Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 078 – Luglio 2005- Anno Settimo

1. Tre (verdi) Foreste 3

2. Problemi 12

2.1 ...vista in un brutto posto... 12
2.2 Traslochi in Redazione 13

3. Bungee Jumpers 13

4. Soluzioni e Note 14

4.1 [059] 14
4.1.1 Tre Dadi Duri 14
4.2 [076] 18
4.2.1 Ancora la torta... 18
4.2.2 Lavori al Paesello! 19
4.3 [077] 24
4.3.1 Braccia sottratte all'agricoltura 24
4.3.2 Cucchiaio di legno! 26

5. Quick & Dirty 27

6. Pagina 46 27

7. Paraphernalia Mathematica 30

7.1 Manca un passo 30

Rudi Mathematici

Rivista Fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S.)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 077 ha diffuso **683** copie e il **21 Giugno** per Google eravamo in **704** pagine

Il decimo problema di Hilbert lo avrà pure "finito di dimostrare" Matyasevich (o come cavolo si scrive), ma quasi tutto il lavoro lo ha fatto Julia Robinson, in copertina.

1. Tre (verdi) Foreste

Basta prendere una carta dell'Europa, anche non troppo dettagliata. Servono poi un righello ed una matita, per tracciare una linea che unisca Londra a Berlino; subito dopo un'altra sottile linea di grafite va tracciata da Parigi a Copenhagen. Quattro capitali non propriamente mediterranee, ben rappresentative della moderna Europa nord-occidentale: due di queste, Parigi e Londra, che affondano le radici della loro storia nella romanità dell'impero, rimarcata anche dai loro nomi originali, Lutetia Parisiorum e Londinium; le altre due rimaste perfettamente immuni dalle aquile delle legioni romane e con nomi che resistono rigorosamente inespressi dalle coniugazioni latine.

I due tratti disegnati dalla matita attraversano il Reno, il fiume più europeo di tutti, proprio perché da sempre ha le due rive separate e disgiunte che servono a marcare frontiera e confine tra pezzi diversi del continente. Sempre Europa in entrambe le sponde, quasi sempre nazioni diverse sull'una e sull'altra. Eppure è fiume largo, navigabile, e il suo ruolo di frontiera è da tempo commutabile con il ruolo di via di comunicazione; infrastruttura preziosa dei tempi antichi come di quelli moderni. Ciononostante, la sua storia è soprattutto segnata dalla funzione di limite, confine, barriera. La cultura romanza sulla riva sinistra, quella germanica sulla destra.

Una delle ragioni principali che ha portato le due rive del grande fiume ad essere una contro l'altra armate risale, sulla coordinata temporale, all'agosto del 9 d.C., e sulle coordinate spaziali proprio all'incrocio tra le due linee tracciate a matita sulla cartina dell'Europa. Quelle linee, con buona approssimazione, si incontrano nella regione di Osnabrück, nei pressi della città di Bramsche: una parte di questa città della bassa Sassonia è denominata Kalkriese, ma nel nove dopo Cristo era una zona ben poco urbanizzata. Era una fitta foresta, e i legionari romani e gli indigeni germani la chiamavano Selva di Teutoburgo.

Nei primissimi anni del primo millennio dell'era cristiana l'Impero Romano era davvero giovane. Dalla battaglia di Zama in poi, la Repubblica aveva intrapreso un'espansione senza precedenti, ottenuta quasi senza sconfitte militari significative. Certo, non tutte le battaglie venivano vinte: la sconfitta e morte di Crasso a Carre contro i Parti non la si può spacciare per un semplice incidente di percorso, ad esempio. Però già sotto il primo Principe la forza di Roma circonda tutto il Mediterraneo, connette territori che, a chiamarli coi nomi attuali, vanno dall'Iraq al Portogallo, dall'Inghilterra alla Turchia, dall'Atlante al Mar Nero. Mezzo secolo prima Giulio Cesare aveva domato senza troppi patemi la Gallia, e le aquile romane si muovevano ormai all'interno dei territori della Germania. Le rive dell'Elba vennero raggiunte già attorno al 10 a.C., e i consoli erano certi di ripetere in terra tedesca le vittorie militari ottenute in terra francese. Così, quando i Cherusci di Arminio[1] si avventano da un'altura sulla colonna in marcia formata dalle legioni XVII, XVIII e XIX agli ordini di Publio Quintilio Varo, sorprendendo e massacrando ventimila soldati romani, la notizia getta tutta Roma il vecchio Ottaviano Augusto nella disperazione. Svetonio racconta che il principe evitò a lungo di radersi, in segno di lutto, e tocca punte melodrammatiche descrivendo la reiterata invocazione del figlio adottivo di Cesare verso il generale sconfitto:"Varo, rendimi le mie legioni!"[2].

I Germani non erano ancora la furia inarrestabile del quarto secolo: erano giovani popoli abili nella guerriglia, armati dal bisogno e dall'entusiasmo, ma non potevano

[1] Uno dei rari casi in cui il nome tedesco suona più familiare di quello romanizzato: Arminio, in Germania, si chiama Hermann.

[2] "Vare, redde mihi legiones!"

ancora competere contro le addestrate legioni dell'impero in una battaglia campale. A dimostrarlo basta notare che appena sette anni dopo il disastro della Selva di Teutoburgo, Germanico riuscì a vendicare i legionari caduti sconfiggendo Arminio ad Idistaviso e recuperando le sacre insegne delle legioni[3]. Ma la disfatta di Varo rimane comunque d'importanza capitale, perché con essa Augusto, Roma e l'Impero cessano di fatto di espandersi. Ci saranno altre conquiste, certo, altre sottomissioni: Traiano assoggetterà la Dacia e la legherà al destino di Roma, al punto che quelle terre hanno ancora nel nome, Romania, e nella lingua neolatina gli innegabili caratteri romanici; sotto il suo regno l'Impero lambirà le acque del Golfo Persico e del Mar Caspio, quando raggiungerà la sua massima espansione nel 117 dopo Cristo; ma Augusto e i suoi successori conservano aperta la ferita di Teutoburgo, rinunciano e dimenticano la Germania, e trasformano una volta per tutte il Reno in una frontiera.

È interessante studiare le caratteristiche geografiche dell'Impero Romano negli anni della sua massima espansione. Il suo baricentro è assolutamente marino: il Mediterraneo è il vero cuore geografico dell'Impero, ed è facile leggere il "mare tra le terre" come il principale sistema di comunicazione del dominio di Roma. Le terre che lo circondano disegnano un toro quasi connesso[4], marcato da confini che sono ben più forti delle normali frontiere militari. Ad Ovest, l'Atlantico; a Sud, a Est, il deserto. Il tessuto connettivo dell'Impero comincia a rarefarsi, oltre gli altipiani iranici e mesopotamici, e perde di significato il voler procedere oltre il Ponto Eusino, verso le steppe della Sarmazia. È suicida inoltrarsi a caccia di conquiste attraverso il Sahara vasto più del continente europeo. In tutte quelle direzioni la terra sembra cambiare, perdere troppo radicalmente il carattere di "madre terra", fertile genitrice di messi. Anche i valli che separano la conquistata Inghilterra dalla non sottomessa Caledonia sembrano eretti non tanto per proteggersi dalle popolazioni barbare residenti oltre quelle difese, quanto per rimarcare che oltre quel limite il mondo finisce, e resistono solo le nebbie. O solo la sabbia, come a sud dell'Egitto e della Numidia, o come ad est della Mesopotamia.

Ma a nord delle Alpi e ad est del Reno la terra è ancora terra come i romani sono soliti conoscerla. Giulio Cesare aveva costruito in poco tempo un ponte su quel fiume, per puro scopo dimostrativo e intimidatorio, smantellandolo quando abbandonò quelle regioni: e anche se l'Elba era fiume lontano, sembrava già predestinato a diventare confine dell'Impero: la spada di Roma non poteva lasciare intatto quell'enorme saliente costituito da tutta la Germania. Le ragioni erano puramente geometriche: difendere i confini terrestri che correvano lungo il Reno e il Danubio era impresa enorme, tale da sbilanciare fortemente l'impianto difensivo di tutto il continente. La testa di Varo finì però su una picca a Teutoburgo, la barba di Augusto crebbe incolta per il dispiacere, e il saliente germanico, spina nel fianco dei territori imperiali, venne lasciato indisturbato. Così, il "limes" dei possedimenti romani rimase sostanzialmente fissato dalla lunga corsa di due dei maggiori fiumi d'Europa: la linea azzurra da Sud verso Nord disegnata dal Reno e quella, ancora più lunga e più azzurra, tracciata da Ovest verso Est dal Danubio[5].

---

[3] Solo due "aquile" tornarono a Roma, quelle che i Cherusci avevano portato come segno di vittoria nel loro tempio maggiore. La terza non fu mai ritrovata perché non cadde nelle mani dei Germani: l' "aquilifer", il soldato romano incaricato di portare l'insegna, preferì annegarsi con essa in una melmosa palude, piuttosto che lasciarla ai nemici come preda di guerra.

[4] Lo stretto di Gibilterra ad Ovest e il Bosforo ad Est costringono a mettere il "quasi" prima della parola "connesso". Il Mar Nero ha sempre mantenuto, infatti, almeno una piccola parte delle sue coste nordorientali libere dal dominio romano, e la cesura del Bosforo rimane tale. Almeno dal punto di vista strettamente topologico e terrestre: da quello storico e militare, la distinzione è quasi pleonastica. Per il resto, è forse ancora più pleonastico ricordare che Lesseps tagliò l'istmo di Suez solo nel 1869.

[5] È disdicevole che in un compleanno estivo non compaiano suggerimenti per le letture delle vacanze. Per fortuna il GC (Gran Capo) nota l'esistenza di un bel libro di Claudio Magris intitolato proprio "Danubio"

Nell'osservare una carta geografica si tende a dimenticare l'asse zeta: la mappa è bidimensionale e le quote del terreno sono rappresentate in maniera necessariamente meno intuitiva delle altre due dimensioni spaziali. Il rischio sembra allora quello di perdere davvero il senso tridimensionale del codice cartografico, ma per fortuna ci sono i fiumi. I fiumi sono le cartine al tornasole dell'orografia: il loro motore è la gravità, la loro strada sono le valli, e ogni ansa delle linee blu comunica qualcosa a chi esamina una mappa. A differenza delle strade, artificiali e umane, i fiumi non possono incrociarsi; al massimo confluiscono. Gli angoli che segnano l'incontro di due vie d'acqua non sono quasi mai retti come un incrocio regolamentato da un semaforo, ma acuti e ammorbiditi, come una corsia d'accelerazione in autostrada; e i fiumi uniti non si dividono mai più, salvo nelle catastrofi finali e complesse dei delta, quando il fiume si prepara a morire. Le regole del deflusso delle acque nei bacini idrografici sono naturali e intuitive, almeno per l'uso che devono farne i non professionisti: un bacino idrografico ha l'aspetto d'un albero fitto di rami e privo di fogliame, con il tronco immerso nel mare e i ramoscelli cosparsi tra i monti. Per questo, casi particolari di due grandi[6] fiumi che scorrono paralleli sono rari e famosi, come lo sono il Tigri e l'Eufrate in Mesopotamia[7]: dev'esserci un altura stretta e lunga, persistentemente lunga, per mantenerli separati. Lo spettacolo di due grandi vie d'acqua che corrono in parallelo è spettacolo che si accompagna a paesaggi misteriosi e rari, o totalmente maestosi, come fanno i grandi fiumi indiani che dragano in parallelo le acque dei ghiacci dell'Himalaia, cercando faticosissimamente la via per aggirare l'immane catena montuosa fino all'Oceano Indiano. Ma se è raro e spettacolare vedere due grandi fiumi scorrere in parallelo a poca distanza l'uno dall'altro, il caso di due grandi fiumi che scorrono vicini e in parallelo, ma *in verso opposto*, è quasi stupefacente.

Il giovane Reno scende dai Grigioni svizzeri già indirizzato nella direzione Sud-Nord, ma la vasta pace lacustre del Lago di Costanza lo disorienta e lo fa svoltare a sinistra, in un tratto quasi perfettamente orizzontale, a rimarcare il confine tra Svizzera e Germania. In questo tratto mostra ancora i tratti nervosi del fiume alpino, e a Schaffhausen[8] si esibisce nello spettacolo delle celebri cascate. E proprio da Schaffhausen un esploratore coraggioso potrebbe partire a piedi per andare a salutare il maggiore fiume europeo (russissimo Volga escluso): lasciandosi alle spalle il Reno nel suo insolito cammino verso occidente, basta procedere verso settentrione per una trentina di chilometri, e incontrare il giovanissimo Danubio. Ma il "Donau" tedesco è già conscio d'essere fiume orientale, e si dirige fin dall'inizio verso Est. È uno spartiacque curioso, questo appena attraversato dal nostro esploratore, che in pochi chilometri è passato dalla riva destra del Reno alla riva, pure destra, del Danubio. La madre del Danubio è una catena di monti che si chiama Schwarzwald, che i legionari romani chiamavano Marciana Silva, e che noi chiamiamo Foresta Nera. Un'altra foresta tedesca, come quella di Teutoburgo. La catena montuosa non

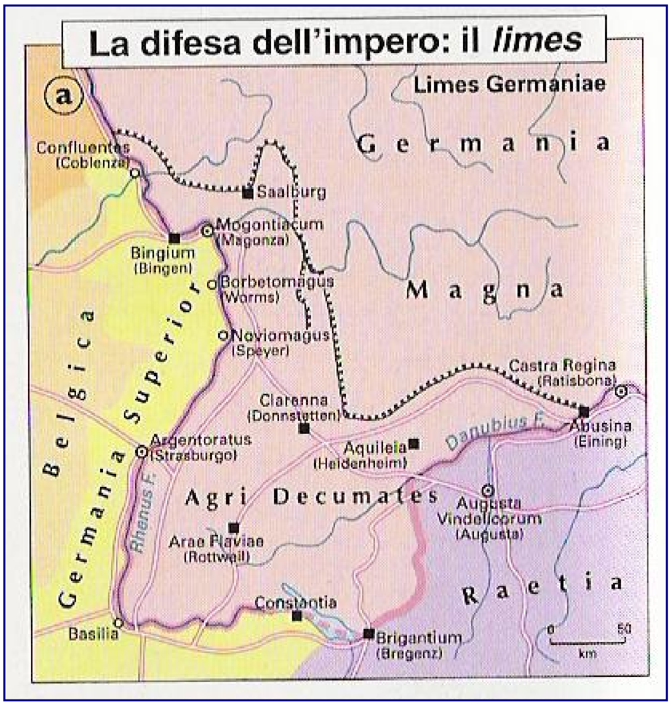
(Garzanti, 1986, "Gli Elefanti", Euro 13,00 - ma esiste anche in versione tascabile ed economica). In uno dei passaggi più divertenti, l'autore nota che il fiume potrebbe doversi chiamare diversamente, visto che al momento della confluenza con l'Inn (a Passau) quest'ultimo potrebbe avere lunghezza, portata e tutte le caratteristiche per mantenere il ruolo di fiume principale e lasciare al Danubio il ruolo di tributario: come nell'eterna disputa tra Nilo e Rio delle Amazzoni, tutto sta nel "metodo" con cui la lunghezza d'un fiume viene calcolata. Ma, secondo Magris, la ragione essenziale è che "Sul bell'Inn blu" suonava male, e allora ha vinto il Danubio. Forse, il dialetto genovese era già ben conosciuto anche a Vienna.

