Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 075 – Aprile 2005 - Anno Settimo

1. Matematica per porcini

"Uno dei grandi malintesi sulla matematica che commettiamo nelle nostre aule di scuola è che il professore sembra sempre conoscere la risposta di ogni problema che si discute. Ciò dà agli studenti l'idea che da qualche parte c'è un librone con tutte le risposte corrette a tutte le domande interessanti, che gli insegnanti ce l'hanno, e basterebbe trovarlo per avere tutto a posto. Questo è davvero l'opposto della vera natura della matematica."

Leon Henkin "Teaching Teachers, Teaching Students"[1]

Se ne vedono più spesso fuori dalle stazioni ferroviarie, che fuori dagli aeroporti. E questo per molte e ovvie ragioni: innanzitutto, gli aeroporti non sono mai nel cuore delle città. Sfuggono alla morsa congiunta di incroci trafficati ed edifici notevoli, e

[1] L'occasione ci è gradita (come dicono le formali missive aziendali) per ringraziare PuntoMauPunto, alias .mau., per aver messo in linea sul suo sito una raccolta preziosa e esaustiva di citazioni che hanno a che fare con la matematica e i matematici. Per quel che ne sappiamo, potrebbe essere la raccolta più completa in lingua italiana; non è in linea da molto, ma non è già la prima volta che ne approfittiamo. Figuriamoci se sarà l'ultima…

sono quasi sempre adagiati a qualche decina di chilometri dal centro. Le stazioni ferroviarie, invece, sono spesso il simbolo stesso del cuore metropolitano: e questa è cosa curiosa e anche istruttiva, quasi quanto lo è osservare gli anelli di crescita di un tronco d'albero. Alla fin fine, al momento della loro nascita storica, le stazioni ferroviarie non avevano un destino diverso da quello degli aeroporti: nascevano in periferia, fuori porta, e non a caso sono molte le stazioni ferroviarie, almeno in Italia, che hanno la parola "Porta" nel nome[2]. Ma il treno e le ferrovie sono le macchine per eccellenza di fine Ottocento, e le città hanno avuto un secolo di tempo per crescere e assorbire quelle stazioni fuori porta, fino a farle diventare parte integrante del tessuto cittadino. Gli aeroporti sono istituzioni ben più recenti, e i corridoi aerei di accesso hanno bisogno di più spazio di quanto ne occorra ad una coppia di binari; ne consegue che, quasi sempre, arrivare nell'aeroporto di destinazione non è ancora un vero e proprio "arrivare nella città di destinazione": Fiumicino, Linate, Peretola e Caselle (ma anche Heathrow, Roissy, Schiphol e Zaventem) sono minuscole città che hanno sacrificato perfino il nome sull'altare della metropoli vicina, ottenendone in cambio solo un paio d'ali molto virtuali nell'immaginario collettivo e una stazione meteorologica che denuncia a tutta la nazione la temperatura del paesello originariamente sconosciuto. Dalle stazioni ferroviarie, invece, non si fa in tempo ad uscire che già si riconosce qualche monumento caratteristico della metropoli appena raggiunta.

È per questo che capita più spesso di incontrarli sui marciapiedi prossimi alle stazioni ferroviarie: del resto, la gran parte dei viaggiatori d'aeroplano neanche fa in tempo a vedere l'esterno dell'aeroporto: la marea di persone vomitata dai cancelli di uscita dove ronzano doganieri e cani antidroga è già stata filtrata dei passeggeri "importanti", quelli che hanno raggiunto macchine blu e dai vetri azzurrati tramite qualche cunicolo vietato ai comuni mortali; e per gli altri, subito dopo le porte opache e automatiche della sezione "Arrivi-Arrivals" c'è una foresta di uomini con cartelli formato A4 recanti nomi di ditte e di fabbriche, tutti in attesa di prelevare un ben preciso business-man o un'altrettanto precisa executive-woman. Dopo quest'altra spoliazione, la maggior parte dei viaggiatori si accalca ordinatamente nei lunghi serpentoni di attesa dei taxi: in fondo, è gente che viaggia in aereo, e quindi è gente che, quasi sempre, ha i soldi per potersi permettere un taxi o, assai più probabilmente, un modulo di rimborso-spese da compilare a fine mese. I pochi eroici superstiti sono persone che stanno tornando a casa (e che quindi hanno la macchina in un costosissimo parcheggio multipiano), o che conoscono bene la zona (riuscendo perfino ad imparare dove si trova il terminal dei bus, che in genere riescono arrivare in città in meno tempo e con un quarto della spesa del taxi), o veri e propri forzati dei binari, che sanno ben orientarsi negli aeroporti (del resto, visto uno, visti tutti, come si dice...) tanto da riuscire a seguire bene le istruzioni che li conducono alla stazione della metropolitana (quando c'è) o a quella ferroviaria (che c'è quasi sempre). Le sparute minoranze che si fiondano verso gli autonoleggi o verso gli shuttle degli hotel sono solo frammenti di folla a scarso peso statistico.

Invece, fuori dalle stazioni ferroviarie si incontrano ancora, e in buon numero: sono gli avventurieri che arrivano nella città sconosciuta con l'intenzione di domarla a mani nude. Hanno in genere un trolley non troppo voluminoso, qualche foglio di carta in mano e lo sguardo perso nel tentativo di decifrare qualsiasi indicazione possibile. Sono i viaggiatori che sanno che la loro destinazione finale è un luogo "non troppo

---

[2] E la celeberrima località <Stazione di Calamandrana>, che si trova a cinque chilometri da Calamandrana? [RdA] - In effetti, la toponomastica registra mutazioni ben più pesanti di quelle causata dallo scippo del termine "porta" dalle vere porte cittadine alle stazioni: ai paesi piccoli, spesso arroccati in cima ad una collina, il dilagare delle strade ferrate ha fatto ben di peggio, generando una pletora di minuscoli paesini gemelli sorti dal nulla attorno ai binari, che hanno mutuato il nome del paese vicino con la sola aggiunta della parola "Stazione" o "Scalo".

lontano" dalla stazione, che hanno in mano una cartina mal disegnata (oppure stampata in un asettico bianco e nero dalla stampante dell'ufficio) e stanno disperatamente cercando di capire dove far cominciare i "quattro passi" che dopo poche svolte li dovrebbero portare all'albergo salvifico. Solo che il viaggio è stato stancante, la città è davvero sconosciuta, e guardando una cartina non si riesce mai a figurarsi davvero, fino in fondo, il panorama cittadino. E allora eccoli lì, un po' inebetiti e molto sfiduciati, tormentati da dubbi multiformi: ("Dov'è che dovevo andare, poi, a destra o a sinistra?" – "Ci sarà un tram comodo?" – "E se chiedessi informazioni a quel poliziotto? Sì, poi magari quello parla solo fiammingo…" - "E se me ne frego dei buoni propositi e salgo su un taxi?" – e così via dubitando…). La maggior parte di loro finisce col naso incollato al quadro d'insieme della metropolitana, non tanto per prenderla, quanto per capire se il nord è davvero nella direzione di quel grosso negozio di dischi o se invece, per puro dispetto, questo sole straniero stia seriamente tramontando a sud-est, come sembrerebbe dalla cartina stropicciata che ha in mano. Poi, le rotelle del trolley cominceranno lentamente a cigolare, indecise, verso una qualunque direzione, nella speranza che qualche particolare monumento o edificio notevole dia infine la chiave di lettura necessaria per percorrere i settecento metri che separano il sedile del treno dalla camera d'albergo.

Esiste una teoria sessista e scorretta che classifica crudelmente maschietti e femminucce, in queste circostanze: asserisce che "le donne non sanno leggere una mappa", ma anche che "gli uomini odiano chiedere indicazioni". E non è solo un modo di dire: c'è chi ha teorizzato seriamente sul fatto, portando a sostegno della tesi comportamenti istintivi e atavici; le femminucce, costrette dalla cura della prole a spazi ristretti, sono portate ad usare punti di riferimento associati alle funzioni dei luoghi, il tutto in un'ottica fortemente localizzata ("dietro il faggio c'è il posto per nascondersi, e non è neppure lontano dalla siepe che mi consente di arrivare all'acqua senza essere vista"[3]), mentre i maschietti, per supposte ragioni di strategie venatorie e militari, avrebbero da tempo imparato a visualizzare il paesaggio così come dovrebbero vederlo gli uccelli, su ampi spazi e con brutale traslazione del punto di vista: in altre parole, hanno inventato le mappe. Proprio a causa di questa loro superba invenzione, ammettere di essersi perduti ad un incrocio è da loro vissuto come un'eclatante ammissione di scarsa virilità, e quindi sono in genere disposti a percorrere quindici chilometri in tondo piuttosto che abbassarsi a chiedere uno straccio d'informazione. Chi scrive non è in grado di confermare la malignità relativa all'incompatibilità genetica tra mappe e femminucce: anzi, per quanto riguarda la sua propria limitata esperienza, l'assunto gli sembra essere ragionevolmente falso. In compenso, non gli è fatica riconoscersi pienamente nel maschietto terrorizzato all'idea di intervistare gli indigeni di passaggio al fine d'avere un'idea sulla direzione da prendere.

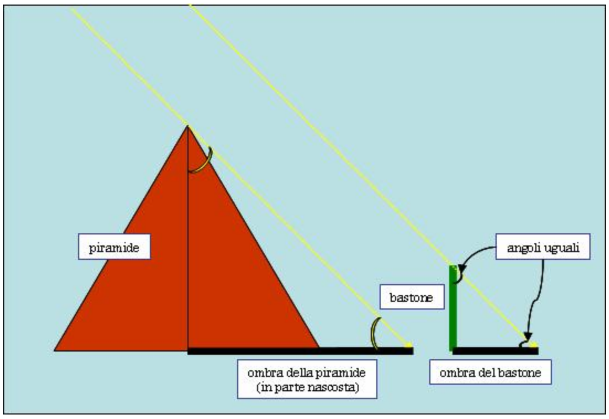
Grazie al cielo, la tecnologia moderna tiene bene in conto i problemi psicologici dei rappresentanti del sesso forte: le rombanti automobili del ventunesimo escono sempre più spesso dalle fabbriche dotate di quella meraviglia tecnologica che è il navigatore satellitare. GPS, Global Positioning Satellite: se la leggenda sessista è vera, è stato sicuramente pensato da uomini per uomini. Un paio di dozzine di satelliti sono stati messi in orbita all'uopo, e le antenne dei ricevitori nascosti nelle carrozzerie delle berline riescono a dedurre, con precisione impressionante, la posizione della vettura. Se a questo ingrediente fondamentale si aggiunge una ricca banca dati di tutte (o

[3] … che, nel caso della femmina viaggiatrice-turista occidentale del ventunesimo secolo, sembrerebbe poi trasformarsi nell'equivalente "allora, l'albergo è giusto di fronte ad Harrods, e quindi non riuscirò a perdermi neanche se giro nella viuzza dove ho visto quel negozio di Armani, subito dopo la vetrina di Cartier".

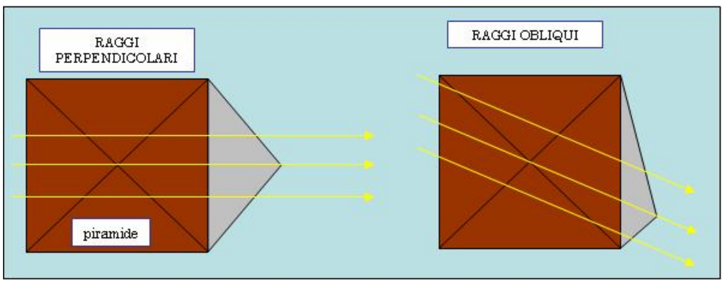
quasi) le strade del continente, si ha la soluzione perfetta; uno schermo lucente mostra al fortunato possessore dello strumento dove si trovi la vettura e quanto sia distante la sua destinazione: metro dopo metro, curva dopo curva, incrocio dopo incrocio.

Certo, al nostro povero viaggiatore appena sceso dal treno, la cosa non è ancora così utile: finché il GPS rimane attaccato al cruscotto d'una berlina da trentamila euro, risulta difficile infilarlo in valigia. Esistono anche dei GPS integrati a computer palmari, che svolgono l'identico compito dei confratelli su quattro ruote e che possono essere agevolmente portati nella tasca interna della giacca: il loro difetto è che non hanno ancora dei prezzi propriamente popolari. Un compromesso davvero buono sono i GPS privi di banca dati: non hanno in memoria tutte le strade d'Europa (anzi, non ne hanno neanche una), però riescono a leggere i satelliti nel cielo. In genere, i signori del marketing dei dispositivi elettronici li pubblicizzano raccomandandoli agli avventurieri ai quali piace fare passeggiate nei boschi o in montagna, e non si può dire che abbiano torto. Una volta che lo strumento ha sentito la posizione dell'esploratore della domenica, è possibile fargliela memorizzare; da quel momento in poi, il piccolo aggeggio è in grado di riportare diligentemente sul suo schermo l'intera traiettoria percorsa mentre si va in cerca di funghi, e mette in grado anche i bambini delle elementari di ritrovare la via. Hanno grosso modo l'aspetto di telefoni cellulari (a parte per il colore, che di solito è di un giallo vivace: questo perché se inciampate e vi cade a terra vi risulterà poi più facile ritrovarlo sotto un paio di amanite falloidi), e dei cellulari economici hanno più o meno anche il prezzo, che oscilla (grandemente) attorno ai 150 Euro. Limitarne l'uso all'aperta campagna è però decisamente riduttivo: anche se non hanno siti notevoli in memoria, sono pur sempre in grado di memorizzarne un bel po', e questo li rende preziosi anche sui marciapiedi delle stazioni ferroviarie. Basta aver avuto l'accortezza, prima di avventurarsi nella straniera metropoli, di procacciarsi le coordinate geografiche dell'alberghetto a tre stelle dove si prevede di passare la notte (e in rete si trovano facilmente mappe metropolitane arricchite di questi dati preziosi), averle memorizzate nel GPS prima di partire, e il gioco è fatto. Poi, quando si uscirà fuori dalla stazione di Heilbronn o di Uppsala, basterà accendere il giallo giocattolo, lasciargli il tempo di orientarsi, e infine chiedergli di indicare la direzione dell'agognato hotel. Una bella freccia apparirà sullo schermo, orientata con sicurezza verso la meta: sotto di essa la distanza da coprire, che piacevolmente decresce a vista d'occhio mentre si cammina spediti guidati dal dardo digitale. È davvero un'esperienza piacevole, specialmente se siete diretti in posti non troppo notevoli del panorama cittadino: se siete abituati ad alberghi extra-lusso da cinque stelle e passa, avrete la fortuna di poterli riconoscere da lontano, denunciati come sono da ciclopiche insegne luminose. Le pensioncine economiche sono però decisamente più sfuggenti, e c'è il rischio che il GPS urli metaforicamente il suo "Arrivato!" quando voi siete ancora poco disposti a credergli, visto che l'ospitale porticina è ottimamente nascosta dietro l'insegna d'un ingombrante McDonald. Peripezie dei viaggiatori a parte, lo strumento è davvero intrigante. Pochi secondi dopo aver premuto il pulsante d'accensione è in grado di visualizzare informazioni cruciali come "N 45° 04,061' – E 07° 40,935 – 239 slm"[4] oltre naturalmente all'ora ufficiale secondo il satellite. È difficile guardare quello schermo senza pensare che solo un secolo fa persone avrebbero dati anni di vita, pur di avere una simile bacchetta magica, e che due o trecento anni fa si sarebbero certo scatenate delle guerre, pur di avere uno strumento del genere a disposizione. Altro che andarci per funghi.

[4] Il primo che identifica (con precisione) il luogo indicato da queste coordinate geografiche vince sei mesi di abbonamento gratuito a RM. O, in alternativa, una casella di posta Gmail (ne abbiamo da vendere…)



Latitudine, Longitudine, Altezza, Tempo. Ognuno di questi elementi si porta appresso una quantità enorme di storia della matematica. Tanto per cominciare da quella che sembra la sfida più semplice, la misurazione dell'altezza d'un corpo[5], è bene ricordare che quando Talete riuscì a determinare l'altezza della piramide di Cheope usando la semplice ombra d'un bastone, suscitò l'ammirazione dei re, e non solo quella della gente normale. L'arcinoto aneddoto è istruttivo anche per mostrare come gli aneddoti stessi rischino quasi di essere controproducenti, a volte. Avendo nella semplicità e nella sintesi narrativa ed esplicativa la loro forza maggiore, talvolta sono costretti a sorvolare velocemente i dettagli, e così facendo lasciano a volte nel lettore l'ingannevole sensazione che il genio sia davvero composto da una singola e fortuita illuminazione. Anche senza parafrasare Edison[6] o Einstein[7], ogni tanto è bene dare uno sguardo appena più approfondito, proprio per non perdersi alcune parti divertenti ed istruttive delle storie. È infatti del tutto evidente che l'aspetto significativo dell'idea di Talete è davvero la considerazione dei triangoli congruenti formati dai raggi paralleli del Sole, dall'asse della Piramide, dal bastone che il Savio piantò nella sabbia e dalle loro rispettive ombre: ma anche le migliori pietanze hanno bisogno di un po' di contorno. Può essere allora importante ricordare, ad esempio, che l'ombra "visibile" della Piramide, per quanto spudoratamente più misurabile della misura verticale, ha comunque la difficoltà di essere solo "parte" della grandezza che si intende misurare. La parte nascosta, per fortuna, a dar retta alla figura bidimensionale che è stata malamente disegnata qui vicino, sembra facilmente deducibile come "metà del lato della base della piramide", cosa altrettanto facilmente misurabile a terra. Però già questo implica una doppia misura, un'operazione aggiuntiva a quella normalmente raccontata dai velocissimi aneddoti. In realtà, poi, anche con questa precisazione non si è mica del tutto al sicuro. Un emulo romano di Talete che intenda farsi bello con le turiste giapponesi misurando l'altezza della Piramide Cestia con l'ausilio di un metro a fettuccia e del sole di Roma, dovrebbe anche tener conto che addizionare "metà del lato della base" all'ombra misurabile sul terreno dà buone garanzie di riuscita solo nel caso che i raggi del sole siano ben perpendicolari al lato della piramide, perché altrimenti abbiamo qualche altro elemento da considerare.



Nulla che non si riesca a domare con l'aiuto di Euclide e di un buon goniometro, ma stiamo parlando di Talete, che è vissuto tre secoli prima di Euclide: chiedergli di usare la geometria

[5] Che è comunque cosa spudoratamente più facile che misurare la "altezza sul livello del mare" di casa vostra, comunque…

[6] *"Genius is one per cent inspiration, ninety-nine per cent perspiration."*

[7] *"Everything should be made as simple as possible, but not simpler."*

euclidea non è poi troppo diverso dall'aspettarsi che scali la piramide con il GPS in mano per leggere il risultato sul display. Euclide sa perfettamente usare la teoria delle proporzioni, e molti altri argomenti matematici: Talete, la teoria delle proporzioni la sta appena fondando. Allora le complicazioni si cominciano subito ad intravedere: anche se poi sarà lo stesso Talete a dimostrare che non è strettamente necessario attendere il momento in cui l'ombra del bastone è esattamente pari alla lunghezza del bastone stesso, è con questa condizione soddisfatta che si appresta alla sua misurazione, e questo non è vincolo da poco. I raggi del sole devono essere ben perpendicolari al lato in ombra della piramide, e questo richiede dei vincoli sull'orientamento della piramide, nella fattispecie che la piramide sia perfettamente orientata rispetto ai quattro punti cardinali. Se questo vincolo è soddisfatto, allora si avrà che a mezzogiorno in punto i raggi del sole saranno perfettamente perpendicolari al lato della piramide, come Talete desidera. Ma durante "quale" mezzogiorno si avrà soddisfatta anche l'altra condizione, quella dell'ombra del bastone di lunghezza pari al bastone stesso? Beh, visto che la piramide di Cheope sta a Giza e Giza si trova dove si trova (perfettamente a cavallo del trentesimo parallelo), Talete doveva avere la capacità di calcolare che questa magica condizione si verificava due volte all'anno, in quei giorni che noi adesso chiamiamo 21 Novembre e 20 Gennaio. Il nostro cacciatore di turiste all'ombra della Cestia dovrebbe premunirsi e rifare il conto per i circa 41° 52' 40" latitudine Nord.

Ora, quantomeno dal punto di vista didattico, si è costretti a scegliere se trasmettere lo stretto indispensabile (e quindi solo poche parole di ambientazione che rimandano poi al disegno e alla congruenza dei triangoli, evitando di disegnare gli angoli acuti uguali, per non indurre nello studente la falsa convinzione che ciò sia strettamente necessario), oppure partire con dettagli narrativi e larga disponibilità alle deviazioni e alle variazioni sul tema. In questo secondo caso si può certo affabulare (inventando l'inventabile) su questo rappresentante dei Sette Savi che si aggira intorno alla Piramide di Cheope, ne misura con cura la base, verificando nel contempo che sia davvero quadrata. Lo si può immaginare in profonda conversazione con qualche sacerdote egizio, e vederlo assai rallegrato dalla scoperta che tutte le Piramidi sono rigorosamente orientate secondo i quattro punti cardinali, perché il sorgere e il tramontare delle stelle è ingrediente fondamentale nelle credenze religiose della Terra dei Faraoni; oppure immaginarselo di notte, silenziosamente grato alla luce di Sirio per il ruolo importante che ha sempre avuto come orologio delle piene del Nilo. Infine, si può raccontare il giorno cruciale: vedere Talete poggiare sulla sabbia il celebre bastone, forse addirittura usandolo come compasso per disegnare un cerchio del raggio esatto pari al bastone stesso, poi conficcarlo con cura nel terreno (e avrà senz'altro preso le opportune cautele, nelle sue mistiche metriche preparatorie, per non considerare la parte interrata del bastone), e infine guardarlo mentre è chino sulla sabbia, pronto al momento cruciale. Poco distante, ci possiamo figurare qualche giovane assistente del saggio, armato di un qualche strumento "segnatore", che insegue accuratissimamente l'ombra della punta della piramide, in trepida attesa dell'urlo "Adesso!" che Talete gli griderà quando la punta dell'ombra del bastone raggiungerà la circonferenza segnata sulla sabbia, a mezzogiorno in punto. E il giovane assistente che pianta con forza un'asta nel terreno, poi le operazioni di misura, poi i calcoli, fino ad ottenere il premio tanto ambito. Un numero. Un numero accompagnato da una qualche unità di misura comprensibile per quei tempi e quei luoghi, che racconta a tutti l'altezza del mausoleo dell'arrogante e crudele Cheope[8].

[8] A quel tempo, le unità di misura praticamente non esistevano neppure, se dobbiamo dar retta alla leggenda che vuole Talete inventarne una per l'occasione. Il savio espresse l'altezza della piramide in rapporto al "talete", ovvero, immodestamente, in rapporto alla sua propria altezza. Se la leggenda fosse vera, il risultato (ottantacinque "taleti") ci informerebbe che Talete di Mileto era alto circa 1,73 metri; un vero marcantonio, per l'epoca e i luoghi.

Ognuno dei due metodi, sia la "stringata spiegazione dei concetti" sia la "sceneggiata scientifica in salsapariglia narrativa", ha i suoi pro e i suoi contro. Sono evidenti i lati negativi dell'eccesso di velocità esplicativa ("Cosa c'è da studiare per domani?" – "Quel disegnino col triangolo grosso e il triangolo piccolo" – "Ah. E a che servono, poi?" – "Boh, a misurare quanto sono alte certe tombe, se ho capito bene" – "Uh. E non si fa prima a chiedere al guardiano del cimitero?"), ma quelli romanticamente affascinanti dell'accurata affabulazione non sono da meno, in fondo. Una buona parte degli studenti, dopo aver sentito il prof di matematica che ha introdotto il concetto, quello di storia che lo ha calato nella realtà dei tempi, quello di filosofia che ha fatto una veloce digressione sui Presocratici e quello di lettere che ne ha approfittato per rispolverare le liriche di Alceo e Saffo, si ritroverà convinto che la congruenza tra triangoli sia stata la causa della fusione dei regni dell'Alto e Basso Egitto e che Talete fosse innamorato d'una poetessa che abitava in un'isola con un nome che è tutto un programma. Soprattutto, non ci sarà più un solo rappresentante del corpo insegnante in grado di coprire più di un quindicesimo del programma ministeriale previsto.

Un vantaggio del metodo narrativo, però (specie se si intende seguire il fil rouge dei dati riportati sul display d'un GPS) è che per discutere dell'altezza delle Piramidi misurate da Talete si è dovuto tirare in ballo sia il tempo, quantomeno nel senso di "ora locale", sia la latitudine. L'osservazione del sole nel suo cammino quotidiano nel cielo è presumibilmente vecchia quanto l'uomo, e il mezzogiorno, inteso nel senso originario di "momento in cui il sole è più alto nel cielo" è un istante talmente topico che soltanto ai tempi nostri rischia seriamente di essere declassato fino a farlo sembrare un momento come un altro: e questo per molte cause, quali l'utilissima invenzione dei fusi orari (che però, di necessità, separano il vero mezzogiorno locale da quello che segnano i cronografi[9]), o l'altrettanto intelligente artificio dell'ora legale (che però contribuisce a dare un ulteriore sapore puramente "di convenzione" al momento magico durante il quale le ombre sono ridotte al minimo). Soprattutto, la ragione sta nel fatto che associare il tempo al cammino del sole, piuttosto che a quello delle lancette, è ormai cosa che non fa più nessuno. Eppure il legame antico tra ora e luogo è stato celebrato per millenni.

Non c'è libro d'avventure marinaresche che non descriva il momento cruciale in cui il primo e il secondo ufficiale del vascello salgono in coperta per fare il punto nave. È a mezzogiorno che si danno appuntamento sul castello di poppa, ognuno con il suo sestante, che è strumento prezioso ed evocativo, quasi magico, quando lo si incontra per le prime volte nei libri per ragazzi. Seppure in forme naturalmente diverse, l'azione del capitano che traguarda il sole a mezzogiorno è quasi l'essenza stessa della navigazione, dai tempi di Ulisse fino ai giorni nostri. Eppure, i marinai solcano la superficie del mare, che proprio in quanto superficie abbisogna di due numeri, e non solo di uno, per identificare compiutamente la posizione: la maledizione storica dei marinai è stata per lungo tempo proprio la beffa di aver imparato prestissimo a determinarne uno, la latitudine, mentre la longitudine è restata per moltissimo tempo il problema a più difficile risoluzione di tutte le marine del mondo.

L'affascinante mistero della determinazione della longitudine non dovrebbe però offuscare troppo le storie connesse alla latitudine, così "facilmente" determinabile. Fu con accurate misure di latitudine (e con ancora più accurate triangolazioni) che la Rivoluzione Francese produsse la prima delle unità di misura internazionali: la nascita del metro, che lo spirito rivoluzionario voleva assolutamente indipendente da qualsiasi paragone con parti del corpo umano (anche perché i corpi umani in questione erano quasi inevitabilmente corpi regali, che mal si addicevano ai fautori della Repubblica) è storia così intrigante che è impossibile non leggerla come

[9] Tranne che su un'unica linea al centro del fuso [RdA].

romanzo[10]. La Convenzione rivoluzionaria incarica due astronomi, Jean-Baptiste Delambre e Pierre Mechain, di percorrere una grossa parte del meridiano di Parigi, determinarne l'intera lunghezza e sulla base di questa determinare la lunghezza della nuova unità di misura; e ci vorranno sette anni per giungere alla fine del compito. L'arco di meridiano misurato, che assume il nome proprio e femminile di "la Meridiana" è quello che va da Dunkerque a Barcellona, e i due scienziati figli della rivoluzione devono arrampicarsi su montagne e campanili, lottando con le guerre e con la rivoluzione stessa: Barcellona è territorio spagnolo, e durante i sette anni di misurazioni la Spagna diventa nemica della Francia; e al Nord le scaramucce di confine sono all'ordine del giorno. È tra cannonate, attacchi alla baionetta e cariche di cavalleria che i due scienziati devono trovare il modo di misurare il sole e i triangoli. Non va neppure meglio nel cuore del paese: i contadini rivoluzionari, quando vedono gli astronomi piazzare vessilli bianchi sulle cime delle torri e dei campanili, li prendono per bandiere dell' "Ancien Régime", e si propongono di fare la festa a quelli che credono realisti in nome della Rivoluzione. Ogni volta sarà più difficile convincerli che è proprio per la gloria della nuova Francia che entrambi si arrampicano su ogni punto elevato del paese, ma che per triangolare e traguardare in maniera opportuna, i segnali bianchi sono indispensabili, e niente affatto sostituibili col tricolore repubblicano. Pierre Mechain lascia la salute, parte della sua sanità mentale e quasi la vita nell'impresa, e i sette anni di misure non portano poi grossi miglioramenti rispetto a quello che fin dall'inizio era stato definito "metro provvisorio"[11]. Ma assai più del valore assoluto della misura, è la sua universalità ad essere di fondamentale importanza[12]: inoltre, la rivoluzione scientifica voluta dalla Francia rivoluzionaria non voleva essere soltanto metrica, ma metrica e decimale. E se il metro e il chilogrammo sono i suoi più evidenti successi, è indubbio che la riforma non sia stata affatto piena e completa.

La più evidente dimostrazione del fallimento della rivoluzione decimale sta nella semplice constatazione che, dei quattro valori riportati sul GPS di cui parlavamo all'inizio, ben tre rifuggono accanitamente dalle gioie del dieci. Le due coordinate si

[10] Tanto è vero che, solo negli ultimi tempi, sono almeno tre i libri usciti in edizione italiana che raccontano in dettaglio la storia: due sono a firma di Denis Guedj, già diventato famoso per il suo "Teorema del Pappagallo" (che, sia detto per inciso, racconta con dovizia di particolari anche la misura dell'altezza della Piramide di Cheope da parte di Talete): si intitolano "Il Meridiano" e "Il Metro del Mondo"(tutti editi da Longanesi). Sono entrambi di facile lettura, anche se hanno sostanzialmente molte parti in comune, quasi duplicate. Il terzo è di Ken Alder, e si intitola "La Misura di Tutte le Cose" (Rizzoli).

