Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 073 – Febbraio 2005- Anno SETTIMO

1. Un Naso per Platone

Queste che state leggendo sono sette parole.

Sette parole che formano una sola frase, sette parole che hanno subito un bel numero codifiche e decodifiche, prima di risuonare nel vostro cervello. Alcune di queste codifiche sono frutto di tecnologia recente: dal momento in cui le sette parole sono state inizialmente composte su una tastiera di computer portatile al momento in cui sono apparse sul video dei vostri schermi hanno subito molti mutamenti, tutti eseguiti allo scopo di lasciarle immutate. Dalla tastiera alla CPU del mio portatile, attraverso la sua memoria RAM, nei pixel del monitor, registrate su disco fisso. Poi, da lì, sono state impacchettate, compresse, protocollate, hanno viaggiato per la rete, sono giunte sui computer degli altri redattori di RM, subendo nuovamente, e più volte, i cicli di codifica e decodifica sopra accennati. Sono state messe in altre forme, con nuove regole e formati, fino ad essere incastrate in una pagina d'un documento dal formato (relativamente) standardizzato, sistemate in un calcolatore accessibile dal web, e nel contempo inviate sotto forma di impulsi elettromagnetici a qualche centinaio di altri personal computer. Da qualcuno di questi pc sono partiti ordini e comandi che hanno trasformato quelle microscopiche briciole di disco fisso in altri impulsi elettromagnetici, impulsi che altro hardware e altro software è stato in grado di interpretare, e sulla base di questa interpretazione ha potuto regolare perfettamente i getti d'inchiostro d'una stampante, facendo così riprendere alle sette parole la forma antica e arcaica di lettere leggibili senza ausili elettronici, nuovamente trasformate in macchie nere su carta bianca, cifre riconoscibili, parole allineate, frase scritta. Non è facile dire con precisione quante volte le sette parole siano state codificate, dal momento esatto della pressione dei miei polpastrelli sui tasti del pc alla pressione dei vostri polpastrelli sul foglio A4 fresco di stampa, ma probabilmente è un numero più vicino al migliaio che alla decina.

Per quanto numerose, queste sono però tutte codifiche di recente, recentissima istituzione: e forse proprio per questo sono più semplici da indagare e ricostruire. Per quanto complesse esse possano essere, esistono sulla terra un bel numero di uomini che sanno spiegare in dettaglio i meccanismi che trasportano le parole dalle dita di un redattore alle rètine d'un lettore: in genere, anzi, sono uomini che di tali meccanismi fanno il proprio mestiere. Al pari degli arbitri sportivi, questi meccanismi sono tanto più efficienti e lodevoli quanto meno si mostrano e si fanno sentire: è forse un peccato per la matematica che il sedicenne che sospira nel telefono cellulare parole tenere e appassionate alla fidanzatina non si renda conto di star facendo un voluminoso utilizzo di complicati algoritmi e funzioni matematiche, ma è certamente un bene per l'efficienza dei telefoni cellulari. Se il sedicenne si rendesse bene conto che il tenue sospiro che sente nel ricevitore è costruito da trasformate di Fourier e da modelli neurali di Shannon, anziché dal puro e semplice palpitare della fanciulla, probabilmente non oserebbe toccare il telefono neppure con un bastone lungo tre metri.

Esistono però altri complessi sistemi di codifica e decodifica che siamo così abituati ad utilizzare da non renderci quasi più conto della loro esistenza: la comprensione della lingua italiana, tanto per cominciare, con le sue precise regole che si imparano fin dalle elementari, grazie agli sforzi degli insegnanti di grammatica e sintassi. Ma non solo: nella terza riga di questo articolo è passata sotto i vostri occhi la frase "… prima di risuonare nel vostro cervello", e tramite essa si è intrufolata clandestinamente la tutt'altro che scontata ipotesi che, leggendo una frase scritta, la sensazione finale sia più o meno quella di "sentire" una voce che la pronuncia. È poi davvero così, che succede? Quando si impara a leggere probabilmente la sensazione di "sentire" le parole scritte è forte, se non altro perché il metodo più diffuso per insegnare a leggere è quello di associare ad ogni lettera un suono, e trascodificare una parola unendo le lettere che la compongono ha il suo controvalore immediato nel riconoscere il suono della stessa dalla somma dei suoni pronunciati scandendo le singole lettere[1]. Non per niente, si impara prima a "leggere a voce alta" e solo più tardi a "leggere a mente". Più ci si abitua a leggere, meno ci si sente legati alla voce che pronuncia le parole dentro la testa, anche se è sempre possibile riattivarla quando torna utile: è verosimile che un attore che legga un copione o un conferenziere che rilegga il testo che deve illustrare in pubblico "risentano" con precisione perfino le intonazioni nelle parole del testo scritto, cosa assai più improbabile che avvenga quando invece si esamina un elenco telefonico, o il manuale di montaggio di un armadio dell'Ikea[2]. Quali che siano i meccanismi di funzionamento del cervello, certo è che la semplice decodifica della parola scritta "mela" scatena una pletora di segnali che sollecitano la

[1] Sono molte le cautele che dovrebbero accompagnare un'affermazione del genere, e che diamo per scontate. Ad esempio, non tutte le lingue (anzi, quasi nessuna, in maniera compiuta) ha un vero meccanismo di "additività dei suoni delle lettere"; ad uno stesso gruppo di lettere scritte corrispondono spesso più di un suono (leggete a voce alta "gli zaini" e poi "glicine", e adesso dite a quale suono corrisponda la scritta "gli"); adesso è spesso utilizzato il metodo didattico di insegnare prima a "leggere la parola" e solo dopo passare alla sua scomposizione in sillabe, e poi a quella in lettere; eccetera, eccetera, eccetera…

[2] Non è un errore: lo abbiamo fatto apposta, a mettere come esempio un foglio d'istruzioni che di solito non ha neanche una parola, ma solo disegni.

mente: si può sentire distintamente nel cervello una voce che scandisce il bisillabo "ME-LA"; si può istantaneamente visualizzare una Golden gialla o una Granny-Smith verde, magari completa di picciolo e foglietta residua; se ne può quasi sentire l'odore (ma è più difficile che visualizzare l'immagine) o ricordarne la consistenza tattile o il sapore (anche questo molto difficile: non per niente Proust è diventato famoso anche per essere riuscito, in qualche modo, a trasporre su carta le sensazioni dei ricordi del gusto e del profumo della "madeleine"). E, in fondo, sia la madeleine che la mela possono essere prese a calci[3]: sono insomma oggetti concreti, e tutti i sensi possono essere chiamati a dare una visione d'insieme, una sorta di giudizio globale su di essi. Un concetto astratto sfugge invece del tutto alla "visualizzazione" (o, per cercare di generalizzare il concetto, alla "sensitivizzazione"): è facilissimo visualizzare una bella donna o un bel paesaggio, ma è ben arduo visualizzare la "bellezza". In una sorta di limbo intermedio si trovano invece i concetti legati strettamente ad un solo senso, e tali da essere quasi degli assiomi per il senso stesso: i colori per la vista, la musica per l'udito. Per quanto possa sembrare oggettivo, la sensazione di "verde" è difficilissima da rendere maneggevole dal punto di vista della conoscenza delle sensazioni. Si impara cosa sia il "colore verde" imparandolo a riconoscerlo nell'erba, nelle foglie degli alberi, ed estendolo poi, in una miriade di sfumature, a concetto "generale". Ma se la sensazione che ogni cervello fornisce di fronte al verde sia la stessa o meno di tutti gli altri, non lo sapremo probabilmente mai.

Il concetto di "visualizzazione" entra assai di frequente nelle discussioni matematiche, perché sono molte le persone che per "comprendere" appieno una cosa hanno necessità di "visualizzarla". La pratica è affatto diffusa, al punto che viene spesso richiesto agli insegnanti di sforzarsi affinché gli studenti "visualizzino" il concetto che si sta cercando di insegnar loro. Questo sforzo è senza dubbio meritorio, anche e soprattutto perché il metodo che fa più frequentemente concorrenza al "Cercate di visualizzare!" è il celebre "Imparate tutto a memoria, e domani voglio sentirlo ripetere per filo e per segno, sennò sono dolori"; non di meno anche la visualizzazione estrema può condurre a qualche complicazione. Innanzitutto, si ha veramente un'idea di cosa si intenda comunemente con "visualizzare"? La risposta immediata sembra a prova di bomba: visualizzare significa riprodurre nella mente la stessa sensazione che si ha quando si osserva l'oggetto reale. Come si diceva poco sopra, io posso "visualizzare una mela" ricostruendo nella testa l'immagine di una Granny-Smith verde. Solo che già Platone ha fondato un sistema filosofico sull' "Idea in Sé" indagando su quel poco che di cotanta Idea ci sia dato di vedere e conoscere: una Granny-Smith non rappresenta l'idea assoluta di "mela", se non altro perché è troppo specifica, e la rappresentazione mentale di "verde" non è realmente comunicabile, secondo i neurofisiologi; più in generale, il concetto stesso di "visualizzazione" è molto popolare e apparentemente inconfondibile forse proprio perché sfugge a regole e a definizioni precise. In questo contesto, la visualizzazione degli oggetti matematici è probabilmente di natura diversa da quella degli oggetti fisici. In fondo, l'unica possibilità che ha il cervello di costruirsi un'idea di mela è quella di vederne in numero sufficiente da decidere quali siano gli elementi caratterizzanti "la mela per eccellenza" e quali invece non lo siano: e quali siano i "filtri" che conducono alla creazione d'una decente rappresentazione mentale è cosa misteriosa[4], anche perché sono dei filtri efficientissimi: esistono pere abbastanza sferiche da poter essere facilmente confuse con mele, eppure il cervello in genere le distingue senza difficoltà: esistono oggetti di cartapesta alti tre metri e pesanti mezza tonnellata che la mente

[3] I lettori meno giovani riconosceranno nell'espressione una metafora d' una vecchia "definizione" informatica: "Qual è la differenza tra hardware e software?" – "Hardware è tutto ciò che può essere preso a calci".

[4] Quantomeno, è cosa misteriosissima per il sottoscritto.

identifica comunque subito come "mele", e riesce a condurre in porto la medesima identificazione anche con un disegno appena accennato - appena un paio di piccole pennellate di un bravo disegnatore – se è stato fatto e disposto in modo tale da essere riconoscibile come l'immagine di una mela. Gli oggetti matematici, invece, non esistono nel mondo fisico, e di conseguenza l'idea di "cerchio" deve formarsi in maniera necessariamente diversa dall'idea di mela. Quelli che poco sopra abbiamo chiamato "filtri" del cervello sono costretti dalla matematica a lavorare in maniera schizofrenica: iniziano probabilmente a fare il loro solito mestiere raccogliendo immagini di cerchi disegnati alla lavagna dalla maestra in maniera niente affatto dissimile da come raccolgono immagini di mele nella fruttiera, salvo poi subire delle continue correzioni contraddittorie rispetto al processo normale: nel caso delle mele, una voce mentale continua a ripetere: "Sì, stai costruendo una buona "idea di mela", però ricordati sempre che la mela vera è una cosa diversa, è quella cosa che si prende e si mangia". Nel caso dei cerchi, le lezioni di matematica inducono invece alla voce la correzione diametralmente opposta: "Cerca di perfezionare bene l'idea di cerchio, senza farti fregare troppo dalle sue rappresentazioni: quello disegnato sulla lavagna non va bene, le righe disegnate dal gesso sono solo una rude approssimazione, e non c'è un solo manufatto circolare che, ad analisi accurata, non si mostri del tutto inadeguato: il cerchio vero è solo quello che hai nella testa, quindi cerca di costruirtelo per bene".

Se chiedessimo a cento persone di visualizzare una mela, ben difficilmente potremmo aspettarci cento immagini mentali perfettamente coincidenti: è assai probabile che avremmo fotografie mentali di Golden gialle e oblunghe da mezzo chilo affiancate da immagini di renette del Trentino piccole e traccagnotte. E, dovendo disquisire a lungo e in profondità sulle mele, potrebbero insorgere anche dei problemi di comunicazione dovuti alla diversa visualizzazione che ogni persona ha della propria "Mela in Sé". I problemi di comunicazione non dovrebbero sorgere se invece chiediamo di visualizzare un cerchio: questo potrebbe sembrare causato da mero fatto che un cerchio è oggetto assai più semplice d'una mela, e quindi tale da offrire meno il fianco a fraintendimenti. Può essere anche vero, ma lo è senz'altro solo in parte: il punto essenziale è che il cerchio è già di per sé stesso un'idea, e per di più un'idea definita esclusivamente dalle sue proprietà. Non possiamo realmente sapere quale siano "visivamente" le cento immagini prodotte nelle teste delle persone a cui abbiamo chiesto di visualizzare un cerchio, ma tutte dovrebbero avere la fondamentale caratteristica di avere tutti i punti della sua periferia equidistanti da un punto centrale. E poiché la definizione dell'oggetto tramite proprietà, in matematica, coincide sostanzialmente con l'oggetto stesso, i problemi di comunicazione dovrebbero sparire.

È pur vero, però, che la creazione di immagini matematiche nella mente non si ottiene facilmente a partire solo dalla descrizione di una proprietà o direttamente dalla lettura d'una formula: se alle cento persone di cui sopra avessimo chiesto di visualizzare $x^2+y^2=1$, delle cento fotografie mentali ne avremmo un bel numero sottoesposte e con una pessima messa a fuoco. Questo, in parte, dipende sempre dal problema di codifica e decodifica accennato all'inizio: anche senza tirare in ballo la visualizzazione, se chiedessi alle cento persone di leggere uno spartito e di farmi sentire la musica che si forma loro in testa mentre lo leggono, otterrei qualcosa di diverso dal nulla solo se tra le cento persone trovassi qualche musicista di buona formazione. In gran parte, però, la causa principale dovrebbe essere l'arcaico residuo dell'abitudine a creare gli oggetti mentali matematici a partire da quelli fisici dai quali inizialmente si estrae l'idea matematica. Alla richiesta "Visualizzate un cubo!", è verosimile che avremmo, tra le cento mentali rappresentazioni di cubi, alcuni bei cubi matematici (opachi o trasparenti, fermi su una faccia o rotanti lentamente su un vertice) ma anche un discreto numero di dadi da gioco. Alla richiesta successiva

"Contate gli spigoli e ditene il numero!", i possessori di dadi mentali avranno qualche difficoltà in più dei possessori degli eleganti cubi trasparenti, ma dovrebbero comunque, con poche difficoltà, riuscire a rendere trasparente il dado da gioco, eliminare i fastidiosi punti neri che servono per giocare a Risiko, e giungere infine a fare la conta: quattro lati il quadrato che fa da base inferiore, quattro lati per quello che fa da faccia superiore, quattro spigoli che collegano le due facce, uguale dodici. In altre parole, la visualizzazione matematica sembra essere ragionevolmente diversa dalla riproduzione mentale di un oggetto fisico: tanto più si è familiari con la matematica, tanto più si è pronti a visualizzare meno dadi da gioco è più "cubi in sé": se non altro per risparmiarsi la fatica di dover rendere il dado d'avorio trasparente e di cancellare i punti neri. E, al solito, la cosa si alimenta da sola: la successiva richiesta di visualizzazione potrebbe essere la terrificante: "Visualizzate un ipercubo, e contatene gli spigoli!", con l'ineluttabile risultato di produrre molte immagini totalmente buie: ma tra queste tenebre potrebbe brillare luminosa la visualizzazione di un matematico specializzato in geometria quadridimensionale, accompagnata in sottofondo dal lineare ragionamento: "dodici spigoli il cubo inferiore, dodici per quello superiore, otto spigoli che uniscono il cubo inferiore a quello superiore, uguale trentadue"[5].