[6] "Grandi" non tanto nel senso di dimensione e portata, quanto in quello "ruolo principale"; gli affluenti di un fiume maggiore sono generalmente più o meno "paralleli" fra loro.

[7] Al punto di marcare con la descrizione del fenomeno il nome stesso della terra, "in mezzo ai fiumi".

[8] Che poi sarebbe quella gli italiani chiamano "Sciaffusa": forse sono proprio le cascate del Reno ad averla fatta crescere e sviluppare, quasi unica tra le città svizzere, prevalentemente sulla riva destra del fiume, e non sulla sinistra.

supera i millecinquecento metri d'altezza, ma costringe il Reno ad un giro complicato prima di lasciarlo ritornare nella sua agognata direzione verso Nord. E questo giro di danza, associato alla nascita del Danubio, consente all'Impero Romano di avere due direttrici ben chiare e quasi intersecantisi per definire i suoi unici e problematici confini terrestri propriamente detti.



Con la storia e la geografia non si può aspirare al rigore atteso dalla mera topologia. La stranezza di due fiumi paralleli che corrono in direzioni opposte è dato dal fatto che i due "grandi" fiumi in questione sono ancora molto giovani, mentre arrancano nella Germania meridionale. Così giovani che perfino i Romani non contavano certo sul potere deterrente del loro attraversamento per sentirsi al sicuro dalle invasioni, almeno in quel punto del loro fluire. Il limes fortificato romano più famoso[9], per quanto instabile e spesso "mobile" a seconda dei tempi e delle esigenze, correva infatti da Rheinbrol a Kelheim an der Donau, e i nomi delle due città sono ancora oggi eloquenti, avendo a chiare lettere i nomi dei due fiumi (Rhein e Donau) al loro interno. Era eretto proprio a cementare con le armi quei territori che troppo debolmente erano difesi dai fiumi ancora giovani. Oltre il limes fortificato le acque ormai adulte potevano bastare a separare l'Impero dalla barbarie, pensavano i Romani. E poi, lo si è già visto con Traiano, gli uomini sono ancora più volubili delle acque: la Dacia transdanubiana fu annessa all'Impero, e col passare degli anni e dei secoli i fiumi venivano sempre più spesso attraversati e navigati per scambi commerciali e incontri, o per i sempre più frequenti saccheggi.

Quasi quattro secoli dopo la disfatta della Foresta di Teutoburgo che segna l'inizio della storia del limes germanico, un'altra battaglia ne sancisce la fine. E se Teutoburgo non è troppo distante dalla foce del Reno, Adrianopoli non è in fondo troppo distante dalla linea conclusiva del Danubio[10]. Dopo la battaglia di Adrianopoli e il trionfo dei Goti di Fritigerno su quello strano melange che era ormai diventato l'esercito imperiale, i confini dell'Impero cominciano a perdere significato e a sfaldarsi in maniera definitiva e ufficiale, iniziando quel lento lavoro di cancellazione che durerà ancora per molti secoli.

C'è una immediata constatazione di ordine meramente geometrico, nel crollo del limes. Lo sfaldarsi della periferia, della netta divisione tra "dentro" e "fuori" l'impero,

[9] Ma ce ne sono altri, eretti specialmente durante il consolidamento che va da Augusto a Traiano: il limes siriano, quello d'Africa, e molti minori, come quello di Adriano in Scozia e un vallo di Traiano proprio vicino alla foce del Danubio, quando il grande fiume, ormai prossimo al mare, sembra disdegnarlo e procedere invece verso nord, per disegnare il delta in terre ucraine e moldave.

[10] Adrianopoli è l'attuale turca Edirne, ai confini tra Turchia e Grecia. La battaglia, in cui morì anche l'imperatore Valente, è del 378 d.C.

la volatilizzazione della grande linea di difesa costringe alla creazione di molte altre linee difensive. Piccole, però: molto più piccole. Un tardo imperatore lo annuncerà ufficialmente: non è più possibile garantire la saldezza dei confini, le legioni poste a guardia dei valli non sono più assicurate, e le città dell'impero devono arrangiarsi da sole. E le città si arrangiano, tornando a costruire mura cittadine. Proliferano le costruzioni difensive su piccola scala, e ogni paesino si dota di mura e merli; chiunque abbia abbastanza denaro per permetterselo, si dedica a proteggere anche la singola casa. È la nascita del "castello", che non a caso è l'edificio simbolo dell'incombente Medio Evo. Esistesse un "occhio topologico", avrebbe di che divertirsi nel registrare la lunghissima frontiera dell'impero frantumarsi, rompersi, per passare il testimone alla costruzione di piccole isole cerchiate da microscopiche frontiere. Esistesse un "occhio giuridico e sociale", assisterebbe ad uno sconvolgimento delle regole del diritto: la Pax Romana ragionava in termini continentali, e doveva fare i conti con la convivenza di milioni di persone e di etnie diverse: un impero che copre quasi tutto il mondo conosciuto non può prendere seriamente in considerazione, ad esempio, la pena dell'espulsione del reo dai propri confini. Pena che invece è tra le più naturali, se il territorio del diritto è piccolo e perfettamente chiuso. Chi non è gradito viene espulso, cacciato con la minaccia di essere messo a morte se si fa rivedere all'interno della cerchia delle mura. È la "messa al bando", urlata pubblicamente nelle piazze, che genera nuovi fuorilegge, non per niente chiamati "banditi". Banditi costretti, di conseguenza, a vivere nelle foreste.

Nella speciale hit-parade delle foreste popolate da banditi, la prima in classifica, almeno se si tiene conto della fama indotta dalle leggende popolari, dovrebbe essere Sherwood. È qui che abitano Robin Hood e i suoi allegri compari: non troppo distanti da Nottingham[11] e dal suo perfido sceriffo, fra' Tuck, Little[12] John e un bel numero di affiliati sono tutti ben intenti a togliere al ricco per donare al povero. A dire il vero, la leggenda di Robin Hood è quanto mai complessa e suscettibile di variazioni con l'andare del tempo: la prima traccia scritta del leggendario arciere risale al 1377, nel manoscritto "Piers Plowman" di William Langland. È già un riferimento leggendario, perché uno dei personaggi del libro afferma di conoscere delle ballate su Robin Hood. Per certo, sulla reale esistenza di Robin (inizialmente Robert) Hood, c'è ben poco: una cronaca scozzese[13] scritta da John Fordun e in seguito dal suo allievo Walter Bower, parla di Robin Hood come di un

[11] E forse è un caso, forse no, che l'odierna squadra di calcio della ridente città di Nottingham si chiami "Nottingham Forest".

[12] Dove si vede che anche la tradizione orale popolare ha le sue brave forme retoriche: secondo la tradizione, "Little" John era chiamato "little", piccolo, perché non lo era affatto. Vince il solito account su Gmail il primo che ci scrive come si chiama questa figura retorica.

[13] Dal bel titolo eloquente "Scotichronicon".

uomo costretto a diventare bandito dopo essere stato ingiustamente privato dei suoi beni, che divenne soggetto di ballate e canzoni e che morì, ottantasettenne, il 18 Novembre del 1247. Ma inizialmente Robin Hood non è nobile, e neanche troppo gentiluomo: lo sceriffo di Nottingham è fin dall'inizio suo acerrimo nemico, ma Robin non si fa troppi problemi, e nelle prime versioni della leggenda lo ammazza decapitandolo. Come tutte le leggende che si rispettino, anche quella di Robin Hood cresce annettendo sempre nuovi episodi e intere leggende parallele: la storia d'amore con Lady Marian[14] è quasi certamente presa per intero da una commedia francese di ambientazione pastorale del 1280, dal titolo *"Jeu de Robin et Marion"*. È però nel sedicesimo secolo che Robin Hood assume alcune delle sue caratteristiche più importanti: la collocazione temporale delle sue gesta viene spostata indietro di un centinaio d'anni, per farla coincidere con il periodo in cui Re Riccardo Cuor di Leone se ne andava a partecipare alle Crociate, e soprattutto il ceto sociale di Robin Hood viene drasticamente elevato. Inizialmente il bandito arciere era un semplice "yeoman", ovvero un libero mercante o piccolo proprietario, ma ora viene innalzato a rango gentilizio. Lo si identifica con il Conte di Huntington, Robert Locksley, o in alternativa con Robert Fitz Ooth, conte anch'esso.

La leggenda continua a crescere e viene alimentata come meglio credono i cavalcatori di leggende. In "Ivanhoe", sir Walter Scott (che non a caso era un "sir") continua lo scippo di Robin Hood dalle ballate popolari per innalzarlo nell'olimpo degli eroi nobili. Non solo Robin perde del tutto il suo carattere di uomo del popolo, ma diventa adesso anche un fiero nobile Sassone in guerra contro i dominatori Normanni; e già che si è sulle spese, tra i nemici più odiati arrivano anche gli abati cattolici, visto che era bene schierare gli eroi nazionali dalle parti della Chiesa Anglicana.

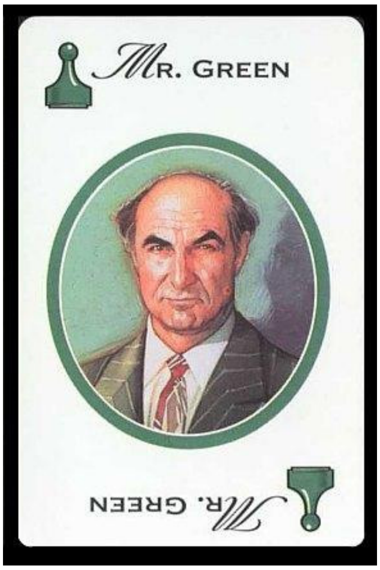
Per quanto ecletticamente modificabile e modificata, la leggenda di Robin Hood è oggi cristallizzata come l'epopea di un giovane e fiero eroe che combatte i ricchi per restituire ai poveri, se il nome "Nibor Dooh" è ormai entrato nei dizionari anglosassoni per descrivere quei politici e amministratori che, al contrario[15] di Robin, tolgono ai poveri per dare ai ricchi. Ancora più definitiva sembra la sua collocazione a Sherwood, anche se perfino la celebre foresta è stata talvolta rivendicata da boschi e selve dei dintorni. E, ancora più naturalmente, Nottingham è uno dei pochissimi toponimi che possa competere con il Far West, quando il discorso cade sugli sceriffi.

Pur senza avere troppe speranze d'aver dimostrato che esiste una misteriosa relazione tra le foreste e le frontiere, è curioso quantomeno notare come molti dei termini militari e geografici dei domini terrestri si ritrovano in matematica. "Frontiera" richiama come evidenza il termine "fronteggiarsi", esercito contro esercito, faccia contro faccia e fronte contro fronte: e non a caso il "fronte", se coniugato al maschile, ha anche un ben preciso significato militare. Ma la frontiera circonda la "regione", il "dominio", tutti termini con chiara cittadinanza matematica, e non solo topologica; per non parlare del sinonimo più celebre di "frontiera", che è il terribile "confine". Parola che distingue e separa due idee matematiche fondamentali, essendo l'elemento discriminatorio tra il finito e l'infinito. Il confine possiede al suo interno la "fine", e nega pertanto l'infinito: e l'infinito, da solo, è una buona metà della matematica. Ancora più curiosa delle parole è forse la coincidenza che ci ha portato, a forza di parlare di frontiere, dalla Foresta di Teutoburgo a quella di Sherwood e Nottingham, perché dal punto di vista matematico Nottingham è la patria di un personaggio che si interessò di curve chiuse e delle loro frontiere. Quantomeno, si interessò a loro nel poco tempo libero che gli lasciò la sua vita di mugnaio.

---

[14] Nelle prime versioni, Marian aveva il nome ancora più intrigante di "Mathilda".

[15] Ve ne siete accorti da soli, vero, che Nibor Dooh è il contrario di Robin Hood?



George Green, mugnaio, era l'unico figlio di George Green, panettiere. Dotato d'un cognome che richiama il colore delle foreste e vedendo la luce nei pressi d'una delle foreste più famose del mondo, nacque a Nottingham nel Luglio 1793. Il giorno era quasi certamente il 14, quando a Parigi celebravano il quarto anniversario della presa della Bastiglia; ma la data non è del tutto certa perché è quella del battesimo, che avveniva di solito il giorno stesso della nascita, ma talvolta poteva essere ritardato. Non era certo un inglese benestante, al punto che di lui non rimane neanche un ritratto; ma ancor più di questo a sottolinearlo basta il fatto che il piccolo George andò a scuola solo per quattro corsi di studio di quei tempi, ovvero per due soli anni, dal 1800 al 1801. A ben vedere la cosa davvero eccezionale non era tanto che il giovane George fosse già fuori dall'altisonante "Robert Goodacrès Academy" all'età di otto anni, quanto il fatto che vi fosse mai entrato. Il genitore si era convinto ad inviarcelo perché il ragazzino aveva mostrato delle precocissime doti matematiche, ma al termine dei quattro corsi il suo precettore[16] aveva già terminato d'insegnargli quel che poteva insegnargli in questa materia. Soprattutto, ad otto anni si è grandi abbastanza per essere d'aiuto in panetteria. George fece pertanto il panettiere fino ai 14 anni, quando il padre costruì un mulino a vento a Sneinton, appena fuori Nottingham: il gestore del mulino paterno, William Smith, aveva bisogno d'aiuto per mandare avanti le macine, e papà Green mandò il figlio ad imparare il mestiere di mugnaio.

Il giovane George sparisce tra la nebbia bianca della farina del suo mulino, e non si hanno più sue notizie per tre lustri. È ormai un uomo di trent'anni quando lo si ritrova nell'elenco dei soci della Nottingham Subscription Library, un neonato circolo culturale della città. Cinque anni dopo, nel 1828, pubblica addirittura un saggio, intitolato *"Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism"*, cosa che appare decisamente stupefacente se si considera che l'autore è un mugnaio trentacinquenne con due anni di scuole elementari come unico titolo accademico.

Quel che era accaduto era la dimostrazione che il sottotetto d'un mulino a vento può a volte essere un luogo intellettualmente più stimolante delle aule di Cambridge: il quattordicenne Green aveva preso l'abitudine di passare il suo tempo libero racchiuso in quel sottotetto, dove doveva davvero esserci l'atmosfera giusta per lo studio. La "Meccanica Celeste" di Laplace venne tradotta e pubblicata in inglese proprio a Nottingham, nel 1814, e una copia di quel testo abitava il sottotetto del mulino di Green, insieme a molti altri testi di matematica. Ma non occorre pensare alla situazione come ad una sorta di eroismo intellettuale strappalacrime: papà Green aveva costruito un gran bel mulino, uno dei

[16] Precettore che comunque non va sottovalutato troppo: si tratta ovviamente di quel Robert Goodacre che dava il nome alla scuola, e che era un entusiasta della scienza. Divenne ragionevolmente famoso anche a livello nazionale, come una sorta di "divulgatore scientifico" ante litteram.

primissimi in mattoni dell'intero Nottinghamshire, e il vecchio William Smith non era l'unica anima viva che George vedeva nei paraggi: anzi, proprio William aveva una bella figlia, Jane. George non la sposò, ma in compenso visse tutta la vita con lei, e insieme arricchirono la popolazione di Sneinton di ben sette figli.

Dal sottotetto del mulino, Green aveva studiato, totalmente autodidatta, alcune tecniche matematiche nuove dedicate soprattutto all'analisi dei fenomeni fisici. I suoi studi erano all'avanguardia, ma lui era pur sempre un mugnaio ben lontano dall'essere noto come scienziato di vaglia. La pubblicazione del saggio, avvenuta naturalmente a proprie spese, lo rese verosimilmente noto tra alcuni matematici di Nottingham e dintorni, ma non ebbe impatto alcuno sul mondo accademico inglese e meno che mai su quello internazionale. In parte, la disattenzione dipendeva anche dal fatto che gli argomenti trattati non erano al centro dell'attenzione dei compatrioti, che a quei tempi si interessavano soprattutto di meccanica, ottica, astronomia e moti planetari: l'elettricità e il magnetismo (e la matematica applicata) erano invece oggetto di attenzione soprattutto dei francesi.

Il tiepido accoglimento del saggio induce Green a cominciarne un altro: in questo venne stimolato e aiutato da uno dei pochi scienziati che avevano capito le straordinarie qualità del mugnaio, sir Edward Bromhead, che usò la sua influenza per far entrare Green all'Università di Cambridge.

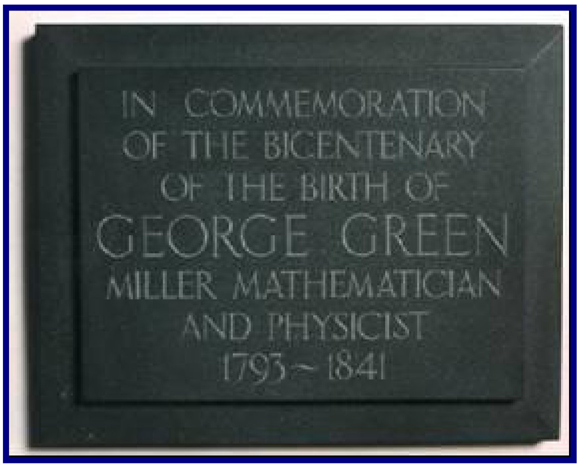
Così, il geniale mugnaio varcò le soglie di un ateneo alla tenera età di quarant'anni, con l'intenzione di prendere una laurea in matematica. Pur con qualche difficoltà negli esami che prevedevano conoscenza del latino e del greco, si laureò brillantemente nel 1837[17], e venne eletto "fellow" del College subito dopo. La carriera accademica di George non era destinata a durare troppo: dopo due anni la sua salute peggiorò, e decise di tornarsene nella sua Nottingham: e lì morì alla fine del Maggio 1841, ancora solo quarantottenne.

Gli studenti incontrano il mugnaio erede di Robin Hood quando affrontano l'esame di Analisi II, perché uno dei teoremi più importanti del corso porta il suo nome. È un teorema davvero fondamentale e curioso, perché mette in relazione l'area di una regione con l'integrale di linea calcolato lungo la sua frontiera: oltre a coniugare elegantemente due personaggi intriganti come gli integrali di superficie e quelli di linea, mettendoli sorprendentemente in relazione, il Teorema di Green costringe lo studente a familiarizzarsi con elementi topologici essenziali, come le curve di Jordan, il concetto di regione connessa o non connessa, e soprattutto con la convenzione del percorso "antiorario" d'una frontiera chiusa, che è il verso convenzionalmente usato come "positivo" nel calcolo degli integrali di linea. Di solito, gli studenti non immaginano che dietro a questo mattone fondamentale dell'edificio del calcolo vettoriale ci siano i calli d'un mugnaio: in parte, la sensazione è giustificata, perché lo stesso teorema era già presente nelle carte di Eulero e Gauss, ma è cosa elegante e generosa tramandare con il nome di Green il teorema scoperto sotto il tetto d'un mulino.

Anche perché gran parte della matematica di Green venne scoperta e valorizzata solo dopo la sua morte. Fu Lord Kelvin, nella sua disperata ricerca di informazioni sulla matematica dei campi elettromagnetici, a riscoprire con eccitata sorpresa nel 1845 l'incredibile lavoro dell'oscuro matematico autodidatta. Portò una copia del manoscritto a Parigi, la mostrò a Liouville e ad altri, che restarono non meno sorpresi e entusiasti. Il benemerito Giornale di Crelle pubblicò il saggio di Green nel 1850, e poi di nuovo nel 1852 e 1854. L'Inghilterra, forse un po' distratta nel riconoscere i

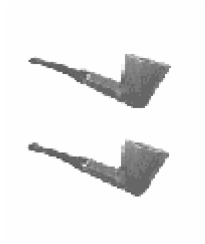
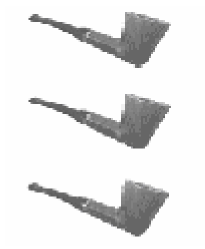
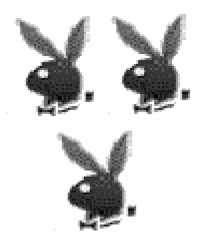
[17] Arrivò "Quarto Wrangler", come riportano le cronache di Cambridge, sempre amante delle classifiche. Due posti meglio di lui, come "Secondo Wrangler", si piazzò Sylvester.

meriti dei suoi figli, diede alle stampe la maggiore opera di George Green solo nel 1871.



Ma Nottingham sta recuperando il tempo perduto. Il bel mulino di George Green è stato recentemente restaurato, e soprattutto è stato destinato ad ospitare il "George Green Memorial Fund": adesso è sede d'un museo della scienza, e nel 1993 è stato il baricentro delle celebrazioni per il bicentenario della nascita del matematico. Sempre durante quelle celebrazioni, una targa commemorativa è stata posta sulla tomba di Green. La targa riporta semplicemente le tre caratteristiche principali dell'uomo: matematico, fisico, mugnaio. Anzi, con sublime correttezza anglosassone, la parola "mugnaio" è onorabilmente situata in prima posizione, così come è stata per tutta la vita di George Green.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
...vista da un brutto posto..			
Traslochi in Redazione			

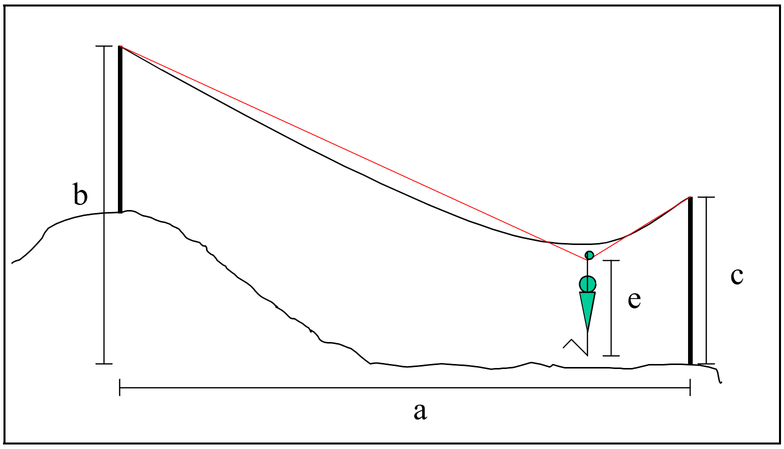
2.1 ...vista in un brutto posto...

Un paio di cose, su questo problema.

Tanto per cominciare, ancora grazie da Rudy (e insulti da Doc) a tutti coloro che ci hanno segnalato il bellissimo sito (Doc non sa il francese, ma Rudy sì) sulle curve, riferito al problema della porta che vi abbiamo presentato sul numero 76. La cosa ci ha fatto pensare che probabilmente i problemi di questo tipo vi divertono, e forse questo vi interessa. La seconda cosa è che questo aggeggio per farsi male esiste davvero, lí dove dico. E mi rifiuto di provarlo, sin quando non mi risolvete la seconda parte.

Da un po' di tempo, per il sottoscritto si stanno infittendo le trasferte "mordi e fuggi" (leggasi: di una giornata scarsa) a Milano (da cui, il titolo del problema). Ormai ho sviluppato un percorso che mi permette di infilarmi sottoterra direttamente alla stazione e non tornare alla luce sin quando non sono decisamente vicino al luogo di lavoro; infatti, basta traversare un giardino pubblico e arrivo dove devo arrivare vedendo il meno possibile della città.

Già, il giardino pubblico... Da un po' di tempo, hanno montato un aggeggio strano. Cerco di farvi un disegno, e poi mi spiego[18]. Non vi fornisco le misure per il semplice fatto che non le ho prese (no, non è in scala. Mi ci è già voluto un mucchio di tempo a farlo così, pure in scala lo volete???): suppliamo con un po' di lettere.



[18] Accettiamo critiche al disegno solo da PMP, che sappiamo essere più alto di noi e lavorare non troppo lontano. Prima, però, prova se funziona.

L'idea è che partite dalla cima della collinetta e, appesi alla carrucola, vi lanciate a braccia tese (e ginocchia piegate) arrivando sino alla base.

Supponiamo la corda lunga d (evidentemente, maggiore di a, altrimenti è troppo facile farsi male). Vedendo il gioco, mi sono chiesto un paio di cose:

> **Domanda Eminentemente Teorica:** Ma che curva traccia, la carrucola?
>
> **Domanda Eminentemente Pratica:** Visto che io a braccia tese e ginocchia piegate sono alto e, quanto deve valere d affinché io non mi distrugga le ginocchia?

...e il primo che risponde, vince una prova gratuita dell'esattezza della risposta...

2.2 Traslochi in Redazione

Da quando abbiamo pubblicato i pezzi relativi a Finestre, Battiscopa & Tappezzerie, Alice ha deciso che adesso bisogna spostare i mobili (sempre virtuali, per fortuna...).

Tristemente consci di alcune migliaia di barzellette sulle richieste femminili di permutazioni dell'arredamento (~~e conoscendo Alice~~ [*La frase precedente è stata cancellata d'ufficio dalla Linotype* (AR)]), stabiliamo un patto:

1. Lei ci fornisce delle liste di permutazioni
2. Noi spostiamo
3. Lei paga tante birre quante sono le liste.

Fermo restando che accettiamo solo liste disgiunte.

Facciamo un esempio, che la cosa viene di sicuro più chiara:

Supponiamo la situazione iniziale sia questa (tre scrivanie, cinque poltrone, una lavagna, sei librerie....):

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10

E che Alice ci fornisca la lista $\{3 \Leftrightarrow 5, 4 \Leftrightarrow 7, 1 \Leftrightarrow 8\}$; il risultato finale sarebbe:

08	02	05	07	03	06	04	01	09	10

Ossia abbiamo messo il ***3*** al posto del ***5*** e il ***5*** al posto del ***3***, il ***4*** al posto del ***7*** e il ***7*** al posto del ***4***, eccetera.

La condizione di "liste disgiunte" impedisce ad Alice di presentarci la lista $\{3 \Leftrightarrow 5, 5 \Leftrightarrow 4\}$; deve spezzarla in due diverse liste e quindi paga due giri di birra (potrebbe, in ciascuna delle due liste risultanti, inserire altri spostamenti che vengano poi eventualmente "ritoccati"...).

Ora, quel che si chiede Alice è: "Visto che il numero N delle cianfrusaglie qui dentro è notevole, quanti giri di birra dovrò pagare, se ottimizzo queste liste?"[19]

3. Bungee Jumpers

Provare che la somma

$$\sum_{p_i \in P}^{p} \frac{1}{p_i}$$

[19] Ovviamente la domanda è del Capo: poche cose sono certe nella vita, ma un paio sono arcinote anche ai lettori di RM, e cioé che Alice è tanto allergica a calcoli di permutazioni quanto ha le mani bucate ed ama bere birra in compagnia. Se il gioco fosse veramente a sua disposizione, i poveri esponenti maschili della Redazione sposterebbero mobili per il resto dei loro giorni e sarebbero costretti a continue bevute.

estesa a tutti i primi minori di un dato *p* può essere resa maggiore di un qualsiasi preassegnato numero *N* per valori sufficientemente grandi di *p*.

> *Niente aiuti, questa volta; ci limitiamo a notare che il problema è molto bello (anche se ad alcuni di noi la soluzione non piace proprio) e che lo riportiamo per gli interessanti collegamenti con "La Serie Armonica" (PM del numero 38) e "Z" (PM del numero 51); in particolare in relazione a quest'ultimo, si vede che tagliare per i campi è spesso un'ottima idea.*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Come vanno le vostre vacanze? Le nostre male, perché stiamo ancora lavorando, e per la sovrapposizione e la virtualità della nostra rivista, da queste parti si suda quasi sempre e si va in vacanza quasi mai.

Un paio di novità, ma questo mese cercheremo di essere brevi, che fa troppo caldo e il gioco delle vacanze ve lo abbiamo già mandato il mese scorso. A proposito, il problema della lampadina sta ottenendo enorme successo e stiamo raccogliendo molte soluzioni: non vi stupite se non vedete niente in questo numero, vi abbiamo promesso uno speciale a ottobre e così sarà...

Pochi i commenti alla nostra nuova veste editoriale, e quasi tutti ci hanno preso in giro o criticato. In primo luogo, per aver sbagliato i nomi e i numeri: ma non ci conoscete? E' in corso da tempo un concorso per chi trova la data sbagliata nel compleanno del mese, lo facciamo apposta, a metterci sempre un errorino. Poi, per aver pubblicato la foto di un uomo invece di curve prosperose e femminili; speriamo che con questo numero la situazione vi paia migliorata, ma non contate su Megan Gale, lei l'abbiamo già sul sito. Altri non hanno approvato la paginetta di copyright... ma l'avete letta? Dice praticamente che si può copiare tutto quello che si vuole... e i nostri file pdf sono per la maggior parte non protetti dalla copiatura... comunque stiamo sognando da un po' di venire pubblicati su carta, a poco a poco troveremo un modo, ed a quel punto serve aver messo le mani avanti. Per chi si è lamentato sul capitolo delle donazioni, vi annuncio con ben poco orgoglio che le casse di RM non sono mai state vittime di un'onta sì disdicevole. In ogni caso, a noi la nuova versione è piaciuta abbastanza, per cui provvederemo a fare le ottimizzazioni del caso, e vedremo se anche i nostri lettori cominceranno ad apprezzare.

In giugno abbiamo fatto alcune scoperte, come per esempio che ***Zar*** ha conosciuto Feigenbaum personalmente (per lo meno gli ha stretto la mano), e che ***Delfo*** ha "quasi" vinto il Nobel per la medicina giocando all'università ad un gioco che ispira i meccanismi della TAC, e che ***Gabriel*** sta ancora lavorando con le mosche. Nel frattempo il nostro Postino, irrefrenabile, ha sostenuto discussioni teologiche e politiche (grazie ai Referendum italiani), e trovato nuovi modi di pubblicizzare RM.

Ed ora attacchiamo queste soluzioni.

4.1 [059]

4.1.1 Tre Dadi Duri

Sono due mesi che ***Cid*** lavora ad un progetto di generalizzazione del problema, e ve ne riportiamo i frutti, con la solita forbice redazionale. Per gli altri riferimenti al problema e alle soluzioni, andatevi a prendere il relativo pezzo in Bookshelf sul sito, che vale la pena.

> Siccome questo problema mi è piaciuto molto, ho pensato di generalizzare il problema a un numero x di dadi. Ecco qui la mia "Generalizzazione del problema":
>
> Il "Banco" estrae da x sacchetti un numero compreso tra 1 e N, ottenendo così x numeri.

Si vince se i numeri sono tutti diversi tra loro e dopo x-1 estrazioni si riesce a indovinare in quale tra questi x intervalli si troverà l'ultimo numero estratto.

La strategia di scelta non è difficile da ottenere, ma… Quali sono le probabilità di vincita?

Risposta:

Ebbene per x=2 e per x=3 il problema è già stato trattato in modo approfondito in "Tre dadi duri".

Se ti interessa il caso x=4, ti allego la mia soluzione nell'allegato "Dadi4.txt" (in cui mi sono limitato ad applicare il metodo di Last Duke al caso x=4, trovando così alcune cose interessanti.) *[Un'altra volta, magari...(AR)].* Qui mi soffermo invece a considerare il caso generico di x dadi, la soluzione da quanto ci insegna Last Duke dovrebbe essere un polinomio di grado x, comincio quindi con la ricerca del primo coefficiente di questo polinomio.

Ebbene, sappiamo che per n tendente ad infinito la soluzione coincide con il primo coefficiente; consideriamo quindi che N tenda ad infinito annullando così la possibilità di estrarre 2 numeri uguali tra loro.

Naturalmente, questa semplificazione è legittima in quanto per ora sto cercando solo il primo coefficiente del polinomio. A questo punto, dopo le prime x-1 estrazioni, prendo gli x intervalli e li ordino dal più piccolo al più grande e punto sull'ultimo intervallo (cioè sul più grande, seguendo la strategia di GC).

Calcoliamo ora la probabilità di vincere:

Chiamando I(1),I(2),I(3),..., I(x) questi x intervalli, avremo che:

tra 0 e (n/x) possono essere presenti tutti gli x intervalli,

tra (n/x) e (2n)/x possono essere presenti solo (x-1) intervalli,

tra (2n)/x e (3n)/x possono essere presenti solo (x-2) intervalli,

...

tra ((x-1)n)/x e n può essere presente solo un intervallo.

Pertanto la probabilità di vincere è:

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x*(x-1)}+\frac{1}{x*(x-2)}+\ldots+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}*\left(\sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k}\right)$$

Verifichiamo ora con i casi x=2,x=3 e x=4.

P(2 dadi duri)=1/4+1/2=3/4

P(3 dadi duri)=1/9+1/6+1/3=2/18+3/18+6/18=11/18

(Questo è il risultato trovato anche da Last Duke)

P(4 dadi duri)=1/16+1/12+1/8+1/4=3/48+4/48+6/48+12/48=25/48

(Notare che anche con 4 dadi duri siamo sopra al 50%)

Ed ora mi fermo qui perché mi accorgo di essere stato assai poco chiaro. Mi limito soltanto ad osservare che invece di considerare n tendente a infinito, si potrebbe considerare l'estrazione di x numeri reali compresi tra 0 e 1. Avendo i numeri reali infinite cifre decimali, si annulla il rischio di estrarre 2 numeri uguali tra loro.

... le considerazioni intermedie...

il polinomio che descrive la probabilità di vittoria con X dadi duri, ha come sappiamo il coefficiente del termine noto variabile; ebbene ho trovato che con X dadi duri, i valori del termine noto si ripetono modulo m.c.m.(1,2,3,...,X)

Esempio:

Con 2 dadi duri i valori del termine noto si ripetono modulo 2=m.c.m.(1,2)

Con 3 dadi duri i valori del termine noto si ripetono modulo 6=m.c.m.(1,2,3)

Con 4 dadi duri i valori del termine noto si ripetono modulo 12=m.c.m.(1,2,3,4)

Con 5 dadi duri i valori del termine noto si ripetono modulo 60=m.c.m.(1,2,3,4,5)

Con 6 dadi duri i valori del termine noto si ripetono modulo 60=m.c.m.(1,2,3,4,5,6)...

E il contributo finale...

Ti faccio un breve racconto di come ho trovato queste proprietà, tutto cominciò poco dopo della mia prima e-mail sui Dadi Duri, ti avevo scritto: "...e i valori successivi si ripetono modulo 12. (Non me l'aspettavo, probabilmente si tratta di una coincidenza.)". Ebbene, poco dopo aver inviato la e-mail cominciai a pensare che ha poco senso parlare di coincidenza in matematica e cominciai dunque a cercare una spiegazione del fatto che i valori si ripetessero modulo 12.

Per farlo mi calcolai l'equazione per il caso di 5 dadi duri e quella per il caso dei 6 dadi duri, entrambe avevano i valori del termine noto che si ripetevano modulo 60; a questo punto era facile immaginare la spiegazione di tutto, ma osservare l'andamento dei valori mi ha permesso di trovare altre più interessanti proprietà (che purtroppo non sono riuscito a dimostrare).

Cominciamo con l'elenco delle equazioni della probabilità di vittoria per dadi a n facce, (analizziamo un numero di dadi che varia da 2 a 6).

Con 2 Dadi Duri

$$P(2) = \frac{3n^2 - 2n + d(i)}{4n^2}$$

Con d(i)=0 se i è pari e d(i)=1 se i è dispari. I valori d(i) si ripetono modulo 2. Notare che 2 = m.c.m.(1,2).

Con 3 Dadi Duri

$$P(3) = \frac{22n^3 - 51n^2 + 18n + d(i)}{36n^3}$$

E i coefficienti d(i) rispettano la seguente tabella:

d(6i)=0	d(6i+1)=11	d(6i+2)=–8
d(6i+3)=27	d(6i+4)= 16	d(6i+5)=19

(essendo i un numero intero). I valori d(i) si ripetono modulo 6. Notare che 6 = m.c.m.(1,2,3).

Si nota anche che la differenza tra 2 elementi di una stessa colonna è sempre uguale a 27 in valore assoluto e che la differenza tra due elementi posti agli estremi di una stessa riga o aventi un solo spigolo della cella in comune è sempre un multiplo di 8 in valore assoluto. Questo è stato l'indizio che mi ha aiutato a trovare le proprietà che descrivo in seguito.

Con 4 Dadi Duri

$$P(4) = \frac{25n^4 - 124n^3 + 172n^2 - 48n + d(i)}{48n^4}$$

E i coefficienti d(i) rispettano la seguente tabella:

d(12i)=0	d(12i+1)=-25	d(12i+2)=0	d(12i+3)=-81	d(12i+4)=128	d(12i+5)=-153
d(12i+6)=0	d(12i+7)=47	d(12i+8)=0	d (12i+9)=-153	d(12i+10)=128	d(12i+11)=-81

(essendo i un numero intero). I valori d(i) si ripetono modulo 12. Notare che 12 = m.c.m.(1,2,3,4). Si nota anche che la differenza tra 2 elementi di una stessa colonna è sempre multipla di 36. (...)

Con 5 Dadi Duri

$$P(5) = \frac{822n^5 - 7065n^4 + 20470n^3 - 22230n^2 + 5400n + d(i)}{1800n^5}$$

E i coefficienti d(i) rispettano la seguente tabella:

d(60i)=0	d(60i+1)=2603	d(60i+2)=1096	d(60i+3)=3699	d(60i+4)=-9088
d(60i+5)=32875	d(60i+6)=-25272	d(60i+7)=-14029	d(60i+8)=29824	d(60i+9)=23787
d(60i+10)=-43000	d(60i+11)=7603	d(60i+12)=12096	d(60i+13)=14699	d(60i+14)=-4088
d(60i+15)=-10125	d(60i+16)=-14272	d(60i+17)=44971	d(60i+18)=-13176	d(60i+19)=-19213
d(60i+20)=16000	d(60i+21)=18603	d(60i+22)=-30904	d(60i+23)=19699	d(60i+24)=6912
d(60i+25)=875	d(60i+26)=-9272	d(60i+27)=1971	d(60i+28)=-2176	d(60i+29)=39787
d(60i+30)=-27000	d(60i+31)=-24397	d(60i+32)=28096	d(60i+33)=30699	d(60i+34)=-36088
d(60i+35)=5875	d(60i+36)=1728	d(60i+37)=12971	d(60i+38)=2824	d(60i+39)=-3213
d(60i+40)=-16000	d(60i+41)=34603	d(60i+42)=-14904	d(60i+43)=-12301	d(60i+44)=22912
d(60i+45)=16875	d(60i+46)=-41272	d(60i+47)=17971	d(60i+48)=13824	d(60i+49)=7787
d(60i+50)=-11000	d(60i+51)=-8397	d(60i+52)=-3904	d(60i+53)=46699	d(60i+54)=-20088
d(60i+55)=-26125	d(60i+56)=17728	d(60i+57)=28971	d(60i+58)=-29176	d(60i+59)=12787

(essendo i un numero intero). I valori d(i) si ripetono modulo 60. Notare che 60 = m.c.m.(1,2,3,4,5). Si nota anche che la differenza tra 2 elementi di una stessa colonna è sempre multipla di 125. (...)

Con 6 Dadi Duri

E i coefficienti d(i) rispettano la seguente tabella:

d(60i)=0	d(60i+1)=-1323	d(60i+2)=-784	d(60i+3)=-1323	d(60i+4)=0
d(60i+5)=-8875	d(60i+6)=26352	d(60i+7)=-22059	d(60i+8)=-34048	d(60i+9)=26325
d(60i+10)=54000	d(60i+11)=-36523	d(60i+12)=-48384	d(60i+13)=-1323	d(60i+14)=47600
d(60i+15)=26325	d(60i+16)=-27648	d(60i+17)=-57259	d(60i+18)=26352	d(60i+19)=26325
d(60i+20)=-6400	d(60i+21)=-1323	d(60i+22)=5616	d(60i+23)=-36523	d(60i+24)=0
d(60i+25)=26325	d(60i+26)=19952	d(60i+27)=-22059	d(60i+28)=-27648	d(60i+29)=-8875
d(60i+30)=54000	d(60i+31)=-1323	d(60i+32)=-54784	d(60i+33)=-1323	d(60i+34)=54000
d(60i+35)=-8875	d(60i+36)=-27648	d(60i+37)=-22059	d(60i+38)=19952	d(60i+39)=26325

d(60i+40)=0	d(60i+41)=-36523	d(60i+42)=5616	d(60i+43)=-1323	d(60i+44)=-6400
d(60i+45)=26325	d(60i+46)=26352	d(60i+47)=-57259	d(60i+48)=-27648	d(60i+49)=26325
d(60i+50)=47600	d(60i+51)=-1323	d(60i+52)=-48384	d(60i+53)=-36523	d(60i+54)=54000
d(60i+55)=26325	d(60i+56)=-34048	d(60i+57)=-22059	d(60i+58)=26352	d(60i+59)=-8875

(essendo i un numero intero). I valori d(i) si ripetono modulo 60. Notare che 60 = m.c.m.(1,2,3,4,5,6). Si nota anche che la differenza tra 2 elementi di una stessa colonna è sempre multipla di 25. (...)

Avrei potuto calcolare anche l'equazione corrispondente ad un numero di dadi maggiore, ad esempio uguale a 7, ma lasciatemi dire come il Manzoni: « "Ma, quando io avrò durata l'eroica fatica" di calcolarmi questa equazione, "e l'avrò data, come si suol dire, alla luce, si troverà poi chi duri la fatica di leggerla?" » (...)

Elenco delle proprietà

1) In tutte e 5 le equazioni si alternano coefficienti positivi e coefficienti negativi.

2) In tutte e 5 le equazioni, il termine noto d(i) varia modulo H=m.c.m.(1,2,...,X)

- Con 2 dadi duri si ha H=2 che è il minimo comune multiplo di (1,2)
- Con 3 dadi duri si ha H=6 che è il minimo comune multiplo di (1,2,3)
- Con 4 dadi duri si ha H=12 che è il minimo comune multiplo di (1,2,3,4)
- Con 5 dadi duri si ha H=60 che è il minimo comune multiplo di (1,2,3,4,5)
- Con 6 dadi duri si ha H=60 che è il minimo comune multiplo di (1,2,3,4,5,6)

3) Essendo H=m.c.m.(1,2,...,X) si ha che se K è un divisore di H allora:

- Se X è pari si ha che il valore assoluto di [d(i)-d(i+K)] è sempre divisibile per K^2
- Se X è dispari si ha che il valore assoluto di [d(i)-d(i+K)] è sempre divisibile per K^3 (dove i è un numero intero qualsiasi.)

4) Essendo H=m.c.m.(1,2,...,X) si ha che se X è pari allora, definendo Y=(X/2)-1 vale la seguente relazione:

$$d(H\,i + Y + m)= d(H\,i +Y - m)$$

(dove sia m che i sono due numeri interi qualsiasi.)

Complimenti al nostro ***Cid***!

4.2 [076]

4.2.1 Ancora la torta...

Il nostro ***Dr. Toki*** ha trovato una svista nel ragionamento di ***Emanuele***:

...leggendo la soluzione di Emanuele al problema della fetta ho riscontrato una svista che pregiudica il risultato finale: nel denominatore di $F(\theta,m)$ compare un $\cot g\theta(y_0 - mx_0)$ invece di $\cot g\theta(mx_0)$.

E infatti il risultato finale *m*=0 non può essere corretto, sia considerando il rapporto A1/A2 sia guardando la figura pubblicata, nella quale si vede ad occhio che la parte persa triangolare col lato "orizzontale" (passante per y0), parte che comprende A1, è maggiore di quella col lato "obliquo" che comprende A2 (e A1>A2 nel disegno!).

4.2.2 Lavori al Paesello!

La soluzione di ***Caronte*** a questo problema era talmente piaciuta alla Redazione, che non abbiamo potuto farvela mancare in questo numero...

La porta del fienile raccontata a Marguerite

Considerazioni di geometria elementare, euclidea ed analitica, applicata

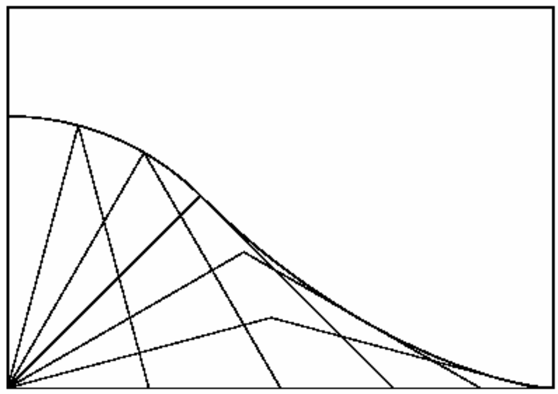


Figura 1 – La porta del fienile e la traccia che ha lasciato

Il fienile ristrutturato da Rudy ha una porta formata da due ante lunghe un metro ciascuna. Guardando la porta dall'interno, l'anta di sinistra è incardinata a sinistra alla cornice ancorata al muro e a destra allo spigolo sinistro dell'anta di destra, la quale risulta così trascinata dall'anta sinistra durante il suo moto di rotazione intorno ai cardini di sinistra, solidali col muro del fienile; il suo moto è però vincolato dal fatto che il suo spigolo destro termina con un piolo obbigato a scorrere in una rotaia che corre lungo tutta la soglia della porta. Quando la porta è chiusa, le due ante risultano allineate e i loro bordi inferiori (che assimiliamo a due segmenti di lunghezza unitaria) poggiano sulla soglia (che risulta allora assimilata ad un segmento di lunghezza uguale a due). Quando la porta viene aperta, l'anta di destra si ripiega man mano su quella di sinistra fino a sovrapporsi ad essa, in posizione perpendicolare alla soglia, quando la porta risulta completamente aperta. In fase di apertura e chiusura della porta i bordi inferiori delle due ante strisciano sul terreno e, a lungo andare, hanno lasciato una chiara traccia delle loro strisciate, evidenziando una ben definita superficie. Diverse posizioni della porta, viste in pianta, sono riportate in figura 1, dove compare anche, ben marcato, il contorno della superficie tracciata dalla porta nel suo moto. Il problema è quello di dare una corretta definizione geometrica di tale superficie.

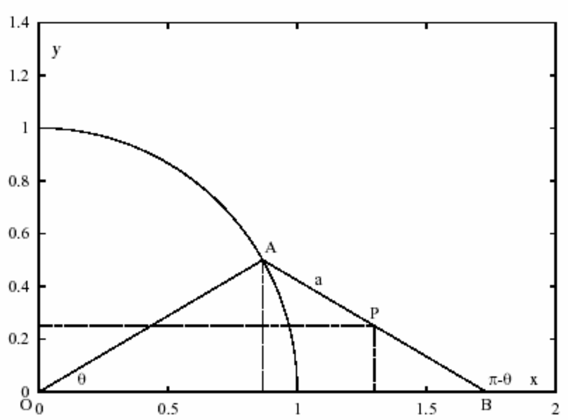


Figura 2

Dal punto di vista della geometria elementare, il problema si può riformulare come segue. Determinare la superficie ricoperta dalla famiglia di triangoli isosceli OAB aventi il vertice O situato in un punto fisso, scelto come origine di un sistema di assi cartesiani, la base OB giacente su una retta di direzione fissata, scelta come asse delle ascisse (asse x), e lunghezza variabile tra 0 e 2 ed il vertice A situato nel semipiano delle ordinate (y) positive. Un triangolo della famiglia è riportato, come esempio di riferimento, nella figura 2. L'intera famiglia viene generata quando il vertice A, comune al segmento OA (immagine sul terreno dell'anta ruotante sui cardini fissi) e al segmento AB (immagine dell'anta trascinata dall'anta rotante e con l'estremo destro vincolato a scorrere entro la rotaia posta lungo la soglia), percorre un quarto di arco di circonferenza, passando dalla posizione di coordinate (1,0) (punto centrale della base della porta chiusa, corrispondente al vertice dell triangolo limite, coincidente col segmento 0–2 dell'asse x, con due angoli alla base nulli e l'angolo al vertice uguale a π) alla posizione di coordinate (0,1) (corrispondente al vertice del triangolo limite con due angoli alla base uguali a $\pi/2$ ed angolo al vertice nullo, coincidente col segmento 0–1 dell'asse y, contato due volte e rappresentante la base della porta completamente aperta).

Detto θ l'angolo AOB, il suo valore identifica la posizione del punto A, di coordinate

$$x_A = \cos\Theta\ ,\quad y_A = \sin\Theta\ , \qquad \textbf{[4.1]}$$

e, quindi, un ben definito triangolo della famiglia che viene pertanto descritta completamente dall'unico parametro θ, quando questo varia da 0 (porta chiusa) a $\pi/2$ (porta aperta); considerando θ variabile, le **[4.1]** non sono altro che le equazioni parametriche del luogo geometrico descritto da A che (come si vede quadrandole, sommandole e ribattezzando le variabili col loro nome di variabili correnti) è la circonferenza di raggio unitario di equazione

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \textbf{[4.2]}$$

o, meglio, il quarto di tale circonferenza a coordinate entrambe positive. Quando A percorre tale curva, il segmento OA ricopre il quarto di cerchio a coordinate positive interno alla ciconferenza **[4.2]**, mentre la superficie ricoperta dal lato AB risulta un po' meno immediata da definire. A tal fine, cominciamo con l'osservare che quando l'angolo θ comincia a crescere, partendo da zero, il segmento AB è inizialmente tutto esterno alla circonferenza **[4.2]** e tale si mantiene fino a che, per θ = $\pi/4$, l'angolo in A assume il valore $\pi/2$ e il lato AB risulta tangente in A alla circonferenza; quando θ supera il valore $\pi/4$, il segmento in esame diventa secante la circonferenza e tutto interno alla parte di piano già ricoperta dal moto dei due lati del triangolo; la parte di superficie ricoperta dalla famiglia di triangoli considerata non ancora definita è dunque quella spazzata dal segmento AB quando il parametro θ varia tra 0 e $\pi/4$. Per definire la curva che la delimita, osserviamo ora che il segmento AB appartiene alla retta passante per per il generico punto A, di coordinate date dalla **[4.1]**, e formante nel punto B un angolo di $\pi-\theta$ col verso positivo dell'asse x, avendo quindi un coefficiente angolare $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$; la sua equazione è allora

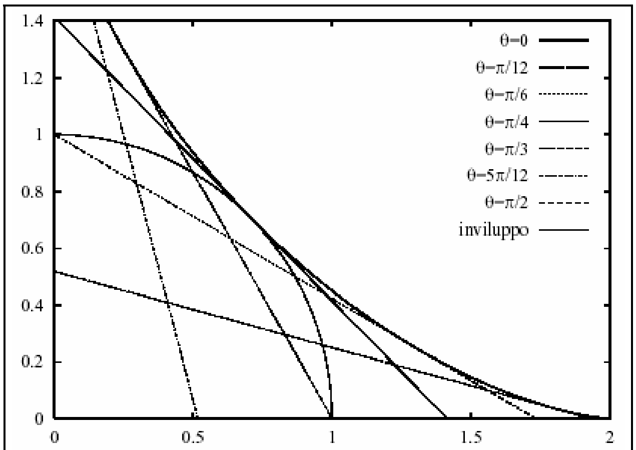


Figura 3 - Alcune rette della famiglia [3] e il loro inviluppo

$$y - \sin\Theta = -\tan\Theta\ (x - \cos\Theta\ )$$

ovvero, semplificando, l'equazione

$$y = 2\sin\Theta\ - \tan\Theta\ x. \qquad \textbf{[4.3]}$$

Al variare di θ la **[4.3]** descrive una famiglia di rette (vedi figura 3) il cui inviluppo, per $0 \leq \theta \leq \pi/4$, rappresenta la curva che ci interessa. Il procedimento per determinarne l'equazione è standard e si basa sulle seguenti considerazioni, valide per definire l'inviluppo di una generica famiglia di rette (purché i coefficienti ubbidiscano a condizioni tali da assicurare la validità di quanto diremo).

Data una famiglia di rette del tipo

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0, \qquad \textbf{[4.4]}$$

con coefficienti dipendenti da un parametro t, su ognuna di esse si definisce un punto caratteristico C, come il punto limite dell'intersezione della retta considerata con un'altra retta della famiglia, prossima ad essa, quando quest'ultima tende alla prima; l'insieme dei punti caratteristici delle rette della famiglia costituisce la curva inviluppo delle rette date, tangente a tutte le rette della famiglia nei loro punti caratteristici. Consideriamo dunque, accanto alla **[4.4]**, un'altra retta della famiglia, di equazione

$$a(t+\delta)x + b(t+\delta)y + c(t+\delta) = 0. \qquad \textbf{[4.5]}$$

Le coordinate del punto intersezione delle due rette soddisfano entrambe le equazioni **[4.4]** e **[4.5]** e quindi anche la loro combinazione lineare

$$\frac{a(t+\delta)-a(t)}{\delta}x + \frac{b(t+\delta)-b(t)}{\delta}y + \frac{c(t+\delta)-c(t)}{\delta} = 0; \qquad \textbf{[4.6]}$$

al tendere di δ a 0, la **[4.5]** si riduce alla **[4.4]**, ma la **[4.6]** diventa l'equazione

$$a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0, \qquad \textbf{[4.7]}$$

dove gli apici indicano, ovviamente, derivate rispetto al parametro t. La **[4.7]**, insieme alla **[4.4]**, definisce le coordinate del punto C caratteristico della retta **[4.4]**: risolvendo il sistema formato dalle **[4.4]** e **[4.7]** rispetto ad x ed y, si ottengono le coordinate del punto C come funzioni dei coefficienti che compaiono nelle due equazioni, cioè, in definitiva, come funzioni del parametro t:

$$x_C = x_C(t), \quad y_C = y_C(t). \qquad \textbf{[4.8]}$$

Queste sono, considerando t variabile, le equazioni parametriche della curva inviluppo delle rette date, curva che risulta tangente ad ogni retta della famiglia nel suo punto caratteristico.

Nel caso specifico della nostra famiglia di rette, data dalla **[4.3]**, derivando i coefficienti rispetto al parametro θ si ottiene l'equazione

$$0 = 2\cos\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}x$$

che, risolta rispetto ad x, fornisce direttamente l'ascissa del punto caratteristico:

$$x_C = 2\cos^3\Theta .$$

Sostituendo nella **[4.3]** ad x il valore di x_C si ottiene, per l'ordinata del punto critico il valore

$$y_C = 2\sin^3\Theta .$$

Facendo ora variare θ, il punto C descrive il luogo dei punti caratteristici delle rette della famiglia e quindi le equazioni

$$x = 2\cos^3\Theta , \quad y = 2\sin^3\Theta \qquad \textbf{[4.9]}$$

sono le equazioni parametriche della curva inviluppo cercata. Elevando alla potenza 2/3 i due membri di tali equazioni e sommando, il parametro θ viene eliminato e se ne ottiene la curva cartesiana che possiamo scrivere come

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}; \qquad \textbf{[4.10]}$$

una sua rappresentazione grafica è riportata nella figura 3. Per x variabile tra $1/\sqrt{2}$ e 2, la **[4.10]** fornisce il contorno della parte di piano esterna al cerchio di raggio 1 ricoperta dal segmento AB nel suo moto.

Un metodo diverso, più divertente e forse più intuitivo, per determinare l'equazione della curva che delimita la superfcie spazzata dal segmento AB quando la porta viene aperta o chiusa, consiste nel seguire il moto di un suo generico punto. Facendo riferimento alla figura 2, se indichiamo con P il punto appartenente ad AB distante di a da A, le sue coordinate, espresse in termini dell'angolo θ, risultano

$$x_P = (1+a)\cos\Theta\ , \quad y_P = (1-a)\sin\Theta\ . \qquad \textbf{[4.11]}$$

Le **[4.11]**, viste come funzioni di θ, sono le equazioni parametriche della curva descritta da P e mostrano che, quando θ varia da 0 (porta chiusa) a $\pi/2$ (porta aperta), il punto P percorre il quarto a coordinate positive dell'ellisse avente l'equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{(1+a)^2} + \frac{y^2}{(1-a)^2} = 1. \qquad \textbf{[4.12]}$$

La **[4.12]**, riguardata a sua volta come funzione del parametro a, rappresenta una famiglia di ellissi e, per $0 \leq a \leq 1$, la famiglia di tutte le ellissi descritte dai punti dal segmento AB, a partire dal cerchio **[4.2]** che, per a=0, descrive il moto dell'estremo A, per finire all'ellisse degenere coincidente col segmento 0–2 dell'asse x (di equazione $y = 0$) che, per a = 1, è associato al moto dell'estremo B. L'insieme di tutte queste ellissi o, meglio, dei loro quarti appartenenti al primo quadrante del piano (x, y), riempie la parte di piano ricoperta dal moto del segmento AB quando la porta viene aperta (o chiusa). La linea che delimita la regione spazzata da AB è quindi determinata dalla curva inviluppo delle ellissi **[4.12]**. Nella figura 4 sono riportati i quarti appartenenti al primo quadrante di alcune ellissi della famiglia e la curva che ne costitusce l'inviluppo.

Per deteminarne l'equazione, possiamo procedere utilizzando un metodo analogo a quello che abbiamo richiamato per la determinazione dell'inviluppo di una famiglia di rette. Per ogni ellisse della famiglia cosideriamo, a tal fine, un[20] punto caratteristico E, definito come il limite del punto intersezione di tale ellisse con un'altra ellisse della famiglia, prossima ad essa, quando quest'ultima tende alla prima; le coordinate di tale punto risultano, ovviamente, funzioni del parametro a e, al variare di a,

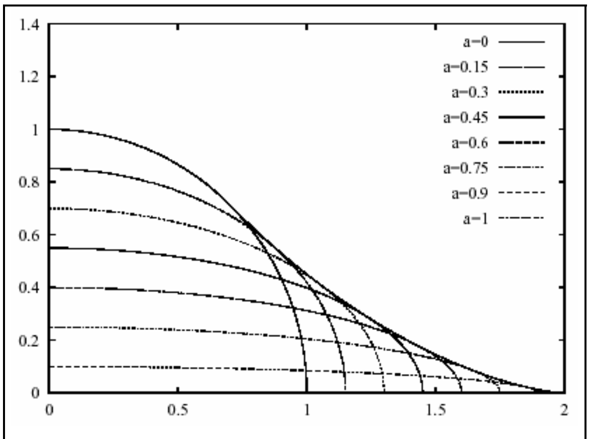


Figura 4 - Alcune ellissi della famiglia [12] e il loro inviluppo

[20] In realtà, nel caso della famiglia di ellissi **[4.12]**, di punti caratteristici ne esistono 4, uno per ogni quadrante, ma noi siamo interessati solo a quello che succede aprendo la porta, cosa che avviene, con la nostra definizione del piano cartesiano, nel primo quadrante.

descrivono l'equazione della curva inviluppo delle ellissi della famiglia, tangente in ogni suo punto all'ellisse della famiglia di cui tale punto è punto caratteristico. Consideriamo dunque, accanto alla **[4.12]**, l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{(1+a+h)^2}+\frac{y^2}{(1-a-h)^2}=1; \qquad \textbf{[4.13]}$$

le coordinate dei punti intersezione delle due ellissi ubbidiscono entrambe le equazioni e quindi anche l'equazione che si ottiene sottraendo la **[4.12]** dalla **[4.13]** e dividendo per h; quando l'ellisse **[4.13]** tende alla **[4.12]**, cioè quando h→0, l'ultima equazione citata diventa l'equazione

$$-\frac{x^2}{(1+a)^3}+\frac{y^2}{(1-a)^3}=0, \qquad \textbf{[4.14]}$$

ottenuta dalla **[4.12]** derivandola rispetto al parametro a. La coppia di soluzioni positive del sistema formato dalle equazioni **[4.12]** e **[4.14]** fornisce le coordinate del punto caratteristico E che ci interessa:

$$x_E=\sqrt{\frac{1}{2}(1+a)^3}, \qquad y_E=\sqrt{\frac{1}{2}(1-a)^3}. \qquad \textbf{[4.15]}$$

Considerando a come variabile, le **[4.15]** sono le equazioni parametriche della curva inviluppo delle ellissi della famiglia **[4.12]**; eliminando a se ne ottiene l'equazione cartesiana, che viene spontaneo scrivere sotto la forma

$$(2x^2)^{1/3}+(2y^2)^{1/3}=2, \qquad \textbf{[4.16]}$$

che non è altro che una forma diversa dell'equazione **[4.10]**, ottenuta come equazione dell'inviluppo della famiglia di rette **[4.3]**.

Concludendo, le **[4.15]**, facendo variare a tra 0 e 1, ci forniscono l'equazione parametrica del tratto di curva che limita la regione ricoperta dal segmento AB, esterna al cerchio di raggio 1; la stessa informazione ci dà ovviamente la **[4.16]** (ovvero la **[4.10]**), risolta rispetto ad y, facendo variare x tra $1/\sqrt{2}$ e 2. Poiché, come visto all'inizio, la curva che limita l'area ricoperta dai due segmenti OA e AB è data, per $0 \le x \le 1/\sqrt{2}$, dal corrispondente tratto del cerchio unitario **[4.2]**, volendo dare la curva che delimita l'intera area evidenziata dal moto della porta con un'unica equazione, possiamo scriverla come

$$y = C(x), \qquad \textbf{[4.17]}$$

dove la C(x), nota agli studiosi del moto delle porte col nome di Charontis Flexus o curva di Caronte, è la funzione

$$C(x)\equiv\sqrt{1-x^2}\;\theta(x)\theta(1/\sqrt{2}-x)+(2^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\;\theta(x-1/\sqrt{2})\theta(2-x), \qquad \textbf{[4.18]}$$

in cui il simbolo θ rappresenta la funzione teta di Heaviside, la più semplice e la più nota delle funzioni a scalino, definita come

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & \text{per } x>0,\\ 0, & \text{per } x<0.\end{cases}$$

In figura 5 è riportata la curva di Caronte che, associata ai segmenti 0–1 dell'asse y e 0–2 dell'asse x, riproduce la forma esatta della regione ricoperta dal moto della porta, già vista in figura 1.

Giusto per la prosa non siamo riusciti a non pubblicare il nostro divulgatore preferito, malgrado i compromessi che ci siamo presi con la formattazione. Certo che il Nostro ci ha fornito documentazione in stato ovviamente perfetto, l'orrore del miscuglio di formati l'abbiamo creato noi, per mancanza di tempo.

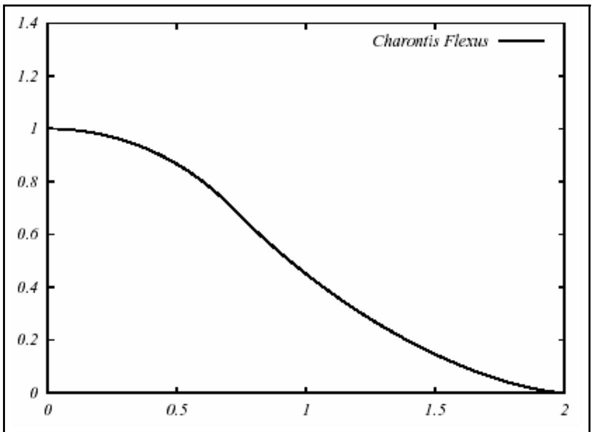


Figura 5 - La curva di Caronte

4.3 [077]

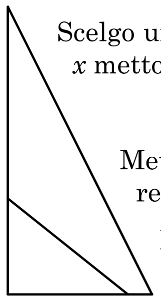
4.3.1 Braccia sottratte all'agricoltura

Questo è decisamente il problema che più vi ha entusiasmato. Soluzioni a iosa, da ***Ermanno***, ***DjZero00***, ***Beppe***, ***Zar***, ***PMP***, ***Emanuele***, ***Dr. Toki***, ***Cid*** e ***Adriana***, a cui diamo la benvenuta pubblicandola immediatamente e facendole i complimenti per aver fatto lo sforzo di scrivere tutto in word (anche se non siamo riusciti a copiare per bene le figure, che sono rimaste senza lettere...):

> O.K allora dopo aver inutilmente ricopiato "in bella" su foglio protocollo la mia soluzione, cercherò di scriverla in word
>
> PROBLEMA DELLA SIEPE
>
> (CASO DEL TRIANGOLO RETTANGOLO, SIEPE RETTILINEA) non voglio neanche sentir parlare di caso più generale
>
> Caso 1. LA SIEPE PARTE DA UN VERTICE DEL TRIANGOLO
>
> In questo caso la siepe deve essere per forza una mediana (divide in 2 parti equivalenti ⇒ è mediana). Le 3 mediane misurano $m_1 = 50\sqrt{73}$; $m_2 = 100\sqrt{13}$ (calcolate col teor di Pitagora) mentre m_3, quella relativa all'ipotenusa, misura 250.
>
> Caso 2. LA SIEPE E' PARALLELA AD UNO DEI LATI
>
> 2.1 PARALLELA AL CATETO MINORE. Chiamando x la lunghezza della siepe, per la similitudine dei triangoli ed il rapporto fra le loro aree (dato) si ha $x^2 : 300^2 = 1 : 2$ da cui $x = 150\sqrt{2}$ (la distanza tra la siepe ed il vertice si trova poi con comodo).
>
> 2..2 PARALLELA AL CATETO MAGGIORE. In modo analogo al precedente si trova $x = 200\sqrt{2}$.
>
> 2.3. PARALLELA ALL'IPOTENUSA sempre come sopra $x = 250\sqrt{2}$.
>
> Caso 3.LA SIEPE UNISCE DUE LATI SENZA ESSERE PARALLELA AL TERZO
>
> 3.1 UNISCE I DUE CATETI
>
> Chiamando x ed y i due segmenti come nella figura, avrò xy=60000 ed inoltre x^2+y^2 deve essere minima. Si tratta di un problema di minimo che si risolve per via elementare noto il prodotto (costante delle 2 grandezze positive x^2 ed y^2) la cui

somma deve essere minima. La soluzione è $x^2=y^2$ da cui $x = y = \sqrt{60000} = 100\sqrt{6}$.
In questo caso la siepe misura $\sqrt{120000} = 200\sqrt{3}$.

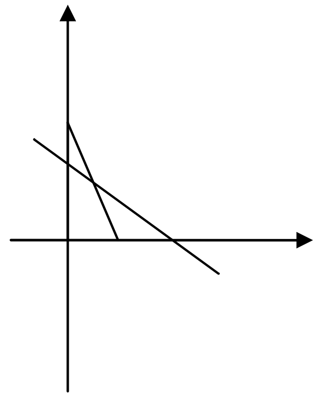
3.2 UNISCE CATETO MAGGIORE ED IPOTENUSA



Scelgo un riferimento cartesiano. Nell'origine O avrò l'angolo retto. Sull'asse *x* metto il cateto minore OA , sull'asse *y* piazzo il cateto maggiore OB

Metto a sistema l'equazione della retta AB con quella della generica retta $y=mx+q$

Risolvendo trovo le coordinate del punto P di intersezione cioè $x_P = \dfrac{1200-3q}{3m+4}$.



Da cui $y_P = \dfrac{1200m+4q}{3m+4}$.

Adesso impogngo che l'area del quadrilatero OAPQ sia 30000, da cui la relazione $qx_P+300y_P=60000$ da cui sostituendo le espressioni trovate sopra ottengo $-3q^2 + 2400q - 240000 - 180000m = 0$, che in modo molto astuto si può scrivere come

$$60000m + 80000 = (400-q)^2 \qquad \textbf{[4.19]}$$

da cui all'occorrenza $q = 400 - \sqrt{60000m + 80000}$

Calcolando la distanza PQ dove Q(0,q)

$$d^2 = x_P^2 + (y_p - q)^2 = \left(\frac{1200-3q}{3m+4}\right)^2 + \frac{m^2(1200-3q)^2}{(3m+4)^2} = \frac{(1+m^2)(1200-3q)^2}{(3m+4)^2} = \frac{9\cdot(1+m^2)(400-q)^2}{(3m+4)^2}$$

Sostituendo la **[4.19]** ottengo

$$d^2 = \frac{9\cdot(1+m^2)\cdot(60000m+80000)}{(3m+4)^2} = 180000\cdot\frac{(1+m^2)}{3m+4}$$

Trascurando il fattore numerico trovo il minimo della funzione $F(m) = \dfrac{1+m^2}{3m+4}$,

che sitrova effettivamente per m=1/3 da cui $q = 400 - 100\sqrt{10} = 100(4-\sqrt{10})$

In questa posizione la siepe misurerebbe $d = \sqrt{40000} = 200$.

3.3 UNISCE CATETO MINORE ED IPOTENUSA

Risolvendo in modo analogo (piazzando cateto minore sull'asse *x* e cateto maggiore sull'asse *y*) trovo le relazioni seguenti:

$$60000m + 45000 = (300-q)^2$$

e

$$d^2 = x_P^2 + (y_p - q)^2 = \left(\frac{1200-4q}{4m+3}\right)^2 + \frac{m^2(1200-4q)^2}{(4m+3)^2} = \frac{(1+m^2)(1200-4q)^2}{(4m+3)^2} = \frac{16\cdot(1+m^2)(300-q)^2}{(4m+3)^2}$$

Con la sostituzione diventa

$$d^2 = \frac{16\cdot(1+m^2)\cdot(60000m+45000)}{(4m+3)^2} = 240000\cdot\frac{(1+m^2)}{4m+3}$$

La funzione da rendere minima è

$F(m)=\dfrac{1+m^2}{4m+3}$ da cui m=1/2 e $q=50(6-\sqrt{30})$.

La siepe in questo caso misurerebbe $d=\sqrt{60000}=100\sqrt{6}$

Mi sembra di aver considerato tutti i casi quindi la soluzione minima dovrebbe essere la 3.2.

...cioè 200, il valore che è venuto a tutti quanti. Un paio di considerazioni di ***PMP***, per non dimenticare la sua prosa:

> Metti il triangolo rettangolo con i lati sugli assi cartesiani, il più lungo in verticale. Ora, è ovvio che una qualunque retta che divida in due il triangolo deve passare per il baricentro; ed è anche ovvio che se le coordinate dei vertici del triangolo sono (0,0), (3a,0) e (0,3b) il baricentro è il punto (a,b). Per ragioni legate all'omotetia, si dimostra che uno dei due punti di incontro della nostra bisecante deve essere sul lato verticale; è facile vedere che se il secondo è sull'ipotenusa, allora il primo punto sarà (0,t) con t<b, e sono convinto che si possa dimostrare che il secondo punto non può essere sull'altro cateto. Non che importi molto, ma semplifica i conti da fare. A questo punto, tu hai una retta per (0,t), 0<t<b, e (a,b); hai anche l'ipotenusa che è y-3b = -(b/a)x, e quindi puoi trovare il punto di incontro. Guardi la distanza tra (0,t) e questo punto, e la minimizzi in funzione di t. Octave sarebbe l'ideale.

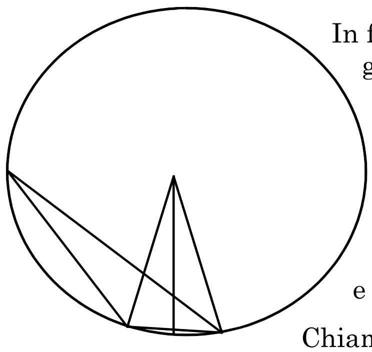
Senza commenti. Lo stesso vale per la soluzione lampo di ***Ermanno***:

> La soluzione relativa alla ricerca della siepe di lunghezza minima che divida l'area in due parti uguali proposta nel num.77 della Nostra rivista è 200. come può facilmente desumersi considerando che:
>
> 1. per ovvie considerazioni di natura geometrica bisognerà tagliare i lati più lunghi 400 e 500,
> 2. per altrettanto ovvie considerazioni di natura geometrica la retta secante dovrà essere perpendicolare alla bisettrice dell'angolo formato tra gli stessi lati "lunghi".
> 3. la soluzione si ricava risolvendo l'equazione 30000=x/4*x/2/tan(1/2arctan(3/4)).

E non abbiamo neppure riscritto la formula. In conclusione, ancora complimenti a ***Zar***, che oltre ad averci fornito un'ottima soluzione, ci invia meravigliosi disegni jpg che descrivono in movimento la siepe.

4.3.2 Cucchiaio di legno!

Poche soluzioni, per questo problema, ma decisamente valide. Una particolare menzione a ***Cid***, che ci ha mandato ben due versioni, e ringraziamo anche il ***Dr. Toki*** ed ***Emanuele***. Vi diamo una delle soluzioni di ***Cid***, senza nulla togliere alle altre, per motivi di spazio e perché l'abbiamo trovata originale.



In figura AD rappresenta la proiezione sul campo di gioco dell'asta orizzontale della porta.

Considero un cerchio di raggio uguale a "50 piedi", avente il centro dal lato del campo di gioco e passante sia per A che per D.

B è il centro di AD. La lunghezza di AB la chiamo L, la distanza tra la posizione prefissata e l'asse centrale della porta la chiamo S.

Chiamo θ l'angolo ACD, so che S=50, H=10 e L=(18.5)/2=9.25.

Se la posizione prefissata si trova sul cerchio nel punto C sicuramente l'angolo sotto cui sottendo la porta è maggiore di qualunque altra posizione, in quanto per qualsiasi altra posizione che sia distante 50 piedi dall'asse centrale di AD e si trovi sul campo di gioco mi verrei a trovare al di fuori del cerchio per cui l'angolo sotteso dalla corda AD sarebbe sicuramente minore.

La larghezza dell'asta orizzontale AD è la corda su cui insiste un angolo al centro ed uno alla circonferenza, siccome l'angolo al centro è il doppio di quello sulla circonferenza, abbiamo che l'angolo AOB è uguale all'angolo ACD, quindi è uguale a θ. AB=OA Senθ

Siccome OA=S e AB=L, abbiamo che: L=S Senθ

Da cui: Senθ = L / S

Inoltre: $(OB)^2=(OA)^2-(AB)^2$

Da cui: $(OB)^2=S^2-L^2$

ed essendo $X^2=(OB)^2-H^2$

$X^2=S^2-L^2-H^2$

Per cui si ottiene: $X=\sqrt{S^2-L^2-H^2}$.

Ce l'abbiamo fatta anche questa volta. Godetevi il resto di RM, gente.

5. Quick & Dirty

Dividete gli interi da 1 a 9 in tre insiemi di qualsiasi dimensione. Il prodotto degli interi di almeno un insieme è sempre maggiore di 71?

Sì.

Il prodotto degli interi da 1 *a* 9 *vale* 362880. *se tutti i tre insiemi dessero un prodotto minore di* 71*, il prodotto totale sarebbe minore di* 71^3=357911*, che è troppo piccolo.*

La partizione che va più vicina è quella {9,8}, {6,4,3}, {7,5,2} *(*1 *mettetevelo dove preferite), che genera i prodotti* 72*,* 70*,* 70.

6. Pagina 46

Per prima cosa, dimostriamo che è:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)\cdot$$
$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right)$$

dove k è tale per cui $2^k \le n < 2^k$ e p_l è il massimo primo minore di n.

Siccome ogni intero positivo m per cui $1 < m < n$ può essere scritto come prodotto di primi

$$m = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l},$$

dove tutti gli esponenti sono interi non negativi ***minori di k***, allora nei fattori sulla destra della disuguaglianza incontreremo come termini tutte le frazioni del primo membro più alcuni termini (positivi) ulteriori; questo significa che il secondo membro è sempre maggiore del secondo.

Prendiamo ora il logaritmo di entrambi i termini:

$$\log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) < \log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+$$
$$\log\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)+\ldots+\log\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right).$$

Ma, per qualsiasi k e per $p \ge 2$, si ha:

$$\log\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right) < \frac{2\log 3}{p} \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right) = \frac{1-\frac{1}{p^{k-1}}}{1-\frac{1}{p}} < \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} = 1+\frac{1}{p-1}.$$

Ricordando il fatto che la convergenza a e è monotona crescente, si ha:

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1} < 3 \Rightarrow 1+\frac{1}{p-1} < \sqrt[p-1]{3} \Rightarrow$$
$$\log\left(1-\frac{1}{p-1}\right) < \frac{\log 3}{p-1}.$$

Si ha anche che è:

$$\frac{2\log 3}{p} < \frac{\log 3}{p-1},$$

da cui si ricava quindi:

$$\log\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) < \frac{2\log 3}{2}+\frac{2\log 3}{3}+\frac{2\log 3}{5}+\ldots+\frac{2\log 3}{p_l}$$
$$= 2\log 3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\right).$$

Se esiste un N tale che per ogni l si abbia che la parentesi dei reciproci dei primi nell'ultimo termine qui sopra sia minore di N dovrebbe essere, per qualsiasi n:

$$\log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$$
$$<2\log 3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\right)$$
$$<2(N-1)\log 3,$$

da cui seguirebbe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}<3^{2(N-1)}=N_1, \qquad \textbf{[6.1]}$$

dove N_1 è ***indipendente*** da N.

Ma nel Bungee Jumper precedente (RM 077) abbiamo dimostrato che N_1 non esiste; quindi la **[6.1]** non è soddisfatta; da cui,

$$1+\sum_{\substack{i=2,\\ i\in P}}^{i<p_l}\frac{1}{i}<N$$

non è soddisfatta per qualsiasi p_l da un dato N, che è la tesi.

Alcune considerazioni a margine: la somma considerata, per un valore dato di p differisce di molto poco dal valore $\ln(\ln p)$ e, in particolare, la differenza tra la sommatoria e questo valore non supera mai il valore 15; inoltre, se ricordate alcuni BJ di qualche tempo fa, potete vedere che nella sequenza dei numeri naturali i primi sono "più numerosi" dei quadrati (RM 077) o dei numeri che contengono la cifra 9 (RM 076).

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Manca un passo...

Consideriamo la carta di un continente (circondato dal mare); introduciamo le notazioni seguenti:

- n Numero dei paesi del continente. Si suppone che siano "tutti attaccati" (nel senso che un paese non può avere colonie nello stesso continente), ma nulla impedisce che un paese sia circondato completamente da un altro (ad esempio, la Repubblica di San Marino o la Città del Vaticano).
- p Numero dei punti di frontiera della carta, ossia il numero dei punti in cui si incontrano *almeno tre* frontiere all'interno delle terre (quindi, il mare non conta); il **grado** di un punto di frontiera sarà il numero di frontiere convergenti in quel punto.
- q Numero delle frontiere; o meglio, numero delle linee che uniscono tra loro i punti di frontiera. Si noti che le coste essendo sul mare non sono frontiere.

Giusto per chiarire, qui di sotto vedete una mappa[21]; i punti di frontiera sono soltanto

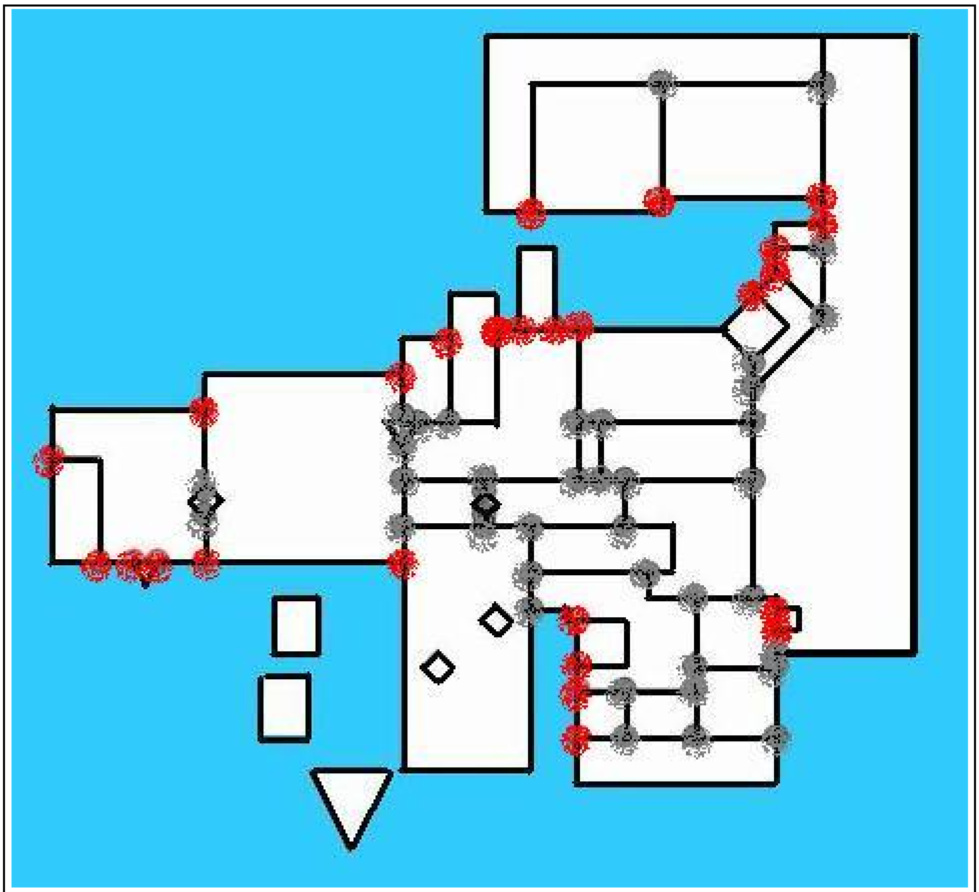


Figura 1 - Una mappa

quelli neri e le frontiere sono le linee che uniscono due punti neri; i punti rossi, non soddisfacendo la definizione qui sopra, non sono considerati punti di frontiera (e se la mappa vi sembra balorda, le due regioni sulla sinistra sono Portogallo e Spagna, quindi non prendetevela con me).

[21] *Non so se si capisce, ma il Capo l'ha fatta tutta da solo... [AR]*

Quello che vogliamo dimostrare è che:

$$q = n + p - 1.$$

Procediamo per *ricorrenza*, che in certi casi rappresenta un metodo imbattibile.

Per q=0 (leggasi: assenza di frontiere) abbiamo n=1 (ossia un solo paese "a isola") e p=0 (se c'è un paese solo, non avremo punti in cui se ne incontrano almeno tre). Quindi, in questo caso la proprietà è **valida**.

Per q=1 (una sola frontiera) abbiamo n=2 (due paesi) e, per lo stesso motivo di cui sopra, p=0. Quindi, anche in questo caso la proprietà è **valida**. Proviamone ancora una, prima di fare il grande passo.

Per q=2 (due frontiere) avremo ancora p=0, in quanto ci sono necessarie almeno *tre* frontiere per avere un punto di frontiera; e quindi dovrà essere n=3, ossia tre paesi di cui due non si toccano, e quindi anche in questo caso la proprietà è **valida**.

Sotto l'ipotesi di ricorrenza, supponiamo la nostra proprietà vera per q, q-1 e q-2; vogliamo mostrarne la verità per q+1.

Consideriamo allora una carta avente q+1 frontiere, n paesi e p punti di frontiera; per riportarci all'ipotesi di ricorrenza, *cancelliamo una frontiera* F dalla nostra mappa; avremo quindi (essendo stato un paese "annesso" da un altro) n-1 paesi.

Per quanto riguarda le frontiere e i punti di frontiera, possono verificarsi tre casi, in funzione del grado dei punti di frontiera che delimitavano F.

Se entrambi i punti di frontiera avevano grado ≥ 4:

> Il numero di frontiere della nuova configurazione è q (ne è sparita una), il numero dei punti di frontiera è p (in quanto anche i nostri due punti restano punti di frontiera), e il numero delle nazioni sarà (causa annessione) n-1. Quindi, in questo primo sottocaso l'ipotesi è **valida.**

Se uno dei punti aveva grado 3 *e l'altro aveva grado* ≥ 4:

> Il primo punto di frontiera cessa di essere tale nella nuova configurazione; ci ritroviamo quindi ad avere n-1 paesi, p-1 punti di frontiera e q-1 frontiere.

Se entrambi i punti avevano grado 3:

> In questo caso, entrambi cessano di essere punti di frontiera (e quindi avremo p-2 punti di frontiera); i paesi restano n-1 (sempre per l'annessione); le due frontiere che si incontrano (adesso che è sparita la terza) in un punti diventano *una sola*, e questo per entrambi i punti; quindi le frontiere diventano q-3. La situazione, probabilmente, diventa più chiara con il disegno di ***Figura 2***. Se cancellate CD, le frontiere FD, DE diventano una frontiera unica, così come le frontiere AC, CB.

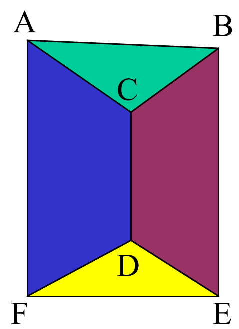


Figura 2

Insomma, funziona.

Dalle definizioni date, nascono alcune interessanti considerazioni:

1. Ad una data frontiera, corrispondono esattamente 2 paesi;
2. Una data frontiera è delimitata da 2 punti di frontiera;

3. In un dato punto di frontiera convergono almeno 3 paesi.

Allora, se A è l'insieme dei punti di frontiera della nostra mappa e B è l'insieme delle frontiere, possiamo supporre:

$$A : \mathrm{card}(\mathrm{A}) = p;$$
$$B : \mathrm{card}(\mathrm{B}) = q.$$

Dalle considerazioni (2) e (3) si ricava che $3p \leq 2q$; ma essendo $q = n + p - 1$, si ha:

$$p \leq 2n + 2.$$

Ora, quello che vogliamo dimostrare ora è che ***in ogni carta geografica esiste un paese che non ha più di 5 paesi vicini.*** Ragioniamo per assurdo: supponiamo che in una certa carta geografica tutti i paesi abbiano almeno 6 paesi vicini, e quindi abbiano 6 frontiere; si avrebbe allora la relazione tra le frontiere:

$$q \geq \frac{6n}{2},$$

visto che ogni frontiera collega due paesi.

Utilizzando la proprietà precedentemente dimostrata, otteniamo:

$$n + p - 1 \geq 3n \Rightarrow 2n + 1 \leq p$$

che è una contraddizione; quindi, la nostra ipotesi è vera.

A questo punto, ci sarebbe da chiedersi se sia possibile abbassare questo valore 5, ossia se (ragionando al contrario) esiste una carta in cui tutti i paesi hanno 5 vicini; questo costituirebbe un controesempio al nostro tentativo di abbassare il valore.

Usando quello che ho chiamato "Il trucco di San Marino", diventa ragionevolmente semplice costruire un controesempio, e lo trovate nella ***Figura 3*** a fianco[22]. Se non vi piace il trucco, comunque, potete tagliare un pezzo della nazione più esterna e funziona lo stesso.

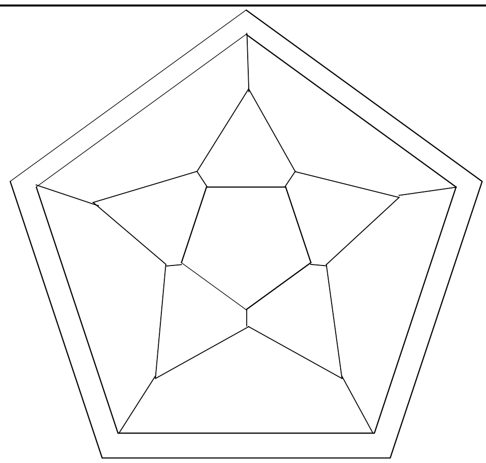


Figura 3 - Il "Trucco di San Marino"

Ora siamo decisamente vicini al teorema che ci interessava dimostrare, ossia che ***con cinque colori si può colorare qualsiasi carta geografica***.

Ragioniamo per ricorrenza, tanto per cambiare.

[22] Il primo disegno che mi è venuto in mente è quello pubblicato; il "trucco di San Marino" è l'avere una nazione (la più esterna) che circonda tutte le altre. E il nome mi è piaciuto da matti, anche se si potrebbe chiamare il "colpo del Vaticano". Superata la prima felicità di aver disegnato una mappa con ogni paese avente 5 vicini, ho pensato che forse si poteva fare di meglio, evitando di usare il trucco; per questo, basta(va) "segare" un angolo del pentagono più esterno e due pezzetti dei lati adiacenti (non del tutto). In questo modo, non si ha più un paese che circonda tutti gli altri.

Se volete costruirne altri, scopo del gioco è costruire un grafo ***planare*** in cui ogni nodo ha ordine ***5*** e quindi (se volete le nazioni e non solo le capitali e le autostrade) costruire il duale del gruppo. Nel "Trucco di San Marino" uno dei punti è improprio (la "capitale" dello stato che circonda gli altri).

È evidente che possiamo colorare ***un*** paese con ***cinque*** colori (basta sceglierne uno e usare quello).

Supponiamo valido il nostro teorema per una carta di N paesi, e consideriamo una carta di N+1 paesi.

Da quanto detto precedentemente, possiamo dire che in questa carta esiste almeno un paese P avente non più di 5 frontiere.

Di questo paese, cancelliamo una frontiera; ora la nostra carta contiene N paesi, e quindi è colorabile con 5 colori.

Ricostruiamo la frontiera e applichiamo il colore che avevamo dato prima al paese *non-P*, ossia abbiamo una carta quasi tuta colorata (solo P è ancora da colorare), e P ha non più di 5 frontiere.

Si possono prospettare due casi:

Tra i vicini di P, almeno due paesi hanno lo stesso colore. In questo caso ci avanza un colore e lo usiamo per colorare P.

P ha 5 vicini, tutti di colore diverso tra loro. In questo caso, consideriamo i paesi A e C, colorati rispettivamente in a e c.

1. Se ***non esistono*** delle sequenze di paesi colorati in a e in c che si tocchino per almeno una delle loro frontiere (che permettano cioè di congiungere A e C), allora possiamo colorare A in c e procedere ad invertire i colori a e c; in questo modo, ci si riporta al caso precedente.
2. Se ***esistono*** delle sequenze di questo tipo, i paesi B e D, colorati rispettivamente in b e d, non possono essere l'estremità di una sequenza di paesi colorati unicamente in b e d (per ragioni di connessione: ricordate il limite di cinque!) e quindi con il ragionamento del punto precedente si può colorare B in D e quindi P in b.

...e quindi il teorema è dimostrato.

Ora, se qualcuno vuole estenderlo e fare l'ultimo passo, passando a ***quattro*** colori...

Volete la mia opinione? Il Teorema dei Quattro Colori non è famoso per la sua difficoltà ad essere dimostrato, ma per il nervoso che dà ai Matematici nel sapere che con il "5" è così facile, mentre con il "4" è terrificante. E, in effetti, qualcuno ci è cascato.

Il 17 luglio del 1879, ***Alfred Bray KEMPE***[23] annuncia, attraverso "Nature", di aver trovato una prova della Congettura dei Quattro Colori.

La prova seguiva il metodo successivamente noto come "Catene di Kempe", ossia sostanzialmente il metodo che abbiamo utilizzato nell'ultima parte qui sopra.

Kempe ricevette grandi onori per la sua dimostrazione; tant'è che il Nostro diventa *Fellow* della Royal Society (di cui diventa anche Tesoriere, per alcuni anni) e nel 1912 viene nominato Cavaliere.

Nonostante...

[23] Avvocato londinese, matematico dilettante. Adesso però non cominciate a prenderlo in giro: aveva studiato a Cambridge, con Cayleys! [*Il mio Avvocato preferito (l'ho anche sposato) a questo punto di solito dice "*Nobody's perfect...*" (RdA)*]

Nonostante il fatto che Percy John Heawood, nel 1890, avesse ritrasformato il Teorema dei Quattro Colori nella Congettura dei Quattro Colori; infatti, inquell'anno, invia a Kempe un disegno molto simile a quello di ***Figura 4*** (è topologicamente equivalente: l'originale, se volete, si trova in rete in bianco e nero), chiedendo come, in base al Teorema, sia colorabile l'area centrale seguendo le linee della sua dimostrazione. La cosa, se provate, è impossibile.

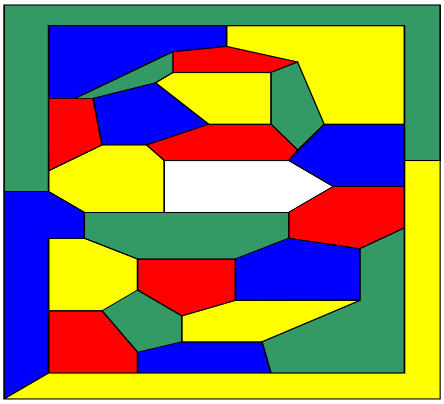


Figura 4 - Il disegno di Heawood (quasi)

Quantomeno, rispettiamo il *fair play* degli inglesi: non lo hanno cacciato dalla Royal Society (forse perchè sino ad allora ci avevano creduto; o forse perchè era migliore come Tesoriere che come Matematico...)[24].

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[24] Siccome ***non*** abbiamo la minima intenzione di trattare, in un numero successivo, la dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori, ce la caviamo con una nota a pié pagina: trovate ulteriori notizie in merito se cercate i due autori, ***Kenneth Appel*** e ***Wolfgang Haken***; nel caso siate colti da furore di ricerca, potreste anche provare ***Ashay Dharwadker***, che sostiene da tempo di aver trovato una dimostrazione "alternativa"; in questo secondo caso, però, preparatevi a nuotare tra Superfici di Riemann, Moduli di Eilenberg e cose di questo genere.