[11] Anzi, a voler essere precisi e "misurare" le cose col senno di poi, il "metro provvisorio" è un po' più vicino alla definizione attuale di metro di quanto lo fosse il "metro ufficiale" di Delambre e Mechain.

[12] Oltre che l'universalità, anche la banale familiarità è elemento cruciale, in questo campo. Con buona pace dei fisici e degli scienziati, appena si abbandonano le unità di misura fondamentali, si nota una clamorosa perdita di familiarità con tutte le unità di misura. Un sito australiano pubblica ogni mese un variegatissimo quiz, in cui si affiancano domande assai improbabili, dalla composizione dei gruppi rock islandesi alle prove di esame sostenute da Hitler come commediante. Il mese scorso, una domanda recitava semplicemente: "Quale forza viene esercitata approssimativamente sul picciolo d'una mela appesa al suo ramo?". Il vostro eroe (cioè il sottoscritto), forte di anni sprecati sui banchi della facoltà di Fisica, si è lanciato nella spiegazione che la forza richiesta era data banalmente dalla massa della mela moltiplicata per l'accelerazione di gravità, mostrando con evidenza la sua propria incapacità di dare la risposta esatta. Questo non perché la $F=mg$ sia diventata improvvisamente sbagliata, quanto perché tale risposta evita spudoratamente il cuore della domanda, che è tutto racchiuso nell'avverbio "approssimativamente". Rispondere con una formula ad un tale quesito è come rispondere alla domanda "quanto sei alto, più o meno?" dicendo "Oh, è ovvio: basta prendere un regolo opportunamente segnato e confrontarlo con la mia statura!". Il fatto è che con l'unità di misura della forza non si ha praticamente alcuna familiarità, ed è già tanto se ce se ne ricorda il nome. (Per i più curiosi: il sito in questione è quello degli Australian Skeptics, e il quiz – felice scoperta del nostro GC, peraltro già ampiamente pubblicizzato all'interno del sito di RM – si chiama Dr. Bob's Skeptical Quiz: www.skeptics.com.au/quiz/index.html. Per i curiosi più pigri: la risposta corretta alla domanda della mela è, banalmente, "circa 1 Newton").

ostinano ad esprimersi in base 360, con sottomultipli ancora organizzati in sessantesimi: anzi, a dire il vero, la longitudine preferisce oscillare da -180 a +180 (anche se traveste i due segni algebrici con le iniziali di Est ed Ovest), mentre la latitudine si limita a danzare tra più e meno 90 (con N e S a giocare il ruolo del più e del meno). La familiarissima misurazione del tempo persiste indomita nella sua divisione in base 24-60-60, e bisogna ricorrere alla fantascienza di Star Trek per sentir parlare d'una ipotetica "data astrale" che è evidentemente in base decimale. Se il display del GPS fosse un campione statistico significativo, è proprio l'altezza sul livello del mare l'eccentrico intruso, e viene voglia di rimediare tornando subito alle tese, alle braccia e alle spanne, pur di eliminare l'anomalia (non sorridete, in fondo si può davvero: basta chiedere al giallo GPS di passare alle unità di misura americane e avremo immantinente miglia, yarde e pollici in vista, con l'unità di intenti restaurata per tutte le quattro misure). Richard P. Feyman, uno dei fisici più anticonformisti del Novecento, diceva che una buona dimostrazione del fatto che i fisici sono meno furbi di quanto la gente pensi comunemente sta nel fatto che si ostinano ad usare una dozzina di diverse unità di misura per l'energia: beh, non sono solo i fisici a dover piangere, se in pieno terzo millennio ci si trova ancora a dover fare degli strani artifici di conversione (per quanto familiari e semplici) solo per fare una sottrazione tra due diversi momenti della giornata. Eppure, non è che non siano stati fatti tentativi per introdurre la base decimale in queste grandezze, anzi.

La battaglia per la determinazione della longitudine viene vinta abbastanza tardi: dopo secoli in cui gli agenti segreti delle marine militari accoppavano la gente a destra e manca per il possesso dei migliori "rutter" (quei dettagliati libri di bordo che in maniera descrittiva spiegavano cosa ci si doveva aspettare di incontrare dopo ventidue giorni e mezzo di navigazione in direzione sud-sud-ovest con buona brezza in poppa partendo da Sumatra), furono centinaia i concorsi ufficiali banditi al fine d'una determinazione accettabile della posizione lungo le direttrici Ovest-Est. Fin dai primi tentativi, era evidente che la soluzione era legata a doppio filo alla determinazione del tempo. Umberto Eco racconta in un suo romanzo della crudelissima pratica attuata in via sperimentale su alcuni vascelli: credendo che una ferita "avesse memoria", in qualche modo, dell'arma che l'aveva generata, qualche idiota convinse un buon numero di imbecilli che era sufficiente portare un animale appositamente ferito a bordo, e osservarne le sofferenze. Ci si metteva infatti d'accordo con qualcuno del porto di partenza, pregandolo di avvicinare ad un'ora ben prefissata la spada usata per ferire la bestiola ad una fiamma: forti della credenza che la ferita non rimarginata "sentisse ancora" l'arma, ci si aspettava che l'animale soffrisse di più nel momento in cui la lama veniva avvicinata al fuoco. Così, mentre a terra qualcuno attendeva la mezzanotte (o quello che era) per arrostire una spada, a bordo qualcun altro era tenuto ad osservare quando un cane mutilato sembrava lamentarsi di più, oltre che, ovviamente, a fare in modo che la ferita non rimarginasse col passare dei giorni. Il metodo è talmente idiota e crudele che è fastidioso perfino parlarne, però quantomeno mostra come fosse a tutti ben chiaro che per determinare la posizione longitudinale d'un vascello era sufficiente conoscere la differenza tra l'ora locale d'un posto noto (come il porto di partenza) e l'ora locale della nave. È quindi implicito che una coppia di orologi ben sincronizzati è in grado di risolvere l'annoso problema della longitudine senza alcun bisogno di tormentare nessun animale: e se questa "soluzione" ad uno dei più celebri problemi della storia della tecnologia vi sembra troppo semplicistica e banale, allora significa che di fatto state compiendo il solito errore di prospettiva storica. Vi state di nuovo chiedendo perché Talete non ha scalato la piramide col GPS a tracolla, insomma: per quanto vi possa sembrare assolutamente facile e naturale avere una coppia di orologi ben sincronizzati, la soluzione di questo apparentemente semplice problema non ha che un secolo di vita.

Solo poco più di un secolo fa, i treni attraversavano regioni in cui ogni città aveva il suo tempo locale, o quasi. Le ferrovie non avevano speranza di far giungere i treni puntuali, perchè il concetto stesso di puntualità era privo di reale definizione. Alcune compagnie ferroviarie finirono con l'inventarsi un "tempo proprio", e lasciavano ai viaggiatori l'arduo compito di capire come orizzontarsi tra il tempo della città di partenza, il tempo proprio del treno e il tempo della città di arrivo[13]. Alcune piccole città, per ovvia convenienza sociale, rinunciavano al loro "tempo locale" per adeguarsi a quello delle metropoli più vicine, ed erano disposte a pagare in moneta sonante qualsiasi tipo di dispositivo fosse in grado di comunicar loro l'ora esatta di quella metropoli. Ma anche le grandi città avevano difficoltà, in questo senso: anche se le più grandi avevano a disposizione un Osservatorio Astronomico che poteva con scientifica certezza stabilire "l'ora locale dell'Osservatorio", sincronizzare tutta la città a quell'ora astronomica era tutt'altro che facile. I primi, elaboratissimi, sistemi di sincronizzazione basati su tubi pneumatici che collegavano molti orologi pubblici fra loro nel tentativo di sincronizzarli, fallirono miseramente. Il problema rimase irresolubile per tutte le tecnologie meccaniche, e venne risolto alla fine solo con la trasmissione elettrica dei segnali: fu il telegrafo la soluzione al problema della sincronizzazione degli orologi. Intere linee telegrafiche erano dedicate esclusivamente alla trasmissione del segnale orario, e passo passo intere regioni poterono sincronizzare gli orologi su quello dell'Osservatorio Astronomico nazionale.

Il telegrafo regolò l'ora del mondo, e ne disegnò i contorni: il problema della determinazione della longitudine non era infatti sentito solo dai naviganti. C'era da disegnare la mappa del mondo, ancora, perché gran parte delle località avevano una posizione sul globo nota solo con vergognosa approssimazione: e allora si verificò la strana corsa delle linee telegrafiche verso gli angoli più remoti del mondo, non soltanto per unirli al resto dell'umanità, ma anche con lo scopo di determinare precisamente la loro posizione sul globo. Parigi o Londra telegrafavano il loro mezzogiorno, Lima o Timbouctou rispondevano con il loro, e palesavano così definitivamente la loro longitudine.

Tempo e spazio, indissolubilmente legati nella definizione della sferica geometria del globo terrestre. Spazio percorso da impulsi elettrici al fine di sancire la simultaneità degli eventi con la massima precisione possibile: è indubbio che, calati in questo contesto storico, gli "esperimenti ideali" di Albert Einstein, che coniugano indissolubilmente il concetto di simultaneità e la velocità della luce, appaiono decisamente meno "ideali" di quanto possa sembrare ad un ignaro lettore del ventunesimo secolo[14].

---

[13] Pragmatici come sempre, i piemontesi hanno risolto il problema sulla chiesa di S. Lorenzo; due orologi (uno è meccanico, l'altro è una meridiana). Quello meccanico segna l'ora TMEC (Tempo Medio Europa Centrale), l'altro quella del fuso orario di Torino, passante "per la meridiana di S. Lorenzo e l'obelisco di Piazza Statuto" (sorvoliamo sul fatto che il suddetto obelisco sia il vertice dei vari triangoli magici e sfatiamo la leggenda che da lì passi il quarantacinquesimo parallelo: questo, passa per Moncalieri) [RdA].

[14] Raccontammo a suo tempo la frustrazione provata subito dopo aver scritto il "compleanno" di Riemann: eravamo convinti d'aver fatto cosa originale nel celebrare il grande tedesco, e rimanemmo molto sorpresi nel vedere, pochissimi giorni dopo, le librerie d'Italia riempirsi del faccione di Bernhard, immortalato sulla copertina del best-seller di Du Satoy "L'enigma dei numeri primi". Dopo aver scritto il mese scorso il compleanno dedicato ad Albert Einstein eravamo però ben preparati: il centenario della Relatività era da tempo strombazzato dai media, e non avevamo alcuna speranza di essere i soli a celebrarlo. Andavamo però molto fieri di un paio di cose: l'aver ricordato il ruolo di Poincaré e di Lorentz nella nascita della Teoria della Relatività Speciale, e soprattutto di aver messo la foto della Torre dell'Orologio di Berna come apertura al pezzo: ci sembrava assai significativa, vicina com'era a casa Einstein, e considerando il ruolo del tempo nella Relatività. Ebbene, appena dato alle stampe l'articolo e tornati finalmente a guardare il mondo (ebbene sì, la stesura dei compleanni è spesso molto impegnativa e assorbente) ci siamo ritrovati faccia a faccia con la recensione di un libro di Peter Galison, edito dalla Raffaello Cortina Editore. Questo libro spudorato ci ha tolto già nel titolo la prima delle illusioni: si intitola infatti "Gli Orologi di Einstein, le Mappe di Poincaré". Ma non occorre andare oltre la copertina per vedere crollare anche la seconda: una

Mentre il mondo assume una forma più precisa e definita grazie agli impulsi che corrono nei cavi aerei e sottomarini, nuove regole si rendono necessarie. L'idea dei fusi orari prende lentamente corpo, basata su una convenzione attuata inizialmente da una compagnia ferroviaria statunitense: gli atlanti cominciano ad arricchirsi di dettagli sulle longitudini, ma, naturalmente, ognuno li segna secondo il proprio metro, secondo la propria origine: gli americani basandosi sulla posizione di Washington, gli inglesi riferendosi a all'osservatorio londinese di Greenwich, mentre i francesi, naturalmente, non possono certo rinunciare all'unico meridiano femminile, a quella Meridiana "madre del metro" che è la fonte stessa dell'idea di misura internazionale. La partita si giocò a Washington, sede della grande Conferenza che doveva stabilire, una volta per tutte, il meridiano fondamentale, la linea zero di tutte le longitudini. La Conferenza si aprì il Primo Ottobre 1884, e gli ideali della Rivoluzione Francese subirono un duro colpo.

Greenwich trionfò, sostenuto com'era sia dagli Inglesi che dagli Americani, per ragioni squisitamente economiche: il Regno Unito non era soltanto la massima potenza mondiale, a quei tempi, ma era anche la proprietaria di tre quarti delle navi che solcavano il globo terracqueo. Convenzione per convenzione, gli inglesi riuscirono ad ottenere che si evitasse la spesa di ristampare un numero così elevato di carte nautiche: quelle inglesi, appunto, che già usavano il meridiano di Greenwich come riferimento.

La Francia lottò accanitamente: un po' per sciovinismo, un po' perché sentiva come dovuto il rendere omaggio alla sua Meridiana, un po' perché era effettivamente importante, nella definizione di uno standard internazionale, scegliere un punto zero che avesse un valore simbolico, e non soltanto un valore di convenienza per la più potente delle Nazioni. Ma era battaglia perduta: e i pronipoti dei rivoluzionari francesi gettarono allora sul tavolo la loro controproposta: erano disposti ad acconsentire a modificare tutte le carte nautiche francesi, erano disposti a buttare nel cestino dei rifiuti tutto il valore storico e simbolico della Meridiana di Delambre e Mechain, se la Convenzione avesse introdotto, o almeno propugnato, quantomeno caldeggiato, l'introduzione del sistema decimale nelle grandezze che ancora ne rifuggivano.

Il tempo, ad esempio: che senso aveva quella complessa suddivisione in ventiquattro ore composte da sessanta minuti? Ma se anche si fosse deciso che non era proprio possibile rinunciare ad una assurdità, cosa dire delle misure angolari, con la loro processione di gradi, minuti, secondi? Oppure, come ultima e misera consolazione, in tempi come quelli, in cui era così evidente la relazione tra tempo e longitudine, che perlomeno condividessero lo stesso grado di assurdità, e non due tra loro distinti: se il giorno era diviso in ventiquattresimi, perlomeno che lo fosse anche la Terra stessa, di modo che, quantomeno, ora locale e longitudine avessero un senso evidente di identità. Ma la Convenzione di Washington non si pronuncia, in merito: partorisce solo un vago senso di auspicio affinché il sistema decimale venga applicato, ma niente di più di questo. La Meridiana è svenduta per niente.

gran bella foto a colori della Torre dell'Orologio di Berna vi campeggia sovrana. Come sempre quando siamo accecati dalla furia, abbiamo agito in maniera inconsulta acquistando il libro, sorvolando perfino sul fatto erano necessari ben 29 Euro per sancire il passaggio di proprietà dal libraio a noi. Beh, la depressione ci ha poi posseduto del tutto, vedendo quanto fosse interessante e divertente il contenuto. Buona parte delle notizie e delle storie sulla longitudine, sulla sincronizzazione degli orologi e su altro ancora che trovate accennati in questo compleanno vengono da lì.

La Francia, nel 1884, è una potenza memore di sconfitte. Brucia ancora la batosta prussiana del 1870, e il suo peso nel mondo è ben diverso di quello che aveva solo sessant'anni prima, quando tutta l'Europa doveva coalizzarsi per sperare di fermare le armate napoleoniche. La Gran Bretagna domina il mondo, e l'Europa è culturalmente governata dalla nascente Germania. È in uno strano clima di sconfitta e di voglia di rivincita che cresce uno dei più grandi matematici del tempo.

Henri Poincaré nasce a Nancy il 29 Aprile 1854, in questi tempi difficili per la sua patria; in una terra, la Lorena, che per secoli è stata contesa e continuamente strappata dalla Francia alla Germania, e viceversa. In una zona ricca di miniere e di lavoratori sporchi di carbone, di macchine e di esplosioni di grisou, ma in una famiglia borghese e famosa, che ha già dato e darà figli celebri alla patria[15]. Si mostra fin dall'infanzia dotato di mente brillante, e frequenta con clamoroso successo il Lycée di Nancy che oggi porta il suo nome. In seguito si iscrive alla celeberrima Ecole Polytechnique, di cui diventerà il figlio più famoso. Come spesso accade con le personalità complesse, non è facile racchiuderlo in una definizione o un'immagine che lo contenga per intero: Eric Temple Bell, nel capitolo di "Men of Mathematics" a lui dedicato, lo introduce raccontando il riverente e quasi religioso timore provato da Sylvester[16] quando questi andò a fargli visita nella sua casa di Parigi: in parte per il rispettoso silenzio attuato dal matematico inglese, in parte perché la casa è descritta come una "torre", la sensazione che si ha leggendo quelle pagine è decisamente quella di essere introdotti al cospetto del classico genio rinchiuso nella sua torre d'avorio. E forse Poincaré era anche questo, ma certo non soltanto questo: dopo il Politecnico, Henri frequenta l'Ecole des Mines, e diventa a tutti gli effetti un bravo ingegnere minerario. È indubbio che la sua testa fosse già fortemente attratta dall'algebra, dalla topologia, dalla teoria degli insiemi, dalla meccanica; ma ciò non impedisce al presunto abitatore di eburnee torri di calarsi in miniera per determinare le cause d'una esplosione, ricercare i dettagli e gli indizi che ne possano spiegare l'origine, fino a diagnosticare nella rottura d'un ben preciso vetro d'una lampada da minatore la causa scatenante il disastro. E per tutta la vita, Poincaré sembra perfettamente in grado di alternare gli studi eminentemente teorici alle indagini pratiche e calate nella realtà. La sua carriera matematica è subito brillante, fino ad essere rapidamente riconosciuto come il matematico più dotato di Francia. I suoi contributi sono troppi per essere compiutamente ricordati in queste righe: affrontò la meccanica celeste con il celebre Problema dei Tre Corpi[17], contribuì alla fondazione della Topologia[18],

[15] Suo padre Leòn e suo cugino Lucièn sono cattedratici famosi nel mondo accademico francese. Suo cugino Raymond è però senz'altro il nome più famoso tra i suoi congiunti: è stato più volte Primo Ministro, e poi Presidente della Repubblica Francese durante la Prima Guerra Mondiale.

[16] James Joseph Sylvester, matematico inglese. Tra l'altro, era di ben quarant'anni più vecchio di Poincaré, il che rende l'ammirazione quasi mistica descritta da Bell ancora più stupefacente.

[17] È curioso notare come la Meccanica Celeste Newtoniana, seppur basata su principi semplici e comprensibili anche a non iniziati, assuma rapidamente complessità impreviste. Ha ben poco senso

modificò sostanzialmente l'approccio alla meccanica dei fluidi e influenzò fortemente la filosofia della scienza. È da molti riconosciuto come l'ultima mente "universale", almeno per quanto riguarda la Matematica, e sì che i suoi contributi alla Fisica e alla Filosofia non sono da meno. I suoi libri si leggevano come romanzi, e il suo famosissimo "La scienza e l'Ipotesi" fu a tutti gli effetti un best-seller: non può certo sorprendere che, in qualità di maggior matematico francese del suo tempo, Poincaré sia stato eletto alla Académie des Sciences (e infatti, non fu certo solo l'accademia scientifica parigina a tributargli questo onore, ma anche molte altre), ma è senz'altro notevole che nel 1908 sia stato innalzato anche agli onori della "Académie Française", quella che raccoglie i più grandi scrittori di Francia.

È quest'uomo che la Francia mette in campo per la sua ultima difesa del sistema decimale. La patria della Rivoluzione pone Jules Henri Poincaré a capo del *Bureau des Longitudes*[19], e nel 1897 gli chiede di verificare la possibilità di normalizzare la misura del tempo, degli angoli, delle coordinate geografiche: lo incarica di rinverdire i fasti del metro, di porre la semplicità del dieci dentro ogni misura. Poincaré fallisce la sfida; è probabile che, se ha fallito lui, non ci fosse davvero alcuna possibilità di vincere contro l'inerzia delle misure consolidate, standardizzate, per quanto irrazionalmente, nell'uso ormai universale. Perché Henri Poincaré sa vincere le sue battaglie, e i molti onori raccolti stanno a dimostrarlo: ma è pur sempre uomo fatto di carne e sangue, e a differenza di altri sa anche essere sconfitto. Le sue sconfitte non scalfiscono affatto la brillantezza della sua carriera, ma rimbalzano comunque pesantemente sulla sua corazza di libero pensatore. Anticipa la Teoria della Relatività, ma non sa liberarsi del fardello dell'etere, cui resta pervicacemente attaccato. Studia e doma l'ostico problema dei Tre Corpi, ma gli sfugge un minuscolo "frammento"; quando Mittag-Leffler, Gordan, Hermite, Weierstrass sono ormai pronti a celebrarne il trionfo, un giovane matematico svedese dal cognome assai significativo, Phragmèn, trova un errore nella dimostrazione; sembra dapprima una faglia da poco, che può essere facilmente rimossa o aggirata, ma è lo stesso Poincaré a dimostrare poi che in realtà è debolezza profonda, è quanto riesce a fare la differenza tra traiettoria "prevedibile" e traiettoria "non prevedibile". Combatte a lungo per avere una matematica calata nel reale, perché sia sempre presente e tangibile e inserita nel mondo fisico, e il Novecento inizia sotto il segno di Hilbert, che la conduce

parlare di interazione gravitazionale se non si introducono almeno due corpi, eppure già l'ingresso in scena del "terzo corpo" complica clamorosamente la situazione, al punto da sfuggire ad una completa determinazione. Il "problema dei Tre Corpi" fu, al tempo stesso, uno dei maggiori trionfi ed una delle maggiori sconfitte di Poincaré.

[18] Ipotesi di Riemann a parte, la "congettura di Poincaré" è probabilmente, nell'immaginario collettivo dei matematici, la più grande delle prede da catturare e domare. Nella primavera del 2002 sembrava proprio che Martin Dunwoody dell'Università di Southampton fosse riuscito a dimostrarla, ma nonostante il clamore sollevato (che raggiunse perfino i quotidiani italiani), si trattava ancora d'un falso allarme. Assai più serio sembra invece il tentativo fatto nel 2003 dal russo Grigori Perelman dell'Istituto Stelkov di san Pietroburgo, che sembra invece resistere ancora ai tentativi di confutazione. La dimostrazione della congettura di Poincaré è anche uno dei sette "Millennium Prizes" della Clay University, uno di quegli indovinelli matematici, insomma, che hanno come incentivo alla soluzione un volgare milione di dollari. Se volete cimentarvi nel tentativo risolutivo, se si da retta agli articoli divulgativi, dovete armarvi di elastici, mele e ciambelle. Il gioco sembra essere tutto basato sul fatto che un elastico attorno ad una mela può essere sempre ricondotto topologicamente ad un punto, mentre un elastico posto attorno ad una ciambella non gode di questa fortuna topologica. Insomma, bisognerebbe dimostrare che la sfera (cioè l'arancia) sia l'unica varietà tridimensionale in cui il gruppo fondamentale della varietà sia banale. Oddio, a dire il vero Henri voleva congetturare non solo per un numero n=3 di dimensioni, ma la buona notizia è che per n superiore a 3 la cosa è stata già dimostrata da qualcun altro. Se vi serve il milione di dollari e non disdegnate la fama imperitura, è sufficiente che risolviate il problema nel caro, vecchio, tranquillo spazio 3D.

[19] Ufficio delle Longitudini. Con un nome o con un altro, tutte le grandi potenze ne avevano uno, a dimostrazione di quanto fosse ancora sentito il problema tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento.

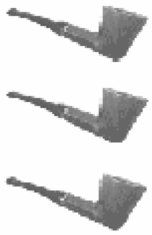
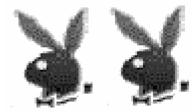
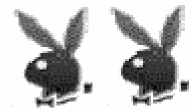
invece verso una visione sempre più teorica e indipendente, lungo un cammino che sarà poi percorso ancora più audacemente da Gödel e da altri come lui.

Dall'ultima battaglia, Henri Poincaré ritorna senza vittorie: il giorno non sarà diviso in decimi, centesimi e millesimi; i gradi di longitudine e di latitudine resteranno legati a componenti frammentati in sessantesimi, e l'Equatore terrestre non sarà suddiviso in ventiquattresimi, per rendere omogenea, almeno, la suddivisione tra il giorno in ventiquattro ore la longitudine in altrettanti settori. L'unico risultato che riesce a portare indietro, è talmente futile e irrisorio che ai giorni nostri solleva più domande che risposte: quando gli studenti armeggiano con le calcolatrici scientifiche, o esplorano alcune recondite funzioni matematiche inserite nei fogli elettronici, sollevano un sopracciglio stupito quando trovano, oltre ai familiari gradi e ai radianti, anche gli insoliti "gradi centesimali" nelle misure dell'angolo. Quella strana unità di misura che vede l'angolo retto pari a 100 unità e l'angolo giro suddiviso in 400 settori, è il gol della bandiera segnato da Poincaré, quando giocava nel ruolo dell'alfiere delle riforme nate dalla Rivoluzione Francese. I gradi centesimali non hanno avuto fortuna: ma è probabile che, da matematico, Henri riconoscesse il vantaggio implicito dell'utilizzo dei radianti. Era in grado di far fronte alle sconfitte perché ben abituato alle vittorie, e perché riusciva ad avere una visione globale della matematica e della scienza dei suoi tempi.

Sarebbe davvero bello, al giorno d'oggi, poterlo incontrare e mostrargli il piccolo GPS giallo: da Presidente del Bureau des Longitudes, rimarrebbe estasiato nel vedere comparire la longitudine precisa al decimo di secondo d'arco in pochi minuti. Come compatriota e collega di Delambre e Mechain, si commuoverebbe nel constatare la precisione del dato di latitudine; come lontano erede e figlio spirituale di Talete, resterebbe impressionato da semplicità con cui il dato della quota compare senza sforzo sul piccolo display. Impazzirebbe dalla curiosità nel tentativo di capire come possa un segnale orario preciso giungere dal cielo, e si riempirebbe certo il petto d'orgoglio, una volta venuto a sapere che quel segnale arriva da decine di macchine mostruose in orbita geostazionaria, regolate nel moto da equazioni come quelle che lui stesso aveva impostato nei suoi calcoli di meccanica celeste.

È certo che Jules Henri Poincaré andrebbe davvero in visibilio, di fronte a quel giocattolo che la sua adorata tecnologia è riuscita a produrre meno di un secolo dopo la sua dipartita; forse gli farebbero girare un po' le scatole quei vetusti simboli di gradi, minuti, ore, secondi, ma è certo che non lo irriterebbero abbastanza da fargli perdere il buonumore, di fronte a tanta meraviglia.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Mens Sana in Corpore Sano			
Le biglie di Fred			

2.1 Mens Sana in Corpore Sano

...ossia, come traduceva Paperino, "una mensa sana incorpora i sani". Beh, mica tanto; è una palestra di Arti Marziali, alla quale mi sono iscritto insieme ad Alberto e Fred.

La cosa carina di questa palestra è che quello che viene spregiativamente chiamato "il legname[20]" è contenuto in alcuni armadietti numerati, quindi non si rischia l'arresto ogni volta che ci si muove per strada [*Questo problema è più sentito di quanto si pensi, dai praticanti di Arti Marziali armate (RdA)*]; gli armadietti sono disposti su tre file, e ognuno di noi ha un armadietto in una fila diversa; gli armadietti sono tutti quanti numerati, nel senso che la prima fila contiene gli armadietti da 1 a n, la seconda quelli da n+1 a $2n$ e la terza da $2n$+1 a $3n$. Siccome la palestra è molto grande, $400 \leq n \leq 450$, e siccome siamo smemorati usiamo tutti e tre la stessa combinazione di lucchetto per chiuderli.

Il guaio è che la *Sensei* si è un filino montata la testa, e con la scusa di mostrarci la dinamica taoista dell'universo (ma forse anche perché siamo in Aprile), ha scambiato i numeri degli armadietti senza spostare il contenuto!

Il numero **1** è rimasto **1** (certo, è il suo...), mentre il **2** è adesso il primo della seconda fila, il **3** è il primo della terza fila, il **4** il secondo della prima fila... e avanti così.

Beh, se non son matti non li vogliamo. Ciascuno di noi, in assenza di idee migliori, ha cercato il proprio numero di armadietto e, incrociando le dita, ha composto la combinazione.

Funziona! Insomma, quasi. Gli armadietti sono i nostri, ma nessuno ha dentro la sua roba: Alberto ha il mio arsenale, Fred si ritrova il materiale di Alberto e io mi chiedo cosa farne dello "stuzzicadenti" di Fred.

Ora, non dovreste avere problemi a dirci i *numeri degli armadietti*.

[20] Boken, tonfa, bo, nunchaku, sansetsukon, shinai, wakizashi... Questa nota è qui solo per far impazzire i motori di ricerca [RdA]

2.2 Le biglie di Fred

Beh, dopo i risultati con le caramelle della Befana, stiamo cercando di convincere Fred ad effettuare analisi di giochi che implichino le probabilità (e qui Alice non ci aiuta proprio, dobbiamo dire), quindi ci siamo riforniti di un congruo numero di biglie (**111** nere e **37** bianche) e (in assenza della classica "urna") di un capace sacchetto. Fred ha sempre preferito le prove sul campo, alle elucubrazioni teoriche

Approfittando del fatto che a Marzo Alice non è stata reperibile per una settimana, forse siamo riusciti a gettare delle solide basi di interesse per tutto ciò nel nostro eroe, il quale adesso come suo solito sta esagerando; l'altro giorno, ad esempio, se ne è uscito con una domandina:

> "Ho messo tutte le biglie nel sacchetto, e poi ho cominciato ad estrarre: la prima la scarto, poi continuo ad estrarre e scarto sin quando non trovo una biglia di colore *diverso* dalla precedente; questa non la scarto, ma la rimetto nel sacchetto. Ti faccio un esempio:"
>
> "Estraggo una ***nera*** e la scarto."
>
> "Estraggo una ***nera*** e la scarto."
>
> "Estraggo una ***bianca*** e la rimetto nel sacchetto."
>
> "Estraggo una ***nera*** e la rimetto nel sacchetto."
>
> "Estraggo una ***bianca*** e la rimetto nel sacchetto."
>
> "Estraggo una ***bianca*** e la scarto."
>
> "Estraggo una ***bianca*** e la scarto."
>
> "Estraggo una ***bianca*** e la scarto."
>
> "Estraggo una ***nera*** e la rimetto nel sacchetto."
>
> "Allora, prima o poi arrivo ad avere una sola biglia nel sacchetto; *è più probabile sia bianca o nera?*"

Uuhhh... Voi cosa ne dite?

3. Bungee Jumpers

In un quadrilatero ***ABDC*** si ha che $\angle CDB = \angle CBD = 50^\circ$ e che $\angle CAB = \angle ABD = \angle BCD$. Dimostrare che è $AD \perp BC$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

È arrivata la primavera!!! Ragazzi, la Redazione tutta (ma soprattutto il GC e Alice) comincia il suo periodo di bassa pressione, e vi invita ad essere pazienti. No, continuiamo a scrivervi, ma saremo più svogliati del solito.

Il mese scorso vi abbiamo promesso indebitamente un'addizione al Bookshelf, che è finalmente arrivata solo poche ore prima del numero di aprile... beh, perdonateci. Vi basti sapere che abbiamo cercato di perfezionare questi pezzi un po' meglio di quanto facciamo con i numeri di RM e hanno subito diversi passaggi correttivi. Intanto ***Sam*** e ***Caronte***, quest'ultimo nel frattempo nominato "correttore massimo", hanno quasi smesso di parlarci, soprattutto dopo aver tanto discusso al nostro CdR di terminologia matematica e della differenza tra i matematici e i fisici. Alice era tutta contenta che non avessero nominato gli ingegneri, da come si bastonavano... ***Gabriel***, nuovissimo iscritto ma estrememante prolifico, in compenso ci ha dato dentro ad insultare gli ingegneri, ma di lui parleremo dopo. ***Delfo***, invece, ci propone ricerche ingegneristiche sui limiti umani nello scavare fosse profonde, custruire grattacieli altissimi e coprire superfici grandissime con cupole da fantascienza. Stiamo ancora investigando.

Che cosa è successo a marzo? Un po' di tutto. Tra le notizie più importanti per il nostro ego, il raggiungimento dei seicento iscritti, e la comparsa, malgrado il ritorno in patria del nostro lettore in Kazahkstan, di un altro lettore a Shanghai, in Cina. Ancora per poco (anche ***Matteo*** sarà presto di ritorno), RM è letto in tutti i continenti tranne l'Africa. Per quanto riguarda l'Italia, Piemonte e Lombardia sono le regioni più popolate di RMer, e le ultime cinque regioni della classifica (dalla quintultima all'ultima) sono Basilicata-Campania-Liguria-Calabria-Sicilia. Ragazzi, fateci pubblicità quest'estate in vacanza, se andate da quelle parti.

Poi il Capo si è preso un paio di influenze, Alice se n'è andata a Santo Domingo per una decina di giorni, e il povero Doc ha cercato di portare avanti la baracca. Tra le varie attività che l'hanno impegnato: una disputa con la rivista scientifica principe in lingua italiana, LS, che continua a pubblicare articoli su argomenti già trattati magistralmente in RM; la ricerca del "numero autoreferente"; la pubblicazione della serie dei compleanni su un sito non dedicato alla matematica (www.rhymersclub.it); la recensione sul sito italiano di matematica www.matematicamente.it; domande di carattere etimologico e filosofico, e tutte le altre mail che arrivano ogni giorno.

A proposito del "numero autoreferente", pubblichiamo qui il quesito proposto da ***Fabrizio***, come problemino extra:

> Dunque, si supponga di avere un insieme di numeri interi positivi $\{x_n\}$ definiti ciascuno come sequenza delle proprie cifre decimali nel modo seguente:
>
> $$x_n = \underbrace{X_0 X_1 \ldots X_{n-2} X_{n-1}}_{n=1..10}$$
>
> e supponiamo che siano assegnate le seguenti regole sulle cifre del generico x_n:
>
> - "X_0" = numero degli "0" presenti nel numero x_n
> - "X_1" = numero degli "1" presenti nel numero x_n
> - "X_2" = numero dei "2" presenti nel numero x_n
> - …
> - "X_{n-2}" = numero degli "n-2" presenti nel numero x_n
> - "X_{n-1}" = numero degli "n-1" presenti nel numero x_n
>
> Il problema chiede di determinare i valori di x_n al variare di n, e, se possibile, di estendere la soluzione a qualsiasi valore di n, laddove – naturalmente – i vincoli sopra elencati sarebbero applicati solo alle prime 10 cifre di x_n.

Lui l'ha brillantemente risolto *malgrado* l'aiuto del Doc, non vi diamo i suoi risultati perché così potete provarci, se ne avete voglia.

Il Capo, ripresosi all'influenza, ha constatato che molte delle proteste sollevate dal suo ultimo PM sono più che legittime, e forse ci manderà un'estensione allo stesso[21].

Tra quelli che leggono le farneticazioni contenute in questa parte della rivista, qualcuno ha pensato che fossimo stati pubblicati su carta... ragazzi, per il momento è solo un bel sogno. In Redazione siamo totalmente squattrinati, e a meno di trovare un editore

[21] Presto detto: tutto felice e tronfio di aver trovato un errore sul Ghersi, non ho considerato il fatto che avrebbero potuto essercene altri; come disse Dirac a Gamow quando quest'ultimo ottenne una formula con un segno invertito, "...un numero dispari di errori". Ragionevoli speranze per il mese prossimo di pubblicazione della mail dei due lettori che hanno mandato la trattazione corretta" (RdA).

compiacente, non abbiamo speranze. In più ci tocca continuare a sbarcare il lunario in altro modo, per cui se mai dovessimo trovarci a correggere bozze e riscrivere pezzi di rivista, non ce la faremmo nelle classiche ventiquattr'ore concesse. Ma noi continuiamo a sognare.

Ma veniamo alle soluzioni di questo mese, che hanno un che di incredibile, sotto diversi punti di vista.

4.1 [001]

4.1.1 Problema da cani

No, non ci credevamo nemmeno noi. Per questo ringraziamo ***Gabriel***, che ha aperto il primo numero di RM e ci ha ricordato le nostre origini. Un giorno di gennaio del lontano 1999, Alice e il GC (che allora non avevano questi nomi) alla macchinetta del caffè disquisivano di matematica, e Rudy propose questo problema. Alice confezionò una soluzione e un programmino per la visualizzazione, e dopo una settimana il primo numero di RM veniva inviato tra una stanza e l'altra dello stesso edificio, alla sua prima lettrice. Scusate questo momento di commozione, eccovi il testo, perché sicuramente non lo potete ricordare: *"Avete "n" cani, ai vertici di un "n"-agono regolare, che guardano verso il centro; al vostro "via", ciascuno dei cani cominicia a correre, con velocità costante, verso il proprio simile di sinistra. Che figura percorrono le care bestiole? Sarebbe molto apprezzata una dimostrazione formale, ma anche uno screen saver basato su questo va bene, grazie..."*

Gabriel ha scritto molto, e vi passiamo il solito taglia-e-cuci creato dalla impossibile forbice redazionale. Se siete veramente interessati, nei numeri 002 e 003 ci sono ancora contributi sulla soluzione di allora di ***Fran*** e ***Luca***, che fu uno dei solutori massimi, malgrado il trattamento sprezzante del GC, per tutto il tempo in cui i nostri lettori erano meno di venti e i solutori due o tre... ma lasciamo la parola a ***Gabriel***.

> (...) Ho ritrovato un vecchio problema universitario, proposto illo tempore dal professore di fisica al fine di esaltare la capacità di analisi e l'elasticità mentale propria dei fisici, contrapposta alla rigidità teorica dei matematici ed al mero empirismo degli ingegneri (oooops..... Alice perdonami). Il problema dei cani che si rincorrono veniva enunciato con le mosche, per l'esattezza in numero di 4, poste ai vertici di un quadrato di un metro di lato.
>
> Le quattro mosche sono, ovviamente, chiamate A, B, C e D. All'unisono si mettono in movimento alla velocità di 1 metro al secondo: A verso B, B verso C, C verso D e D verso A. Sorvoliamo sul fatto che, per fare ciò, la loro accelerazione alla partenza dovrebbe essere infinita[22]. La domanda era: dopo quanto tempo si incontrano e dove? Ci siamo scervellati, noi poveri studenti, per 2 giorni, poi il professore ci ha illuminati. Qualcuno aveva approssimato un grafico procedendo per step, qualcuno altro aveva determinato che descrivevavno una spirale logaritmica (forse, la mia memoria vacilla) ma nessuno l'aveva in effetti risolto. Soluzione offerta dal prof: per prima cosa, cambiamo sistema di riferimento: muoviamoci insieme ad una mosca. Il nostro nuovo sistema di riferimento sarà solidale con la semidiagonale fra una mosca ed il centro del quadrato, in rotazione attorno al centro del quadrato stesso. A questo punto, la mosca si muoverà con una traettoria a 45 gradi rispetto alla semidiagonale, pertanto la componente vettoriale della sua velocità sulla semidiagonale sarà il reciproco della radice quadrata di due; lo spazio da percorrere è la semidiagonale stessa, cioè la metà della radice quadrata di due... tempo = velocità / spazio... 1 secondo! Le mosche si incontreranno al centro del quadrato

[22] Uno degli studenti osservò al volo che la mosche non sarebbero mai arrivate da nessuna parte; sarebbero state distrutte istantaneamente alla partenza dall'accelerazione infinita a cui venivano sottoposte, suscitando grande ilarità nella platea ed un'osservazione (un po' acida) da parte del prof: "Tu dovresti fare l'ingegnere".

> dopo un secondo! Attoniti, siamo rimasti in silenzio per un paio di minuti buoni, fino a che, digerita la soluzione da parte di un numero consistente di studenti, qualcuno di loro, più ardimentoso, non ha mosso la seguente obiezione: "Ma... professore... così non abbiamo trovato la funzione che descrive il movimento delle mosche!" Risposta del prof: "E con ciò? Non vi era stata chiesta la funzione. Il problema chiedeva solo due cose: il dove ed il quando". Seguirono altri due minuti abbondantissimi di mestissimo silenzio. Il silenzio venne rotto dal prof stesso, che partì con una serie di considerazioni sui matematici, troppo pignoli e legati alla teoria, gente che cerca sempre la formula esatta, nonchè sugli ingegneri, rei di usare solo metodi empirici, pertanto capaci soltanto di disegnare grafici. (...)

E va bene, vi facciamo leggere anche il resto...

> Andiamo con ordine. Preferisco affrontare il problema, almeno in prima battuta, con le mosche, per il semplice motivo che sono più facilmente assimilabili a punti adimensionali, in grado quindi di essere trattati più finemente dal punto di vista matematico. L'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo sono senz'altro comodi in analisi, ma nella pratica si presentano ben di rado.
>
> Nel caso delle 4 mosche il problema si risolveva facilmente, rigorosamente nei termini in cui era posto, con il trucco del prof. Variando il numero delle mosche a piacere, applicando lo stesso metodo, si può arrivare a soluzioni esatte, pur di esprimere in modo rigoroso il valore della scomposizione vettoriale della velocità di una mosca lungo una semidiagonale. (...)
>
> Punti impossibili: la mosca parte con accelerazione infinita (già detto); un attimo prima dello scontro la sua ombra si muove a velocità infinita ma, d'altronde, lo fa per un tempo nullo, in quanto la sua distanza dal centro tende a zero; quanto fa infinito moltiplicato zero? Certo è che, se resiste all'accelerazione iniziale, difficilmente sopravviverebbe all'impatto finale. Per fare dei test approfonditi bisognerebbe procurarsi un gran numero di mosche.
>
> Lasciamo perdere le mosche e pensiamo ai cani. I cani (che io adoro) hanno dimensioni finite ma, in linea di principio, la loro partenza sarebbe teoricamente uguale a quella delle mosche. Il problema è al traguardo! Se non altro non arriverebbero mai all'impatto finale: avendo dimensioni finite, arriverebbero a toccarsi muso-coda reciprocamente in un allegro girotondo. Partendo dal presupposto che siano della stesa razza e dimensione, si disporrebbero su un quadrato rotante, la cui velocità di rotazione sarebbe inversamente proporzionale alla loro stazza. Gli alani ciondolerebbero pigramente, i barboncini si rincorrerebbero furiosamente. Qualsiasi veterinario sarebbe d'accordo con quest'ultima affermazione.
>
> Segue una breve disamina delle eventuali variabili che possono essere aggiunte al problema. Per esempio, cani di razze diverse darebbero luogo a formazioni a losanga piuttosto instabili; esiste oltretutto un ulteriore fattore fondamentale che abbiamo ignorato, e cioè che i cani scodinzolano! Ve li immaginate mentre oscillano inseguendo la punta della coda dell'altro cane? Che facciamo, usiamo cani senza coda? Boxer o shar-pei?

No, non era molto matematico, ma decisamente divertente.

4.2 [072]

4.2.1 È da quattro anni che va avanti...

Il nostro ***Zar***, l'abbiamo detto che ultimamente è il preferito del GC *[Tant'è che gli ho anche promesso di imparare a scrivere le equazioni in OpenOffice... Mal me ne incolse, questa è una delle cause del ritardo di un mucchio di roba (e non ci ho capito niente)*

(RdA)], ha insistito molto per veder pubblicata la soluzione del problema delle tasse, per cui vi forniamo la versione del Capo:

Risposta:

- Nel primo anno il governo raccoglie un netto di $\frac{qrst}{24}$.
- Negli anni seguenti non raccoglie alcuna tassa.
- In generale, se dopo n anni i soli valori diversi da zero sono alle $n+1$ posizioni 0, b_0, b_1, b_2,...b_n allora il governo incassa un netto di $\frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{n!}$.

Soluzione:

Consideriamo il polinomio *f(x)*, in cui il coefficiente $f[i]$ di x^i rappresenta il guadagno netto del residente nella posizione i. Ogni anno gli effetti della tassazione sono di moltiplicare *f(x)* per $(1-x)$, in quanto il nuovo valore del coefficiente $f[i]$ è il vecchio valore di $f[i]-f[i-1]$. Dopo quattro anni, il nuovo polinomio è $g(x) = f(x)\cdot(1-x)^4$; sappiamo che ci sono solo 5 coefficienti diversi da zero, includendo il primo della fila, ossia $g[0]=1$.

Indichiamo i coefficienti diversi da zero come:

$$
\begin{aligned}
g[q] &= b \\
g[r] &= c \\
g[s] &= d \\
g[t] &= e
\end{aligned}
$$

Siccome *g(x)* è divisibile per $(1-x)^4$, sappiamo che g e le sue prime tre derivate assumono il valore zero per x=1; ossia,

$$g(1) = g'(1) = g''(1) = g'''(1) = 0$$

La derivata quarta di g in 1 vale $24\cdot f(1)$, e inoltre $f(1)$ risulta essere la somma dei coefficienti di f, ossia gli averi totali dei residenti.

Dopo un anno, la ricchezza totale dei residenti è $f(x)\cdot(1-x)$ valutata per x=1, ossia ***zero***. Quindi, il governo in sostanza raccoglie tutto nel primo anno.

Quindi abbiamo le equazioni lineari in b, c, d, e:

$$
\begin{cases}
1+b+c+d+e=0 \\
qb+rc+sd+te=0 \\
q(q-1)b+r(r-1)c+s(s-1)d+t(t-1)e=0 \\
q(q-1)(q-2)b+r(r-1)(r-2)c+s(s-1)(s-2)d+t(t-1)(t-2)e=0 \\
q(q-1)(q-2)(q-3)b+\ldots+t(t-1)(t-2)(t-3)e=24\cdot f(1)
\end{cases}
$$

che semplificando diviene:

$$\begin{cases} 1+1\cdot b+1\cdot c+1\cdot d+1\cdot e=0 \\ 0+q\cdot b+r\cdot c+s\cdot d+t\cdot e=0 \\ 0+q^2\cdot b+r^2\cdot c+s^2\cdot d+t^2\cdot e=0 \\ 0+q^3\cdot b+r^3\cdot c+s^3\cdot d+t^3\cdot e=0 \\ 0+0+q^4\cdot b+r^4\cdot c+s^4\cdot d+t^4\cdot e=24\cdot f(1) \end{cases}$$

e risolvendo (la regola di Cramer si mostra, una volta tanto, utile) si ottiene:

$$1=\frac{1}{qrst}\cdot 24f(1)$$

Da cui si ricava il valore del profitto del governo per il primo anno.

4.3 [074]

4.3.1 Problema che gira

Contrariamente al secondo problema, per questo si sono viste poche soluzioni, ma non per questo meno valide. I nostri complimenti in particolare ad ***u_toki***, che ha notato la parentela con il secondo problema *[risolvendo, con questo, il Meta-Problema; vi siete accorti che le valutazioni erano perfettamente uguali per tutti e due? (RdA)]*, e a ***Mash*** per una soluzione molto chiara, e per aver tradotto il problema e averci raccontato del metodo di ***Janusz***. Più che le soluzioni questa volta pubblicheremo l'analisi inviataci da ***Dario Bressanini***, che già in passato aveva contribuito alla rivista[23].

Pare, ma non è sicuro, che la prima versione risalga all'ottavo secolo e sia originaria dell'Irlanda, dove una donna deve scegliere tra due gruppi di guerrieri seduti in cerchio. Il nome di questa storia pare fosse *"Goid Fhinn Agus Dubháin Anso"* che il GC non avrà problemi a riconoscere come antico gaelico irlandese.

Questo tipo di problemi, in cui vengono eliminati via via degli oggetti o persone disposte su una circonferenza, è conosciuto ai nostri giorni come "problemi di Josephus". Il problema prende il nome da Giuseppe Flavio (è lui il misterioso GF citato nella newsletter), storico ebreo del primo secolo dopo Cristo, che nel *De Bello Iudaico*, di cui è autore e personaggio, narra della ribellione degli ebrei contro i romani conclusasi con la distruzione del tempio di Gerusalemme nel 70 d.C. Nel terzo libro (III 8.7) racconta di come i soldati romani gli dessero la caccia, essendo lui uno dei generali capi della rivolta, e di come fosse riuscito a nascondersi in una cava nei pressi della città di Josaphat assieme ad altri 40 ribelli. Per due giorni rimasero nascosti, ma al terzo giorno furono traditi da una donna che rivelò ai romani il loro nascondiglio. Sentendosi perduti, i 40 ribelli decidono di togliersi la vita. Giuseppe è titubante, al che i suoi compagni si rivoltano contro di lui minacciandolo di ucciderlo per primo. Tuttavia, anche in una situazione così drammatica, non viene meno a Giuseppe Flavio la nota sagacia e, fidandosi della provvidenza Divina, mette così in gioco la sua vita: *"ora, poichè avete deciso di morire, lasciamo che sia la sorte a decidere la nostra morte. Il primo estratto verrà ucciso dal secondo ad essere estratto che a sua volta sarà ucciso dal terzo, e così la sorte procederà, in modo che nessuno di noi morirà per propria mano eccetto l'ultimo. Perchè non sarebbe giusto che, quando alcuni si siano suicidati, altri possano ripensarci e decidere di rimanere in vita"*. Questa proposta apparve agli altri equa, e così cominciarono l'estrazione a sorte, iniziando ad uccidersi l'un l'altro, finchè rimasero solamente in due: Giuseppe Flavio e un altro ribelle. Giuseppe Flavio era restio sia a morire che a uccidere l'altro superstite, riuscì

[23] Potete in questo caso approfittare per cercare nei vostri archivi di RM l'editoriale del numero 064.

quindi a convincerlo a fidarsi di lui e a consegnarsi ai romani, che li risparmiano entrambi. Il nostro viene condotto a Roma, ottiene il privilegio della cittadinanza e, ospite nella residenza dell'imperatore Vespasiano, scrive il *De Bello Iudaico* che lo renderà famoso come storico. Un bel tipo vero?

Giuseppe Flavio però non parla di persone disposte in cerchio.

Nel IV secolo il testo, greco in origine, viene tradotto in Latino, probabilmente da Ambrogio, futuro vescovo di Milano e in seguito proclamato santo. Nella traduzione latina di questo testo un copista trasforma il nome "Iosippus" (un modo frequente di scrivere il nome di Giuseppe Flavio, che era noto come *Flavius Josephus* o *Iosippus*) in "Egesippo", con cui ancora spesso di indica un inesistente autore del *De Bello Judaico*, da non confondersi con l'omonimo autore cristiano del II secolo.

Ambrogio non ha reso una versione fedele al testo greco ma, come spesso accade nella tradizione dei testi (i vangeli sono un esempio lampante), ha tolto alcuni pezzi e altri ne ha aggiunti. Una delle interpolazioni è costituita dall'episodio del sorteggio degli aspiranti suicidi nel III libro: Ambrogio narra di come Giuseppe suggerisca di disporsi in cerchio e di uccidere una persona ogni tre. Anche in questo caso Giuseppe è uno dei due sopravvissuti.

Il primo ad associare esplicitamente il nome di Giuseppe Flavio a questi giochi di "decimazione" è stato Cardano, che nella sua *Practica Arithmeticae Generalis* descrive il gioco chiamandolo *"Ludus Josephi"*, e questa associazione è rimasta sino ai giorni nostri.

Prima di Cardano nè Pacioli, nè Tartaglia accennano alla vicenda del *De Bello Iudaico*.

Questo tipo di problemi divenne molto popolare alla fine del medioevo, e fiorirono diverse versioni. La più popolare racconta di 15 ebrei e 15 cristiani. Tartaglia parla di 15 cristiani e 15 turchi. A volte sia il numero di persone coinvolte che la conta sono diversi.

Le origini del problema risalgono probabilmente alla pratica della decimazione in uso negli antichi eserciti romani. Livio e Polibio ci narrano di come fosse pratica comune punire una compagnia o un battaglione macchiatisi di codardia o ammutinamento uccidendo, estraendolo a sorte, un soldato ogni dieci. La *decimatio* in età imperiale divenne poi *vicesimatio* (un uomo ogni venti) o addirittura *centesimatio* (un uomo ogni cento).

Fra le attestazioni note del problema, troviamo la più antica nel Codex Einsidelensis 362, dell'inizio del X secolo. Seguono quelle nel Codex Bernensis 704 (XII secolo) e nel Ta'hbula di Ben Ezra (dal nome completo Abū Ishaq Ibrāhim al-Majid Ibn Ezra, astronomo, matematico, grammatico e poeta vissuto in Spagna fra la fine dell' XI e l'inizio del XII secolo). Sempre del XII secolo vi sono attestazioni in molti trattati d'abaco; per i secoli successivi la tradizione continua in vari testi, fra cui quelli di Chuqet, Pacioli e Bachet costituiscono alcuni esempi.

Come molti altri problemi curiosi, questo problema si diffonde rapidamente e raggiunge addirittura l'estremo oriente: lo ritroviamo in Giappone sotto forma di una eredità da distribuire fra figli di primo e di secondo letto. La seconda moglie dispone i suoi figli in modo tale che siano loro a ricevere l'eredità. È curioso rilevare però come nella versione giapponese la seconda moglie sbagli i calcoli e i suoi figli non ricevano nulla.

Il CG chiede di generalizzare, considerando un cerchio con T turchi, C cristiani, e buttando fuori bordo ogni k-esimo passeggero.

Nelle prime varianti note del problema, lo scopo è buttare a mare la metà "cattiva" dell'equipaggio. In versioni più recenti invece si è solitamente interessati all'ultimo sopravvissuto. Eulero, nel 1775 (*Observationes circa novum et singulare progressionum genus*. Novi Comment. Acad. Sci. Petropol. 20 (1775) 123 139), pare essere stato il primo a chiedersi qual'è l'ultimo uomo a rimanere sul ponte, scaraventando ogni *k*-esimo da un cerchio di *N*.

CHRISTIANS AND TURKS

PRIZE PUZZLE BY SAM LOYD.

PROPOSITION—Find a number which, by counting round and round, will pick out all the boys.

ALL PUZZLISTS ARE familiar with the ancient story of thirty Christians and Turks at sea in a storm, and how the captain decided that one-half of his passengers would have to be thrown overboard to save the ship. Being a fair-minded man who believed that all should be treated impartially, he arranged them in a circle and agreed to count off every thirteenth man until fifteen unfortunate mortals had been selected. As the story goes, one of the Christians was a mathematician and a devout man who believed that Divine Providence had sent him to save the faithful and destroy the unbelievers. Therefore he arranged the thirty passengers in such a manner that the thirteenth man, as the counting out proceeded, invariably proved to be a Turk.

That puzzle, as you doubtless remember, turns upon arranging let us say fifteen white counters and fifteen black in a circle, so that by counting round and round and taking away every thirteenth one, that all of the blacks will be removed. To solve the puzzle you need merely place thirty counters in a circle and begin to count around picking off every thirteenth until fifteen have been removed. Then replace the vacant spaces with black men and let the other fifteen be white and it shows how the Christians and Turks must have been arranged.

The above story is related by way of introduction to tell how it chanced one day that ten children, five girls and five boys, returning from school, found five pennies. A little girl found the money, but Tommy Muttenhead claimed that as they were all together the "find" really belonged to the crowd. He had been told the "Christians and Turk" story, and thought it would be a great scheme to play it as a game in dividing up the pennies, it being clear that there were only enough to go half way around. He placed the children in a circle, as shown in the picture, and told the girls that they were the "Christians" and the boys the "Turks." Tommy had planned it all right, so that by counting thirteen from a circle point the girls would all be counted out, but he forgot that each girl got a penny as she was counted out, so the boys were left, and all that Tommy got was a good licking which the boys gave him in a lot back of the school. Now this puzzle differs from the old Christians and Turks problem, because you are to guess the proper starting point, as well as the smallest number which will count out the boys and leave the girls.

Commencing with the upper girl without a hat and counting around to the right, every thirteenth will be a girl; but the puzzle is to tell what number Tommie should have used in place of 13 to give the prizes to the boys.

Of course, as each one is counted out, he is supposed to step back from the circle and is omitted in the next counting, which commences from the next one.

198

Era poi uso comune inventare delle filastrocche allo scopo di ricordare la soluzione. Nel caso 15-15 contando di 9 in 9, la frase più popolare era *Populeam virgam Mater Regina ferebat*. Il codice è il seguente: le vocali a,e,i,o,u hanno valore 1,2,3,4 e 5. La sequenza delle vocali nella frase fornisce la sequenza: 4, 5, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1 che si interpreta così: si mettono prima 4 cristiani, poi 5 turchi, poi 2 cristiani e così via.

I cattivi, nelle varie versioni che circolavano, di volta in volta erano Saraceni, Ebrei, Turchi o Mori. Filippo Calandri ne riporta una versione nella sua *Aritmetica*, manoscritto del 1485 custodito alla Biblioteca Riccardiana di Firenze e supendamente illustrato. Era infatti destinato ad una persona illustre: Giuliano de' Medici, figlio di Lorenzo il Magnifico.

Ciò che rende unica la versione di Calandri è la composizione dei passeggeri: invece di Ebrei, Turchi e Cristiani abbiamo Frati e Monaci. In particolare Frati Francescani e Monaci Camaldolesi.

Il caso vuole ☺ che abbia una riproduzione del manoscritto (Non avete idea di cosa si riesce ad ottenere dicendo di essere un docente universitario. È scandaloso…) e quindi il minimo che posso fare per voi è trascrivere il testo del problema (e se il vostro correttore ortografico protesta, zittitelo, oppure attivate l'opzione "volgare del 1400")

"Partendosi da Firenze, 15 frati di sancto Francesco per ire im pellegrinagio al Sipolcro s'acompagnorono in fra via con 15 monaci di Camaldoli et, gugnendo a Vinegia, montarono in su 'na barcha per andare in Gerusalem et, navicando, ebbono una gran fortuna in modo che 'e frati dicevano che ell'era per è grandi pecati di quegli monaci et loro dicevano per l'oposito. Di modo che, udendo el padrone la quistione loro et volendo alegerire la nave, o vero barcha, disse che 15 di loro voleva gittare in mare et che fra loro se n'acordassino. Allora uno di que' frati, che era

molto savio, disse: facciano uno cerchio di tutti noi e cominciano a uno a noverare et a chi tocha 9 sempre sia gittato in mare per insino a tanto che 15 ne vadi in mare et 15 ne resti. Et cosi' s'acordorono di Fare. Alora questo frate aconciò in tal modo el cerchio de' frati et de' monaci che cominciò, et a ogni 9 uno Monaco era gittato in mare; et così è frati tutti restorono è monaci tutti furono gitati in mare. El qual cerchio s'aconciò come di sotto tacitamente cioè…"

Hai capito i fraticelli… Chissà cosa avevano fatto di male i monaci Camaldolesi.

Da ultimo vi allego sia l'immagine tratta dal manoscritto di Calandri che un disegno che descrive una variante del problema descritto da Sam Loyd, nella sua famosa *Cyclopedia of 5000 Puzzles*, che potete scaricare interamente dalle mie pagine web (http://scienze-como.uninsubria.it/bressanini/mathrec).

4.3.2 La scozzata faraone

Tante le soluzioni a questo problema, da parte di ***Marco***, ***Qfwfq***, ***Zar***, ***Frapao***, ***u_toki***, ***CID*** *[Benvenuto!]*, ***Jolla*** *[Benvenuto!]*. ***Marco***, in particolare, ci invia la soluzione lo stesso giorno dell'invio della rivista... allora, conoscete tutti la politica editoriale e sapete che pubblicheremo i nuovi arrivati, per cui poche parole consolatorie per tutti gli altri e cominciamo con ***CID***:

Dopo quanti "shuffle" si ritorna all'ordine iniziale con un mazzo di 52 carte? Risposta: 8 shuffle.

E per un mazzo di N carte? Con un mazzo di N carte, si ritorna sicuramente all'ordine iniziale dopo un numero di shuffle pari a: $\varphi(N-1)$, dove $\varphi(N-1)$è la funzione di Eulero in corrispondenza di N-1. Naturalmente può essere benissimo che si possa ritornare all'ordine iniziale anche dopo un numero di shuffle minore (purché sia un divisore di $\varphi(N-1)$).

E dopo aver dato il risultato, vi descrivo i passaggi da me fatti per affrontare il problema.

<u>Primo passaggio:</u>

Dall'analisi del problema risulta che: numerando la posizione di ogni carta con i numeri 0,1,2,...,N-1 abbiamo che ad ogni passaggio ogni carta passa dalla posizione x alla posizione (2 x) Mod (N-1).

Pertanto al passaggio K, la carta in posizione 1 si troverà in posizione (2^K Mod (N-1)), mentre la carta in posizione x si troverà in posizione ($2^K x$) Mod (N-1))

Da ciò si ricava che per ritornare all'ordine iniziale sono necessari almeno (logaritmo in base 2 di N) shuffle e sicuramente si ritornerà all'ordine iniziale entro N-2 passaggi.

<u>Secondo passaggio:</u>

Come primo caso limite abbiamo il caso in cui N è una potenza di 2, in questo caso è evidente che il numero di shuffles necessari è il logaritmo in base 2 di N.

In quanto (2^K Mod (N-1))=1 corrisponde a K=Log(NC-C+1) dove C è un numero intero positivo qualsiasi. Mettendo C=1 si ha K=Log(N-1+1)=Log(N).

L'altro caso limite è quando N-1 è un numero primo maggiore di 2, in tal caso il Piccolo Teorema di Fermat ci dice che: (2^{N-2} Mod (N-1))=1 in quanto (N-1) è primo con 2.

Ovviamente, è possibile che esista anche una soluzione valida in corrispondenza di un divisore di (N-2).

Se N non è primo si ritornerà all'ordine iniziale entro N-3 passaggi.

Terzo passaggio:

Se N è uguale a una potenza di 2 maggiorata di 2, il numero di shuffles è 2Log(N-2)

In quanto con k=2Log(N-2) si ha che:

$2K$ Mod (N-1) = $(N\text{-}2)^2$ Mod (N-1) = ((N-2)(N-1)- (N-2)) Mod (N-1) = -(N-2) Mod (N-1) = (N-1)- (N-2) Mod (N-1) = (N-1-N+2) Mod (N-1) = (2-1) Mod (N-1) = 1

Quarto passaggio:

Se N è uguale a una potenza di un numero primo P maggiorata di 1, allora il numero di shuffles è P^M - P^{M-1} o un suo divisore. In quanto avremo P^{M-1} divisori dello zero (modulo N). Inoltre occorre considerare che l'insieme dei numeri coprimi con (N-1) è diviso in gruppi aventi numero di elementi uguale a K. (essendo 2^K modulo (N-1)=1). Ciò significa che $2^K x = x$ per ogni x che non sia coprimo con N-1.

Lo dimostro così: se i gruppi avessero dimensioni distinte avremmo che x (2^{m1}) mod (N-1) sarebbe uguale a x (2^{m2}) mod (N-1) cioè ($x\ 2^{m1} - x\ 2^{m2}$) mod (N-1)=0, ma ciò è impossibile perché 2^{m1} -2^{m2} è un numero pari mentre N-1 è un numero dispari.

Quinto passaggio

Dunque siamo giunti a riconoscere il Teorema di Eulero-Fermat e poiché 2 è sicuramente coprimo con N-1, essendo (2,N-1)=1 abbiamo che:

$$2^{\varphi(N-1)} \text{ Mod (N-1)=1.}$$

Dunque un numero di shuffles uguale a N-1 è sufficiente, ma ne bastano meno? Si può provarre a ridurre il numero di shuffles utilizzando il Teorema cinese dei resti: proviamo con N=52.

$$\varphi(N-1) = \varphi(51) = (17-1)(3-1) = 16 \cdot 2 = 32\,.$$

Riduciamo con il Teorema cinese dei resti: m.c.m.(16,2)=16. Dunque la soluzione è 16 o un suo divisore. Ma come si giunge a 8 che è la soluzione esatta? Come si trova per un generico N pari la soluzione minima?

Con il Teorema di Eulero-Fermat e il Teorema cinese dei resti trovo un insieme ridotto di soluzioni valide tra cui cercare la soluzione minima, ma non riesco a trovare subito la soluzione minima. Purtroppo non sono riuscito dunque a risolvere completamente il problema, cercherò di far meglio la prossima volta.

Complimenti a ***CID*** per il suo esordio. Vediamo cosa ne dice ***Jolla***:

Premesse:

- Indichiamo con N il numero di carte nel mazzo (che suppongo essere un numero *pari* altrimenti lo shuffle non è perfetto)
- Indichiamo con $\overline{S}_N$ il numero minimo di smazzate necessario affinchè le carte ritornino al loro posto, al variare di N. Supponiamo che tale numero esista e sia finito.

Modello:

Consideriamo il mazzo di carte tra una smazzata e l'altra e osserviamo che la trasformazione applicata ad ogni *"stato"* del mazzo è sempre la stessa a prescindere dal valore della carta in quella posizione ovvero:

- La prima carta rimane sempre al primo posto
- La seconda carta si sposta sempre in terza posizione
- La terza carta si sposta sempre in quinta posizione, Etc. etc.

Possiamo modellizzare la trasformazione con un sistema (indicato con B_1) fatto in questo modo:

$$\mathrm{B}_1 \begin{cases} V_1(s+1) = V_1(s) \\ V_2(s+1) = V_{(N/2)+1}(s) \\ V_3(s+1) = V_2(s) \\ V_4(s+1) = V_{(N/2)+2}(s) \\ \ldots\ldots \\ V_{N-3}(s+1) = V_{(N/2)-1}(s) \\ V_{N-2}(s+1) = V_{N-1}(s) \\ V_{N-1}(s+1) = V_{(N/2)}(s) \\ V_N(s+1) = V_N(s) \end{cases}$$

Dove con $V_j(s)$ indichiamo il valore della carta in posizione *j*-esima alla smazzata *s*-esima mentre con $V_i(s+1)$ indichiamo il valore della *i*-esima carta alla smazzata successiva. Il sistema in questione può essere riscritto in forma matriciale:

$$F_N * \overline{V}\ (s+1) = \overline{V}\ (s) \qquad \textbf{[004.001]}$$

Dove con $\overline{V}\ (\bullet)$ è indicato il vettore delle posizioni mentre F_N è la matrice dei coefficienti.

<u>Soluzioni:</u>

L'eq. **[001]** deve valere $\forall s$ per definizione, per le prime tre smazzate per esempio si ha:

$$F_N * \overline{V}\ (1) = \overline{V}\ (0)$$

$$F_N * \overline{V}\ (2) = \overline{V}\ (1) \ \rightarrow\ F_N * F_N * \overline{V}\ (2) = \overline{V}\ (0)$$

$$F_N * \overline{V}\ (3) = \overline{V}\ (2) \ \rightarrow\ F_N * F_N * F_N * \overline{V}\ (3) = \overline{V}\ (0)$$

in generale quindi per *s* smazzate si ottiene:

$$(F_N)^S * \overline{V}\ (s) = \overline{V}\ (0)$$

Possiamo modellizzare in termini matematici il fatto che il mazzo venga riordinato dopo $\overline{S}_N$ smazzate con l'equazione:

$$\overline{V}\ (\overline{S}_N) = \overline{V}\ (0)$$

Le carte, infatti, dopo l'ultima smazzata devono ritornare allo stesso posto in cui erano all'inizio del gioco. Combinando le due equazioni precedenti otteniamo infine:

$$(F_N)^{\overline{S}_N} * \overline{V}\ (0) = \overline{V}\ (0)$$

da cui si ricava subito:

$$(F_N)^{\overline{S}_N} = I \qquad \textbf{[004.002]}$$

dove con I ho indicato la matrice identità. Il problema in sostanza si riduce nel trovare la potenza $\overline{S}_N$ a cui elevare F_N, in modo che la 2.0 sia verificata.

Cerchiamo ora di scavare un po' più in profondità ed enumeriamo alcune delle proprietà della matrice F_N nell'ordine in cui più o meno logicamente appaiono:

1. La matrice è *quadrata*.
2. La matrice è *sparsa*.
3. La matrice è *reale* e ha elementi con valori binari (0 o 1).
4. La matrice ha *rango massimo* poiché il sistema da cui è stata ricavata ha condizioni linearmente indipendenti per costruzione.
5. La matrice è non singolare e deve anzi avere *determinante reale e a modulo unitario* infatti:

$$\|I\| = 1 = \left\|(F_N)^{\overline{S}_N}\right\| = \|F_N\|^{\overline{S}_N} \Rightarrow \|F_N\| = \pm 1$$

6. In ogni riga o colonna della matrice compare uno ed un solo elemento con valore 1, infatti ogni carta può essere trasportata in una ed una sola posizione, e ad ogni posizione corrisponde una ed una sola carta. Da quanto detto si può dedurre che la matrice è formata da versori mutuamente ortogonali, la matrice è quindi ortonormale e $(F_N)^T = (F_N)^{-1}$
7. Come conseguenza del punto precedente, si ha che la matrice è diagonalizzabile. E' possibile allora trovare una matrice diagonale D_N ed una matrice P_N tale per cui: $F_N = P_N^{-1} * D_N * P_N$.

Applicando l'ultima proprietà alla **[002]** e tenendo presente che $I = P_N^{-1} * P_N$ troviamo che:

$$(F_N)^{\overline{S}_N} = (P_N^{-1} * D_N * P_N)^{\overline{S}_N} = P_N^{-1} * (D_N)^{\overline{S}_N} * P_N = P_N^{-1} * P_N$$

$$\Downarrow$$

$$D_N^{\overline{S}_N} = I$$

Quest'equazione ci semplifica notevolmente i conti, infatti gli elementi di cui è costituita la matrice D_N non sono altro che gli autovalori della matrice stessa ed elevare una matrice diagonale all'n-esima potenza equivale a creare una matrice diagonale avente come autovalori le potenze n-esime degli autovalori λ_I della matrice D_N (o F_N indifferentemente).

La soluzione al quesito infine si ottiene trovando quell'esponente al quale elevare gli autovalori e per cui valga la:

$$\lambda_I^{\overline{S}_N} = 1 \qquad \forall i \qquad \textbf{[004.003]}$$

<u>Osservazioni:</u>

Ogni λ_I sarà in genere immaginario, possiamo quindi esprimerlo come $\lambda_I = \rho * e^{-j\vartheta}$. In tal caso la **[003]** ci porta a dire che:

$$\lambda_I^{\overline{S}_N} = (\rho * e^{-J\Phi})^{\overline{S}_N} = \rho^{\overline{S}_N} * e^{-J\overline{S}_N\Phi} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \rho_I^{\overline{S}_N} = 1 \\ \overline{S}_N \Phi_I = 2k_I\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_I = 1 \\ \overline{S}_N \Phi_I = 2k_I\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_I = 1 \\ k_I = \dfrac{\Phi_I}{2\pi}\overline{S}_N \end{cases}$$

Con $\overline{S}_N$ e k_I scelti in modo che siano interi e le equazioni siano soddisfatte per ogni *i*. Il risultato ci porta, tra l'altro, ad affermare che gli autovalori hanno tutti modulo unitario e vale l'equazione $\dfrac{\overline{S}_N}{k_I} = \dfrac{2\pi}{\Phi_I}$ con k_I ed $\overline{S}_N$ interi e maggiori di 0 se la soluzione esiste. Il membro di destra è quindi un numero razionale ed i valori minimi dei parametri per cui l'equazione è verificata sono rispettivamente il numeratore ed il denominatore di questo valore. Indicando allora con $\overline{S}_{N,I}$ il valore minimo che soddisfa l'equazione i-esima per un qualche k_I, è immediato trovare il valore minimo di $\overline{S}_N$ che verifica tutte le equazioni: $\overline{S}_N$ deve essere il minimo comune multiplo di tutti gli $\overline{S}_{N,I} \Rightarrow \overline{S}_{N,I} = mcm(\overline{S}_{N,I})$.

<u>Conclusione:</u>

Ecco alcuni esempi con alcuni *N* e relative soluzioni ricavati col programmino "Smazzcart" ;-) Dal punto di vista puramente computazionale devo dire che il metodo più efficiente è in ogni caso quello di simulare le smazzate e poi controllare se le carte siano tornate al loro posto una per una

No, gli esempi non ve li passiamo. Il Nostro ***Jolla*** ci ha poi inviato un programmino che effettua le smazzate e con il quale abbiamo giocato parecchio mentre stendevamo queste notarelle...

A questo punto non abbiamo più spazio per i vari teoremi (ormai famosi dopo l'ultimo numero) del nostro ***Marco***, o per l'ottimo svolgimento di ***Qfwfq***, ***Zar***, ***Frapao*** e ***u_toki***, ma non disperate, il mese prossimo potremmo decidere di pubblicarli.

5. Quick & Dirty

*Due numeri **a** e **b** di cui non conoscete tutte le cifre sono tali che conoscete tutte le cifre di a^b. Quanto valgono **a** e **b** (minimi)?*

$$\begin{cases} a = e \\ \\ b = \ln 2 \end{cases} \Rightarrow a^b = e^{\ln 2} = 2.$$

P.S.: Pesce d'Aprile!

6. Pagina 46

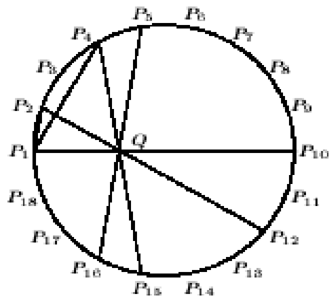


Figura 1

Consideriamo il ***18-agono*** regolare individuato dai punti $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$,...,$\boldsymbol{P_{18}}$ in Figura 1.

Per prima cosa, dimostriamo la concorrenza delle rette individuate da $\overline{P_1P_{10}}$, $\overline{P_2P_{12}}$ e $\overline{P_4P_{15}}$.

Per[24] simmetria, $\overline{P_1P_{10}}$, $\overline{P_4P_{15}}$ e $\overline{P_5P_{16}}$ sono concorrenti, quindi è sufficiente mostrare la concorrenza di $\overline{P_1P_{10}}$, $\overline{P_2P_{12}}$ e $\overline{P_5P_{16}}$; ossia, per il Teorema di Ceva, è sufficiente provare che:

$$\frac{\sin(\angle P_1P_{12}P_2)}{\sin(\angle P_2P_{12}P_5)}\cdot\frac{\sin(\angle P_{12}P_5P_{16})}{\sin(\angle P_{16}P_5P_1)}\cdot\frac{\sin(\angle P_5P_1P_{10})}{\sin(\angle P_{10}P_1P_{12})}=1,$$

ossia che:

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ}\cdot\frac{\sin 50^\circ}{\sin 20^\circ}=1.$$

Ma questo è vero in quanto

$$\begin{aligned}\sin 10^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ &= \sin 10^\circ \sin 40^\circ \cos 50^\circ \\ &= \sin 10^\circ\left(\frac{\sin 80^\circ}{2}\right)=\frac{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{2} \\ &= \frac{\sin 20^\circ}{4}=\left(\sin 30^\circ\right)^2 \sin 20^\circ.\end{aligned}$$

Quindi, $\overline{P_1P_{10}}$, $\overline{P_2P_{12}}$ e $\overline{P_4P_{15}}$ in un punto che indichiamo con $\boldsymbol{Q}$.

Utilizzando questo fatto è semplice verificare che

$$\angle P_2P_4Q=\angle P_4QP_2=50^\circ$$

e che

$$\angle P_2P_1Q=\angle P_4QP_1=\angle QP_2P_4\left(=80^\circ\right).$$

Questo determina il quadrilatero $P_1P_2P_4Q$ e si vede che è $P_1P_2P_4Q \sim ACDB$, e quindi essendo $\overline{P_1P_4}\perp\overline{P_2Q}$, si ha che $AD\perp BC$.

[24] ...evidenti ragioni di...

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Farine che finiscono in Kruskal

Sentence preceeding great discoveries isn't "Eureka!".
Is "Humm, that's funny..."

Carino, vero? l'ha detta uno degli Eroi di Doc[25].

Prendiamola alla lontana. E, francamente, credo sia difficile prenderla più alla lontana di così:

GEN 001:001	*In the beginning God created the heaven and the earth.*
GEN 001:002	*And the earth was without form, and void; and darkness was upon the face of the deep. And the Spirit of God moved upon the face of the waters.*
GEN 001:003	*And God said, Let there be light: and there was light.*

(La ***Genesi***, dalla ***Bibbia***, ***King James Version***, posto che non ve ne siate accorti).

Adesso cominciamo a fare un po' di conti.

1. Scegliete una parola dal primo versetto.
2. Contate le lettere che la compongono
3. Andate avanti di tante parole quante sono le lettere che avete contato.
4. Continuate così e fermatevi appena finite sul terzo versetto.

Se avete fatto le cose per bene, dovreste essere finiti su "***God***". *Qualsiasi sia la parola del primo verso dal quale siete partiti.*

Posto che (come vostro solito) non abbiate voglia di fare i calcoli, qui di seguito trovate un grafico di quello che succede. Le parole sono un po' piccole, ma forse se spiego si capisce.

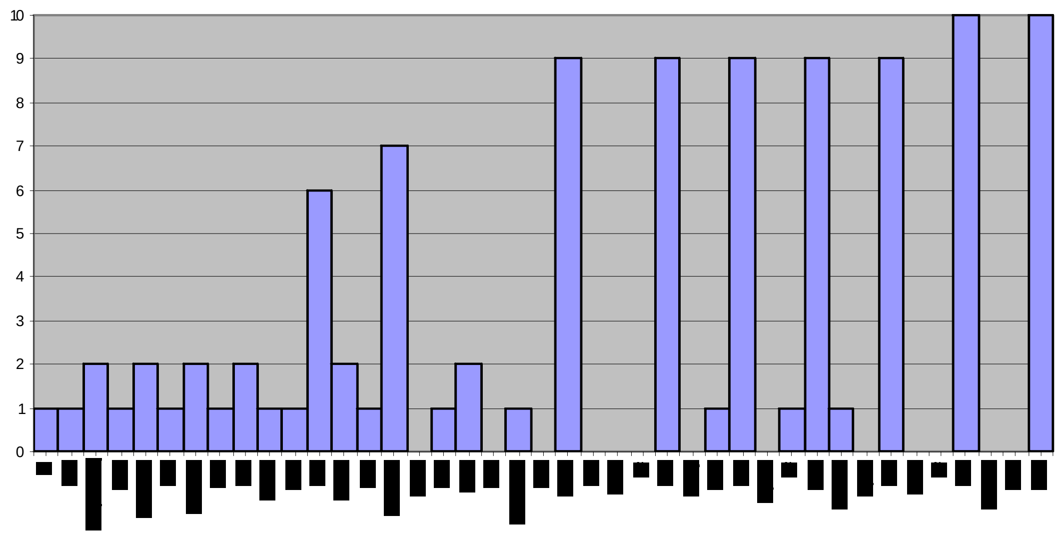


Figura 1 - I "salti" nella Genesi

In ascissa avete il Testo, parola per parola (no, non ve li divido i versetti). Quindi (con il valido aiuto di un foglio Excel) sono partito da tutte le parole del primo versetto, sin

[25] Ma non mi ricordo quale.

quando arrivavo ad una del terzo. Se fate un po' di conti, vedete che le parole del primo versetto sono dieci, e *già verso l'inizio del secondo versetto* ci sono altissime probabilità di finire su determinate parole. Il fatto poi che "***God***" (e "***the***") abbiano un valore ***10***, vuol dire che non c'è niente da fare, da qualsiasi parola partiate vi ritrovate comunque lì.

Ora, la cosa ha scatenato, anni fa, un mucchio di dietrologie in merito[26]; nostro scopo ora è, prendendola leggermente più bassa, vedere che in realtà si tratta di un interessante effetto, strettamente giustificabile dal punto di vista matematico

Prima di tutto, procuriamoci un ambiente di simulazione che non coinvolga necessariamente tutti gli *incipit* della letteratura universale; un mazzo di carte, per esempio. E trasformiamo il tutto in un gioco di prestigio

Partiamo da un mazzo da cinquantadue, e definiamo (giusto per semplificarci un po' la vita) le figure come di valore cinque (un valore "medio", per intenderci); disponiamo il mazzo in quattro file da tredici e troviamo qualcuno disposto a scommettere. Avete un esempio nella *Figura 2*.

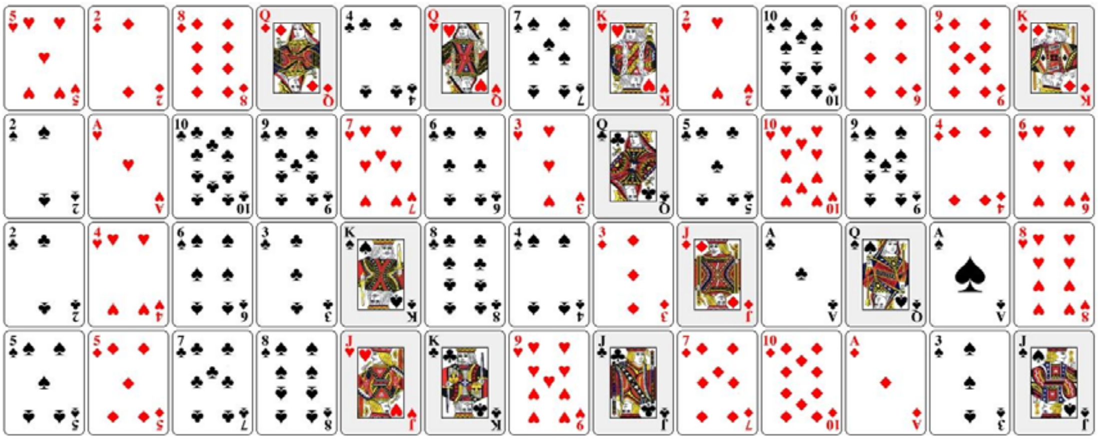


Figura 2 - Le carte in tavola

Ora, procediamo nello stesso modo; chiediamo al nostro giocatore di scegliere (Senza dircela) una carta dalla prima fila, guardarne il valore e saltare "avanti" di tante carte quanto indicato dal valore (J, Q, K valcono 5); scommettiamo con lui che riusciremo ad indovinare su che carta terminerà il calcolo; dopo rapida concentrazione, enunciamo che si tratta del 3 di picche.

Se fate un po' di conti, vi accorgete che non c'è nulla di strano, in questo; o meglio, la cosa strana è che *tutte le carte della prima fila (tranne una[27]) vi portano al tre di picche*, e una rapida prova con qualche simulazione vi porta a verificare che le convergenze sono decisamente "troppe"; deve esserci sotto qualcosa.

Verificare una cosa del genere, però, non è molto semplice; c'è "odore" di Catene di Markov, ma applicarle ad un sistema di cinquantadue carte non è semplice (sì, diviso quattro visto che i semi non contano... ma il numero è comunque grossino).

[26] Potete trovarle in rete se cercate "bible code", ma francamente non credo ne valga la pena; cercando, saltando lettere e seguendo percorsi strani questi matti riescono a dimostrare che Saddam Hussein era d'accordo con Tony Blair per uccidere Lady Di. E, prima che facciate domande in merito, considero il "Codice Da Vinci" come un grazioso romanzo, ma senza il minimo di validità storica; se fate qualche ricerca, scoprite che nel punto topico (la spiegazione di Teabing nel suo studio) di giusto c'è solo la sintassi.

[27] Siccome so che non lo calcolerete mai, non vi dico qual'è quella che vi porta "da un'altra parte".

La buona idea, qui, l'hanno avuta ***Haga*** e ***Robins***[28] che, anzichè mettersi a calcolare la catena di Markov per un singolo mazzo, hanno considerato come stati la ***differenza*** tra due conteggi che partano da carte diverse. Il risultato non è semplicissimo, ma se lo prendiamo passin passino, risulta ampiamente giustificabile.

Per prima cosa, smplifichiamoci la vita; supponiamo di lavorare con un mazzo infinito, così siamo sicuri che prima o poi la cosa finisce bene; e supponiamo anche di conoscere le sequenze delle carte del "mago" e del "pollo", rispettivamente $\{y_i\}$ e $\{x_i\}$; quindi, conoscendo il mazzo, conosceremo anche la sequenza delle ***distanze*** tra la carta del mago e quella del pollo ad ogni turno, e sia questa d_i, che risulta essere la distanza tra x_i e y_{i+1}, ossia tra la posizione attuale del mago e la prossima scelta del pollo; è intuitivo che, in ogni caso, se il valore massimo del "passo" è *m*, avremo $0 \le d_i \le m-1$.

Se $M = [M_{ij}]$ è la matrice (markoviana) di transizione, abbiamo che $d_i = 0$ è lo stato di assorbimento del processo (una volta preso il pollo, non lo mollate più) e abbiamo che la matrice di dimensione $m \times m$ ci dice con l'elemento M_{ij} quali sono le probabilità che se ci troviamo alla distanza *i*, al prossimo passo ci si ritrovi alla distanza *j*.

Quello che ci interessa si esprime facilmente in quattro righe:

$$\forall 0 < i < m-1,$$

[a] $$M_{i,i} = \left(1+\frac{1}{m}\right)M_{i+1,i} - \frac{1}{m};$$

[b] $$M_{i,j} = \left(1+\frac{1}{m}\right)M_{i+1,j} \quad \text{per} \quad i \ne j;$$

[c] $$M_{0,0} = 1 \quad \text{e} \quad M_{0,j} = 0 \text{ per } j > 0;$$

[d] $$M_{m-1,j} = \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right) \text{per } j = 0,\ldots,m-2 \quad \text{e} \quad M_{m-1,m-1} = \frac{1}{m^2}$$

Bene, se fin qui è tutto chiaro, avete tutta la mia invidia. Cerchiamo di giustificarle, almeno.

Per provare [d], notiamo che quando la distanza è $d_k = m-1$ ci sono due modi per avere la distanza al prossimo passo $d_{k+1} = j$; il primo caso è se la prossima carta segreta del mago vale $m-1-j$, e questo accade con una frequenza $\frac{1}{m}$; il secondo caso è quello per cui la carta y_k del mago ha valore m (e supera quindi la carta segreta del giocatore di ***1***), e il valore di x_l è $j+1$, rendendo quindi $d_{k+1} = j$; questo secondo evento accade probabilità $\frac{1}{m^2}$. Questo giustifica la formula [d] per la prima parte della formula; per

[28] ...ma se il lavoro l'hanno fatto tutto loro, perchè si chiama conto di Kruskal? Semplice, Kruskal lo ha spiegato ai prestigiatori.

quanto riguarda l'ultima parte, si vede che l'unico modo per cui si ha $d_k = d_{k+1} = m-1$ è $y_k = x_l = m$, e questo succede con probabilità $\frac{1}{m^2}$.

Provare [c] è immediato, visto che se ci troviamo nella prima riga della matrice la distanza è ***zero*** e ormai i due giocatori sono "agganciati"; quindi, questo è lo stato di assorbimento.

Per quanto riguarda [b], consideriamo la transizione (nella catena di Markov) dallo stato $M_{i+1,j}$ allo stato $M_{i,j}$; l'unica differenza tra questi stati è data dalla (penultima) carta scelta; o questa diminuisce la distanza (nel qual caso avremmo un arco in più dal nostro stato) o no (nel qual caso avremmo lo stesso numero di archi); considerando la densità uniforme delle carte, si ottiene la formula data.

Se si parte dal caso [b], il caso [a] non rappresenta un problema; infatti, quando $i > j$, la carta del pollo può avere un valore di $i - j$, il che permette di ottenere $d_{k+1} = j$; questo evento accade con probabilità $\frac{1}{m}$ e non può capitare con $i \le j$, e da questo deriva la differenza di struttura della metà superiore della matrice.

Questo ci permette di calcolare la matrice vera e propria:

$$
\begin{aligned}
M_{i,j} &= \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-i} && i > j \\
M_{i,i} &= \frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-i} - 1\right] && \\
M_{i,j} &= \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{j-1}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-j} - 1\right] && i < j
\end{aligned}
$$

E il vettore iniziale risulta (no, questa non ve la dimostro):

$$
I = \left\{\frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} - 1\right], \frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)\right], \ldots, \frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} - \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}\right]\right\};
$$

Ora, fare calcoli con questo aggeggio (e in particolare calcolarne gli autovalori[29]) è da rinunciarci subito; per fortuna, due matti[30] lo hanno fatto, ma la cosa è tranquillamente simulabile con il solito calcolo delle potenze della matrice e Excel.

In fin della fiera, il risultato è che avete un enorme, gigantesco ***81,4%*** di probabilità di finire sulla stessa carta, qualsiasi carta scegliate della prima riga con sole quattro righe di carte. Risultato a dir poco incredibile, ma facilmente verificabile.

...e poi non vi fidate dei *miei* giochi...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[29] Due terzi degli estensori di queste note hanno dei problemi con gli autovalori delle matrici di ordine tre. Qui, stiamo parlando di ordine *dieci*.

[30] Borwein e Plouffe; chi altri, se no?