Se alcune persone visualizzano a quattro dimensioni mentre altre hanno problemi a visualizzare il solido prodotto da un quadrato che ruota attorno ad una delle diagonali, è possibile che la visualizzazione sia meno legata al senso della vista di quanto appaia inizialmente. È possibile che il "senso primario" sia uno strumento talmente importante per l'interpretazione della realtà e così strettamente apparentato con i processi della mente che venga spontaneo associare ad "immagini visive" anche i processi mentali che, in ultima analisi, immagini visive non sono. Se ciò fosse vero, si potrebbe anche ipotizzare che un pipistrello dotato di sufficiente intelligenza e capacità matematiche potrebbe mentalmente "auditivizzare" (anziché visualizzare) il teorema di Pitagora, mentre Fido, a parità di livello intellettivo, potrebbe forse ricostruire il Quinto Postulato di Euclide in pochi e semplici passaggi olfattivi. Per quanto assurda e paradossale, l'ipotesi può comunque essere d'ausilio nel ricordare quanto può essere anche "rischioso" affidarsi totalmente alla visualizzazione; inoltre, induce a pensare come gli altri sensi siano costretti, dalla fisiologia umana, ad un ruolo di quasi totale asservimento alla vista. L'udito ha la sua nicchia di gloria nella musica, ma l'olfatto sembra quasi ridotto a livello di perversione, nell'indagine del mondo esterno: al punto che sono rarissimi i romanzi che accennino all'esistenza dell'odorato, e il naso è assai più celebrato come elemento estetico che come sede di percezione. Se si esclude il caso editoriale de "Il Profumo" di Patrick Suskind, i nasi, da quello di Cleopatra a quello del gogoliano maggiore Kovalév[6], passando attraverso quello poetante e impegnativo di Cyrano de Bergerac, si fanno notare soprattutto per essere il baricentro della faccia. Eppure, nei meandri della storia della matematica si può trovare anche un naso assai significativo e importante, e più dirompente dello stesso naso d'argento di Tycho Brahe: un naso che, sacrificandosi, condusse il suo ex-proprietario a strazianti dolori e a lunghe degenze

[5] Succede davvero: lo ricorda Timothy Gowser nel suo piccolo libro "Matematica – Un'introduzione", Piccola Biblioteca Einaudi, 2004, Euro 15,00. Il libro è scritto per non-matematici, ed è molto agile e di piacevole lettura: il suo difetto principale sta nell'eccesso di sintesi del titolo italiano (il titolo originale suona "Mathematics – A Very Short Introduction") perché il lettore che non si perita di andare a spulciare il titolo originale rischia di non capire perché in alcuni passaggi l'autore affermi "… non ho considerato questo caso perché altrimenti avrei dovuto cambiare il titolo di questo libro." Autore che, a differenza del libro, di difetti ne ha una gran quantità: oltre a scrivere bei libri di matematica, la insegna a Cambridge, ha un discreto numero di anni in meno dei due redattori maschi di RM e ha già vinto una Medaglia Fields (1998). Probabilmente è anche bello e ricco ma, anche se non lo fosse, ce ne sarebbe già abbastanza per confermare la nostra consolidata opinione che i matematici è meglio ammazzarli da piccoli.

[6] Il maggiore Kovalév è il protagonista del racconto "Il Naso" di Nikolaj Gogol.

d'ospedale: ma così facendo aprì la strada ad un originale processo di visualizzazione matematica di bellezza straordinaria e feconda. Feconda perché, anche se con ritardo, quella "visualizzazione mentale e soggettiva" causata dall'assenza d'un naso è riuscita poi a trasformarsi in "vista reale e oggettiva".

Il 3 Febbraio 2004, su qualche centinaio di milioni di personal computer, apparve un'equazione imprevista e non richiesta: era timidamente appartata ed esteticamente soffusa sullo sfondo del logo di Google, il motore di ricerca più diffuso del mondo che è, probabilmente, anche la Home Page più diffusa del mondo. Google ha certamente simpatia per la matematica, come dimostrano almeno due cose: innanzitutto il nome, che è una deformazione di "googol"[7], e in secondo luogo i loro test di selezione del personale[8]: nonostante questo, ben pochi, anche tra i cultori della matematica, si aspettavano la specialissima celebrazione in diretta sugli schermi di milioni di computer. Anche perché non era solo la presenza improvvisa dell'equazione a suscitare meraviglia, ma anche e soprattutto lo stesso logo di Google che si era agghindato in maniera speciale per la celebrazione: le lettere di posizione dispari erano infatti tutte modificate, arricchite di grafica complessa, arzigogolate: il termine più corretto è senza dubbio "frattalizzate", come avrà senz'altro pensato chiunque sarà riuscito a riconoscere, in testa alla "G" maiuscola, un piccolo ma inconfondibile insieme di Mandelbrot. Il motore di ricerca è solito celebrare qualche anniversario particolare con modifiche del logo, e sono stati certo in molti a pensare inizialmente che il destinatario dell'omaggio fosse proprio il papà polacco dei frattali: ma si copriva in fretta che in realtà gli autori di Google volevano invece fare gli auguri al nonno algerino dei frattali. La seconda "o", lettera centrale del logo, era infatti l'evidente stilizzazione di un "insieme di Julia".

[7] Un googol equivale a 10^{100}. Potremmo approfittare di questa nota a piè di pagina per raccontarvi ancora una volta di come il matematico Edward Kasner ebbe la ventura di chiedere al suo novenne nipotino d'inventare un nome per un numero gigantesco fatto da un uno seguito da cento zeri, e come questi tirò appunto fuori la parola "googol", ma temiamo che la storiella vi sia arcinota. Potremmo allora forse rimediare aggiungendo il fatto che i creatori di Google volevano proprio richiamare l'incredibile googol alludendo al gran numero di pagine che il loro motore sarebbe stato in grado di scandagliare, ma anche questo probabilmente non vi suonerà nuovo. Metterla sul patetico ci sembra poco ortodosso (secondo voi, il nipotino di Kasner ha mai visto l'ombra d'un cent di diritto d'autore?), e allora viriamo sul futile, mostrandovi come, in maniera del tutto fortuita, siamo riusciti a menzionare in uno stesso articolo non solo il googol e Google, ma anche Gogol (Nikolaj).

[8] Già, matematica vera e in dosi massicce, in quei test di selezione del personale, al punto che siamo stati tentati di saccheggiarli per poi riciclare qualcosa sotto forma di problema per RM. Non lo abbiamo fatto, ma dobbiamo senza dubbio ringraziare Fabrizio, RMer di nuova nomina, che ci ha segnalato la cosa.

Gaston Maurice Julia nacque a Sidi-Bel-Abbés, non distante da Orano, Algeria, il 3 Febbraio 1893. L'Algeria di fine Ottocento è un pezzo dell'Africa Francese, e francese è comunque la cultura che genera e accoglie il giovane Gaston[9]. Ebbe la ventura di classificarsi primo ad un non meglio identificato concorso da asilo alla tenera età di cinque anni, il che bastò a sua madre per esortarlo ad essere "sempre" il primo, qualunque fosse l'impegno che avrebbe dovuto affrontare nella vita. Gli ordini di mamma non sono poca cosa, specialmente quando si hanno solo sessanta mesi di vita, e sembra proprio che Gaston Julia tenne fede alle speranze materne, anche se la cosa non sempre fu facile. Tanto per cominciare, non è così semplice "andare al liceo", come consigliano le insegnanti delle elementari, se non si è di famiglia ricca, e la famiglia Julia vive solo dei modestissimi introiti portati dal padre, meccanico di macchine agricole; il liceo significa andare ad Orano, e per andarci occorre una borsa di studio. E per ottenere una borsa di studio, occorre entrare in una classe dove gli studenti hanno già studiato un anno di tedesco, lingua che Gaston non sa neanche dove stia di casa. Il ragazzino, quando gli insegnanti del liceo gli espongono il problema, chiede un mese di tempo per mettersi in pari: la scuola glielo accorda e tutto sommato fa un buon affare, se alla fine dell'anno scolastico Gaston risulterà essere il primo in tutte le materie: ginnastica, costruzione d'aquiloni e lingua tedesca compresi. È soltanto l'inizio: Julia sa di potersi permettere di continuare gli studi solo ottenendo borse di studio, e alla fine del liceo non avrà problemi ad ottenere quella per Janson-de-Sailly, Francia, classe di matematica superiore. Allontanarsi dall'Africa per mettere piede nella nazione-madre è un'altra sfida; Gaston porta con sé in Europa solo due oggetti particolarmente cari: una scatola di compassi comprata con fatica dai compagni del Liceo di Orano e un violino, dono della madre. E la povertà non è l'unica difficoltà da superare; in fondo, Janson-de-Sailly non è la destinazione finale per il figlio di Sidi-Bel-Abbés. Si tratta infatti soltanto di una scuola specializzata alla preparazione per l'ingresso nelle due prestigiose sedi della matematica francese, l'Ecole Normale o il Politecnico. Chi entra a Janson sa che lo aspetta un biennio durissimo, volto unicamente a fornire allo studente qualche speranza in più di essere ammesso in uno dei due prestigiosi istituti. Julia non può permettersi più di un solo anno di preparazione in quella scuola, e per buon peso una febbre tifoidea lo inchioda in un letto d'ospedale per mesi, appena arrivato in Europa. Quando finalmente lascia l'infermeria, Gaston ha a disposizione solo otto mesi per prepararsi ad uno dei due concorsi di ammissione, eppure non sembra disposto ad abbandonare la partita. Anzi, memore del giuramento fatto alla madre (*"Toujours premier!"*) e per non lasciarsi sopraffare dall'imbarazzo della scelta, prepara e si sottopone a tutti e due i concorsi di ingresso, e si piazza al primo posto in entrambi.

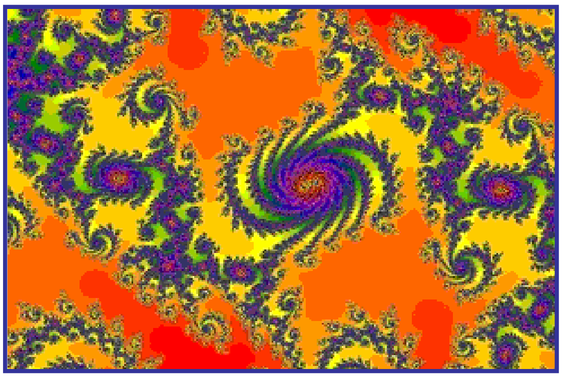
[9] La famiglia Julia è una famiglia di quelli che i francesi chiamano "pieds-noirs", coloni francesi dell'Africa Settentrionale. Attenzione, però: "pieds-noirs" è una di quelle espressioni (almeno a dar retta a quanto diceva la prof del GC) che sono lecite solo se sono autoreferenziali, altrimenti rischiano di essere offensive. Insomma, un "pieds-noirs" può liberamente definirsi "pied-noirs", così come un nero americano non ha problemi a definire sé stesso "nigger". Ma se siete voi (che probabilmente non siete né "nigger" né "pieds-noirs") a dirglielo, beh, potreste trovarvi in breve con un setto nasale da ricostruire…

Julia opta infine per l'Ecole Normale: studia e suona il violino, e non sembra davvero che alcuna nuvola all'orizzonte possa togliergli la soddisfazione d'un nuovo primo posto nella classifica finale dei laureati. Ma un nuvola invero c'è, anzi, è una vera bufera quella che arriva da oriente: prima della laurea arriva la Grande Guerra, e Gaston corre ad arruolarsi. Il 4 Agosto 1914 indossa l'uniforme del 144° reggimento di fanteria dell'esercito francese. L'abitudine a primeggiare non lo abbandona neanche sotto le armi: arruolato come soldato semplice, diventa rapidissimamente caporale e, in capo a qualche mese, addirittura tenente. Non sono passati ancora cinque mesi dal suo arruolamento che il tenentino Julia si trova per la prima volta in una azione di guerra, il 25 Gennaio 1915, proprio in occasione di un furioso attacco tedesco che le cronache dicono essere stato comandato per celebrare il compleanno del Kaiser[10]. Il soldato matematico, di fronte ad una bufera di fuoco e presto ferito in battaglia, come si comporta? Ce lo dice un documento ufficiale: *"… ha mostrato il più profondo disprezzo per il pericolo. Sotto un bombardamento d'una estrema violenza, malgrado la sua giovane età (22 anni) ha avuto un autentico ascendente sui suoi uomini. Colpito da una pallottola che gli ha causato una grave ferita in pieno volto, dato che non era più in grado di parlare, ha scritto su un biglietto che non intendeva essere evacuato; si è infine diretto verso l'ambulanza soltanto dopo che l'attacco è stato respinto. Quest'ufficiale partecipava ad una azione di guerra per la prima volta."* La "grave ferita" è tutt'altro che uno scherzo: la pallottola gli ha devastato il volto, troncandogli totalmente il naso: Gaston Julia passerà tutto il resto della sua vita con il volto coperto da una benda nera che gli copre la faccia dagli occhi alla bocca.

Secondo il parere degli esperti, una ferita del genere è semplicemente tra le più dolorose immaginabili: senza considerare le conseguenze psicologiche che necessariamente sono indotte da uno sconvolgimento così radicale dell'aspetto d'una persona e dalla perdita totale di uno dei cinque sensi, è proprio il dolore fisico ad essere particolarmente intenso. E per quanto sembri impossibile concentrarsi su alcunché quando si è preda del dolore, è proprio mentre era costretto in un letto d'ospedale che Gaston Julia lasciò la sua mente libera di tornare alla matematica, ed è proprio durante questa degenza che elaborò la sua opera più significativa. Nel 1918, il Gran Premio dell'Accademia delle Scienze di Francia andò alla *"Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles"*, che il nostro eroe di guerra aveva pubblicato nel medesimo anno, raccogliendo su carta ciò che era andato "visualizzando" quando era immobilizzato nel suo letto d'ospedale. Nel 1918 non esistevano calcolatori, e il lavoro di Julia era espresso in rigorose formule matematiche, che solo altri matematici potevano capire e visualizzare fino in fondo.

[10] A questo proposito, il vostro povero cronista si era perso un po', perché a lui risultava che Francesco Giuseppe compisse gli anni il 18 Agosto, e non il 25 Gennaio, e l'attacco tedesco sembrava un po' troppo anticipato (o molto pessimista). Per fortuna, il sommo redattore di RM (cioè il GC) gli ha fatto notare che Cecco Beppe era l'austriaco spauracchio degli Italiani, mentre i Francesi si massacravano soprattutto con i sudditi di Kaiser Wilhelm, e che quest'ultimo compiva 56 anni giusto il 27 Gennaio 1915. I conti tornano, allora: si attacca il 25 per avere due giorni di margine per poter infiocchettare il macabro regalo di compleanno. E poi dicono che i peggiori regali di compleanno sono le cravatte…

Così, la memoria di Julia, pur se composta di ben 199 pagine, non contiene nessuna immagine di quelli che poi nel 1975 Benoit Mandelbrot chiamerà, con felicissima scelta, "frattali": il nome è poetico, traducibile in molte lingue, e ben riassume la caratteristica principale di quegli oggetti che possono essere definiti come "dotati di dimensione frazionaria"[11]. Eppure Gaston li vedeva certamente, in qualche modo, nella sua testa, e li vedeva non meno bene di quanto Beethoven riuscisse a "sentire" la sua Nona Sinfonia, per quanto scritta quando ormai la sua sordità era quasi completa. Senza più un naso per odorare, con tutti i nervi facciali feriti e doloranti, Gaston Maurice Julia si arrampicò nei meandri platonici del suo cervello, e vide le esplosioni di forme e colori che oggi campeggiano ovunque, anche sugli schermi di avvocati e giornalisti[12].



Viene naturale chiedersi se, senza l'incidente e il ferimento, Gaston Julia sarebbe arrivato comunque a generare la sua opera sull'iterazione delle funzioni razionali. Se una rinuncia così costosa gli sia valso, in un certo senso, un biglietto d'ingresso nel mondo di Platone, dove perdersi nella danza estetica delle curve che si ripetono e moltiplicano, generando copie ogni volta più complesse e più ampie di sé stesse. Se, insomma, il suo naso e la sua dolorosa perdita fossero un inevitabile tributo da pagare per passare poi alla storia come matematico di genio. È una domanda forse davvero naturale, forse romantica e perfino un po' cinematografica, ma come spesso accade, è domanda del tutto vuota. Può forse considerarsi una sorta di scorciatoia semplificatrice, utile quel tanto che basta per ricordare che un matematico algerino fu ferito e mutilato in guerra, e approfittò della degenza per elaborare la sua opera maggiore, e come tutte le scorciatoie arriverà a destinazione facendoci perdere la bellezza del viaggio. Julia fu rimborsato dal destino immediatamente, per il suo dramma ospedaliero: durante il suo ricovero fu curato da un'infermiera, Marianne Chausson, fanciulla che si può ragionevolmente supporre che non avrebbe mai incontrato se non fosse stato ferito. Marianne e Gaston si conoscono in ospedale e proseguono la conoscenza in municipio, dove si sposano nel 1918. Le cronache la raccontano come unione felicissima, allietata dalla nascita di sei

[11] Se prendete una linea e la raddoppiate lungo tutte le sue dimensioni, avrete una linea di lunghezza doppia. Se prendete un quadrato e lo raddoppiate lungo tutte le sue dimensioni, avrete un quadrato di area quadrupla. Se prendete un cubo e lo raddoppiate lungo tutte le sue dimensioni, otterrete un cubo di volume otto volte più grande del cubo iniziale. Se ora prendete questi sciocchi esempi e li trasformate in una definizione di "dimensione", vi sarà possibile capire che una "dimensione frazionaria" è comunque immaginabile come la dimensione che hanno quegli oggetti che, una volta raddoppiati lungo tutte le loro dimensioni, produrranno delle copie di sé stessi più grandi in ragione della frazione caratterizzante la "dimensione frazionaria" stessa. Siccome però questa nota a piè di pagina non è (né vuole essere) affatto precisa né chiara, la cosa migliore da fare è quella di correre a rileggersi il PM "Roba da Islandesi", che trovate in RM058 e RM059, numeri di Novembre e Dicembre 2003.

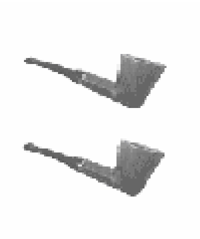
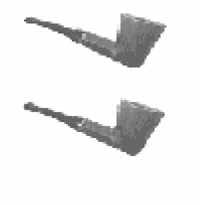
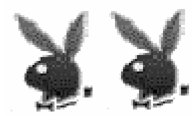
[12] … e infatti l'immagine che correda questo paragrafo è un bell'insieme di Julia che a noi è stato mandato da Luigi, che fa un mestiere non meno impegnativo di quelli citati. Grazie!

figli, e di frequenti allegre sonate di pianoforte e violino che si udivano dall'esterno di casa Julia, a Versailles. Da questo punto di vista, un solo naso in cambio di una moglie, sei figli e la felicità familiare, è scambio che molti uomini sarebbero verosimilmente pronti a sostenere. Non per Platone e la matematica, forse, ma per la felicità sì. E poi, a dire il vero, la matematica a volte è madre, altre volte matrigna. Julia fu immediatamente riconosciuto come matematico di eccezionale valore, dopo la sua pubblicazione del 1918: a soli 41 anni, il 5 Marzo 1934, arriva addirittura ad essere eletto all'Accademia delle Scienze di Francia[13], e sarà il più giovane degli accademici francesi. Una vita densa di soddisfazioni anche professionali, quindi; e la matematica non si può dire gli sia stata matrigna.

Ma non sembrava pronta a tributargli allori eterni. Gaston si spense ad 85 anni, nel 1978, e il suo contributo alla somma scienza sembrava destinato, come milioni di altri, a restare in quel limbo strano in cui orbitano le memorie matematiche: a differenza delle opere d'arte, che rischiano la assoluta e totale dimenticanza, un lavoro matematico originale può venire dimenticato, ma non cancellato del tutto. Quando Benoit Mandelbrot ripercorse gli studi sulle curve patologiche, dal "fiocco di neve" di Koch alla curva onnivora di Peano, per giungere poi alla definizione dell' "insieme di Mandelbrot", riscoprì e, con onestà intellettuale, riaccese i riflettori sul lavoro fatto da Gaston Julia nel 1918. Anche graficamente, all'interno dell'insieme di Mandelbrot trova infatti spazio l'insieme di Julia, e la fine del ventesimo secolo è un'epoca più generosa per i disegnatori di frattali, perché la grafica computerizzata vi muove sicura i suoi primi passi. Grafici multicolori popolano in fretta l'immaginario collettivo, aiutati dai nuovi metodi per codificare e trascodificare funzioni ed equazioni matematiche: le $F^n(z)$ di Julia vengono adesso non solo definite dalle consorelle, ma possono essere codificate in colori, curve, fotografie, tele, filmati. Come per la sensazione che ogni uomo prova quando pensa al colore verde, non sapremo mai con assoluta certezza se Gaston riuscisse già nel suo letto d'ospedale ad immergersi nella danza accelerata di curve e colori che oggi noi associamo al suo nome: ma è assai probabile che fosse in grado di vederle; e "vederle" davvero, proprio come le vediamo noi sul nostro schermo di computer o in una fotografia. Anzi, quasi certamente riusciva a cogliere anche altri dettagli che a noi, matematicamente orbi, ancora sfuggono, mentre cercava con impegno e dedizione di dimenticare il dolore datogli dall'assenza d'un naso.

[13] E dei sei ragazzini fabbricati insieme a Marianne ben due – Marc e Sylvester – riusciranno a seguire le orme paterne e a trovare anche loro posto negli scranni dell'Accademia francese.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Con i dolci della Befana			
La torta di mele di mia suocera			

Notizia preoccupante: a Fred piace la matematica. Seguono un paio di dimostrazioni.

2.1 Con i dolci della Befana

Dopo Capodanno siamo andati al Paesello (dove la copertura GPRS era assente, motivo per il quale è saltato lo *Zugzwang!* del mese scorso), e siamo anche riusciti ad andare a sciare; quindi, il carbone delle calze è stato esaurito piuttosto rapidamente, date le temperature rigide, e ci siamo ritrovati con un mucchio di caramelle; le due Pesti, logicamente, hanno cominciato a decidere (con i classici metodi) chi doveva prendersi *tutte* le caramelle, e hanno richiesto un gioco per decidere; il Vostro Eroe, preso in contropiede, non ha trovato niente di meglio di quanto segue:

> Mettete le **n** caramelle in cerchio; a turno, siete liberi di prendere **una** o **due** caramelle (nel secondo caso, adiacenti) dal cerchio; chi non può più prendere caramelle, ha perso.

Ora, la cosa preoccupante è stata che Fred se ne è uscito con un "Fammi pensare..." e, giusto per raccontarvi come è andata a finire, Alberto ha proseguito con successo la sua dieta. Come ha fatto?

2.2 La torta di mele di mia suocera

Non l'avete mai assaggiata? Male. È l'unica cosa in grado di far dimenticare tutti i luoghi comuni sulle suocere (soprattutto se fatta con le mele della vicina dei suoceri di mia moglie; ma questa è un'altra storia). L'importante, qui, è che ne ha preparata una e che ieri sera stazionava (la torta, non la suocera) in cucina, ragionevolmente lontano dalle grinfie di Virgilio (sarebbe il gatto: tranquilli, appena ci dà qualche problema ve lo presento).

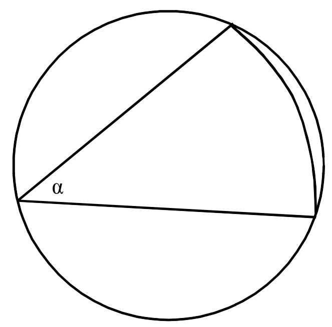
Fred: "Posso mangiare la torta?"

Paola: "Solo una fetta, e mettila in un piatto!" (passano alcuni, lunghissimi secondi).

Rudy: "Questo silenzio è preoccupante: Fred, cosa stai combinando?".

Fred: "Sto cercando il piatto!"

Come potete vedere qui di fianco, avevo ***ottime*** ragioni per preoccuparmi. Il Nostro è stato abbastanza onesto da tagliare una fetta con il "bordo" circolare, ma francamente...



La "fetta" di Fred

Ridotto a più miti consigli il pargolo, ci siamo posti un paio di domande:

1. (Facile) Conoscendo Fred, quanto vale α?
2. (Un filino più complessa) Fred ci ha spiegato che ci ha messo un mucchio di tempo perché cercava il piatto di raggio *appena sufficiente* in funzione di α. Quale deve essere il raggio, per valori più o meno golosi di α?

Eh? Come è andata a finire? Reincollato con crema pasticciera e diviso in parti più oneste, Virgilio incluso *[Ma non ditelo a mia suocera: lei ha un debole per Fred...(RdA)].*

3. Bungee Jumpers

Problema non usato alla 35ª Olimpiade di Matematica (Hong Kong)

> *Tranquilli, non è lo stesso dell'altra volta. Però, anche questo, mi pare meglio di quelli usati. E poi qualcuno si era lamentato che qui c'è poca geometria...*

Un cerchio ω è tangente a due linee parallele ℓ_1 e ℓ_2. Un secondo cerchio ω_1 è tangente a ℓ_1 in ***A*** e a ω (esternamente) in ***C***. Un terzo cerchio ω_2 è tangente a ℓ_2 in ***B***, a ω (esternamente) in ***D*** e a ω_1 (esternamente) in ***E***. $\overline{AD}$ interseca $\overline{BC}$ in ***Q***.

Dimostrare che ***Q*** è il circocentro del triangolo ***CDE***.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Gennaio è mese tradizionalmente pigro, in cui ci si riposa dai bagordi delle feste, si fanno settimane bianche e ci si prende un po' meno sul serio. Tutto questo per dire che ci avete scritto poco, rispetto al solito, e ci avete mandato tanti auguri e complimenti, quindi qui ci prendiamo lo spazio per ringraziarvi.

Ringraziamo quelli che ci hanno fatto gli auguri (appena un po' richiesti) di compleanno, e tutti quelli che ce li faranno questo mese, e tutti quelli che ci hanno fatto notare che abbiamo scritto in testata ancora "anno sesto"[14]. Ringraziamo tutti quelli che ci leggono da sempre e quelli che ci hanno appena scoperto, e tutti quelli che scrivono "Grazie!" nei commenti alla richiesta di abbonamento.

Ringraziamo ***Luigi***, che ha citato il Doc in pubblico in giorni importanti, ringraziamo ***Loba*** che si è accorto dell'assenza di "Zugzwang!" il mese scorso. Ringraziamo un nuovissimo iscritto, ***Marco***, per il link ad un interessante articolo su Tai Chi Chuan e Matematica, molto apprezzato da GC. Ringraziamo ***Filippo***, unico a rispondere al quesito della Newsletter, ***Aubrey McFato*** per le lunghe mail e l'invito a bere la sua birra fatta in casa (se avessimo il teletrasporto saremmo già lì, lo sai). Ringraziamo ***Caronte***, per la

[14] Ovviamente il Doc si è sbizzarrito in spiegazioni, nel solito cavalleresco tentativo di coprire Alice, che anche questa volta, invece di cospargersi il capo di cenere, ha affermato "ma anche l'anno scorso avevamo fatto così...". Insomma, ovvio che le riviste entrano nell'anno a gennaio, ma la nostra è nata a febbraio e abbiamo il diritto di fare confusione.

sua infinita pazienza nel correggersi bozze orrende dei pezzi da bookshelf che non sono mai pronti, e ***Zar***, che ha fatto felice il GC in molti modi di cui parliamo altrove.

Ed ora passiamo alle soluzioni.

4.1 [072]

Pochissime soluzioni questo mese, possiamo permetterci di pubblicarle tutte...

4.1.1 È da quattro anni che va avanti...

Soluzioni a questo problema da parte di ***Filippo*** e ***Zar***. Cominciamo da ***Filippo***:

> Se ho inteso correttamente il meccanismo del "pagamento delle tasse", l'impostazione iniziale mi pare semplice:
>
> Conosciamo la quantità di soldi del primo e degli ultimi quattro della fila.
>
> Indico con a, b, c ecc. la quantità (incognita) di soldi posseduta dalle altre persone. Esempio con una fila di nove persone: 1 *a b c d* 0 0 0 0
>
> il valore posseduto complessivamente (prima di pagare le tasse) sarà 1+a+b+c+d
>
> Dopo un anno la situazione sarà: 1 *a*-1 *b-a c-b d-c* -d 0 0 0
>
> In pratica: il numero della riga superiore viene riportato in quella inferiore; il suo opposto viene ripetuto nella colonna successiva. Dato che le ultime quattro posizioni della fila valgono 0, è possibile ripetere questo passaggio, riportando tutti i termini della riga superiore col loro opposto, per 4 volte. Il valore posseduto complessivamente, dopo il primo anno, sarà quindi 0.
>
> Tutto quello che manca è stato pagato con le tasse.
>
> Ad ogni nuovo anno, potrà cambiare la cifra posseduta dal singolo individuo, ma sarà sempre 0 il valore complessivo (sintanto che facciamo l'operazione con almeno un valore nullo a destra).
>
> In definitiva la cifra incassata, che può anche essere negativa, sarà:
>
> 1+*a*+*b*+*c*+ … +*z* (tutta nel primo anno).
>
> Ma la domanda più importante sembra essere l'ultima: il guadagno in funzione delle quattro persone che, alla fine del 4° anno, sono rimaste con soldi. Al momento sono lontano dalla soluzione. Ci penserò ancora un po'.

Non ne abbiamo più saputo niente, ma aspettiamo fiduciosi. Per quanto riguarda ***Zar***, ecco cosa ci scrive:

> Veniamo ora al quesito sul pagamento delle tasse. La risposta breve è che lo stato guadagna, dopo 4 anni, una cifra pari alla somma di quanto posseduto dai cittadini all'inizio (soldi negativi compresi). Ora provo ad usare il modo testo, vediamo se ce la faccio.
>
> Immaginiamo una fila composta da 5 cittadini:
>
> A B C D E
>
> vogliamo calcolare quanto pagherà l'ultimo cittadino (E) dopo 4 anni - nel farlo vedremo che è sufficiente guardare i 4 cittadini che lo precedono nella fila.
>
> Indico con *p(n)* il denaro posseduto da E all'inizio, con *p(n-1)* il denaro posseduto da D, e così via fino a *p(n-4)* che è il denaro posseduto da A.
>
> Al primo pagamento di tasse, ognuno guarda il suo predecessore e paga quanto egli ha in tasca. Non facciamo i conti in tasca ad A, visto che non sappiamo nulla di chi lo precede, ma partiamo da B. B paga *p(n-4)*, e quindi gli rimane la cifra *p(n-3)-p(n-4)*. Stessa cosa per gli altri 3, che alla fine del pagamento possiedono quanto segue:

A	B	C	D	E
?	$p(n-3)-p(n-4)$	$p(n-2)-p(n-3)$	$p(n-1)-p(n-2)$	$p(n)-p(n-1)$

Passa un altro anno, e ognuno paga nuovamente quanto posseduto dal suo predecessore. Non consideriamo né A né B, ma partiamo da C: egli paga quanto posseduto da B, e quindi gli rimane in tasca la cifra

$$p(n-2)-p(n-3) - (p(n-3)-p(n-4)) = p(n-2)-2p(n-3)+p(n-4).$$

Stessa cosa per D ed E, che avranno in tasca alla fine del secondo anno quanto segue:

C	D	E
$p(n-2)-2p(n-3)+p(n-4)$	$p(n-1)-2p(n-2)+p(n-3)$	$p(n)-2p(n-1)+p(n-2)$

Ripetiamo il calcolo per un nuovo anno, dimenticandoci di C (visto che non sappiamo cosa ha in tasca B) e occupandoci solo di D ed E. Sottraendo la cifra posseduta da C dalla cifra posseduta da D otteniamo

$$p(n-1)-3p(n-2)+3p(n-3)-p(n-4).$$

Analogamente per E, e quindi alla fine del terzo anno D ed E possiederanno la seguente cifra:

D	E
$p(n-1)-3p(n-2)+3p(n-3)-p(n-4)$	$p(n)-3p(n-1)+3p(n-2)-p(n-3)$

Si inizia a vedere una simpatica proprietà: i coefficienti dei $p(i)$ sono i coefficienti binomiali a segno alterno.

Senza annoiare il paziente lettore con calcoli francamente tediosi, alla fine del quarto anno scopriamo che E possiederà la cifra data dalla seguente formula:

$$p(n)-4p(n-1)+6p(n-2)-4p(n-3)+p(n-4).$$

Dunque questa è la cifra pagata da ogni cittadino. Che dire dei primi, per i quali non si può calcolare $p(n-1)$, $p(n-2)$, $p(n-3)$ e $p(n-4)$? L'idea è quella di immaginare che davanti al primo della fila ci siano altri 4 fantasmi che hanno in tasca zero soldi. Essi non pagano nulla, non influenzano chi li segue nella fila, servono solo a fare tornare tutte le formule.

Ora calcoliamo il guadagno dello stato. Numeriamo tutti i cittadini da 1 a n (ricordiamoci dei 4 fantasmi in posizione -3, -2, -1, 0 e ricordiamoci anche che gli ultimi 4 della fila non hanno in tasca nulla, quindi nella fila ci sono quattro 0 all'inizio e quattro alla fine).

Quanto guadagna lo stato dall'i-esimo cittadino? La differenza tra quanto aveva in tasca il poveretto all'inizio e quanto avrà in tasca lo stesso alla fine, cioè

$$p(i) - (p(i)-4p(i-1)+6p(i-2)-4p(i-3)+p(i-4)) = 4p(i-1)-6p(i-2)+4p(i-3)-p(i-4).$$

Quanto guadagna lo stato da tutti i cittadini? Bisogna fare la somma della cifra calcolata prima per i che varia da 0 a n, cioé

$$4p(0)-6p(-1)+4p(-2)-p(-3) +$$

$$4p(1)-6p(\ 0)+4p(-1)-p(-2) +$$

$$4p(2)-6p(\ 1)+4p(\ 0)-p(-1) +$$

$$\dots$$

$$4p(i-3)-6p(i-4)+4p(i-5)-p(i-6) +$$

$$4p(i-2)-6p(i-3)+4p(i-4)-p(i-5) + 4p(i-1)-6p(i-2)+4p(i-3)-p(i-4).$$

Ogni termine della prima colonna si somma con un corrispondente termine della terza colonna due righe più in basso, dando il valore

$$\sum_{i=0}^{n-3} 8p(i).$$

Ogni termine della seconda colonna si somma con un corrispondente termine della quarta colonna due righe più in basso, dando il valore

$$\sum_{i=-1}^{n-4} -7p(i).$$

Gli indici di partenza e di arrivo sono diversi, ma ricordandoci dei 4 fantasmi e dei 4 ultimi della fila che hanno zero soldi, non ci sono problemi a calcolare la somma per i che parte da 0 e che arriva fino ad *n*. Allora le due somme si possono mettere insieme e si ottiene

$$\sum_{i=-1}^{n}\left[8p(i)-7p(i)\right]=\sum_{i=-1}^{n} p(i).$$

Quindi lo stato guadagna la somma di tutto ciò che avevano in tasca i cittadini all'inizio. (...)

Del resto ***Zar*** non era poi tanto sicuro, per cui aspettiamo la sua seconda puntata.

4.1.2 Un cocktail disgustoso

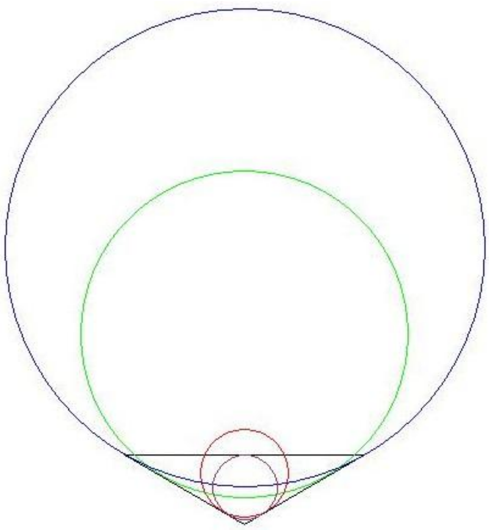
Qui soluzioni di ***u_toki*** e ***MaMo***, prima ***u_toki***:

Matematizziamo la situazione, altrimenti le sostanze tossiche rischiano di non farci trovare la soluzione.

Consideriamo quindi un cono rovesciato di altezza pari ad h ed angolo compreso fra altezza e lato obliquo pari ad α, con $0<\alpha<90°$. Il cono è cavo e senza base: vogliamo inserire al suo interno una sfera di raggio *R*, oppure una sua parte, cioè una calotta di altezza *H*, con $0 \le H \le 2R$, in modo che il volume rimanente del cono sia minimo.

Per ragioni di simmetria, volendo massimizzare lo spazio occupato dalla sfera/calotta all'interno del cono, il centro di essa deve stare sulla retta comprendente l'altezza del cono.

Chiamiamo *l* la distanza dal vertice del cono al centro della sfera.



È abbastanza evidente che sia sfere più piccole di quella minore nel disegno [purtroppo i colori sono andati a farsi benedire; N.d.u_toki] sia sfere più grandi di quella maggiore, occupano meno spazio all'interno del cono. In particolare, la nostra sfera deve risultare tangente ai due lati obliqui del cono.

Abbiamo che il volume rimanente ΔV del cono è dato da

$$\Delta V = V_{cono} - V_{calotta\ interna}.$$

[Qualora la sfera sia tutta dentro il cono, la calotta coincide con la sfera stessa]

$$r_{cono} = h\tan\alpha$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(r_{cono}\right)^2 h = \frac{\pi}{3}h^3\tan^2\alpha$$

$$R = l\sin\alpha$$

$$H = h + R - l$$

$$V_{calotta\ interna} = \frac{1}{3}\pi H^2\left(3R - H\right) = \frac{\pi}{3}\left(h + R - l\right)^2\left(2R + l - h\right) = \ldots$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2R^3 + l^3 - h^3 - 3R^2 l + 3R^2 h - 3hl^2 + 3lh^2\right) = \ldots$$

$$= \frac{\pi}{3}h^3\left[\frac{l^3}{h^3}\left(2\sin^3\alpha - 3\sin^2\alpha + 1\right) - 3\frac{l^2}{h^2}\cos^2\alpha + 3\frac{l}{h} - 1\right]$$

Quindi:

$$\Delta V\left(l\right) = V_{cono} - V_{calotta\ interna} =$$

$$= \frac{\pi}{3}h^3\left[\tan^2\alpha - \frac{l^3}{h^3}\left(2\sin^3\alpha - 3\sin^2\alpha + 1\right) + 3\frac{l^2}{h^2}\cos^2\alpha - 3\frac{l}{h} + 1\right]$$

Facendo un po' di calcoli:

$$\Delta V\left(l\right) = -\frac{\pi}{3}l^3\left(2\sin^3\alpha - 3\sin^2\alpha + 1\right) + \pi l^2 h\cos^2\alpha - \pi lh^2 + \frac{\pi}{3}h^3\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1\right)$$

del quale vogliamo trovare il minimo.

Andiamo adesso a studiare zeri e segno della derivata:

$$\Delta V'\left(l\right) = -\pi l^2\left(2\sin^3\alpha - 3\sin^2\alpha + 1\right) + 2\pi lh\cos^2\alpha - \pi h^2 \text{ (*)}$$

$$\Delta V'\left(l\right) = 0 \Leftrightarrow l^2\left(2\sin^3\alpha - 3\sin^2\alpha + 1\right) - 2lh\cos^2\alpha + h^2 = 0 \text{ (**)}$$

Abbiamo a che fare con un'equazione di secondo grado il cui discriminante è:

$$\Delta = h^2\cos^4\alpha - h^2\left(2\sin^3\alpha - 3\sin^2\alpha + 1\right) = h^2\left(\cos^4\alpha - 2\sin^3\alpha + 3\sin^2\alpha - 1\right)$$

e scrivendo $\cos^4\alpha = \left(1 - \sin^2\alpha\right)^2$ e facendo altri calcoli si trova:

$$\Delta = h^2\sin^2\alpha\left(1 - \sin\alpha\right)^2.$$

L'equazione (**) ha allora come soluzioni:

$$l_{1,2} = \frac{h\cos^2\alpha \pm h\sin\alpha\left(1 - \sin\alpha\right)}{2\sin^3\alpha - 3\sin^2\alpha + 1} = \frac{h\left[\cos^2\alpha \pm \left(\sin\alpha - \sin^2\alpha\right)\right]}{\left(\sin\alpha - 1\right)\left(2\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1\right)} = \frac{h\left[\cos^2\alpha \pm \left(\sin\alpha - \sin^2\alpha\right)\right]}{\left(\sin\alpha - 1\right)^2\left(2\sin\alpha + 1\right)}$$

$$l_1 = \frac{h\left(\cos^2\alpha - \sin\alpha + \sin^2\alpha\right)}{\left(\sin\alpha - 1\right)^2\left(2\sin\alpha + 1\right)} = \frac{h\left(1 - \sin\alpha\right)}{\left(\sin\alpha - 1\right)^2\left(2\sin\alpha + 1\right)} = \frac{h}{\left(1 - \sin\alpha\right)\left(2\sin\alpha + 1\right)}$$

$$l_2 = \frac{h\left(\cos^2\alpha + \sin\alpha - \sin^2\alpha\right)}{\left(\sin\alpha - 1\right)^2\left(2\sin\alpha + 1\right)} = \frac{h\left(1 + \sin\alpha - 2\sin^2\alpha\right)}{\left(\sin\alpha - 1\right)\left(2\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1\right)} = \frac{h}{\left(1 - \sin\alpha\right)}$$

Notiamo che, essendo $0<\alpha<90°$, il coefficiente del termine di grado maggiore in (*) è negativo e che i denominatori di l_1 e l_2 sono positivi; inoltre $l_1<l_2$.

Pertanto la (*), vale a dire la derivata, è negativa (cioè ΔV è decrescente) fuori dell'intervallo $[l_1,l_2]$ e positiva (ΔV crescente) all'interno. Il minimo di ΔV si ha quindi in l_1.

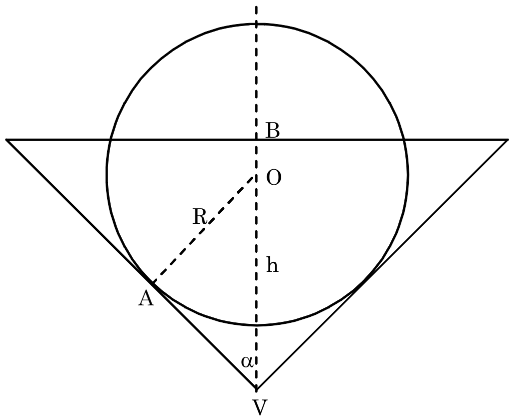
E il raggio della sfera ottimale risulta:

$$R=\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(2\sin\alpha+1)}h\ .$$

MaMo ci scrive:

Indichiamo con *h* l'altezza e con 2α l'angolo al vertice del cono.

Per minimizzare il contenuto del bicchiere è necessario massimizzare il volume del gelato immerso cioè del segmento sferico delimitato sulla sfera dalla base del cono. Da semplici considerazioni geometriche si può dedurre che la sfera gelato deve essere tangente al cono e il suo raggio deve essere maggiore del raggio della sfera inscritta nel cono (vedi figura).



Il volume di un segmento sferico è dato dalla formula:

$$V=\frac{\pi}{3}H^2(3R-H)$$

dove *H* è l'altezza del segmento sferico e *R* il raggio della sfera a cui esso appartiene.

Dal triangolo rettangolo OAV si ha:

$$OV=\frac{R}{sen\,\alpha}$$

Essendo OB = BV – OV, l'altezza del segmento sferico è:

$$H=R+OB=R+h-\frac{R}{sen\,\alpha}$$

Il volume del segmento sferico perciò diventa:

$$V=\frac{\pi}{3}\left(R+h-\frac{R}{sen\,\alpha}\right)^2\left(2R+\frac{R}{sen\,\alpha}-h\right)$$

Per trovare il valore del raggio che rende massimo il volume deriviamo questa funzione rispetto ad R. Si ha:

$$\frac{dV}{dR}=\pi\left(R+h-\frac{R}{sen\,\alpha}\right)\left(2R+\frac{h}{sen\alpha}-\frac{R}{sen\alpha}-\frac{R}{sen^2\alpha}\right)$$

I valori del raggio che annullano la derivata prima sono:

$$R_1 = \frac{h\ sen\,\alpha}{1 - sen\,\alpha} \text{ e } R_2 = \frac{h\ sen\,\alpha}{(1 + 2\ sen\,\alpha)(1 - sen\,\alpha)}$$

Il primo valore annulla il volume del segmento sferico e quindi non è accettabile.

Si può facilmente verificare (*V''* < 0) che al secondo valore corrisponde un massimo della funzione.

Inserendo questo risultato nella formula si trova il volume massimo del gelato immerso. Esso è:

$$V_{\max} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{sen^3\alpha}{(1 - sen\alpha)(1 + 2\ sen\,\alpha)^2}\right]h^3$$

Il volume minimo di cocktail da bere è dato dalla differenza tra il volume del cono e quello del segmento sferico di volume massimo. Il volume del cono è:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi\, h^3 tg^2\alpha$$

Il volume minimo del cocktail diventa perciò:

$$V_{\min} = V_{Cono} - V_{\max} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{tg\alpha}{1 + 2sen\alpha}\right)^2 h^3\ .$$

A voi scoprire la relazione tra le due formule risultanti... noi siamo pigri e non abbiamo nemmeno convertito le formule al nostro formato.

5. Quick & Dirty

La popolazione è stata divisa in cinque classi di ricchezza; ogni classe ha lo stesso numero di appartenenti e ogni appartenenete ha gli stessi soldi di un altro (della medesima classe).

La vostra riforma per incrementare gli investimenti prevede una procedura del genere:

1. *Si prendono due classi contigue*
2. *Si ammucchiano tutti i soldi che hanno*
3. *Si ridistribuiscono in parti uguali ai membri delle due classi*

...e avanti così.

Per ragioni di semplicità, vi si prospettano due modi di operare:

1. *Agire sulla classe 1 (la più povera) e sulla classe 2, poi agire sulla classe 2 (nella sua condizione attuale) e sulla classe 3, poi 3 e 4, poi 4 e 5.*
2. *Agire sulla classe 5 (la più ricca) e sulla classe 4, poi agire sulla classe 4 (nella sua condizione attuale) e sulla classe 3, poi 3 e 2, poi 2 e 1.*

Fermo restando che supporremo tutti convinti che tutto ciò "va fatto", secondo voi, saranno tutti d'accordo, sul metodo da utilizzare? In fondo, i soldi sono sempre quelli e le operazioni sono tutte commutative...

Si può giocherellare con delle ricchezze ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** e calcolare le formule per ogni tabella; noto poi che deve essere ***a<b<c<d<e***, si possono ricavare le condizioni generali. Ma è facilissimo sbagliare nel tirarsi dietro espressioni complicate; basta fare un paio di tentativi "a caso" (una con grosse differenze, l'altra con differenze piccole) per vedere che va a finire sempre nello stesso modo.

Una semplice tabellina calcolata con dei valori qualsiasi ci dà:

Classe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Euro iniziali	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000
Metodo "1"	15.000	22.500	31.250	40.625	40.625
Metodo "2"	19.375	19.375	28.750	37.500	45.000
Metodo Preferito	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*

Ora, presumendo siate stati eletti con metodo democratico, e volendo accontentare la maggioranza del corpo elettorale... Però glielo spiegate voi.

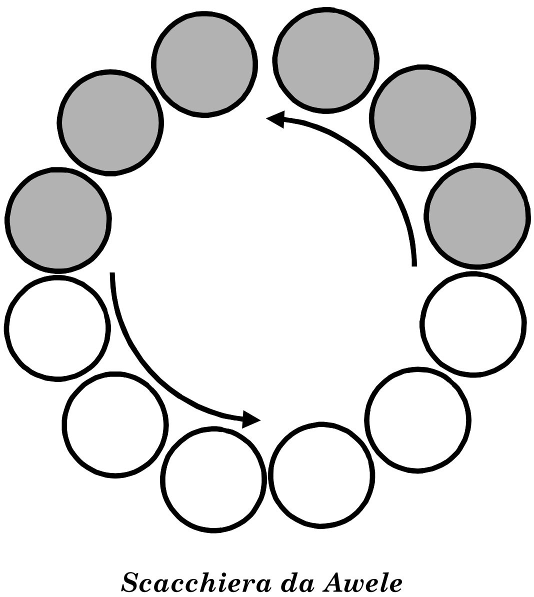
6. Zugzwang!

Per prima cosa, le scuse di rito per aver "dimenticato" questa rubrica il mese scorso; se volete l'opinione di uno dei Redattori, è colpa (oltre che del suo portarsi avanti coi lavori del rimbambimento senile) del primo gioco che vi presentiamo. Deciso che andava presentato, è sorto il dubbio "Ma sei sicuro di non averlo già fatto?" Controllato, "No, lo avevamo passato agli amici della Sagra del Pesce Algebrico, ma mai in rivista"... E avanti così, sin quando non ci siamo ritrovati il due gennaio sera impossibilitati a connetterci con il gioco non passato all'impaginazione. Rudy se ne assume la colpa e per scusarsi ve ne passa due (tanto il primo lo conoscete di sicuro).

6.1 Awele

Non cominciate a lamentarvi che vi manca la scacchiera: ne dovreste avere una bellissima regalata da "Giochi d'Ingegno" in uno dei primi numeri, e se non l'avete comprato vi meritate di giocarlo nel modo originale, con i buchi per terra o nel pavimento.

Secondo qualcuno è il gioco più vecchio che esista; quindi con il passare del tempo le regole sono diventate un po' "variabili", ma quelle che seguono sembrano essere le più diffuse.



Scacchiera da Awele

Per prima cosa, la ***scacchiera***: va bene qualsiasi cosa topologicamente equivalente all'oggetto che dovreste vedere qui di fianco (quella di Giochi d'Ingegno, ad esempio, era sviluppata su due linee, anzichè su due semicirconferenze); ogni cerchietto è una "tana", quelle davanti a voi sono tane amiche, quelle dall'altra parte (qui di colore diverso) sono tane nemiche. Vi servono anche un buon numero (***24*** a testa) di segnalini (sassolini o quant'altro, anche indistinguibili) da mettere nelle tane.

Per prima cosa, la ***preparazione*** del gioco: ogni giocatore mette ***quattro*** segnalini in ognuna delle proprie tane (seiperquattro ventiquattro; sì, il conto torna).

Quindi, si comincia il ***gioco***: un giocatore prende ***tutti*** i segnalini da una ***tana amica*** e li "semina", uno per ogni tana a partire dalla successiva a quella di partenza in senso antiorario sin quando non finisce i segnalini. Successivamente, toccherà al secondo giocatore e avanti così.

La ***presa*** si effettua quando l'ultimo segnalino seminato finisce in una tana ***nemica*** contenente solo ***uno*** o ***due*** segnalini, oltre a quello seminato (quindi alla fine della mossa conterrà due o tre segnalini); in questo caso, il "seminatore" prende ***tutti*** i segnalini da quella tana e se li tiene; sono punti. Se poi anche la tana nemica precedente ha solo due o tre segnalini, allora si prendono anche quelli e avanti (o meglio, indietro) così sin quando è possibile, ossia sin quando non si arriva (all'indietro) ad una tana con più di tre segnalini o ad una tana amica (con qualsiasi numero di segnalini).

Il gioco ***termina*** quando non sono più possibili giocate o quando sono impossibili ulteriori prese. Si contano i punti e si vede chi ha vinto.

Non proprio entusiasmante? Beh, forse, in particolare per il sottoscritto, che viene regolarmente "sbattuto" da suo figlio Alberto (tra l'altro, se riusciste a suggerirmi qualche tattica decente, grazie in anticipo); comunque, sono state inventate alcune ***varianti*** che possono essere interessanti, quando cominciate ad annoiarvi della versione classica.

La prima consiste nel giocare in ***più di due***, suddividendo opportunamente le tane; regola curiosa, in questo caso, è che un giocatore muove, ad ogni mossa, nella direzione che preferisce: in questo modo, può "attaccare" le tane in entrambe le direzioni.

La seconda variante richiede un po' di segnalini "speciali" e di colore diverso per ogni giocatore; vengono posti davanti alle tane, ad indicare la proprietà. Quando un giocatore "svuota" una tana nemica, quella tana diventa sua, e mette un segnalino dei suoi ad indicarne la proprietà; quindi, quel giocatore se vuole potrà iniziare una semina *da quella tana*, almeno sin quando non viene svuotata da qualcun altro.

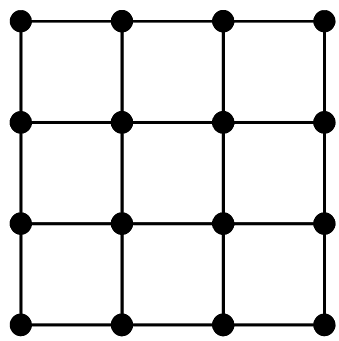
Una terza versione utilizza la stessa regola dei segnalini appena vista, ma prevede che la tana diventi di vostra proprietà solo se *occupata da un solo segnalino*; in questo caso diventa vostra, mentre se al suo interno aveva due segnalini, prendete i segnalini ma la tana resta proprietà del padrone precedente.

Fatemi sapere, che sono stufo di perdere...

6.2 Matrix

No, non il film. Un giochino facilefacile, tant'è che mi aspetto riusciate ad analizzarlo "E perché non ce lo dai come problema?" "Semplice, perché io non sono riuscito ad analizzarlo". Somiglia abbastanza a "TicTacToe" ("Filetto", per gli anglofobi), ma ha qualche interessante complicazione.

Allora, qui la ***scacchiera*** è proprio minimalista: una 4x4 basta. I puristi giocano sugli incroci di quella che vedete nel disegno, ma non è necessario, come risulterà evidente in seguito. I tondini servono solo per capire dove posare i segnalini.



Scacchiera da Matrix

Sì, vi servono dei ***segnalini***: ***12***, di ***4*** colori diversi, ***3*** per ogni colore; ogni giocatore gioca con ***2*** colori (e quindi riceve ***6*** segnalini).

Come detto, il gioco si svolge depositando i segnalini sugli incroci; non si "mangia" e una volta messi in un punto i segnalini non si muovono. ***Scopo del gioco*** è di ottenere per primi una ***fila di quattro colori diversi***; insomma, dovete sfruttare anche due pedine dell'avversario, per vincere. Se finite le pedine e nessuno ha vinto, la partita è patta.

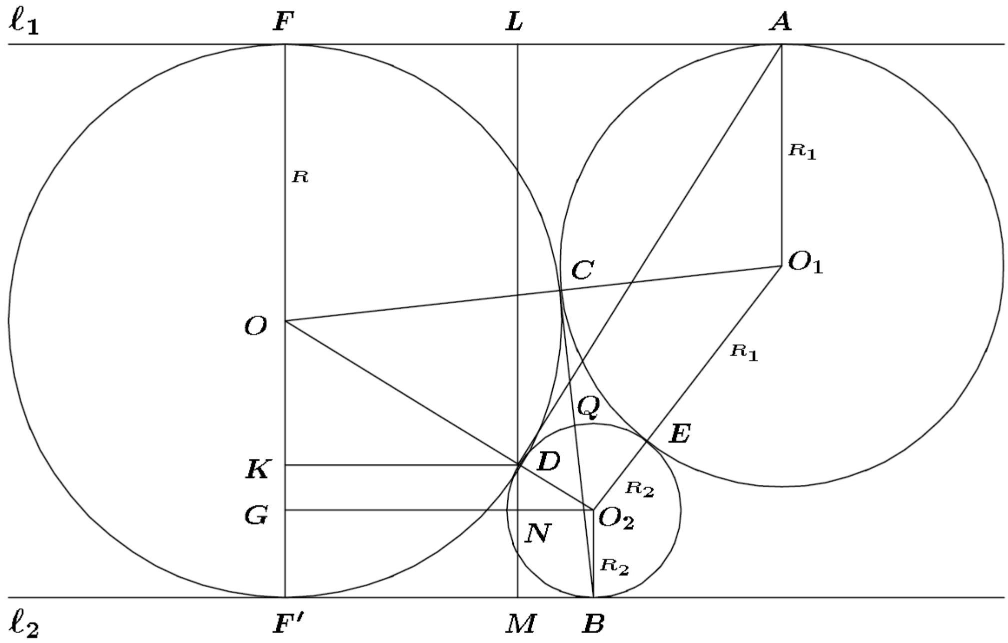
Ora, non pretendo che lo giochiate, ma secondo me è di una semplicità tale che dovrebbe essere analizzabile; qualcuno si vuole divertire?

"Valgono anche le diagonali, come a filetto?" Non lo so, il regolamento che ho trovato è reticente, in proposito; però a me sembra che la patta sia impossibile, se valgono le diagonali (e se l'ultimo giocatore non ha deciso di pattare anzichè vincere). Opinione personale e ben felice di essere smentito, come al solito. Cosa aspettate, a provare?

7. Pagina 46

Indichiamo i tre cerchi come $\omega(O,R)$, $\omega_1(O_1,R_1)$ e $\omega_2(O_2,R_2)$; indichiamo inoltre con ***F*** e ***F'*** i punti di tangenza di ω rispettivamente con ℓ_1 e ℓ_2. Inoltre, indichiamo con ***G*** il punto di intersezione tra la linea attraverso ***O₂*** parallela a ℓ_1 con ***FF'***.

La situazione è rappresentata in figura.



Sia ***K*** il punto di intersezione con ***FF'*** della linea passante per ***D*** parallela a ℓ_1.

Sia ***M*** il punto di intersezione con ℓ_2 della linea passante per ***D*** parallela a ***FF'***. La medesima linea intersechi la circonferenza di centro ***O₂*** nel punto ***N***.

Essendo ***AF*** la tangente comune a ω e a ω_1, si ha:

$$AF = 2\sqrt{RR_1} \qquad \text{[000.001]}$$

e

$$BF' = 2\sqrt{RR_2} = GO_2. \qquad \text{[000.002]}$$

Segue quindi che

$$HO_2 = \left|2\sqrt{RR_2} - 2\sqrt{RR_1}\right|;$$

$$HO_1 = 2R - R_1 - R_2.$$

Nel triangolo rettangolo O_1HO_2, si ha:

$$\left(2\sqrt{RR_2} - 2\sqrt{RR_1}\right)^2 + \left(2R - R_1 - R_2\right)^2 = \left(R_1 + R_2\right)^2.$$

E, semplificando, $R = 2\sqrt{R_1 R_2}$.

Ora, considerando il triangolo GOO_2, si ha:

$$\begin{aligned}
&GO = R - R_2, \\
&GO_2 = \sqrt{RR_2}, \\
&DO_2 = R_2, \\
&DO = R, \\
&KD \parallel GO_2.
\end{aligned}$$

Si vede inoltre che è:

$$GN = FL = \frac{R}{R + R_2} \cdot GO_2 = \frac{2R\sqrt{RR_2}}{R + R_2}.$$

Dalla `[001]` abbiamo che è:

$$AL = 2\sqrt{RR_1} - \frac{2R\sqrt{RR_2}}{R + R_2}. \qquad \texttt{[000.003]}$$

Inoltre,

$$DN = \frac{R_2}{R + R_2} \cdot GO = \frac{R_2(R - R_2)}{R + R_2}$$

e

$$DL = 2(R - R_2) - \frac{R_2(R - R_2)}{R + R_2} = \frac{2R^2}{R + R_2} \qquad \texttt{[000.004]}$$

Ora, $AD^2 = AL^2 + DL^2$; dalla `[003]` e dalla `[004]`, si ha:

$$\left(2\sqrt{RR_1} - \frac{2R\sqrt{RR_2}}{R_1 + R_2}\right)^2 + \left(\frac{2R^2}{R_1 + R_2}\right)^2 = 4RR_1 = AE^2.$$

E quindi ***AD=AF***. Questo significa che ***AD*** tocca ω in ***D*** e che ***AD*** è la tangente comune (e l'asse radicale) di ω e ω_2.

Con lo stesso ragionamento, ***BC*** è l'asse radicale di ω e ω_1 e quindi ***Q*** è il punto radicale di ω, ω_1 e ω_2. Quindi ***QC=QD=QE***, come richiesto.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 (Non Troppo) Evidenti Ragioni di Simmetria - [003] - La Tappezzeria

...tutte le battutacce sui titoli fetenti di questa serie nascono dal voler fare questo gioco di parole; tranquilli, questo è l'ultimo[15] (forse... ho un'ideuzza...), e ha dentro un mucchio di virgolini per fare contenta Alice e un bel po' di glissosimmetrie per la gioia di Zar.

> In merito, introduciamo un paio di note dell'ultimo minuto: l'Unico Lettore di questa rubrica (sì, Zar) ci ha anticipato e ci ha mandato un bellissimo schemino (circa tre ore dopo che lo scrivente aveva faticosamente costruito in PowerPoint una cosa simile, *si parva licet*[16]); abbiamo apprezzato e alleghiamo, anche se questo ci porterà a dimensioni inverosimili della rivista; ci pare valga decisamente la pena.
>
> Inoltre, il Nostro ci fa notare che nel disegno vengono chiamate "glissoriflessioni" (il che forse è anche logico, visto che sono "riflessioni scivolate"); comunque, siccome Lui insiste nel chiamarle "glissosimmetrie", citiamo tutti assieme Humpty-Dumpty e continuiamo a chiamarle così.

Questa volta, siamo interessati al sottogruppo di $\boldsymbol{D_{E2}}$ per cui il gruppo traslazionale è formato da *due traslazioni*; ossia, avrà il suo solito gruppo delle rotoriflessioni $\boldsymbol{O_K}$ e dal suo gruppo traslazionale $\boldsymbol{T_K}$ ne prenderemo due alla volta.

Per giocherellare con questo aggeggio, conviene prima fare un po' di attenzione al *reticolo* ("lattice", per gli anglofoni) che lo genera, ossia i punti dove "vanno a finire" grazie alle trasformazioni i nostri virgolini; genericamente, potremo definire il reticolo come formato dai punti $m\vec{a}+nb$ con $m,n \in Z$ e $\vec{a},b$ vettori linearmente indipendenti del piano euclideo. Per amor di semplicità, nel seguito considereremo solo i vettori per cui i moduli siano *minimi* e inoltre sia:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &\le |\vec{b}|, \\ |\vec{a}-\vec{b}| &\le |\vec{a}+\vec{b}|. \end{aligned} \qquad \texttt{[000.001]}$$

In caso contrario, con semplici sostituzioni si arriva a queste condizioni; inoltre, quando si tratterà di fare dei disegni, considereremo il vettore a collineare con l'asse $\boldsymbol{x}$ e il vettore b nel primo quadrante.

Da queste condizioni risultano possibili poche relazioni tra $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a}-\vec{b}|, |\vec{a}+\vec{b}|$; esaminiamole una per una, con i rispettivi sottocasi:

1. $|\vec{a}| < |\vec{b}| < |\vec{a}-b| < |\vec{a}+\vec{b}|$, che genera il ***reticolo obliquo***.

---

[15] Una piccola nota che non c'entra assolutamente niente, se non per il fatto che il terzo aggeggio di questa serie si chiama "003" e anche la numerazione delle formule è sempre piuttosto balorda; alcuni lettori, vedendo il numero d'ordine della rivista su tre cifre ci hanno scritto preoccupati: "Come! Volete dire che per Aprile del 2082 sospenderete le pubblicazioni?" Beh, no, però per quella data vorremmo essere in pensione, cedendo a mani più ferme la gestione della rivista; nel campo del formato Rudy è molto conservatore, ma per l'epoca abbiamo speranza di convincerlo che, anche se (informaticamente) lui è nato quando i nomi file erano in formato "8.3", ormai più nessuno *[Tranne me. E intendo continuare (RdA)]* usa l'estensione dei file per numerare le versioni. Tranquilli, quindi.

[16] Al momento non so se la cosa è stata citata da Alice nella rubrica di posta, ma questo mese la nostra mailbox era piena di latino e di russo; prima della fine, cercherò di dare il mio modesto contributo.

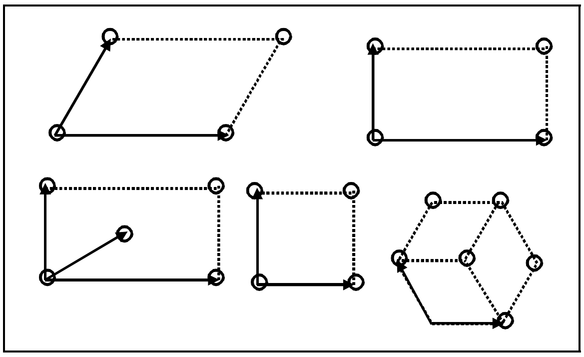
2. $\left|\vec{a}\right| < \left|\vec{b}\right| < \left|\vec{a}-b\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, che genera il ***reticolo rettangolare***.

3. $\left|\vec{a}\right| < \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-b\right| < \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, che genera[17] il ***reticolo rettangolare centrato***:

4. $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| < \left|\vec{a}-b\right| = \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, che genera il ***reticolo quadrato***.

5. $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-b\right| < \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, che genera il ***reticolo esagonale***.

...e basta, come potete facilmente verificare; forse la cosa si fa più chiara se vi passo un disegnino dei reticoli, dovreste trovarlo qui da qualche parte, come al solito.



Dovrebbe essere immediato vedere che le relazioni sono effettivamente quelle indicate sopra e anche capire perché hanno i nomi che si ritrovano.

Quindi, *esistono* **5** *diversi tipi di reticolo*; inoltre, tutti i reticoli "non centrati" vengono detti *semplici* o *primitivi*.

Anche sulla parte rotazionale, però, possiamo imporre delle condizioni; a prima vista, sembra che "tanto sono sempre le solite" e quindi si possa tirare dentro tutto il Gruppo delle Rosette, notoriamente infinito (ne abbiamo parlato due numeri fa); qui, però, il fatto di *dover conservare il reticolo* ci impone delle limitazioni e non possiamo utilizzare tutto il gruppo, ma solo una parte.

Sappiamo che queste sono rotazioni di un angolo $\frac{2\pi}{k}, k \in Z$; ma i nostri vettori a e b che generano $\boldsymbol{T_K}$ sono indipendenti, rappresentano una base di $\boldsymbol{R^2}$ e in questa base le nostre rotazioni devono conservare il reticolo e quindi le matrici che le descrivono devono contenere valori interi (che rappresentano i nodi del reticolo); in particolare, dovrà essere intera la sua *traccia*, che è invariante per il cambio di base; quindi deve essere:

$$M = \begin{Vmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{Vmatrix}, \qquad \textbf{[000.002]}$$
$$tr(M) = 2\cos\vartheta \in Z.$$

E dovendo essere la traccia intera, siamo limitati ai valori:

$$\cos\vartheta = \begin{cases} 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{2\pi}{4} \\ \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \vartheta = \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \\ \pm 1 \Rightarrow \vartheta = \frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2} \end{cases} \qquad \textbf{[000.003]}$$

[17] Ci sarebbe da considerare il sottocaso $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| < \left|\vec{a}-\vec{b}\right| < \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, ma è trasformabile in quello indicato sostituendo b con $\vec{a}-b$.

Il che non è altro (anche grazie ad una notazione piuttosto fetente nell'ultimo caso) che il ***Teorema della Restrizione Cristallografica*** (nome che trovo bellissimo), statuibile come il fatto che *nel gruppo delle tappezzerie le rotazioni possono essere solo di ordine* **1**, **2**, **3**, **4** *o* **6**.

Quindi, la semplice restrizione di conservare il reticolo ha trasformato il nostro gruppo in un gruppo finito; si tratterebbe adesso di contarle, ma forse prima è meglio se ci mettiamo d'accordo sulla notazione: un po' di tassonomia, a questo punto, non fa mai male.

Prima lettera: con questa indichiamo se il nostro reticolo è **p***rimitivo* (semplice) o **c***entrato*.

Seconda lettera: qui inseriamo l'*ordine* della rotazione (valori ammessi:***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***6***, come visto sopra).

Terza lettera: ***m*** se si tratta di una *riflessione*, ***g*** se invece è una *glissosimmetria*.

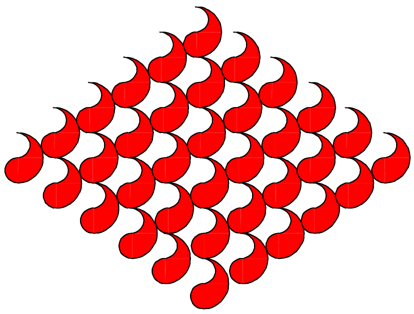
Attenzione però che, per motivi storici, esistono i gruppi ***p3m1*** e ***p31m***; queste nascono da una vecchia notazione che faceva uso di quattro simboli.

Pronti? Via.

Il reticolo obliquo

Come abbiamo detto, qui la condizione è $|\vec{a}| < |\vec{b}| < |\vec{a} - b| < |\vec{a} + \vec{b}|$, e in ***O*** solo due elementi permettono di conservare il reticolo, e quindi $O_K \in \{\pm I\}$; quindi, abbiamo due casi:

Nel ***primo caso***, la sola rotazione in ***K*** è l'identità ***I***; in questo caso otteniamo un gruppo generato semplicemente per traslazione, dato da

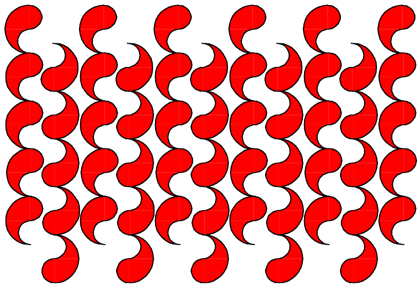


$$K = T_K\{0, I\} = \{(m\vec{a} + n\vec{b}, I) \mid m, n \in Z\}. \quad [000.004]$$

Il gruppo **p1**

questo gruppo si indica con ***p1*** e il suo gruppo normale è il gruppo triviale.

Il ***secondo caso*** è, abbastanza evidentemente, quello nel quale la rotazione che consideriamo è ***-I*** e quindi, complicandoci un po' la vita, possiamo indicare il nostro gruppo (ricordiamoci che deve contenere ***anche*** l'identità) come unione di due classi di T_K, ossia:



$$K = T_K\{(0,I),(0,-I)\}. \qquad [000.005]$$

Il gruppo **p2**

Se vi ricavate l'espressione formata con i vettori, vedete che la seconda "componente" è uguale alla prima rotata di $2\pi/2$, ossia è la rotazione di ordine ***2***, e quindi il gruppo si indica con ***p2***. Il suo gruppo normale è (quasi) evidentemente $\boldsymbol{C_2}$, il gruppo ciclico dello stesso ordine.

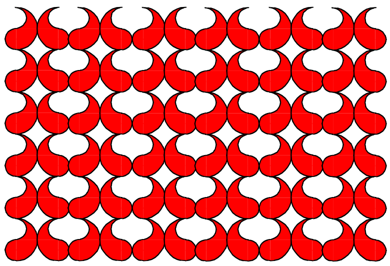
"Fin qui, tutto bene!" Sì, come disse al tizio del secondo piano quello che si era buttato dal grattacielo...

Il reticolo rettangolare

Qui la relazione imposta è $|\vec{a}| < |\vec{b}| < |\vec{a} - b| = |\vec{a} + \vec{b}|$ e quindi a parte le coincidenze abbiamo che le trasformazioni ammesse (che conservano il reticolo) sono solo $-I,\ S_0,\ S_\pi$.

Nel ***primo caso***, per cui $O_K = \{I, S_0\}$, dobbiamo considerare due sottocasi.

Nel ***primo sottocaso***, realizziamo $\boldsymbol{S_0}$ come una riflessione $(0, S_0)$, e quindi gli elementi di ***K*** saranno sottoposti o non sottoposti a $\boldsymbol{S_0}$; da cui, la definizione del gruppo:

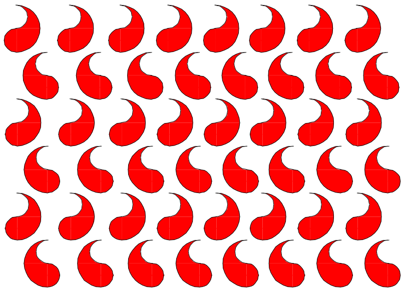


$$K = T_K \cup T_K(0, S_0). \qquad [000.006]$$

Il gruppo **pm**

Questo gruppo è indicato con ***pm*** e, visto che dentro c'è una riflessione, il suo gruppo normale è il gruppo diedrico $\boldsymbol{D_1}$.

Nel ***secondo sottocaso***, realizziamo $\boldsymbol{S_0}$ come una glissosimmetria, indicata come $(a/2, S_0)$;



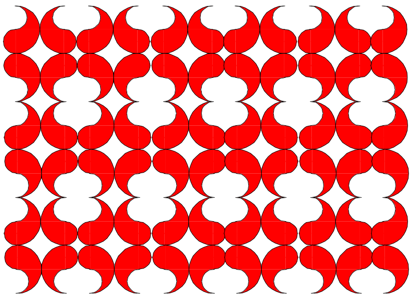
$$K = T_K \cup T_K\left(a/2, S_0\right). \qquad \texttt{[000.007]}$$

***Il gruppo* pg**

Questo gruppo è indicato con ***pg*** e anche lui ha, come gruppo normale, $\boldsymbol{D_1}$.

Nel ***secondo caso***, si parla di ***gruppo ortogonale***, e $O_K = \{I, -I, S_0, S\pi\}$. Anche qui, i sottocasi si sprecano. Fortunatamente, ci sono anche delle semplificazioni: ad esempio, per $O_K = \{I, S_\pi\}$ otteniamo un gruppo che è isomorfo a ***pm***, e quindi possiamo ignorarlo.

Il ***primo sottocaso*** è quello per cui S_0 e S_π sono realizzati entrambi come riflessioni; in questo modo si ha:

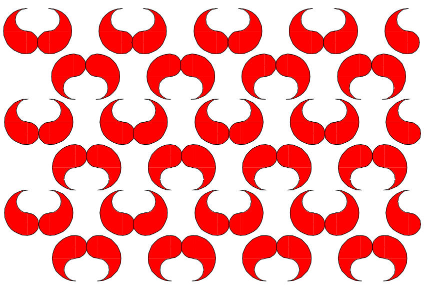


$$K = T_K \cup X \in O_K\left(0, X\right). \qquad \texttt{[000.008]}$$

***Il gruppo* pmm**

Il gruppo viene indicato con ***pmm*** ed ha come gruppo normale $D_1 \times D_1$, come si vede per confronto con il gruppo ***pm***.

Se, come nel ***secondo sottocaso***, il solo elemento realizzato come riflessione è $\left(0, S_\pi\right)$, allora ***K*** contiene una glissosimmetria parallela all'asse ***y*** della forma $\left(1/2, S_0\right)$ e la trasformazione ***-I*** di $\boldsymbol{O_K}$ è $\left(1/2, S_0\right)\left(0, S_\pi\right) = \left(a/2, -I\right)$ e si ha:

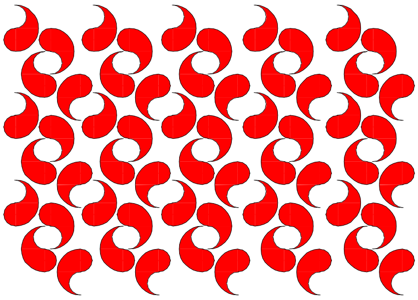


$$\begin{aligned} K = T_K &\cup T_K\left(0, S_0\right) \\ &\cup T_K\left(0, S_\pi\right). \\ &\cup T_K\left(a/2, S_0\right) \end{aligned} \qquad \texttt{[000.009]}$$

***Il gruppo* pmg**

...dove la scrittura un po' balorda dovrebbe permettere di capire chi è responsabile di ogni virgolino della figura. Il gruppo si indica con ***pmg*** e ha anche lui come gruppo normale il gruppo $D_1 \times D_1$.

Qui, esiste anche un ***terzo sottocaso***, in cui ***K*** non contiene riflessioni e quindi ***S₀*** si realizza come $(a/2, S_0)$, S_π come $(b/2, S_\pi)$ e ***-I*** come $((a-b)/2, -I)$:



$$K = T_K \cup T_K(a/2, S_0) \cup T_K(b/2, S_\pi) \cup T_K((a-b)/2, S_0) \qquad [000.010]$$

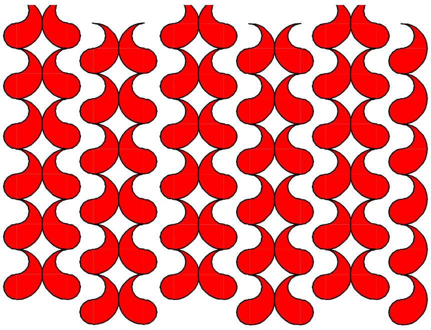
***Il gruppo* pgg**

che comincia ad essere complicatino, da capire chi fa che cosa (sarà perché è uno di quelli che mi piace meno).

Il reticolo centrato

Qui, avevamo detto che era $|\vec{a}| < |\vec{b}| = |\vec{a} - b| < |\vec{a} + \vec{b}|$; bisogna fare una certa attenzione, in quanto si rischia di derivare dei gruppi isomorfi al reticolo rettangolare (ottenendo ***pm***, ***pg***, ***pmm***, ***pmg***); per evitare questo, imponiamo che le riflessioni in ***O_K*** siano realizzate attraverso sia riflessioni che glissosimmetrie, e questa diventa la caratteristica principale del reticolo centrato.

Il ***primo caso*** è quello per cui $O_K = \{I, S_0\}$ e abbiamo le realizzazioni di ***S₀*** come riflessione $(2b - a, S_0)$ e come glissosimmetria (b, S_0):

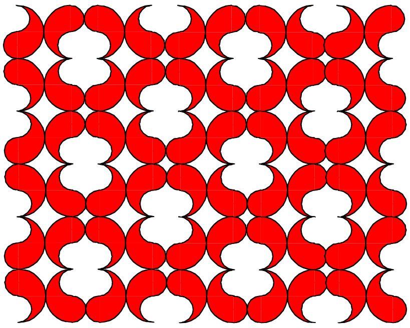


$$K = T_K \cup T_K(b, S_0). \qquad [000.011]$$

***Il gruppo* cm**

Qui l'espressione del gruppo è decisamente poco chiara, e forse aiuta esprimere la glissosimmetria nella forma $(b, S_0) = (((2b - a)/2) + a/2, S_0)$; così è un po' più chiaro dove vanno a finire i pezzi. Questo è il gruppo ***cm*** che ha come gruppo normale ***D₁***.

Se, come nel ***secondo caso***, abbiamo $O_K = \{I, -I, S_0, S_\pi\}$, otteniamo un caso analogo al precedente (con lo scambio degli assi ***x*** e ***y***):



$$K = T_K \cup T_K(b, S_0) \cup T_K(b, S_\pi). \quad [000.012]$$

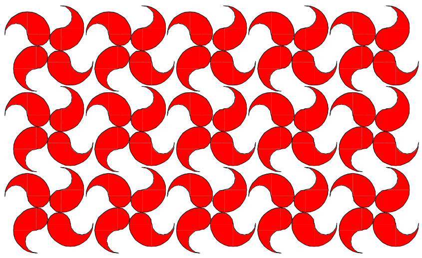
***Il gruppo* cmm**

Questo gruppo si indica con ***cmm*** e ha gruppo normale $D_1 \times D_1$.

Il reticolo quadrato

Qui deve essere $|\vec{a}| = |\vec{b}| < |\vec{a} - b| = |\vec{a} + \vec{b}|$, e $M_{\pi/2} \in O_K$, altrimenti non si ha il reticolo quadrato. La vedo brutta, come notazioni ("Perché, fino adesso...?").

Nel ***primo caso*** abbiamo $O_K = \langle M_{\pi/2} \rangle$, ossia, sempre nella nostra forma:



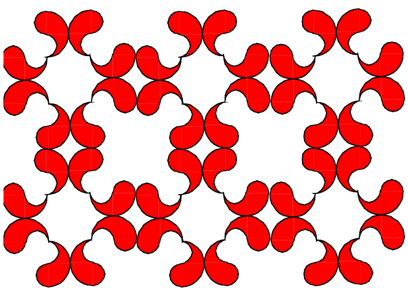
$$K = T_K \cup T_K(0, M_{\pi/2}) \cup T_K(0, M_\pi). \cup T_K(0, M_{(3\pi)/2}) \quad [000.013]$$

***Il gruppo* p4**

Questo gruppo si indica con ***p4*** e ha gruppo normale C_4.

Nel ***secondo caso***, imponiamo che $S_0 \in O_K$; questo implica due sottocasi:

Nel ***primo sottocaso***, S_0 è realizzato attraverso una *riflessione*; quindi,

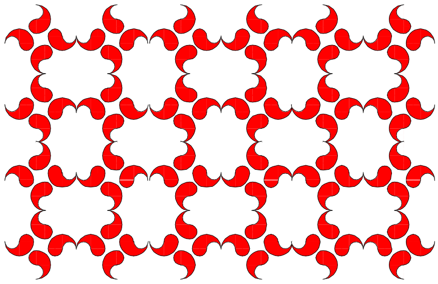


$$K = T_K \cup T_K(a, M_{\pi/2}) \cup T_K(a, M_\pi) \cup T_K(a, M_{3\pi/2}) \cup T_K(b, S_0) \cup T_K(b, S_{\pi/2}) \cup T_K(b, S_\pi) \cup T_K(b, S_{3\pi/2}) \quad [000.014]$$

***Il gruppo* p4m**

...e, se non vi torna, fatemelo sapere, che probabilmente avete ragione voi: questo è complicato e sul testo dal quale sto pescando è uno di quelli lasciati come "semplice esercizio al lettore" (sugli altri sono più tranquillo).

Nel ***secondo sottocaso***, invece, S_0 *non* è realizzato attraverso una *riflessione* e quindi (la dimostrazione è semplice ma noiosissima, quindi sorvoliamo) sarà una glissosimmetria: qui la descrizione è particolarmente tosta, e anche la figura non aiuta molto:



***Il gruppo* p4g**

$$\begin{aligned} K = & T_K \cup T_K\left(0, M_{\pi/2}\right) \\ & \cup T_K\left(\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right), S_0\right) \\ & \cup T_K\left(\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right), S_{\pi/2}\right). \\ & \cup T_K\left(\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right), S_{\pi}\right) \\ & \cup T_K\left(\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right), S_{(3\pi)/2}\right) \end{aligned} \quad [000.015]$$

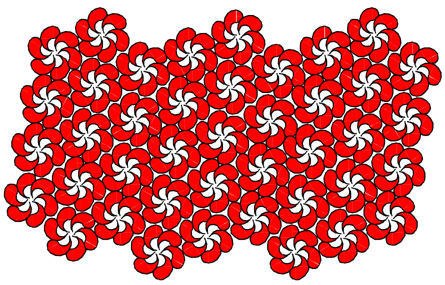
Si indica come ***p4g*** e il suo gruppo ortogonale è D_4.

...la buona notizia è che manca solo più un reticolo, la cattiva notizia è che è il più complicato.

Il reticolo esagonale

Qui abbiamo il reticolo $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - b| < |\vec{a} + \vec{b}|$; quello che ci aspettiamo, dato il nome, è che ci sia una stretta parentela con il gruppo diedrico D_6: date le dimensioni, ci vediamo costretti ad inserire una nuova notazione.

Il ***primo caso*** è quello per cui O_K è generato da $M_{\pi/3}$; qui abbiamo:

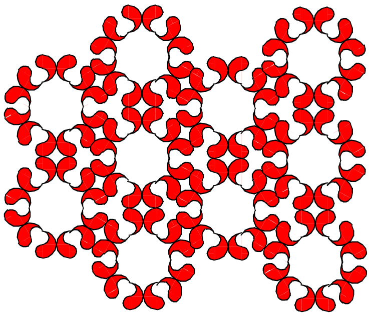


***Il gruppo* p6**

$$K = T_K \bigcup_{k=1}^{5}\left(0, M_{(k\pi)/3}\right). \quad [000.016]$$

...e se non vi piace la notazione, sono d'accordo con voi. Si chiama ***p6*** e il gruppo normale, qui, è C_6.

Nel ***secondo caso*** abbiamo anche una riflessione, e quindi $O_K = \left(M_{\pi/3}, S_0\right)$; sempre con la stessa notazione balorda, abbiamo:

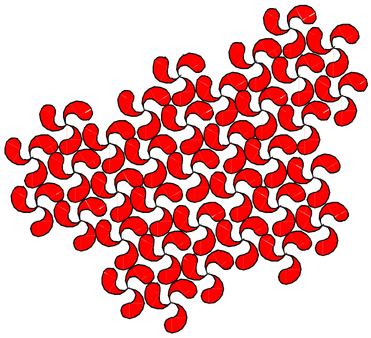


$$K = \frac{T_K \bigcup_{k=1}^{5}\left(0, M_{(k\pi)/3}\right)}{\bigcup_{k=1}^{5}\left(0, S_{(k\pi)/3}\right)}. \quad [000.017]$$

Il gruppo **p6m**

Qui, il gruppo si chiama ***p6m*** e il suo gruppo normale è D_6.

Ricordiamoci però che oltre alla simmetria di ordine ***6***, abbiamo anche delle simmetrie di ordine ***2*** (che non ci interessano particolarmente) e di ordine ***3***; qui (e siamo al ***terzo caso***) $O_K = \left(M_{(2\pi)/3}\right)$:

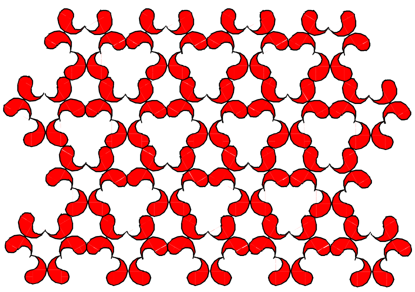


$$K = T_K \bigcup_{k=1}^{3}\left(0, M_{(2k\pi)/3}\right). \quad [000.018]$$

Il gruppo **p3**

Faccio notare che l'unione è da ***1*** a ***3*** e a pedice della matrice avete un fattore ***2***.; una volta tanto, la formula è più chiara del disegno, se si considera che quello che viene generato è l'insieme dei tre virgolini (come si chiama... *triskele*?). Evidentemente, il gruppo si indica con ***p3*** e il suo gruppo normale è C_3.

Come sopra, otteniamo il ***quarto caso***: qui, $O_K = \left(M_{(2\pi)/3}, S_0\right)$; ossia,

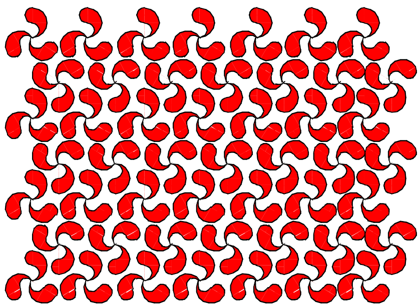


$$K = \frac{T_K \bigcup_{k=1}^{3}\left(0, M_{(2k\pi)/3}\right)}{\bigcup_{k=1}^{3}\left(0, S_{(2k\pi)/3}\right)}. \quad [000.019]$$

Il gruppo **p3m1**

Questo è il gruppo ***p3m1*** (uno di quelli che fa eccezione nel nome), e il suo gruppo normale è (visto che contiene una riflessione) D_3.

La probabilità successiva consiste nell'usare un "altro" al posto di S_0; in questo ***quinto caso***, il nostro insieme sarà $O_K = \left(M_{(2\pi)/3}, S_{\pi/3}\right)$; l'espressione diventa complicata (e poco comprensibile, almeno per me):

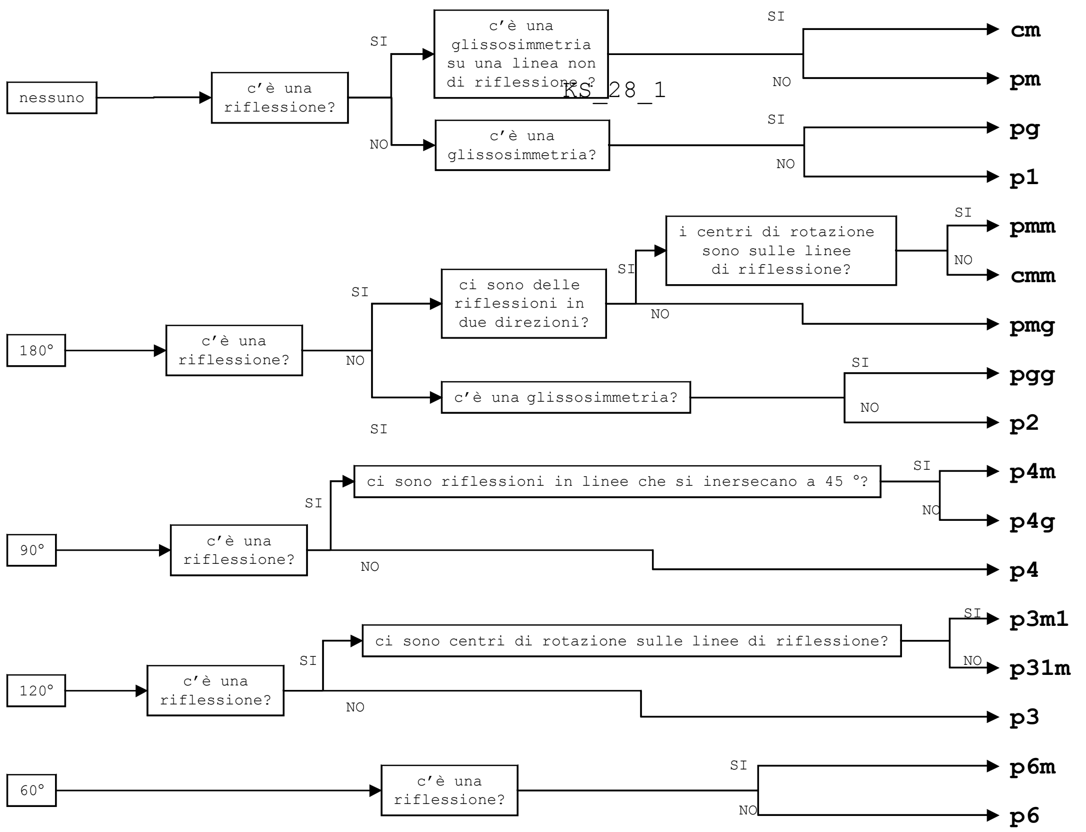


$$\begin{aligned} K = T_K &\cup \left(0, M_{-(2\pi)/3}\right) \\ &\cup T_K \left(0, M_{-(2\pi)/3}\right) \\ &\cup T_K \left(0, S_{\pi/3}\right). \\ &\cup T_K \left(0, S_{(5\pi)/3}\right) \\ &\cup T_K \left(0, S_{\pi}\right) \end{aligned} \qquad \texttt{[000.020]}$$

***Il gruppo* p31m**

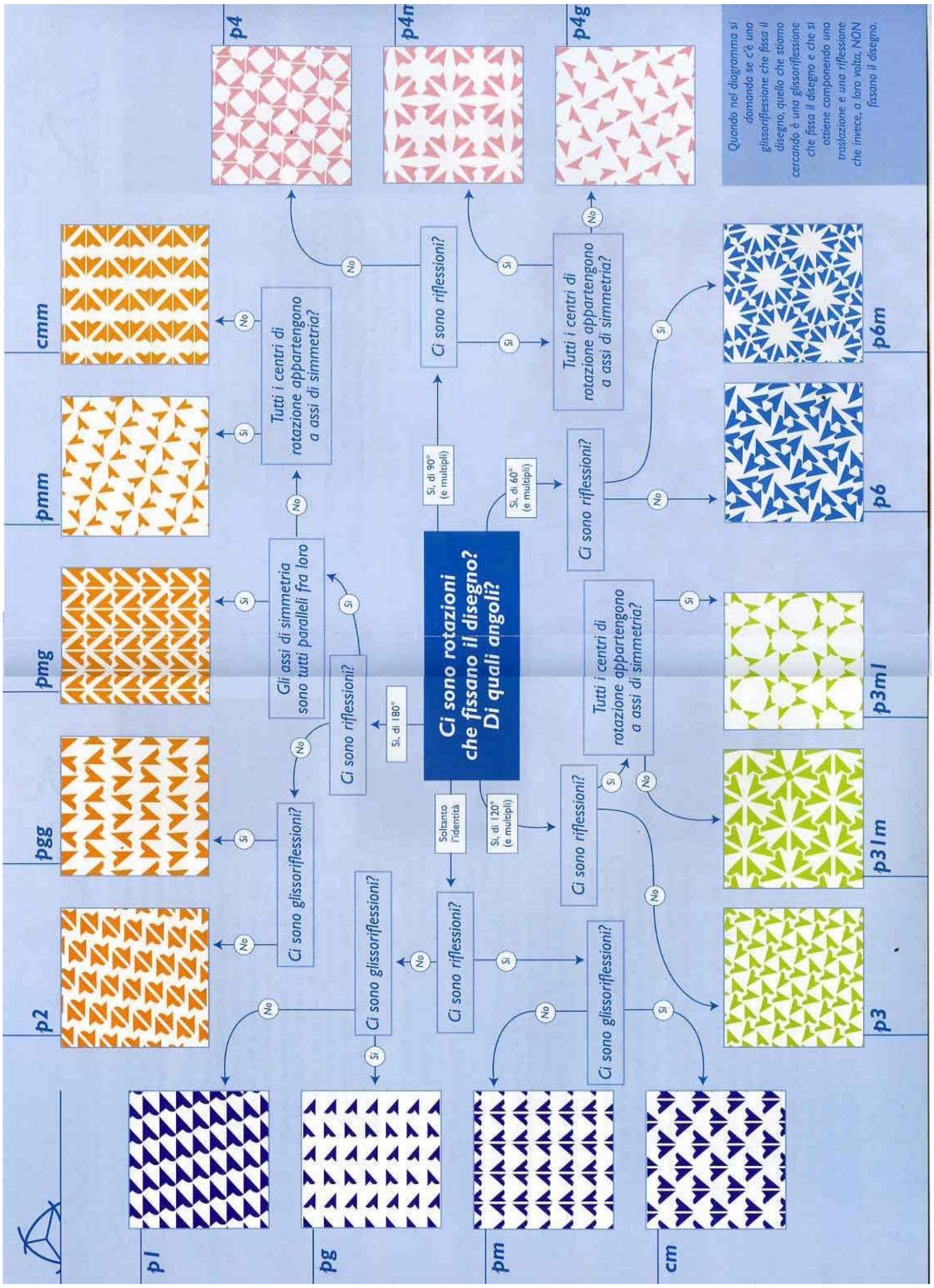
Poco chiaro? Beh, il disegno è formato da *triskeles* orarie e antiorarie, con l'orientamento generato dai primi due termini, da cui i sei termini. Questo è il gruppo ***p31m***, con gruppo normale D_3.

Ora, se fossi sicuro che non vi prendono i cinque minuti, potermmo dimostrare che le "tappezzerie" possibili sono ***solo queste diciassette***; la cosa però si riduce sostanzialmente ad un ragionamento simile a quello fatto per i fregi (ossia che uno è l'unico ad avere una certa trasformazione, mentre l'altro... eccetera), quindi preferisco raccogliervi un po' le idee con uno schemino che, se volete, potete tranquillamente utilizzare per costruirvi la dimostrazione da soli:



...poco chiaro? Pienamente d'accordo. Fortunatamente, Zar ci manda qualcosa di più comprensibile (e con dei disegni decisamente migliori); lo trovate qui di seguito.

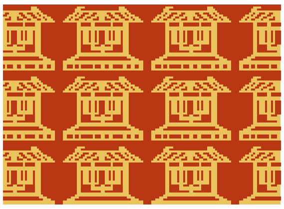
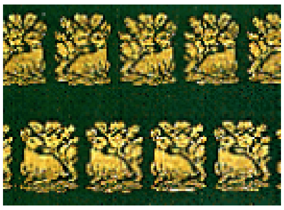
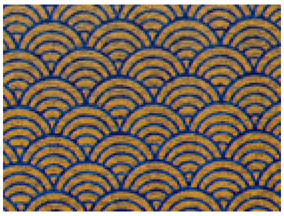
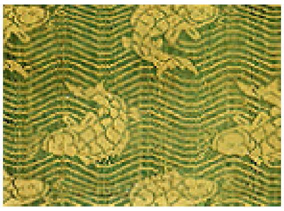
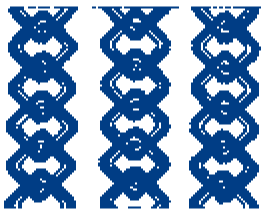
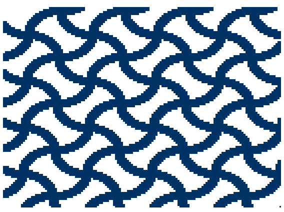
Il Nostro ci dice che proviene da una mostra svoltasi tempo fa a Modena (e ora in pianta stabile a Milano[18]); forse i disegni sono meno chiari dei virgolini, ma di sicuro è più leggibile del mostro qui sopra e, forse, vi permette di identificare più chiaramente il disegno della vostra tappezzeria.



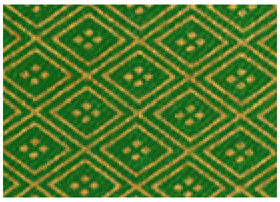
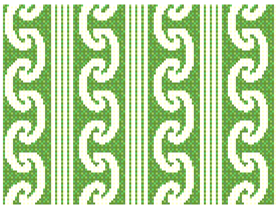
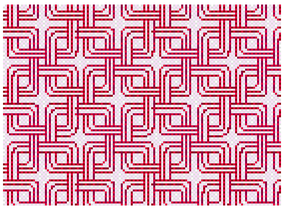
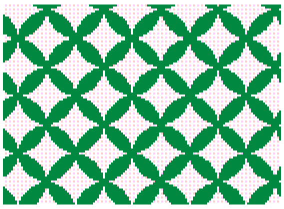
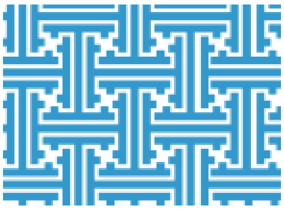
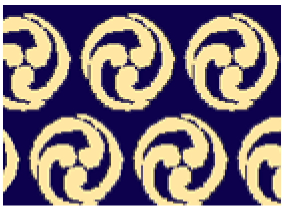
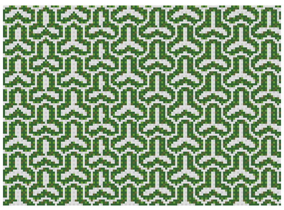
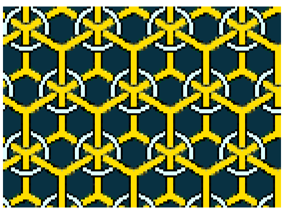
Ora, qualcuno potrebbe sostenere che la catalogazione usata sin qui è un po' troppo "meccanica", e all'inizio avevo promesso di contribuire all'affollamento linguistico della

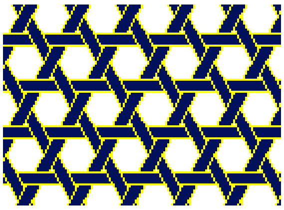
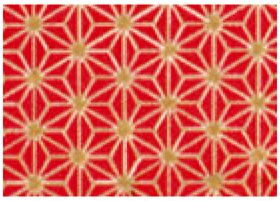
[18] La mostra si chiamava "Simmetrie e giochi di specchi"; se qualche milanese ci comunica dove tutto questo è visitabile nella Città Più Brutta del Mondo, ringrazieremo e riferiremo *[...ma allora non è vero che Milano porta vie le cose solo a Torino! Anche a Modena! (RdA)]*.

rivista... Posto che vogliate stupire gli amici, potete provare con questo (e, se devo dire, i disegnini sono migliori sia dei miei che di quelli di Zar):

Codice	**Disegno**	**Nome**	**Traduzione**[19]
p1		Bingata	Forma di Okinawa
pm		Yakata-Mon	Lo schema della Grande Casa
pg		Hana-Usagi Kinran	Il fiore e il coniglio ricamati in oro
cm		Seikaiha	L'onda blu dell'oceano
p2		Ariso-Donsu	La spiaggia rocciosa e selvaggia
pmm		Yoshiwara-Tsunagi	Gli oggetti legati di Yoshivwara *(quartiere elegante di Edo, l'antica Tokio)*
pgg		Fundo-Tsunagi	Pesi di bilancia connessi

[19] *Molto* approssimata [RdA]

Codice	Disegno	Nome	Traduzione[19]
cmm		Takeda-Bishi	I rombi di Takeda *(Daimyo del sedicesimo secolo)*
pmg		Shikan-Jima	Le strisce di Sikan *(Attore del teatro Kabuki)*
p4		Rokuyata-Koshi	Il reticolo di Rokuyata *(Personaggio del teatro Kabuki)*
p4m		Sippo-Tsunagi	La connessione dei sette tesori
p4g		Sayagata	La bella forma sulla seta
p3		Onaga-Mitsudomoe	Il lungo ciuffo dell'albero Mitsudomoe *(Non ne ho la più pallida idea [RdA])*
p31m		Bisyamon-Kikko	Il guscio della tartaruga di Bisyamon *(Deità del pantheon buddhista)*
p3m1		Kasane-Kikko-ni-Wa	La ripetizione del guscio della tartaruga e dell'anello

Codice	Disegno	Nome	Traduzione[19]
p6		Kagome	I buchi del cesto
p6m		Asanoha	La foglia di canapa

Più poetico, anche se sicuramente mal tradotto... però, adesso,sappiamo che possiamo cambiare la tapezzeria solo diciassette volte.

Per i pavimenti è un'altra storia; ma quella vorremmo raccontarvela in un altro modo.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms