosse doti di casalinga, ma viste le condizioni iniziali in cui vennero celebrate le nozze, viene da dubitare che fosse davvero quello il principale problema coniugale.

[28] Tanto per dare un assaggio dell'importanza dell'opera, si consideri che è da molti considerata la prima a conciliare le onde (luminose) e il moto delle particelle, che a quei tempi erano considerati fenomeni del tutto distinti. Senza il lavoro di Hamilton, è assai improbabile che Schroedinger sarebbe riuscito a scrivere la sua celebre equazione d'onda.

La vita comunque continua, e continuano anche gli studi e le scoperte di Hamilton. Nel 1832 sta ancora lavorando ai supplementi della sua "Teoria dei Sistemi di Raggi" quando predice l'esistenza del fenomeno della "rifrazione conica", che venne poi sperimentalmente osservata da Humphrey Lloyd sulla base delle teorie del matematico. È un trionfo storico, perché in fondo non sono molte, nella storia della scienza, le predizioni puramente teoriche che sono rapidamente verificabili in natura. E, curiosamente, sembra anche segnare l'inizio di una maggiore attenzione di Hamilton a studi sempre più eminentemente teorici: tra il 1833 e il 1834 il dublinese comincia a celebrare una profonda coniugazione tra algebra dei numeri complessi e dinamica, eseguendo una nuova rivoluzione nell'approccio contenuto nel suo "On a General Method in Dynamics". La maniera in cui tratta in particolar modo l'energia totale dei sistemi farà in modo che matematici e fisici si abitueranno poi, per trattare problemi dinamici, anche ad usare le "hamiltoniane"[29], e non solo le già note "lagrangiane".

Ma vi sembra possibile che un frettoloso come William Rowan Hamilton possa accontentarsi dei numeri complessi? In fondo fu lui a considerarli per primo delle "coppie algebriche" di numeri, e se c'è una cosa inevitabile, per un matematico, è "estendere e generalizzare". Dalle coppie, Hamilton vuole passare alle terne: dai numeri complessi, vuole generare altri numeri più potenti e comprensivi. Dal 1835 al 1843 accadono molte cose nella vita del matematico irlandese: gli nascono tre figli, diventa baronetto, mentre la moglie comincia una strana altalena, allontanandosi da casa per lunghi periodi e ritornando, e ripartendo di nuovo. Molta carne al fuoco nella sua vita quotidiana, insomma, eppure Hamilton sembra essere quasi esclusivamente preso dall'attenzione ossessiva che gli richiedono le "terne ordinate". Ha cominciato a costruirne l'algebra, ha rapidamente definito le regole per l'addizione e la sottrazione, ma è la moltiplicazione che si rifiuta di farsi capire[30]. Non fosse un po' tragico, vista la situazione al contorno in cui i suoi figli, ancora piccoli, stavano crescendo, sarebbe quasi comicamente divertente scoprire che perfino i bambini erano profondamente compresi dalla preoccupazione paterna, visto che ogni mattina, a colazione, gli rivolgevano la canonica domanda: "Papà, ce l'hai fatta a moltiplicare le terne?".

William sembrava proprio non riuscirci: a sua giustificazione va detto che in un'impresa del genere si erano cimentati senza successo anche Euler e Gauss, e questo dovrebbe rendere l'idea della difficoltà della cosa. Occorreva certo un colpo di genio, e di buona levatura anche, vista la statura dei geni matematici che avevano mancato in precedenza il bersaglio. Certo è possibile, forse anche probabile, che entrambi i predecessori di Hamilton avessero studiato la cosa senza la feroce determinazione e abnegazione dell'irlandese: ma ciò non diminuisce la grandezza dell'idea di base di Hamilton, che come rivelazione divina gli apparve non mentre era seduto di fronte alla "sudate carte", ma mentre andava accompagnato dalla moglie ad una riunione della Reale Accademia Irlandese. Quella che per san Paolo fu la via di Damasco, per William Hamilton fu il Brougham Bridge sul Royal Canal: le relazioni

[29] Un uso esteso delle Hamiltoniane si fa, ad esempio, in Meccanica Quantistica. Soprattutto quando si usa la notazione matriciale di Heisenberg, le lavagne e i fogli di appunti di riempiono rapidamente di H, H+, H* e molti altre tipologia di acca maiuscole. La cosa spiazzante, per gli studenti poco brillanti (classe di cui ci onoriamo di aver fatto parte), è che la notazione di Heisenberg richiede di conoscere gli spazi di Hilbert, gli operatori di Hermite e di fare uso abbondante della matematica di Hamilton. E tra le molte H sulla lavagna e i quattro cognomi che cominciano con H, non è facilissimo ricordarsi a quale tizio rendano merito…

[30] Un'operazione "elementare" (e le virgolette dicono tutto) come la moltiplicazione può rivelarsi un ostacolo davvero insormontabile, o quantomeno tale da costringere ad una revisione generale del concetto "istintivo" della stessa. Domandarsi cosa significhi realmente moltiplicare due numeri è questione tutt'altro che banale, al punto che se il GC un bel giorno si decidesse a scrivere un PM sulle algebre esplorate da Hamilton, potrebbe essere davvero una bella idea iniziare il pezzo partendo proprio da questa domanda. Ma figuriamoci se a quello sfaticato del GC verrà mai un'idea del genere…

fondamentali di quelli che poi chiamerà "quaternioni" gli esplosero nella testa su quel ponte, forse perché un ponte è per definizione una relazione tra diversi elementi: unisce strisce di terra, si libra sull'acqua ed è immerso nell'aria. Il quarto elemento aristotelico non era certo assente, perché certo era fuoco quello che bruciava nella mente del matematico; al punto che al pari d'un adolescente, a mezza strada tra il teppista e il novello innamorato, non esita a fermarsi, a cercare qualcosa di appuntito per incidere seduta stante la sua fondamentale scoperta sulle pietre del ponte: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Pochi simboli[31] che uccidono la proprietà commutativa, e grazie a quest'assassinio fanno nascere intere nuove algebre.

I quaternioni e l'algebra non commutativa occuperanno di fatto tutto il resto della vita di Hamilton, e rappresentano ad un tempo la sua passione più grande e la sua più chiara tragedia. Nonostante l'indubbia rilevanza che hanno nella storia della matematica, è altrettanto indubbio che il loro scopritore li considerava scoperta assai più fondamentale di quanto fecero (e fanno tuttora) i suoi matematici colleghi. Ebbero, in maniera abbastanza sorprendente, un grande successo presso la giovane matematica statunitense, al punto che Hamilton fu il primo socio straniero dell'Accademia Americana delle Scienze. Aprirono nuove frontiere all'algebra, generando intere famiglie di numeri e algebre non commutative, che, sulla base del nome originario (quater-nioni), si chiamano "n-nioni"[32], e sono anche utili in particolari campi applicativi: ma nonostante tutto rimasero parzialmente inespressi[33], se così si può dire. Di certo, tali non furono per Hamilton, che li riteneva immodestamente importanti almeno quanto lo fu la scoperta del calcolo da parte di Leibniz e Newton.

Hamilton, si è visto, era certo molto intelligente: resta il sospetto che fossero gli altri a sbagliare nel sottovalutare i quaternioni, se lui per i successivi vent'anni continuò a studiarli, perdendoci sopra la salute e forse in parte anche la mente, disperandosi perché pochi sembravano riconoscere l'importanza della sua scoperta. Ed è quantomeno singolare scoprire che per Hamilton quei numeri e quell'algebra rappresentassero finalmente la "Matematica del Tempo Assoluto": il matematico irlandese era molto affascinato dalle teorie di Immanuel Kant sullo Spazio e sul Tempo, e in più di un'occasione cercò di dimostrare che i suoi quaternioni erano esattamente la dimostrazione della correttezza della teoria kantiana.

Hamilton chiuse la sua vita frequentando troppo spesso i pub e la merce che i pub vendono, e le sue ultime, disordinatissime carte sono ancora sotto esame da parte degli studiosi. La Royal Irish Academy è molto affezionata al suo figlio più celebre, e sono diverse le celebrazioni che ogni anno organizza in memoria del grande matematico: ad esempio, già da qualche anno, è stato istituito lo "Hamilton Prize in Mathematics", il cui bel manifesto nero è decorato dalla formula dei quaternioni che

[31] La Royal Irish Academy tutto sommato non criticò un così selvaggio atto di vandalismo nei confronti delle pubbliche opere, se decise di incidere una targa in memoria del fatidico attraversamento del ponte. *[Avevamo anche trovato una splendida fotografia della targa stessa, ma, dannazione, nel trionfale disordine di questa Redazione Virtuale non si trova mai niente… Ehi, voi due, non fate gli gnorri! Qualcuno ha visto la fotografia della targa del Brougham Bridge? Non fate scherzi, dai…GC, parlo soprattutto con te!(PRS)]*

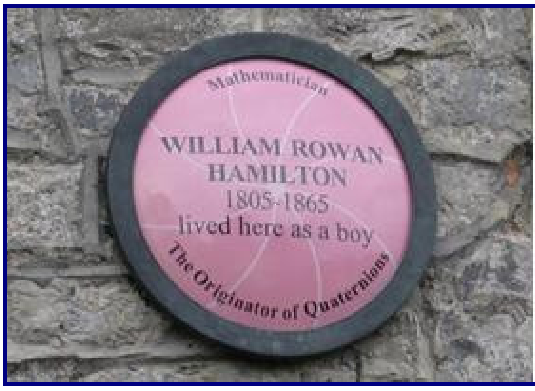
[32] Ma in genere il numero n è potenza di 2, e quindi è più corretto parlare di "2n-nioni". In ogni caso, è estremamente più divertente chiamarli all'inglese perché, come ci fa notare L.A.Bachevskij (uno degli RMers più attivi e meritevoli, nonché probabilmente dotato di capacità divinatorie paranormali, visto che è riuscito ad indovinare il tema del PM di questo mese), gli anglofoni parlano di "2n-onions", che dà a tutte le pubblicazioni sull'argomento un soffuso aroma di frittata alle cipolle.

[33] Uno dei giudizi migliori sui quaternioni viene da un altro algebrista, Cayley, che comunque non nasconde le difficoltà nell'uso del parto di Hamilton: *"... sono come una di quelle cartine stradali che riescono a stare comodamente in tasca: contengono ogni cosa, ma devono essere sempre aperte e spiegate in una forma diversa prima di poter essere intelligibili".*

abbiamo riportato poco sopra, che è destinato ai migliori studenti non ancora laureati ("undergraduate", forse per ricordare la condizione di Hamilton quando ottenne la sua prima cattedra). Inutile dire che il Premio Hamilton viene solennemente consegnato ogni anno nella giornata del 16 Ottobre, per commemorare la celebre "passeggiata sul ponte" che il nostro eroe fece proprio in quel giorno d'autunno del 1843.

Quest'anno, in occasione del duecentesimo anniversario della nascita, le celebrazioni dublinesi sono naturalmente in numero ben maggiore. Sono davvero molti gli eventi dedicati a festeggiare il papà dei quaternioni[34], ben distribuiti lungo tutto l'anno, anche se il 4 Agosto resterà senza dubbio il giorno più importante, con tanto di pellegrinaggio ufficiale al Ponte più famoso della storia della matematica, a parte forse il Pons Asinorum e i sette di Konigsberg.

Una buona parte di matematici ha comunque giocato d'anticipo, perché già nel 2004 (naturalmente, il 16 Ottobre) una nuova targa celebrativa è stata scoperta a Talbot Castle, dove Hamilton abitò da ragazzo: e un bel numero di matematici[35] del ventunesimo secolo sono stati fotografati a naso all'insù mentre assistono assorti alla celebrazione.



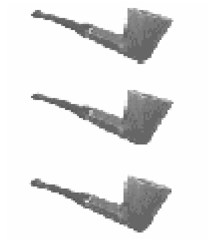
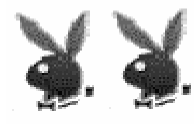
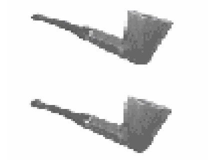
Sembrano avere tutti l'aria soddisfatta e contenta di essere lì, a celebrare un grande genio figlio della matematica e della verde Irlanda. La frase più celebre[36] di William Rowan Hamilton è quella che afferma *"Chi non vorrebbe raggiungere la fama di Archimede, piuttosto che quella del suo conquistatore Marcello?"*. A giudicare da quegli sguardi orgogliosi di direbbe che, anche se la fama del grande siracusano è ancora probabilmente fuori dalla sua portata, almeno quella del condottiero romano è già stata raggiunta e superata.

[34] … e c'è anche un sito creato apposta per l'occasione: www.hamilton2005.ie .

[35] Tra i quali Gowers, Spearman, Cox, e altri.

[36] A pari merito, forse, con quella che campeggia sotto il titolo di quest'articolo.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
ADD...dizione? No, moltiplicazione			
Filetto Paritetico Albertiano			

2.1 ADD...dizione? No, moltiplicazione

Bene, è un po' che non trattiamo di criptaritmetica; sarà perché continua a non piacermi... Comunque, credo di aver trovato un problemino che, almeno sin quando ci si limita a guardarlo, è decisamente carino.

Abbiamo una serie di espressioni di questo tipo:

$$A \cdot N = BC$$
$$AD \cdot N = BBC$$
$$ADD \cdot N = BBBC$$
$$ADDD \cdot N = BBBBC$$
$$\dots$$

e avanti di questo passo. Si tratta di risolverlo.

Giusto per chiarirci le idee: ***A***, ***B***, ***C*** e ***D*** sono cifre decimali *distinte*, ***N*** è un intero, il puntino è il segno di moltiplicazione; inoltre, ***ADD*** è un numero di tre cifre, ***BBBC*** di quattro e avanti così. Mentre *cercate* di risolverlo, siete autorizzati a pensare al mio sorriso sadico: non mi piace *rusolverli*, ma mi piace rifilarli agli altri.

Attenzione che escludendo i casi (banali, parola che rende felice Doc) ***A=0*** , ***N=0*** o ***B=0***, c'è più di una soluzione.

2.2 Filetto Paritetico Albertiano

Ve lo ricordate, il "filetto", noto anche come "tria" e (per gli anglofoni) "Tic-Tac-Toe"? Bene, Alberto si è stufato di giocarlo, in quanto (come tutti noi in più o meno tenera età) ha trovato la strategia per pattare. Probabilmente vi ricordate anche del fatto che al Nostro piace inventare giochi, possibilmente prendendo spunto (leggasi: scopiazzare allegramente) da altri; qui, però, direi che si è impegnato.

Allora, con calma: la scacchiera è quella del filetto tre per tre, i due giocatori si chiamano "Pari" e "Dispari" e non cambiano nome durante l'intero torneo.

Al proprio turno, il giocatore mette, a sua scelta, uno ***zero*** o un ***uno*** in una casella libera, e si continua sin quando ci sono caselle libere; a questo punto, si calcolano le *otto somme* ottenibili verticalmente, orizzontalmentee e diagonalmente; ogni somma *pari* significa un punto per Pari, e ogni somma *dispari* significa un punto per Dispari (zero è pari).

Alberto mi ha spiegato tutto felice il gioco il venerdì sera e ha immediatamente cominciato a massacrare Fred; indi, loro e mia moglie sono partiti per trascorrere un tranquillo week-end al Paesello (quello di mia moglie) in compagnia di mia suocera (quella della torta di mele) e di una barcata di pioggia (quella del week-end scorso), mentre io me ne restavo a casa in città.

Mica tanto tranquilla, però, la situazione... Qui, se non trovo entro domenica sera una strategia, Alberto non me lo schiodo più di dosso...

Avete qualche idea? O, più precisamente: esiste una strategia vincente per qualche giocatore? Il primo? Il secondo? Il pari? Il dispari?

3. Bungee Jumpers

Trovate tutte le radici *reali* dell'equazione:

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{n \text{ radicali}} = x$$

Due metodi, per risolverla: il secondo, anche se un po' tagliato per i campi, è molto più carino. Tranquilli, il risultato è lo stesso.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Calma piatta a luglio, quasi niente mail e poche soluzioni, ma siamo contenti così, vuol dire che siete tutti in vacanza. A quanto pare, invece, noi siamo sempre qui, anche se a giorni alterni...

Non molto da dire, però, tra i vari pettegolezzi. Continuano ad arrivare in Redazione tentativi vari di soluzione per i cento prigionieri e la lampadina, alcuni piuttosto sanguinari, e noi raccogliamo i dati. Non vi perdete d'animo, la caccia all'ottimo è ancora aperta.

Poi alcuni lettori stanno scavando nella storia di RM e scoprendo i nostri numeri più antichi, per mandarci ulteriori soluzioni, è il caso di ***Dario***, che ringraziamo, e da cui ci aspettiamo ancora soluzioni, e di ***Blackstorm***, che ha ri-trovato la dimostrazione del teorema di Morley (vedi RM005 e RM007, l'allegato). ***Dario*** ci invia anche un indovinello:

> Un orco cattivissimo ha catturato 10 nani (possiamo anche dire N nani purchè N sia abbastanza grande e non 1, 2, 3 diciamo > 10 e tagliamo la testa al toro) e gli dice: "io domani mattina vi metterò in fila dal più alto al più basso [in modo tale che il più alto vede gli N-1 nani davanti e così via], vi porrò poi in testa un cappello, che può essere o bianco o nero, e vi interrogherò a partire dal più alto [che vede tutti i cappelli tranne il suo] e poi a scalare. Ogni nano vede la risposta che può essere esclusivamente o bianco o nero.
>
> Voi [i nani] avete una notte di tempo per mettervi d'accordo su cosa dire per salvarvi il maggior numero possibile."
>
> Il quesito è quale è il maggior numero di nani che si salva? e come fanno?

Buon divertimento!

Ci è stato chiesto da molti se anche quest'anno si svolgerà la Sagra del Pesce Alebrico: da ciò che ci risulta dovrebbe tenersi a Caldè nei giorni 7 e 8 di agosto, e speriamo che tanti RMers si incontrino da quelle parti.

Infine ringraziamo i sempre più numerosi accoliti che inviano complimenti al Capo per i suoi PM: noi lo sappiamo che sono bellissimi, ma lui è ipercritico e non ci crede.

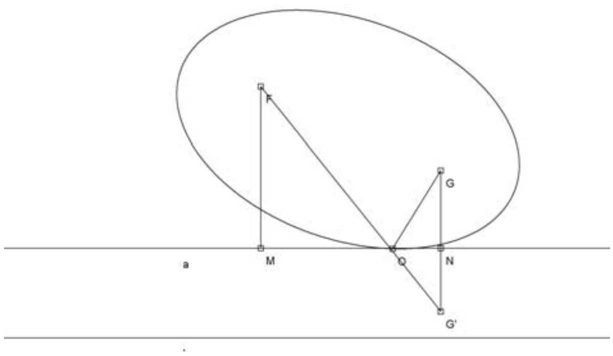
Ed ora attacchiamo queste (poche) soluzioni.

4.1 [078]

4.1.1 ...vista in un brutto posto...

Soluzione a questo problema ci è giunta da ***Zar***, ***Cid*** e ***PMP***. Possiamo permetterci di pubblicare un po' di tutti e tre, cominciamo da ***PMP***:

> (...) Ad ogni modo, abbiamo un'ellisse: il suo punto più basso è il più basso dei due in cui la tangente è orizzontale. Bene, gli angoli formati dai segmenti condotti dai fuochi a questo punto rispetto alla tangente sono uguali: la dimostrazione è banale, basta specchiare uno dei due fuochi sotto la tangente. Ma quindi abbiamo due triangoli simili, se tracciamo anche le perpendicolari dai fuochi alla tangente. A questo punto visto che conosciamo i cateti verticali b' e c' (sono b-e e c-e) troviamo per similitudine il punto di tangenza come funzione di e. Da qui si calcolano le ipotenuse con Pitagora, si fa la somma che però sappiamo essere d, e quindi riusciamo a ricavare e in funzione di a, b, c, d.



Come potete vedere il Nostro non ha scritto nemmeno una formula, ma ci ha fatto un meraviglioso disegno. ***Zar***, invece, ci scrive:

> La risposta alla prima domanda mi pare banale, se supponiamo che il cavo di acciaio sia inestensibile e di massa trascurabile (altrimenti ci saltano fuori delle catenarie e la cosa si complica notevolmente...): si chiama ellisse il luogo dei punti del piano per i quali rimane costante la somma delle distanze da due punti (detti fuochi). I due fuochi sono i due punti di ancoraggio, la somma delle distanze è rappresentata dalla lunghezza del cavo di acciaio. Sui libri di testo il metodo di costruzione dell'ellisse utilizzando la definizione si chiama "ellisse del giardiniere", e quando lo si spiega agli studenti si sentono sempre commenti del tipo: "seee, figuriamoci se i giardinieri fanno così per fare le aiuole!".
>
> La risposta alla seconda domanda, invece (quanto deve essere il valore di e per non grattarmi le ginocchia? [e qui si suppone che il gioco non sia a forma di skilift come quello vicino a casa mia, dove ci si può sedere senza paura di toccare con le ginocchia, al massimo si tocca con le scarpe]), è complicata dai calcoli.
>
> Se vogliamo scrivere l'equazione dell'ellisse in forma cartesiana, lasciandola così com'è, cioè ruotata rispetto agli assi cartesiani, saltano fuori delle formulone lunghissime e noiosissime, che fanno venir voglia di usare strumenti informatici per diminuire la noia.
>
> Conviene allora ruotare l'ellisse e metterla in forma normale, immaginando solo che la forza di gravità non tiri esattamente verso il basso... Il "terreno" risulterebbe inclinato di un angolo pari all'arcotangente di (b-c)/a e il problema si ridurrebbe a

trovare una tangente a un ellisse di data equazione avente coefficiente angolare (la tangente, non l'ellisse) pari a (b-c)/a. Fatto questo, si può facilmente calcolare la distanza di questa tangente dalla linea di terra, e calcolare quindi il valore di e richiesto.

La pigrizia, il caldo e i calcoli comunque lunghi ci portano a utilizzare sistemi automatici di calcolo... Il risultato finale quindi viene trascritto qua sotto per puro spirito di completezza, sottolineando che nulla è stato scritto "a mano"... (spero che la formattazione venga mantenuta, altrimenti non si capisce proprio nulla).

$$c = \frac{\dfrac{\sqrt{\left((b-c)^2+1\right)}d\sqrt{\left(d^2-(b-c)^2-a^2\right)}}{4a}+\dfrac{\sqrt{\left((b-c)^2+a^2\right)}(b-c)}{2a}}{\sqrt{\dfrac{(b-c)^2}{a^2}+1}}$$

Formula scritta in ASCII art, che abbiamo tentato di interpretare, si spera correttamente. A questo punto ***Zar*** si è accorto di un piccolo errore...

Ho calcolato quanto vale la distanza tra il punto più basso dell'ellisse e il terreno, non ho calcolato quanto deve valere d perché non si tocchi con le ginocchia. Comunque basta (ehm) ricavare d dalla mia formula per ottenere la risposta. Il calcolo è lasciato come esercizio al lettore volonteroso.

Meno male che arriva ***Cid***:

Risposta alla domanda eminentemente teorica:

La curva tracciata dalla carrucola è un arco di ellisse (di cui i punti B e C rappresentano i fuochi), in quanto la somma delle distanze della carrucola dai due punti B e C risulta essere sempre uguale a d.

Risposta alla domanda eminentemente pratica:

Se io a braccia tese e ginocchia piegate sono alto e, allora la lunghezza della corda deve essere:

$$d < \sqrt{(b+c-2\cdot e)^2+a^2}$$

La soluzione si ricava dal "Problema di Erone", se io sono alto e, significa che il percorso più breve che da B va a C passando per la parallela al suolo ad altezza e, deve essere maggiore di d.

Dal "Problema di Erone" so che ciò si ottiene quando l'angolo B-O-E1 è uguale all'angolo C-O-E2. Pertanto la distanza d deve essere minore della distanza AB=BO+OA e questa si calcola con il teorema di Pitagora $(AB)^2=(BF)^2+(AF)^2$, sappiamo che AF=a ci resta da trovare BF,

BF=BE1+E1F= BE1+CE2=(b-e)+ (c-e)= (b+c-2e), dunque:

$d^2<(AB)^2 =(b+c-2e)^2+a^2$,

$d^2< (b+c-2e)^2+a^2$

e quindi si ottiene la soluzione $d < \sqrt{(b+c-2\cdot e)^2+a^2}$.

Speriamo ***Cid*** non ce ne voglia per aver tagliato la sua figura, non siamo riusciti a copiarla.

4.1.2 Traslochi in Redazione

In pratica solo ***PMP*** e ***Cid*** si sono veramente cimentati nella soluzione, il che dimostra quanto poco vi stanno a cuore le finanze di Alice. Meno male che ***Cid*** si è dimostrato veramente efficiente: per prima cosa ci ha inviato una risposta ed un programmino per ottenere le stringhe desiderate:

> Per quanto riguarda i traslochi, puoi tranquilizzare Alice, qualunque sia il numero N di cianfrusaglie da spostare le saranno sufficienti comunque 2 sole liste disgiunte.
>
> Ma sicuramente Alice, oltre a sapere che non deve pagare più di 2 giri di birre, gradirebbe sapere anche come deve fare.
>
> Ora, sapendo che Alice è allergica ai calcoli di permutazioni, per farle piacere, invece di dilungarmi in una dimostrazione teorica ho deciso di scriverle un programma che le fornisca direttamente le 2 liste disgiunte.
>
> Questo programma l'ho scritto con l'editor di Visual Basic (VBA) ma te la invio in formato *.txt per non appesantirti inutilmente la casella di posta. (Si chiama "traslochi.txt"). Per usarlo, ti è sufficiente copiarlo nell'editor di Visual Basic di Word o di Excel (come preferisci).
>
> Leggendo ed usando il programma vi renderete conto che si ottengono sempre 2 liste disgiunte indipendentemente dal valore di N, anche se nell'implementazione dell'algoritmo ho dovuto limitare N ad un massimo di 30000 cianfrusaglie per problemi legati al tipo di variabili e ai limiti dovuti all'allocazione di memoria.

Alice ci ha ovviamente giocato, ma ha deciso di distribuirlo solo su richiesta. Poi ***Cid*** ci ha mandato la soluzione analitica:

> Per risolvere questo problema ho seguito il ragionamento seguente: considero la disposizione iniziale degli elementi, assegnando un numero progressivo ad ogni oggetto, quindi la situazione iniziale è:
>
> 1, 2, 3, 4, 5, ..., N
>
> considero la funzione f(i) che mi definisce la posizione in cui andrà a finire l'oggetto i. Quindi la situazione finale sarà:
>
> f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), ..., f(N)
>
> Utilizzo la seguente notazione matematica: chiamo $f_2(i)=f(f(i))$, chiamo $f_3(i)=f(f(f(i)))$, ecc. Ora partendo dall'elemento 1, considero il seguente sottoinsieme degli N elementi:
>
> $1, f(1), f_2(1), f_3(1), .., f_m(1)$
>
> dove $f_m(1)$ è tale che $f(f_m(1))=1$
>
> Se l'insieme degli N elementi meno questo sottoinsieme è diverso dall'insieme vuoto, prendo il primo degli elementi rimanenti e ripeto l'operazione costruendomi così un altro sottoinsieme. Ripeto l'operazione fino ad aver esaurito tutti gli N elementi.
>
> Ora considero la funzione inversa di f(i), tale funzione la chiamo g(i), quindi se f(i)=k, allora g(k)=i.
>
> Prendo il primo sottoinsieme e noto che siccome $f(f_m(1))=1$, allora $g(1)= f_m(1)$, analogamente $g(g(1))= f_{m-1}(1)$, $g(g(g(1)))= f_{m-2}(1)$, ecc.
>
> $g_k(1)= f_{m+1-k}(1)$, gli elementi totali del sottoinsieme sono h=m+1 e quindi vale la relazione: $g_k(1)= f_{h-k}(1)$,
>
> A questo punto scelgo come prima lista disgiunta, i seguenti spostamenti:

$(1, f(1)), (g(1), f_2(1)), (g_2(1), f_3(1)), (g_3(1), f_4(1))$, ecc

e proseguo nello stesso modo con gli altri sottoinsiemi.

Come seconda lista disgiunta, invece prendo

$(f(1), g(1)), (f_2(1), g_2(1)), (f_3(1), g_3(1))$, ecc

e proseguo nello stesso modo con gli altri sottoinsiemi.

Così avremo che $g(1)$ finisce nella posizione di $f(1)$ che era nella posizione 1, cioè finisce in posizione 1, quindi è al suo posto; considerato che $f(g(1))=1$.

$f(1)$ finisce nella posizione di $g(1)$ che era nella posizione $f_2(1)$, cioè finisce al suo posto; considerato che $f(f(1))= f_2(1)$

$g_2(1)$ finisce nella posizione di $f_2(1)$ che era nella posizione $g(1)$, cioè finisce al suo posto; considerato che $f(g_2(1))=g(1)$

$f_2(1)$ finisce nella posizione di $g_2(1)$ che era nella posizione $f_3(1)$, cioè finisce al suo posto; considerato che $f(f_2(1))= f_3(1)$

$g_3(1)$ finisce nella posizione di $f_3(1)$ che era nella posizione $g_2(1)$, cioè finisce al suo posto; considerato che $f(g_3(1))=g_2(1)$

$f_3(1)$ finisce nella posizione di $g_3(1)$ che era nella posizione $f_4(1)$, cioè finisce al suo posto; considerato che $f(f_3(1))= f_4(1)$

...

$g_k(1)$ finisce nella posizione di $f_k(1)$ che era nella posizione $g_{k-1}(1)$, cioè finisce al suo posto; considerato che $f(g_k(1))=g_{k-1}(1)$

$f_k(1)$ finisce nella posizione di $g_k(1)$ che era nella posizione $f_{k+1}(1)$, cioè finisce al suo posto; considerato che $f(f_k(1))=f_{k+1}(1)$

…

Infine, se il numero $h=m+1$ di elementi del sottoinsieme è pari allora $f_{h/2}(1)$ finisce nella posizione di $g_{(h/2-1)}(1)$ e si ferma lì, ma lì è al suo posto considerato che essendo m pari $f_{h/2}(1)= g_{h/2}(1)$ e quindi è al suo posto, essendo $f(g_{h/2}(1))=g_{(h/2-1)}(1)$

Mentre, se il numero $h=m+1$ di elementi del sottoinsieme è dispari allora $g_{(h-1)/2}(1)$ non fa parte della prima lista disgiunta e nella seconda lista disgiunta finisce nella posizione di $f_{(h-1)/2}(1)$ che era nella posizione $g_{(h-3)/2}(1)$, ma lì è al suo posto considerato che $f(g_{(h-1)/2}(1))= g_{(h-3)/2}(1)$.

Analogamente avviene negli altri sottoinsiemi.

Spero di essere stato chiaro. Di seguito cercherò di chiarire meglio il concetto con un esempio.

Esempio:

Dalla situazione iniziale: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 voglio passare a: 10, 8, 5, 1, 2, 9, 6, 3, 4, 7

abbiamo $f(1)=4$, $f_2(1)=9$, $f_3(1)=6$, $f_4(1)=7$, $f_5(1)=10$, $f_6(1)=1$

quindi $g(1)=10$, $g_2(1)=7$

e $f(2)=5$, $f_2(2)=3$, $f_3(2)=8$, $f_4(2)=2$

quindi $g(2)=8$, $g_2(2)=3$

Per cui, la prima lista disgiunta sarà: (1, 4), (10, 9), (7, 6), (2, 5), (8, 3)

cosi passiamo da: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 a 4, 5, 8, 1, 2, 7, 6, 3, 10, 9 e la seconda lista disgiunta sarà: (4, 10), (9, 7), (5, 8)

cosi passiamo da: 4, 5, 8, 1, 2, 7, 6, 3, 10, 9 a 10, 8, 5, 1, 2, 9, 6, 3, 4, 7

Nell'algoritmo che ti ho inviato, ho utilizzato un metodo analogo, ma leggermente differente per cui si ottiene:

Prima lista disgiunta: (5, 8), (7, 9), (4, 10)

così passiamo da: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 a 1, 2, 3, 10, 8, 6, 9, 5, 7, 4

Seconda lista disgiunta: (1, 10), (7, 4), (6, 9), (2, 8), (3, 5)

così passiamo da: 1, 2, 3, 10, 8, 6, 9, 5, 7, 4 a 10, 8, 5, 1, 2, 9, 6, 3, 4, 7

Ma naturalmente il risultato finale è il medesimo…

Stavamo per chiudere questo capitolo quando è arrivata la soluzione di ***Marco di Siena***, che non esitiamo a proporvi perché i nomi delle sue variabili ci fanno impazzire.

Dato un intero positivo N, diciamo che il minimo numero di liste che Alice deve compilare per essere certa che i due valenti facchini sistemino il mobilio nella guisa desiderata è il numero di *Aggiustamenti Richiesti* (che, per brevità, indichero con AR(N)). AR(N) è perciò anche pari al numero di giri di birra che, alla peggio, Alice deve offrire.

All'inizio mi ero incaponito come uno zuccone nel voler mostrare che AR(N) fosse sostanzialmente il logaritmo in base due di N, ma dopo ore e ore di tentativi a vuoto, finalmente ho visto la luce.

Vorrò perciò dimostrare che AR(1) = 0, AR(2) = 1, AR(N) = 2 ogniqualvolta N>1.

E va be'; per N=1 non ci vuole un genio per capire come mai, per ridisporre un solo oggetto nell'unico posto disponibile (e in cui quindi ci si deve per forza già trovare) basta... non fare nulla! Zero birre.

Il caso N=2 è molto più insidioso, ma Alice non si scompone e scopre che se vuole far scambiare di posto tra loro due oggetti, basta che compili una lista dove chiede che i due oggetti siano scambiati. Una birra.

Veniamo ora ai casi più succulenti. Supponiamo di avere N>2 oggetti da spostare.

Definiamo una *Rotazione degli Arredi* su N oggetti (in breve, RdA(N)) una situazione per cui Alice vuole far mettere il primo oggetto al posto del secondo che vuole che sia messo al posto del terzo, e così via, fino all'N-esimo, che vuole che sia messo di nuovo al posto del primo. Se così facendo abbiamo terminato gli oggetti, abbiamo finito. Altrimenti possiamo sceglierne uno che non abbiamo ancora considerato come compreso in una RdA e ricominciare.

In questo modo si vede come una qualunque disposizione voluta da Alice possa essere considerata come una giustapposizione di un certo numero di RdA (eventualmente su un solo oggetto, nel caso di arredi già a destino).

Descriverò ora un *Procedimento Risolutivo Sistemante* (o anche PRS), che permette ad Alice di compilare al massimo due liste che risistemano nel modo voluto le masserizie redazionali.

Per fare questo, si considera l'insieme degli oggetti suddiviso in RdA. Se compaiono solo RdA(1), significa che gli oggetti sono già al loro posto e non c'è nulla da spostare. Se compaiono solo RdA(1) e RdA(2), significa che Alice vuole operare solo scambi tra oggetti. E' sufficiente allora che elenchi in una lista questi scambi e otterrà il risultato voluto.

Se compaiono anche RdA(N), Alice numera gli oggetti partendo da uno di essi a piacere e seguendo l'ordine stabilito dai suoi "tizio, che va la posto di caio", fino a N.

Poi compila la lista "l'oggetto 1 va scambiato con N; il 2 con N-1; il 3 con N-2; ecc... Fa questo per ognuna delle RdA che compaiono e produce una lunga lista unica.

In questo modo l'oggetto numerato con 1 è andato al posto N, mentre Alice lo vorrebbe al posto 2, ora occupato da N-1, che Alice vorrebbe al posto N ora occupato da 1. Quindi 1 è scambiato con N-1. In modo analogo, succede che 2 e N-2 sono scambiati tra loro e così via. L'oggetto N (e, se N è pari, anche l'oggetto N/2) ora sono sistemati. In sostanza, con la prima lista, Alice si è ricondotta al caso di avere solo oggetti al loro posto o scambiati a due a due tra loro e, con una seconda lista, può farli sistemare. Il PRS è così completo.

Questo prova che AR(N)<=2. Per vedere che vale l'uguaglianza, occorre far vedere che in effetti due liste sono necessarie per qualche disposizione di oggetti.

Basta che Alice voglia sistemare gli oggetti secondo una RdA(3), per aver bisogno di due liste: se ne fosse sufficiente una sola, per mandare il primo oggetto al suo posto, dovrebbe scambiare il primo con il secondo. Quest'ultimo però ora si troverebbe al primo posto, mentre Alice lo vorrebbe al terzo. Per cui due giri di birra sono necessari.

Non vi preoccupate, Alice ha alla fine pagato qualche giro di birra in più, lo sapete quanto le piace bere in compagnia. Buone vacanze a tutti!

5. Quick & Dirty

Nel *dojo* in cui Rudy, Alberto, Fred e altra gente praticano Arti Marziali, è stato verificato uno strano fenomeno.

Due Allievi praticano una stessa Arte Marziale con un (e solo un) altro Allievo.

Due qualsiasi Arti Marziali hanno un (e solo un) Allievo che le pratica entrambe.

Quello che ci piacerebbe sapere è quanti Allievi ci sono e quante Arti Marziali.

Ma quello che ci interesserebbe in particolare è una rappresentazione *grafica* del tutto, da usare come simbolo della Scuola...

6. Pagina 46

Primo Metodo

Per fornire un valore reale come soluzione, tutte le espressioni sotto radicale del primo membro devono essere non negative; designiamo allora questi valori , ad iniziare dal più interno, come $y_1^2, y_2^2, y_3^2, \ldots, y_{n-1}^2, y_n^2$; abbiamo allora:

$$\begin{aligned} x + 2x &= y_1^2, \\ x + 2y_1 &= y_2^2, \\ x + 2y_2 &= y_3^2, \\ &\ldots \\ x + 2y_{n-2} &= y_{n-1}^2, \\ x + 2y_{n-1} &= y_n^2, \end{aligned} \qquad \textbf{[6.1]}$$

dove tutti i numeri $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono reali non negativi. L'equazione originale, nella nuova formulazione, diventa:

$$y_n = x \qquad \textbf{[6.2]}$$

Supponiamo ora sia $x > y_1$.

In questo caso, il confronto tra le prime due equazioni **[1]** mostra che deve essere $y_1 > y_2$; il confronto tra la seconda e la terza mostra che deve essere $y_2 > y_3$ e così via, ossia:

$$x > y_1;\ y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_{n-1} > y_n \quad \Rightarrow \quad x > y_n,$$

che contraddice la premessa **[2]**.

Con ragionamento simile si dimostra che non puó essere $x < y_1$ e quindi deve essere $x = y_1$.

Dato che $y_1^2 = 3x$, segue che $3x = x^2$, e quindi le uniche soluzioni reali sono:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0.$$

Secondo Metodo

Nell'equazione originale

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{n \text{ radicali}} = x \qquad \textbf{[6.3]}$$

Sostituiamo l'ultima ***x*** del primo membro con l'espressione di ***x*** fornita da **[3]**; otteniamo:

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{2n \text{ radicali}} = x$$

e, ripetendo l'operazione, abbiamo successivamente l'espressione qui sopra contenente $3n, 4n, \ldots$ segni di radicale; questo significa che:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots}}} \\ &= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{N \text{ radicali}}. \end{aligned} \qquad \textbf{[6.4]}$$

Ossia segue che (l'espressione tra parentesi quadre coincide con il secondo membro della prima riga):

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots}}} \\ &= \sqrt{x+2\left[\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots}}\right]} \\ &= \sqrt{x+2x} \end{aligned} \qquad \textbf{[6.5]}$$

ossia $x = \sqrt{3x} \Rightarrow x^2 = 3x$ e quindi si hanno le soluzioni

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0.$$

Quindi, le soluzioni dell'equazione proposta ***non*** dipendono dal valore di ***n***.

"Tagliato per i campi" in quanto a priori nulla ci garantisce l'esistenza del limite (finito) indicato nella **[4]***; questo è dimostrabile, ma la cosa è oltremodo noiosa.*

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Costruzioni Complicate - [1] - Piùppermenomeno, menopermenopiù

Alzi la mano chi, da piccolo, non ha avuto almeno un principio di dubbio sulla filastrocca del titolo. E se alzate la mano non ci credo.

In effetti, non è facile (soprattutto in tenera età) convincersi della sua correttezza; la felice coincidenza di un paio di figli che stanno affrontando questa parte della matematica ha fatto sì che cominciassimo a cercare qualcosa, scoprendo una serie di cose decisamente interessanti. Come al solito, la prendiamo alla larga.

Cos'è la moltiplicazione?

Lasciate perdere la definizione geometrica e operativa ("Mi serve per calcolare l'area": Alberto), qui stiamo parlando di *matematica*. Pura. Astratta.

Limitiamoci, per il momento, alla semiretta dei numeri positivi; quando moltiplicate due numeri tra di loro, tutto quello che fate è prendere "la strada per arrivare fino al primo" e ***stiracchiarla*** opportunamente, sino ad arrivare al risultato. Credo che la cosa sia abbastanza evidente dalla Figura 1, posto che il calcolo sia giusto.

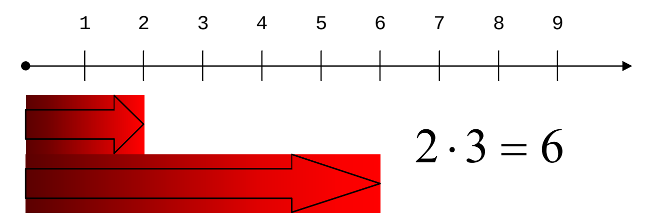


Figura 1 - Moltiplicazione tra positivi

Se pensate che siamo diventati completamente deficienti probabilmente siete nel giusto, ma per altri motivi; qui, quello che vorremmo sottolineare, è che *la moltiplicazione ha allungato la freccia*, non ha calcolato un'area.

Cos'è un numero negativo?

1. È un numero positivo girato dall'altra
2. È un numero positivo moltiplicato per -1.

Ossia, la moltiplicazione per un negativo fa due cose: prima *allunga la freccia*, poi *la gira dall'altra*; e, essendo la prima operazione nient'altro che la moltiplicazione per un positivo, *la moltiplicazione per* -1 *inverte la freccia.*

"Sì, e menopermeno?" (sempre Alberto). Semplice: prima allunghi (i due positivi), poi giri una volta (il primo -1) e poi giri una seconda volta (il secondo -1); insomma, se vi piacciono i paroloni, -1 ***è l'operatore di rotazione di*** π ***per l'asse dei numeri reali***[37]

Tempo fa ***Dario*** (Bressanini: l'autore dell'articolo sulla risoluzione dell'equazione di terzo grado) faceva notare ad un altro lettore che le equazioni $x^3 = px + q$ e $x^3 - px - q = 0$ per Tartaglia e tutti gli altri erano ***due cose diverse***; in effetti, all'epoca i numeri negativi erano ***usati*** nei calcoli, l'importante era ***farli sparire prima della fine***; in sostanza, un artificio matematico punto e basta.

Ora, non ditemi che questo non vi ricorda niente. Quand'è l'ultima volta che avete assaggiato una $\sqrt{-1}$?

---

[37] O, nelle parole del mio (fisico) matematico preferito, "*Mutiplication is all about stretching and flipping*". Lo citeremo ancora, tranquilli.

Esattamente lo stesso giochetto funziona nel caso dei numeri Complessi; basta considerarli numeri "di un altro tipo" e lavorare contemporaneamente *con entrambi*. Una cosa del genere, se ci pensate un attimo, è possibile solo se li rappresentate ***nel piano***; sull'asse $\boldsymbol{x}$ i numeri reali, mentre sull'asse $\boldsymbol{y}$ mettiamo questi strani oggetti.

Adesso arriva il colpo di genio: cosa significa, nell'ottica che abbiamo applicato sinora, moltiplicare per $\sqrt{-1}$?

Beh, qualunque cosa sia questo oggetto, abbiamo per il momento un'unica certezza; applicato (attraverso la moltiplicazione) per due volte ad un numero, deve dare lo stesso risultato che ottengo moltiplicando il numero originale per -1; ossia, come abbiamo visto prima, deve effettuare una rotazione di di 180°. Conosciamo il risultato finale, adesso si tratta di vedere cosa succede per strada.

Applicando per due volte la stessa operazione, eseguirò due volte lo stesso movimento; ossia, $\sqrt{-1}$ è l'operatore che *ruota di 90° nel piano*.

In pratica, abbiamo trovato cosa sono i numeri Complessi: operatori che, applicati al piano, lo stirano e lo girano!

Sì, probabilmente quella scritta qui sopra sembra un'emerita stupidaggine; in fondo, se dobbiamo trattare con i punti del piano, le coordinate cartesiane rappresentano un metodo decisamente più semplice. Già, ma hanno un piccolo problema: non sono in grado di fare quello che sta alla base di tutto il nostro discorso; *se non introducete i numeri Complessi, non riuscite a moltiplicare due punti tra di loro*; non ci sono problemi a sommarli (con i vettori) o a moltiplicarli per uno scalare; però moltiplicazione tra di loro nisba.

Questo ci porta a considerare una ridefinizione del concetto di moltiplicazione; se i numeri che vogliamo moltiplicare tra di loro hanno due componenti reali, allora

$$(a,b)(c,d)=(ac-db,da-bc) \qquad \textbf{[7.1]}$$

in cui, senza dare troppo nell'occhio, abbiamo introdotto il concetto di ***coniugato*** di un numero:

$$(a,b)^{*}=(a,-b). \qquad \textbf{[7.2]}$$

Riepilogando, siamo riusciti a dare un significato ai Complessi, e quindi possiamo adesso trattare qualsiasi equazione di secondo grado; da un punto di vista strettamente, pratico, al costo di una ridefinizione neanche troppo complicata del concetto di moltiplicazione, abbiamo ottenuto gratis un ***Campo Algebrico Completo***, ossia un posto dove potete risolvere tutte le equazioni di secondo grado a coefficienti reali; e scusate se è poco.

Sarà carino, ma non è proprio tutto rose e fiori; infatti, anche se ci siamo allargati da una parte, qualcosa abbiamo perso; infatti i Complessi ***non sono ordinati***; anche se definite una *norma*, non potete metterli tutti in bell'ordine, quelli che stanno su una circonferenza[38] vanno, in questo caso, tutti assieme.

Beh, speriamo non sia troppo grave e andiamo avanti.

La grande idea di Hamilton a questo punto è stata che se la cosa funzionava in due dimensioni, ci si chiede perchè non dovesse funzionare anche in tre, luogo nel quale un sistema per gestire le rotazioni potrebbe essere indubbiamente comodo.

[38] Qualunque cosa vogliate intendere con "circonferenza"; nulla vieta di definire norme strane, come abbiamo già fatto altre volte.

La prima idea che viene in mente al Nostro, a questo punto, è che se in una dimensione mi serve una componente, in due dimensioni mi servono due componenti, è immediato quante componenti mi servano in tre dimensioni.

Provate, e non funziona.

La cosa, come vi ha narrato Doc, è stata piuttosto frustrante per Hamilton, e ha portato, come abbiamo visto, ad una serie di prese per i fondelli anche da parte dei membri più giovani della sua famiglia; questo sino a quando un lampo di genio lo ha portato a considerare ***quattro*** componenti con le quali lavorare; portandolo infine a quello definito da alcuni "sublime atto di teppismo matematico", oggi ricordato da una lapide.

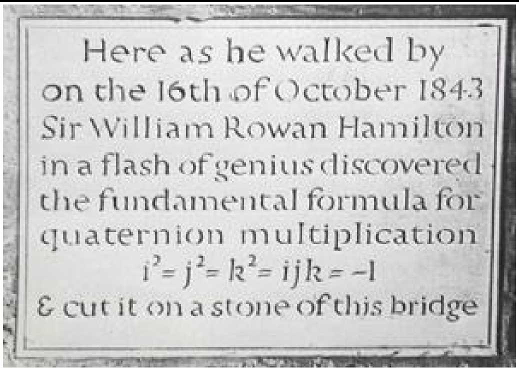


Figura 2 - Nascita di un Quaternione

"Ma lì ce ne sono tre!" Prego, non dimenticatevi i Reali. C'è un -1, al fondo.

Bene, adesso si tratta di definire la moltiplicazione tra questi oggetti, e quindi di cominciare a giocarci, corretto?

In realtà, l'abbiamo già definita; nella formula **[1]**, vista precedentemente, è sufficiente considerare *le componenti come numeri Complessi*, tenendo conto della **[2]**.

In sostanza, indicando le componenti complesse con le lettere maiuscole, abbiamo:

$$(A,B)(C,D) = \left(AC - D^* B, DA - BC^*\right) \qquad \textbf{[7.3]}$$

e il coniugato di un Quaternione viene definito come:

$$(A,B)^* = \left(A^*, -B\right) \qquad \textbf{[7.4]}$$

Notate come tutto questo sia strettamente compatibile con quanto detto prima; il coniugato di un reale è il reale medesimo, quindi la formula **[4]** è tranquillamente applicabile anche al caso precedente, di cui rappresenta una generalizzazione. Insomma, l'unico problema sembra essere che per gestire le rotazioni in ***tre*** dimensioni abbiamo bisogno di un oggetto a ***quattro*** dimensioni; guaio minore, considerato che possiamo fare a meno di quelle antipatiche bestie che sono il prodotto scalare e vettoriale[39].

Credo cominciate però a subodorare che in questi rami della matematica ben poche cose arrivano gratis. Qui, il guaio comincia a farsi grosso.

Infatti, è abbastanza semplice, partendo dal Graffito Hamiltoniano, vedere che

$$[i, j] = ij - ji = -k \ ;$$

questo non significa nient'altro se non che ***i Quaternioni non sono commutativi***; anche se matematicamente si può verificare in modo abbastanza elementare, cerchiamo un'altra via.

Visto che si tratta di rotazioni nello spazio e la mia inettitudine nel disegno è notoria, approfittiamo del sostanzioso apporto dei nostri valenti ***Assistenti di Laboratorio di RM***, che ardono dalla voglia di sfoggiare il loro nuovo camice[40]. Non avendo a disposizione

[39] Non crediate che si stia scherzando; quando Gibbs ha sviluppato le notazioni per questi due prodotti, la scuola dei "Quaternionisti" di Edimburgo le bollò come "hermaphrodite monstruosities". Dalla prosecuzione di questa filosofia, il mio esame di Fisica Generale I avrebbe tratto indubbio vantaggio.

[40] È uno solo, prima che pensiate a nepotismo. Prestato a Fred e a Alberto per il tempo strettamente necessario.

un vettore da ruotare, ciascuno di loro si è scelto una rappresentazione e ha applicato gli opportuni versori Quaternionici; siccome però le istruzioni del sottoscritto erano vaghe come al solito, il primo ha applicato ***prima*** l'operatore ***i*** e ***dopo*** l'operatore ***j***, mentre il secondo ha applicato ***prima*** l'operatore ***j*** e ***dopo*** l'operatore ***i***. Risultato: lo stesso di quando fanno i compiti. Si somigliano, ma sono diversi.

Figura 3 **-** $[i, j] = -k$ ***, ossia mai che quei due vadano d'accordo***

Quindi, non solo non sono più ordinati (ereditano questa caratteristica dai numeri Complessi), ma esattamente come i Complessi perdevano una caratteristica rispetto ai Reali, con la costruzione dei Quaternioni perdiamo la proprietà commutativa che eravamo riusciti a conservare nei Complessi.

Viene da chiedersi ora *dove sia* tutta questa importanza della moltiplicazione, e per quale motivo con tre componenti la cosa sia impossibile; beh, un punto piuttosto importante è che se avete a disposizione la moltiplicazione, nei Reali potete dividere per qualsiasi numero tranne che per 0; equivalentemente, nei Complessi potete dividere per qualsiasi numero tranne che per $(0,0)$; in sostanza, quello che Hamilton stava cercando era un modo per moltiplicare per qualsiasi numero con un *unico* numero per il quale non possiate dividere.

Ma cosa c'è di speciale nei Quaternioni? Forse è meglio chiedersi cosa ci sia di speciale in genere da queste parti, procedendo per confronto. Tanto per cominciare, i Complessi descrivono le rotazioni *di loro stessi*, mentre i Quaternioni a quattro componenti descrivono le rotazioni dello spazio a *tre* dimensioni, che è una cosa diversa dai Quaternioni; non stanno parlando di loro stessi. Inoltre, come appena visto, un'altra cosa strana dello spazio a due dimensioni è che qui le rotazioni commutano, mentre altrove no:

è inoltre abbastanza logico aspettarsi che questa non commutatività dai Quaternioni in avanti sia ereditata (nelle dimensioni superiori, posto che si riesca ad andare avanti) e quindi la “stranezza” è delle due dimensioni, *non delle altre*; sono i due, che fanno diverso!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms